Référencement des questions d'Algorithmique au Baccalauréat S et ES
de 2012 à 2016

Groupe Algorithmique de l'IREM de Strasbourg

Les exercices du Baccalauréat S et ES de la session 2012 à la session 2016 dans lesquels la notion d'algorithmique apparait sont référencés dans le tableau ci-dessous (*).

L'icône ☞ permet d'accéder directement à l'exercice concerné. Certains énoncés ne sont reproduits que partiellement, cependant les corps des énoncés nécessaires à la compréhension du contexte de l'algorithme sont systématiquement présents.

L'icône ✖ signifie que le sujet correspondant ne comportait pas de question d'algorithmique.

L'icône ⮐ présent en haut des pages permet un retour au tableau.

		Afrique (Centres Etrangers)		Amérique du Nord		Antilles		Asie		Métropole		Nouvelle Calédonie		Polynésie		Pondichéry		Liban		Sujets de rattrapage (2ème session) Métropole		Polynésie		Antilles	
		Obl	Spé	Obl	Spé	Obl	Spé	Obl	Spé	Obl	Spé	Obl	Spé	Obl	Spé	Obl	Spé	Obl	Spé	Obl	Spé	Obl	Spé	Obl	Spé
2012	S	☞		☞		☞	☞	☞		☞		☞		☞		☞		✖		☞					
2012	ES	✖		✖		✖		✖		✖		☞		✖		✖		✖							
2013	S	☞	☞	☞	☞	☞	☞	☞	☞	☞		☞		☞		☞		☞	☞						
2013	ES	☞		☞	✖	☞		☞		✖		☞		☞		☞		☞				☞			
2014	S	☞		☞	✖	☞	☞	☞	☞	✖	☞	☞		☞	☞	☞	☞	☞	☞						
2014	ES	☞	✖	☞	✖	☞	☞	☞		☞	☞	☞		☞		☞	☞	☞	✖			☞			
2015	S	☞		☞	✖	☞	☞	☞		☞		☞	✖	☞	✖	☞	☞	☞							
2015	ES	☞	✖	☞		☞		☞	✖	☞	✖	☞	☞	☞		☞	✖	☞	☞	☞	☞	☞	✖	☞	
2016	S	*En cours d'élaboration…* ✖																							
2016	ES																								

(*) hormis, notamment pour les sujets de ES spécialité, les algorithmes propres à la théorie des graphes, qui ne font pas référence à une utilisation de logiciel)

Série :	S	Obligatoire+Spécialité
Année :	2012	

Lieu :	Afrique
Références :	12MAOSG11+12MASSG11 Exercice 2 Question 2

Exercice 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

On considère la suite (I_n) définie pour n entier naturel non nul par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx.$$

1. a) Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = x e^{x^2}$.

   Démontrer que la fonction G définie sur $\mathbf{R}$ par $G(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$ est une primitive sur $\mathbf{R}$ de la fonction g.

   b) En déduire la valeur de I_1.

   c) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier n, supérieur ou égal à 1, on a :

   $$I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n.$$

   d) Calculer I_3 et I_5.

2. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$
Traitement	Tant que $n < 21$ Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}u$ Affecter à n la valeur $n+2$
Sortie	Afficher u

   Quel terme de la suite (I_n) obtient-on en sortie de cet algorithme ?

3. a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n \geq 0$.

   b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

   c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

   On note l sa limite.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Déterminer la valeur de l.

Série :	**S**	**Obligatoire+Spécialité**	
Année :	**2012**		
Lieu :	**Amérique du Nord**		
Référence :	**12MASCOAN1+12MASCSAN1**	**Exercice 2 Partie B Question 3b**	

EXERCICE 2 (5 points)

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=x-\dfrac{\ln(x)}{x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$.

1) Soit g la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x)=x^2-1+\ln(x)$.

   Montrer que la fonction g est positive sur $[1,+\infty[$.

2) a) Montrer que, pour tout x de $[1,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

   b) En déduire le sens de variation de f sur $[1,+\infty[$.

   c) Montrer que la droite (D) d'équation $y=x$ est une asymptote à la courbe (C).

   d) Étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D).

3) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de (C) et (D).

   a) Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la distance $\mathrm{M}_k\mathrm{N}_k$ entre les points M_k et N_k est donnée par $\mathrm{M}_k\mathrm{N}_k=\dfrac{\ln(k)}{k}$.

   b) Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance $\mathrm{M}_k\mathrm{N}_k$ soit inférieure ou égale à 10^{-2}.

Série :	**S** **Obligatoire**
Année :	**2012**
Lieu :	**Antilles**
Références :	**12MAOSAG1** **Exercice 4 Question 5**

Exercice 4 *(5 points)*

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les 5 questions sont indépendantes.

5. On considère l'algorithme :

```
A et C sont des entiers naturels,
C  prend la valeur 0
Répéter 9 fois
        A prend une valeur aléatoire entière entre 1 et 7.
                Si A > 5 alors C prend la valeur de C + 1
                Fin Si
Fin répéter
Afficher C.
```

Dans l'expérience aléatoire simulée par l'algorithme précédent, on appelle X la variable aléatoire prenant la valeur C affichée.
Quelle loi suit la variable X ? Préciser ses paramètres.

Série :	**S Spécialité**
Année :	**2012**
Lieu :	**Antilles**
Référence :	**Exercice 4 Question 4**

EXERCICE 4 (5 points)

(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Les quatre questions sont indépendantes.

4. On considère l'algorithme suivant où $\text{Ent}\left(\frac{A}{N}\right)$ désigne la partie entière de $\frac{A}{N}$.

```
A et N sont des entiers naturels,
Saisir A
N prend la valeur 1
Tant que N ⩽ √A
      Si A/N − Ent(A/N) = 0 alors Afficher N et A/N.
      Fin Si
N prend la valeur N + 1
Fin Tant que.
```

Quels résultats affiche cet algorithme pour $A = 12$?
Que donne cet algorithme dans le cas général ?

Série :	**S**	**Obligatoire+Spécialité**
Année :	**2012**	
Lieu :	**Asie**	
Références :	**12MAOSJA1+12MASSJA1**	**Exercice 4 Question 1**

Exercice 4 (5 points)
Commun à tous les candidats

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un réel strictement positif non nul a Saisir un réel strictement positif non nul b ($b > a$) Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à u la valeur a Affecter à v la valeur b Affecter à n la valeur 0
Traitement	TANT QUE $n < N$ Affecter à n la valeur $n+1$ Affecter à u la valeur $\frac{a+b}{2}$ Affecter à v la valeur $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ Affecter à a la valeur u Affecter à b la valeur v
Sortie	Afficher u, afficher v

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $a=4$, $b=9$ et $N=2$. Les valeurs successives de u et v seront arrondies au millième.

n	a	b	u	v
0	4	9		
1				
2				

Dans la suite, a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}.$$

2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n : $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{v_n - u_n}{2}\right)^2$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leq v_n$.

3. a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b) Comparer v_{n+1}^2 et v_n^2. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

4. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

EXERCICE 3 (6 points)

Commun à tous les candidats

Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1, +\infty[$, $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$.
   Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	i et n sont des entiers naturels.
	u est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0.
Traitement :	Pour i variant de 1 à n.
		Affecter à u la valeur $u + \frac{1}{i}$.
Sortie :	Afficher u.

   Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $n = 3$.

2. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n.

3. Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à 10^{-3}.

n	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	1500	2000
u_n	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632	0,626	0,582	0,578	0, 578	0,577

   À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite (u_n) et son éventuelle convergence.

Exercice 1 *(6 points)*

Commun à tous les candidats

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \text{pour tout entier naturel } n \neq 0, u_{n+1} = 5\ln(u_n + 3) \end{cases}$$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = 5\ln(x+3).$$

En **Annexe 1** on a tracé dans un repère orthonormé la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathcal{C}$, courbe représentative de la fonction g.

1.

a. Construire sur l'axe des abscisses de l'**Annexe 1** les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n), en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.

b. Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite (u_n).

2.

a. Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

b. Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$ où α est défini dans la partie A question **2.***a*.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leq u_n \leq \alpha$.

d. Démontrer alors la conjecture émise à la question **1.***b* de la partie B.

e. En utilisant la question **2.***a* de la partie A, justifier que $\lim u_n = \alpha$.

3. On considère l'algorithme suivant :

```
u prend la valeur 4
Répéter Tant que u – 14,2 < 0
    u prend la valeur de 5ln(u + 3)
Fin du Tant que
Afficher u
```

a. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Justifier que cet algorithme se termine.

b. Donner la valeur que cet algorithme affiche (on arrondira à 5 décimales).

Série :	**S Obligatoire+Spécialité**
Année :	**2012**
Lieu :	**Polynésie**
Références :	**12MASCOPO1+12MASCSPO1 Exercice 3 Partie A et Question B5d**

EXERCICE 3 (5 points)

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

```
Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul N
Traitement
Affecter à U la valeur 0
Pour k allant de 0 à N − 1
   | Affecter à U la valeur 3U − 2k + 3
Fin pour
Sortie
Afficher U
```

Quel est l'affichage en sortie lorsque N = 3 ?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1) Calculer u_1 et u_2.

2) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

   b) En déduire la limite de la suite (u_n).

3) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4) Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.

   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

   b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.

5) Soit p un entier naturel non nul.

   a) Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$,

   $u_n \geqslant 10^p$?

   On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0.

   b) Justifier que $n_0 \leqslant 3p$.

   c) Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p = 3$.

   d) Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^p$.

EXERCICE 1 (6 points)
Commun à tous les candidats

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté.
À la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle anti-dopage. Ces désignations de 5 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

1. À l'issue de chaque étape, combien peut-on former de groupes différents de 5 coureurs ?
2. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel :
   - « rand(1, 50) » permet d'obtenir un nombre entier aléatoire appartenant à l'intervalle $[1\,;\,50]$
   - l'écriture « $x := y$ » désigne l'affectation d'une valeur y à une variable x.

Variables	a, b, c, d, e sont des variables du type entier
Initialisation	$a := 0$; $b := 0$; $c := 0$; $d := 0$; $e := 0$
Traitement	Tant que $(a = b)$ ou $(a = c)$ ou $(a = d)$ ou $(a = e)$ ou $(b = c)$ ou $(b = d)$ $(b = e)$ ou $(c = d)$ ou $(c = e)$ ou $(d = e)$ Début du tant que a :=rand(1, 50) ; b := rand(1, 50) ; c :=and(1, 50) ; d := rand(1, 50) ; e := rand(1, 50) Fin du tant que
Sortie	Afficher a, b, c, d, e

   (a) Parmi les ensembles de nombres suivants, lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme :
   $L_1 = \{2, 11, 44, 2, 15\}$; $L_2 = \{8, 17, 41, 34, 6\}$;
   $L_3 = \{12, 17, 23, 17, 50\}$; $L_4 = \{45, 19, 43, 21, 18\}$?

   (b) Que permet de réaliser cet algorithme concernant la course cycliste ?

3. À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 50 participants. Établir que la probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est égale à 0,1.
4. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes de la course.

   (a) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.

   (b) On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course. Calculer, sous forme décimale arrondie au dix-millième, les probabilités des événements suivants :
   - il a été contrôlé 5 fois exactement ;
   - il n'a pas été contrôlé ;
   - il a été contrôlé au moins une fois.

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 3 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right) \quad (*).$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel n, $\quad u_n > 0$.

1. On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0,\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x}\right)$.

   a. Démontrer que la fonction f admet un minimum.

   b. En déduire que pour tout entier naturel n, $\quad u_n \geqslant \sqrt{7}$.

2. **a.** Soit n un entier naturel quelconque.
   Étudier le signe de $\quad u_{n+1} - u_n$.

   b. Pourquoi peut-on en déduire que la suite (u_n) est convergente ?

   c. On déduit de la relation $(*)$ que la limite L de cette suite est telle que $L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{7}{L}\right)$.
   Déterminer L.

3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $\quad u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2}\frac{\left(u_n - \sqrt{7}\right)^2}{u_n}$.

4. On définit la suite (d_n) par : $\quad d_0 = 1 \quad$ et pour tout entier naturel n, $\quad d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n^2$.

   a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

   $$u_n - \sqrt{7} \leqslant d_n.$$

   b. Voici un algorithme :

Variables :	n et p sont des entiers naturels. d est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de p.
Initialisations :	Affecter à d la valeur 1. Affecter à n la valeur 0.

Traitement :	Tant que $d > 10^{-p}$.
	    Affecter à d la valeur $0,5d^2$.
	    Affecter à n la valeur $n+1$.

Sortie :	Afficher n.

   En entrant la valeur 9, l'algorithme affiche le nombre 5.
   Quelle inégalité peut-on en déduire pour d_5 ?
   Justifier que u_5 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.

Série :	**S**	**Obligatoire**
Année :	**2013**	
Lieu :	**Afrique**	
Références :	**13MASCOG11**	**Exercice 4 Parties A et C**

Exercice 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \frac{3}{2}$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{nu_n + 1}{2(n+1)}$.

Partie A – Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_9 de la suite, un élève propose l'algorithme ci-contre.

Il a oublié de compléter deux lignes.

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5

Traitement	Tant que $n < 9$
	    Affecter à u la valeur .....
	    Affecter à n la valeur .....
	Fin Tant que

Sortie	Afficher la variable u

1. Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.
2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ?
3. Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5	6	...	99	100
u_n	1,5	0,625	0,375	0,2656	0,2063	0,1693	...	0,0102	0,0101

Au vu de ces résultats, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B – Étude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = nu_n - 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
2. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $u_n = \frac{1 + (0,5)^n}{n}$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Justifier que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\frac{1 + (1 + 0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}$.

   En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Partie C – Retour à l'algorithmique

En s'inspirant de la partie A, écrire un algorithme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier n tel que $u_n < 0,001$.

Série :	**S Spécialité**
Année :	**2013**
Lieu :	**Afrique**
Références :	**13MASCSG11 Exercice 4 Partie A**

Exercice 4 (5 points)

Candidats ayant choisi la spécialité mathématique

Une espèce d'oiseaux ne vit que sur deux îles A et B d'un archipel.
Au début de l'année 2013, 20 millions d'oiseaux de cette espèce sont présents sur l'île A et 10 millions sur l'île B.
Des observations sur plusieurs années ont permis aux ornithologues d'estimer que, compte tenu des naissances, décès, et migrations entre les deux îles, on retrouve au début de chaque année les proportions suivantes :

– sur l'île A : 80 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île A au début de l'année précédente et 30 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île B au début de l'année précédente ;
– sur l'île B : 20 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île A au début de l'année précédente et 70 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île B au début de l'année précédente.

Pour tout entier naturel n, on note a_n (respectivement b_n) le nombre d'oiseaux (en millions) présents sur l'île A (respectivement B) au début de l'année $(2013+n)$.

Partie A – Algorithmique et conjectures

On donne ci-contre un algorithme qui doit afficher le nombre d'oiseaux vivant sur chacune des deux îles, pour chaque année comprise entre 2013 et une année choisie par l'utilisateur.

```
Début de l'algorithme
Lire n
Affecter à a la valeur 20
Affecter à b la valeur 10
Affecter à i la valeur 2013
Afficher i
Afficher a
Afficher b
Tant que i < n faire
    Affecter à c la valeur (0,8a + 0,3b)
    Affecter à b la valeur (0,2a + 0,7b)
    Affecter à a la valeur c
Fin du Tant que
Fin de l'algorithme
```

1. Cet algorithme comporte des oublis dans le traitement. Repérer ces oublis et les corriger.

2. On donne ci-dessous une copie d'écran des résultats obtenus après avoir corrigé l'algorithme précédent dans un logiciel d'algorithmique, l'utilisateur ayant choisi l'année 2020.

```
***Algorithme lancé***
En l'année 2013, a prend la valeur 20 et b prend la valeur 10
En l'année 2014, a prend la valeur 19 et b prend la valeur 11
En l'année 2015, a prend la valeur 18.5 et b prend la valeur 11.5
En l'année 2016, a prend la valeur 18.25 et b prend la valeur 11.75
En l'année 2017, a prend la valeur 18.125 et b prend la valeur 11.875
En l'année 2018, a prend la valeur 18.0625 et b prend la valeur 11.9375
En l'année 2019, a prend la valeur 18.03125 et b prend la valeur 11.96875
En l'année 2020, a prend la valeur 18.015625 et b prend la valeur 11.984375
***Algorithme terminé***
```

Au vu de ces résultats, émettre des conjectures concernant le sens de variation et la convergence des suites (a_n) et (b_n).

Exercice 2 : (5 points) ***Candidats N'AYANT PAS SUIVI l'enseignement de spécialité mathématiques***

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n : Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$ Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

a. Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

b. Que permet de calculer cet algorithme ?

c. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n :

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,4142	1,9152	1,9272	1,9999	1,9999

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2. *a.* Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leq 2$.

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

b. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

d. Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.

Variables :	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 1
Traitement :	
Sortie :	

Exercice 2 : (5 points) ***Candidats AYANT SUIVI l'enseignement de spécialité mathématiques***

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

```
Variables      :  a est un entier naturel
                  b est un entier naturel
                  c est un entier naturel
Initialisation :  Affecter à c la valeur 0
                  Demander la valeur de a
                  Demander la valeur de b
Traitement :      Tant que a > b
                     | Affecter à c la valeur c + 1
                     | Affecter à a la valeur a – b
                  Fin de tant que
Sortie :          Afficher c
                  Afficher a
```

1. Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 13$ et $b = 4$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.
2. Que permet de calculer cet algorithme ?

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Étape 1 : À la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.

Étape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9m + 5$ par 26 et on le note p.

Étape 3 : Au nombre p, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Coder la lettre U.
2. Modifier l'algorithme de la partie A pour qu'à une valeur de m entrée par l'utilisateur, il affiche la valeur de p, calculée à l'aide du procédé de codage précédent.

Partie C

1. Trouver un nombre entier x tel que $9x \equiv 1 \ [26]$.
2. Démontrer alors l'équivalence : $9m + 5 \equiv p \ [26] \Leftrightarrow m \equiv 3p - 15 \ [26]$.
3. Décoder alors la lettre B.

Série :	**S**	**Obligatoire**
Année :	**2013**	
Lieu :	**Antilles**	
Références :	**13MAOSAG1 Exercice 4 Partie A Question3**	

EXERCICE 4 (5 points)
candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (z_n) à termes complexes définie par : $z_0 = 1 + \mathrm{i}$ et, pour tout entier naturel n, par

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3}.$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $z_n = a_n + \mathrm{i}b_n$, où a_n est la partie réelle de z_n et b_n est la partie imaginaire de z_n.

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n).

Partie A

1. Donner a_0 et b_0.

2. Calculer z_1, puis en déduire que $a_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \frac{1}{3}$.

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	A et B des nombres réels
	K et N des nombres entiers
Initialisation :	Affecter à A la valeur 1
	Affecter à B la valeur 1
Traitement :	
Entrer la valeur de N	
Pour K variant de 1 à N	
	Affecter à A la valeur $\frac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{3}$
	Affecter à B la valeur $\frac{B}{3}$
FinPour	
Afficher A	

a. On exécute cet algorithme en saisissant N = 2. Recopier et compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (on arrondira les valeurs calculées à 10^{-4} près).

K	A	B
1		
2		

b. Pour un nombre N donné, à quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

Série : S Spécialité
Année : 2013
Lieu : Antilles
Références : 13MASSAG1 Exercice 4 Question 2

EXERCICE 4 (5 points)
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On définit les suites (u_n) et (v_n) sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels par

$$u_0 = 0\ ;\ v_0 = 1 \text{ et } \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n).

1. Calculer u_1 et v_1.

2. On considère l'algorithme suivant :

```
Variables :        u, v et w des nombres réels
                   N et k des nombres entiers
Initialisation :   u prend la valeur 0
                   v prend la valeur 1
Début de l'algorithme
Entrer la valeur de N
Pour k variant de 1 à N
        w prend la valeur u
        u prend la valeur (w+v)/2
        v prend la valeur (w+2v)/3
Fin du Pour
Afficher u
Afficher v
Fin de l'algorithme
```

a. On exécute cet algorithme en saisissant N = 2. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

k	w	u	v
1			
2			

b. Pour un nombre N donné, à quoi correspondent les valeurs affichées par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n :

$$u_{n+1} = \frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	POUR i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $\dfrac{1+0,5u}{0,5+u}$ Afficher u
	FIN POUR

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

2. Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,0083	0,9973	1,0009	0,9997	1,0001	0,99997	1,00001	0,999996	1,000001

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

   b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

4. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

   b. montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Série :	**S** **Spécialité**
Année :	**2013**
Lieu :	**Asie**
Références :	**Exercice 4 Partie B Question 1**

Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Un logiciel permet de transformer un élément rectangulaire d'une photographie.
Ainsi, le rectangle initial OEFG est transformé en un rectangle OE′F′G′, appelé image de OEFG.

L'objet de cet exercice est d'étudier le rectangle obtenu après plusieurs transformations successives.

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Les points E, F et G ont pour coordonnées respectives $(2\,;2)$, $(-1\,;5)$ et $(-3\,;3)$.
La transformation du logiciel associe à tout point $M(x\,;\,y)$ du plan le point $M'(x'\,;\,y')$, image du point M tel que :

$$\left\{\begin{array}{lll} x' & = & \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y \\ y' & = & \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y \end{array}\right.$$

Partie B

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet F du rectangle OEFG lorsqu'on applique plusieurs fois la transformation du logiciel.

1. On considère l'algorithme suivant destiné à afficher les coordonnées de ces images successives.
   Une erreur a été commise.
   Modifier cet algorithme pour qu'il permette d'afficher ces coordonnées.

Entrée	Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à x la valeur -1 Affecter à y la valeur 5
Traitement	POUR i allant de 1 à N Affecter à a la valeur $\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y$ Affecter à b la valeur $\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y$ Affecter à x la valeur a Affecter à y la valeur b FIN POUR
Sortie	Afficher x, afficher y

2. On a obtenu le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	10	15
x	2,5	7,25	15,625	31,8125	63,9063	2047,9971	65535,9999
y	5,5	8,75	16,375	32,1875	64,0938	2048,0029	65536,0001

   Conjecturer le comportement de la suite des images successives du point F.

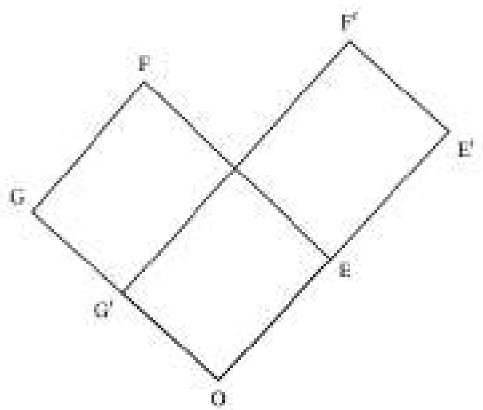


Figure 1

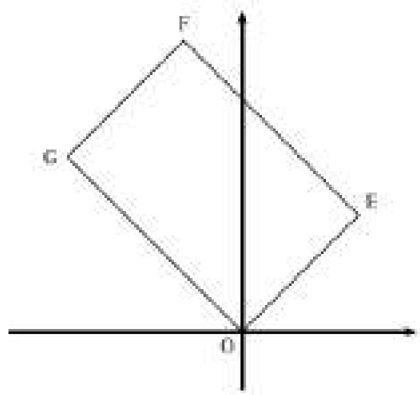


Figure 2

Série : S Obligatoire
Année : 2013
Lieu : Liban
Références : 13MASCOLI1 Exercice 4 question A1

EXERCICE 4 : (5 points) ***Candidats N'AYANT PAS SUIVI l'enseignement de spécialité mathématiques***

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n} \end{cases}$.

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.
Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N°1

Variables :
v est un réel
i et n sont des entiers naturels

Début de l'algorithme :
  Lire n
  v prend la valeur 1
  Pour i variant de 1 à n faire
    v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
  Fin pour
  Afficher v
Fin algorithme.

Algorithme N°2

Variables :
v est un réel
i et n sont des entiers naturels

Début de l'algorithme :
  Lire n
  Pour i variant de 1 à n faire
    v prend la valeur 1
    Afficher v
    v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
  Fin pour
Fin algorithme.

Algorithme N°3

Variables :
v est un réel
i et n sont des entiers naturels

Début de l'algorithme :
  Lire n
  v prend la valeur 1
  Pour i variant de 1 à n faire
    Afficher v
    v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
  Fin pour
  Afficher v
Fin algorithme.

EXERCICE 4 : (5 points) ***Candidats AYANT SUIVI l'enseignement de spécialité mathématiques***

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 8$ et, pour tout n supérieur ou égal à 0 :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n .$$

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on souhaite calculer u_n à l'aide de l'algorithme suivant :

Variables :	a, b et c sont des nombres réels
	i et n sont des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2
Initialisation :	a prend la valeur 3
	b prend la valeur 8
Traitement :	Saisir n
	Pour i variant de 2 à n faire
	c prend la valeur a
	a prend la valeur b
	b prend la valeur ....
	Fin Pour
Sortie :	Afficher b

a. Recopier la ligne de cet algorithme comportant des pointillés et les compléter.

On obtient avec cet algorithme le tableau de valeurs suivant :

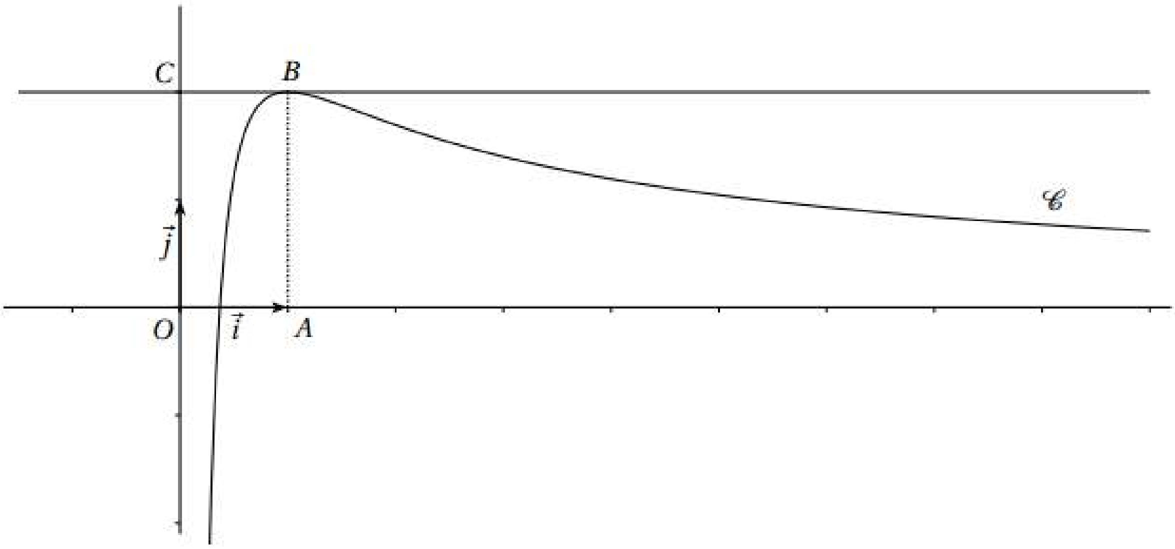
n	7	8	9	10	11	12	13	14	15
u_n	4502	13378	39878	119122	356342	1066978	3196838	9582322	28730582

b. Quelle conjecture peut-on émettre concernant la monotonie de la suite (u_n) ?

EXERCICE 2 (7 points)

Commun à tous les candidats

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0,\ +\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1,\ 0)$, $(1,\ 2)$, $(0,\ 2)$;
- la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}.$$

1. **a.** En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

b. Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.

c. En déduire les réels a et b.

2. **a.** Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0,\ +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

b. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x}$.

c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0,\ 1]$.

b. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1,\ +\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$.
Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n + 1$.

(Suite page suivante)

4. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	a, b et m sont des nombres réels.
Initialisation :	Affecter à a la valeur 0.
	Affecter à b la valeur 1.
Traitement :	Tant que $b - a > 0,1$
	Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a+b)$.
	Si $f(m) < 1$ alors Affecter à a la valeur m.
	Sinon Affecter à b la valeur m.
	Fin de Si.
	Fin de Tant que.
Sortie :	Afficher a.
	Afficher b.

a. Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0				
b	1				
$b-a$					
m					

b. Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

c. Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}.

5. Le but de cette question est de démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ partage le rectangle $OABC$ en deux domaines d'aires égales.

a. Justifier que cela revient à démontrer que $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

b. En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\frac{2}{x} + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$, terminer la démonstration.

Série : S Obligatoire+Spécialité
Année : 2013
Lieu : Polynésie
Références : 13MASCOPO1+13MASCSPO1 **Exercice 1 Question 2**

EXERCICE 1 : (6 points) ***Commun à tous les candidats***

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x)=(x+2)e^{-x}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Étude de la fonction f.

a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec les axes du repère.

b. Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les éventuelles asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.

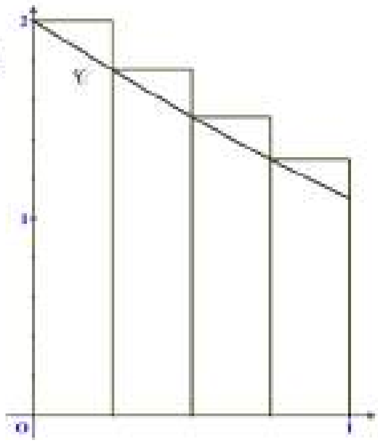
c. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbf{R}$.

2. Calcul d'une valeur approchée de l'aire sous une courbe.
On note $\mathscr{D}$ le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$. On approche l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en calculant une somme d'aires de rectangles.

a. Dans cette question, on découpe l'intervalle $[0\,,1]$ en quatre intervalles de même longueur :

- sur l'intervalle $\left[0\,,\frac{1}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f(0)$
- sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}\,,\frac{1}{2}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{4}\right)$
- sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,,\frac{3}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{2}\right)$
- sur l'intervalle $\left[\frac{3}{4}\,,1\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{3}{4}\right)$.

Cette construction est illustrée ci-dessous.



L'algorithme ci-dessous permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en ajoutant les aires des quatre rectangles précédents :

```
Variables :        k est un nombre entier
                   S est un nombre réel
Initialisation :   Affecter à S la valeur 0
Traitement :       Pour k variant de 0 à 3
                   |  Affecter à S la valeur S + 1/4 f(k/4)
                   Fin Pour
Sortie :           Afficher S
```

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme.

b. Dans cette question, N est un nombre entier strictement supérieur à 1. On découpe l'intervalle $[0\,,1]$ en N intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question 2.a.
Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche en sortie la somme des aires des N rectangles ainsi construits.

EXERCICE 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,04.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,24.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'événement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'événement E_n.

On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leq p_n < 1$

1.

a) Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

2.

a) Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous

b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}04$

c) Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0{,}05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r. En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r.

d) En déduire la limite de la suite (p_n).

e) On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0 J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K

Traitement	Tant que $P < 0{,}05 - 10^{-K}$
	    P prend la valeur $0{,}2 \times P + 0{,}04$
	    J prend la valeur J+1
	Fin tant que

Sortie	Afficher J

A quoi correspond l'affichage final J ?

Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

Série :	**S Obligatoire+Spécialité**
Année :	**2013**
Lieu :	**Nouvelle Calédonie**
Références :	**Exercice 2 Partie A**

EXERCICE 2
Commun à tous les candidats

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

PARTIE A

On considère l'algorithme suivant :

```
Variables :   N est un entier
              U, V, W sont des réels
              K est un entier
Début :       Affecter 0 à K
              Affecter 2 à U
              Affecter 10 à V
              Saisir N
              Tant que K < N
                  Affecter K + 1 à K
                  Affecter U à W
                  Affecter (2U + V)/3 à U
                  Affecter (W + 3V)/4 à V
              Fin tant que
              Afficher U
              Afficher V
Fin
```

On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	W	U	V
0			
1			
2			

Série :	**S**	**Obligatoire**
Année :	**2014**	
Lieu :	**Liban**	
Références :	**14MASCOLI1**	**Exercice 1 Question 2**

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1+\mathrm{i})z_n$$

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

1. Calculer u_0.
2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).
5. Étant donné un réel positif p, on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.
   Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n.

Variables	:	u est un réel p est un réel n est un entier
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2
Entrée	:	Demander la valeur de p
Traitement	:	
Sortie	:	

Partie B

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.
2. Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1+\mathrm{i}$.
   En déduire la forme exponentielle de z_1.
3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 3 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi la spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right)z_n$.

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$.

2. **a.** Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. En déduire l'expression de r_n en fonction de n.

c. Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables	n entier naturel R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P

Traitement	R prend la valeur 1
	n prend la valeur 0
	Tant que $R > P$
	    n prend la valeur $n+1$
	    R prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}R$
	Fin tant que

Sortie	Afficher n

a. Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0{,}5$?

b. Pour $P = 0{,}01$ on obtient $n = 33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?

Exercice 3 (5 points) Candidats ayant suivi la spécialité

Chaque jeune parent utilise chaque mois une seule marque de petits pots pour bébé. Trois marques X, Y et Z se partagent le marché. Soit n un entier naturel.

On note : X_n l'événement « la marque X est utilisée le mois n »,

Y_n l'événement « la marque Y est utilisée le mois n »,

Z_n l'événement « la marque Z est utilisée le mois n ».

Les probabilités des événements X_n, Y_n, Z_n sont notées respectivement x_n, y_n, z_n.

La campagne publicitaire de chaque marque fait évoluer la répartition.
Un acheteur de la marque X le mois n, a le mois suivant :

- 50 % de chance de rester fidèle à cette marque,
- 40 % de chance d'acheter la marque Y,
- 10 % de chance d'acheter la marque Z.

Un acheteur de la marque Y le mois n, a le mois suivant :

- 30 % de chance de rester fidèle à cette marque,
- 50 % de chance d'acheter la marque X,
- 20 % de chance d'acheter la marque Z.

Un acheteur de la marque Z le mois n, a le mois suivant :

- 70 % de chance de rester fidèle à cette marque,
- 10 % de chance d'acheter la marque X,
- 20 % de chance d'acheter la marque Y.

1. **a.** Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n, y_n et z_n.
On admet que : $y_{n+1} = 0{,}4\,x_n + 0{,}3\,y_n + 0{,}2\,z_n$ et que $z_{n+1} = 0{,}1\,x_n + 0{,}2\,y_n + 0{,}7\,z_n$

b. Exprimer z_n en fonction de x_n et y_n. En déduire l'expression de x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

2. On définit la suite (U_n) par $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

On admet que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n + B$ où $A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$

Au début de l'étude statistique (mois de janvier 2014 : $n = 0$), on estime que $U_0 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$.

(Suite page suivante)

On considère l'algorithme suivant :

Variables	n et i des entiers naturels. A, B et U des matrices
Entrée et Initialisation	Demander la valeur de n i prend la valeur 0 A prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ B prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$ U prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix}$

Traitement	Tant que $i < n$
	    U prend la valeur $A \times U + B$
	    i prend la valeur $i + 1$
	Fin de Tant que

Sortie	Afficher U

a. Donner les résultats affichés par cet algorithme pour $n = 1$ puis pour $n = 3$.

b. Quelle est la probabilité d'utiliser la marque X au mois d'avril ?

Série :	**S**	**Spécialité**
Année :	**2014**	
Lieu :	**Liban**	
Références :	**14MASCSLI1**	**Exercice 4 Question 4c**

Un laboratoire étudie la propagation d'une maladie sur une population.
Un *individu sain* est un individu n'ayant jamais été touché par la maladie.
Un *individu malade* est un individu qui a été touché par la maladie et non guéri.
Un *individu guéri* est un individu qui a été touché par la maladie et qui a guéri.
Une fois guéri, un individu est immunisé et ne peut plus tomber malade.
Les premières observations nous montrent que, d'un jour au jour suivant :

- 5 % des individus tombent malades ;
- 20 % des individus guérissent.

Pour tout entier naturel n, on note a_n la proportion d'individus sains n jours après le début de l'expérience, b_n la proportion d'individus malades n jours après le début de l'expérience, et c_n celle d'individus guéris n jours après le début de l'expérience.
On suppose qu'au début de l'expérience, tous les individus sont sains, c'est à dire que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$

1. Calculer a_1, b_1 et c_1.

2. a) Quelle est la proportion d'individus saisn qui restent sains d'un jour au jour suivant ? En déduire a_{n+1} en fonction de a_n.

b) Exprimer b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.

On admet que $c_{n+1} = 0{,}2b_n + c_n$.

Pour tout entier naturel n, on définit $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

On définit les matrices $A = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On admet qu'il existe une matrice inversible P telle que $D = P^{-1} \times A \times P$ et que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

3. a) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n$.

On admet que, pour tout entier naturel n, $U_n = A^n \times U_0$.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$D^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On admet que $A^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}(0{,}95^n - 0{,}8^n) & 0{,}8^n & 0 \\ \frac{1}{3}(3 - 4 \times 0{,}95^n + 0{,}8^n) & 1 - 0{,}8^n & 1 \end{pmatrix}$

4. a) Vérifier que pour tout entier naturel n, $b_n = \frac{1}{3}(0{,}95^n - 0{,}8^n)$

b) Déterminer la limite de la suite (b_n).

c) On admet que la proportion d'individus malades croît pendant plusieurs jours, puis décroît.

On souhaite déterminer le pic épidémique, c'est à dire le moment où la proportion d'individus malades est à son maximum.

À cet effet, on utilise l'algorithme donné en **annexe 2** (***à rendre avec la copie***), dans lequel on compare les termes successifs de la suite (b_n).

Compléter l'algorithme de façon qu'il affiche le rang du jour où le pic épidémique est atteint et compléter le tableau fourni en **annexe 2**.

Conclure.

(Suite page suivante)

Algorithme et tableau à compléter

Variables	:	b, b', x, y sont des réels
		k est un entier naturel
		n est un entier
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0
		Affecter à b' la valeur 0,05
		Affecter à k la valeur 0
		Affecter à x la valeur 0,95
		Affecter à y la valeur 0,8
Traitement	:	Tant que $b < b'$ faire :
		Affecter à k la valeur $k+1$
		Affecter à b la valeur b'
		Affecter à x la valeur $0,95x$
		Affecter à y la valeur $0,80y$
		Affecter à b' la valeur ······
		Fin Tant que
Sortie	:	Afficher ······

	k	b	c	d	b'	Test : $b < b'$?
Après le 7[e] passage dans la boucle Tant que	7	0,1628	0,6634	0,1678	0,1652	VRAI
Après le 8[e] passage éventuel dans la boucle Tant que						
Après le 9[e] passage éventuel dans la boucle Tant que						

Série :	**S** **Obligatoire**
Année :	**2014**
Lieu :	**Amérique du Nord**
Références :	**Exercice 4 question 3**

EXERCICE 4 **(5 points)**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B.
Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.
On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 800 m^3 d'eau et le bassin B contient 1 400 m^3 d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du n-ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du n-ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 800$ et $b_0 = 1400$.

1. Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation du volume total d'eau du circuit ?
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + 330$.
3. L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur ou égal à 1100.
Recopier cet algorithme en complétant les parties manquantes.

Variables	:	n est un entier naturel a est un réel
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0 Affecter à a la valeur 800
Traitement	:	Tant que $a < 1\,100$, faire : | Affecter à a la valeur … | Affecter à n la valeur $n + 1$ Fin Tant que Affecter à n la valeur …
Sortie	:	Afficher n

(Suite page suivante)

4. Pour tout entier naturel n, on note $u_n = a_n - 1320$.

a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Exprimer u_n en fonction de n.

En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = 1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.
Proposer une méthode pour répondre à ce questionnement.

Série :	**S**	**Obligatoire**
Année :	**2014**	
Lieu :	**Antilles**	
Références :	**Exercice 4 Question 4**	

EXERCICE 4

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 2 \\ \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} & = & \frac{1}{5}u_n + 3\times 0,5^n. \end{array}\right.$$

1. a. Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

   b. D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2. a. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a

$$u_n \geqslant \frac{15}{4}\times 0,5^n.$$

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

   c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3. *On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite* (u_n).

   Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10\times 0,5^n$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n).

   b. En déduire, que pour tout entier naturel n,

$$u_n = -8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n + 10\times 0,5^n.$$

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n)

4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leqslant 0,01$.

Entrée :	n et u sont des nombres	
Initialisation :	n prend la valeur 0	
	u prend la valeur 2	
Traitement :	Tant que ...	(1)
	n prend la valeur ...	(2)
	u prend la valeur ...	(3)
	Fin Tant que	
Sortie :	Afficher n	

Série :	**S Spécialité**
Année :	**2014**
Lieu :	**Antilles**
Références :	**Exercice 4 Question 1b**

EXERCICE 4

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

En montagne, un randonneur a effectué des réservations dans deux types d'hébergements : L'hébergement A et l'hébergement B.

Une nuit en hébergement A coûte 24 € et une nuit en hébergement B coûte 45 €.

Il se rappelle que le coût total de sa réservation est de 438 €.

On souhaite retrouver les nombres x et y de nuitées passées respectivement en hébergement A et en hébergement B

1. **a.** Montrer que les nombres x et y sont respectivement inférieurs ou égaux à 18 et 9.

   b. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant afin qu'il affiche les couples $(x\,;\,y)$ possibles.

```
Entrée :        x et y sont des nombres
Traitement :    Pour x variant de 0 …            (1)
                    Pour y variant de 0 …        (2)
                        Si …                     (3)
                            Afficher x et y
                        Fin Si
                    Fin Pour
                Fin Pour
Fin traitement
```

2. Justifier que le coût total de la réservation est un multiple de 3.
3. **a.** Justifier que l'équation $8x+15y = 1$ admet pour solution au moins un couple d'entiers relatifs.

   b. Déterminer une telle solution.

   c. Résoudre l'équation (E) : $8x+15y = 146$ où x et y sont des nombres entiers relatifs.
4. Le randonneur se souvient avoir passé au maximum 13 nuits en hébergement A.

   Montrer alors qu'il peut retrouver le nombre exact de nuits passées en hébergement A et celui des nuits passées en hébergement B.

   Calculer ces nombres.

Série :	**S Obligatoire**
Année :	**2014**
Lieu :	**Asie**
Références :	**Exercice 4 question 7**

Exercice 4

Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] par

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}.$$

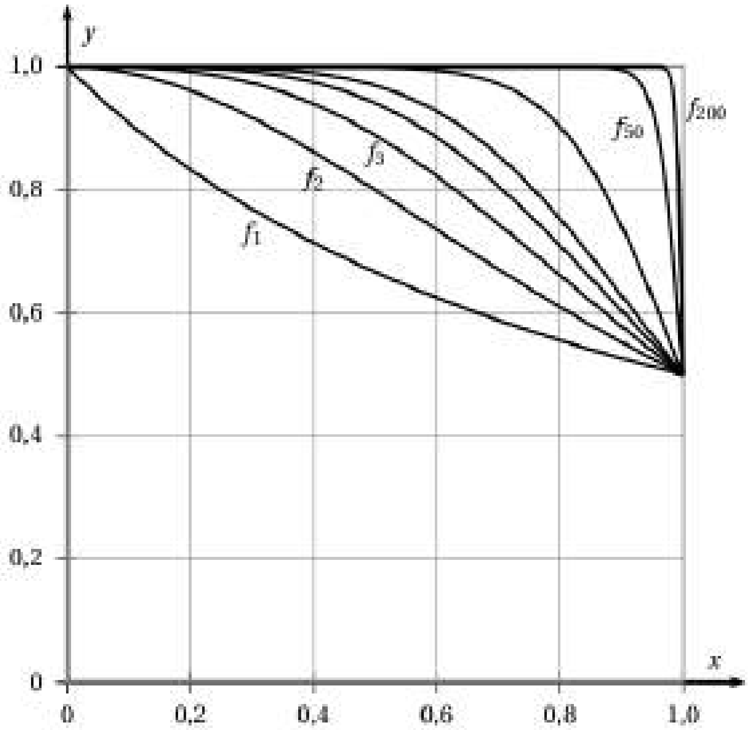
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit le nombre I_n par

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

1. Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après.
   En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite (I_n) l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Calculer la valeur exacte de I_1.
3. a. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1.$$

   b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $I_n \leqslant 1$.



(Suite page suivante)

4. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$1 - x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n}.$$

5. Calculer l'intégrale $\int_0^1 \left(1 - x^n\right) \mathrm{d}x$.

6. À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

7. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n, p et k sont des entiers naturels x et I sont des réels
Initialisation :	I prend la valeur 0
Traitement :	Demander un entier $n \geqslant 1$ Demander un entier $p \geqslant 1$ Pour k allant de 0 à $p - 1$ faire : x prend la valeur $\frac{k}{p}$ I prend la valeur $I + \frac{1}{1+x^n} \times \frac{1}{p}$ Fin Pour Afficher I

a. Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cet algorithme si l'on entre les valeurs $n = 2$ et $p = 5$?

On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme. Les valeurs de I seront arrondies au millième.

k	x	I
0		
4		

b. Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'approcher l'intégrale I_n.

Série :	**S Spécialité**
Année :	**2014**
Lieu :	**Asie**
Références :	**Exercice 4 Partie C**

Exercice 4
Candidats ayant choisi la spécialité mathématique

Partie A

Le but de celle partie est de démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini en raisonnant par l'absurde.

1. On suppose qu'il existe un nombre fini de nombres premiers notés $p_1, p_2, \dots, p_n$.
   On considère le nombre E produit de tous les nombres premiers augmenté de 1 :
   $$E = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1.$$
   Démontrer que E est un entier supérieur ou égal à 2, et que E est premier avec chacun des nombres $p_1, p_2, \dots, p_n$.
2. En utilisant le fait que E admet un diviseur premier conclure.

Partie B

Pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, on pose $M_k = 2^k - 1$.
On dit que M_k est le k-ième nombre de Mersenne.

1. **a.** Reproduire et compléter le tableau suivant, qui donne quelques valeurs de M_k :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_k	3								

   b. D'après le tableau précédent, si k est un nombre premier, peut-on conjecturer que le nombre M_k est premier ?
2. Soient p et q deux entiers naturels non nuls.
   a. Justifier l'égalité : $1 + 2^p + +(2^p)^2 + (2^p)^3 + \cdots (2^p)^{q-1} = \dfrac{(2^p)^q - 1}{2^p - 1}$.
   b. En déduire que $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$.
   c. En déduire que si un entier k supérieur ou égal à 2 n'est pas premier, alors M_k ne l'est pas non plus.
3. **a.** Prouver que le nombre de Mersenne M_{11} n'est pas premier.
   b. Que peut-on en déduire concernant la conjecture de la question 1. b. ?

(Suite page suivante)

Partie C

Le test de Lucas-Lehmer permet de déterminer si un nombre de Mersenne donné est premier. Ce test utilise la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2.$$

Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, le test permet d'affirmer que le nombre M_n est premier si et seulement si $u_{n-2} \equiv 0 \quad \text{modulo } M_n$. Cette propriété est admise dans la suite.

1. Utiliser le test de Lucas-Lehmer pour vérifier que le nombre de Mersenne M_5 est premier
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
   L'algorithme suivant, qui est incomplet, doit permettre de vérifier si le nombre de Mersenne M_n est premier, en utilisant le test de Lucas-Lehmer.

Variables :	u, M, n et i sont des entiers naturels
Initialisation :	u prend la valeur 4
Traitement :	Demander un entier $n \geqslant 3$
	M prend la valeur ……
	Pour i allant de 1 à … faire
	u prend la valeur …
	Fin Pour
	Si M divise u alors afficher « M ……… »
	sinon afficher « M ……… »

   Recopier et compléter cet algorithme de façon à ce qu'il remplisse la condition voulue.

Série :	**S Obligatoire**
Année :	**2014**
Lieu :	**Polynésie**
Références :	**Exercice 2 Question 2**

EXERCICE 2

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1		**Algorithme 2**	
Variables :	n est un entier naturel	**Variables :**	n est un entier naturel
	u est un réel		u est un réel
Entrée :	Saisir la valeur de n	**Entrée :**	Saisir la valeur de n
Traitement :	u prend la valeur 0	**Traitement :**	u prend la valeur 0
	Pour i allant de 1 à n :		Pour i allant de 0 à $n-1$:
	u prend la valeur $u+2i+2$		u prend la valeur $u+2i+2$
	Fin Pour		Fin Pour
Sortie :	Afficher u	**Sortie :**	Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

(…)

Série :	**S Spécialité**
Année :	**2014**
Lieu :	**Polynésie**
Références :	**Exercice 2 Question B1**

Exercice 2
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, on appelle numéro du jour de naissance le rang de ce jour dans le mois et numéro du mois de naissance, le rang du mois dans l'année.
Par exemple, pour une personne née le 14 mai, le numéro du jour de naissance est 14 et le numéro du mois de naissance est 5.

Partie A

Lors d'une représentation, un magicien demande aux spectateurs d'effectuer le programme de calcul (A) suivant :
« Prenez le numéro de votre jour de naissance et multipliez-le par 12. Prenez le numéro de votre mois de naissance et multipliez-le par 37. Ajoutez les deux nombres obtenus. Je pourrai alors vous donner la date de votre anniversaire ».
Un spectateur annonce 308 et en quelques secondes, le magicien déclare : « Votre anniversaire tombe le 1er août ! ».

1. Vérifier que pour une personne née le 1er août, le programme de calcul (A) donne effectivement le nombre 308.
2. a. Pour un spectateur donné, on note j le numéro de son jour de naissance, m celui de son mois de naissance et z le résultat obtenu en appliquant le programme de calcul (A).
   Exprimer z en fonction de j et de m et démontrer que z et m sont congrus modulo 12.
   b. Retrouver alors la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 474 en appliquant le programme de calcul (A).

(Suite page suivante)

Partie B

Lors d'une autre représentation, le magicien décide de changer son programme de calcul. Pour un spectateur dont le numéro du jour de naissance est j et le numéro du mois de naissance est m, le magicien demande de calculer le nombre z défini par $z = 12j + 31m$.

Dans les questions suivantes, on étudie différentes méthodes permettant de retrouver la date d'anniversaire du spectateur.

1. Première méthode :

   On considère l'algorithme suivant :

Variables :	j et m sont des entiers naturels
Traitement :	Pour m allant de 1 à 12 faire :
	Pour j allant de 1 à 31 faire :
	z prend la valeur $12j + 31m$
	Afficher z
	Fin Pour
	Fin Pour

   Modifier cet algorithme afin qu'il affiche toutes les valeurs de j et de m telles que $12j + 31m = 503$.

2. Deuxième méthode :

   a. Démontrer que $7m$ et z ont le même reste dans la division euclidienne par 12.

   b. Pour m variant de 1 à 12, donner le reste de la division euclidienne de $7m$ par 12.

   c. En déduire la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme de calcul (B).

3. Troisième méthode :

   a. Démontrer que le couple $(-2 ; 17)$ est solution de l'équation $12x + 31y = 503$.

   b. En déduire que si un couple d'entiers relatifs $(x ; y)$ est solution de l'équation $12x + 31y = 503$, alors $12(x + 2) = 31(17 - y)$.

   c. Déterminer l'ensemble de tous les couples d'entiers relatifs $(x ; y)$, solutions de l'équation $12x + 31y = 503$.

   d. Démontrer qu'il existe un unique couple d'entiers relatifs $(x ; y)$ tel que $1 \leqslant y \leqslant 12$.

   En déduire la date d'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme de calcul (B).

Série :	**S Obligatoire+Spécialité**
Année :	**2014**
Lieu :	**Nouvelle Calédonie**
Références :	**Exercice 3 Partie B Questions 1abc et 2b**

EXERCICE 3
Commun à tous les candidats

Partie A

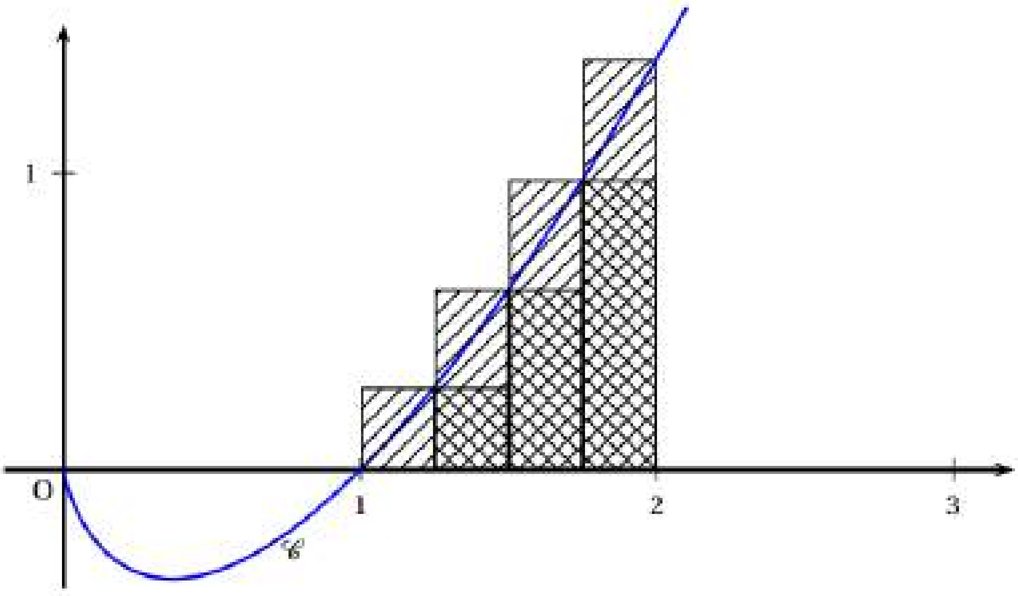
Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x).$$

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. On appelle f' la fonction dérivée de f sur $]0 ; +\infty[$. Montrer que $f'(x) = \ln(x) + 1$.
3. Déterminer les variations de f sur $]0 ; +\infty[$.

Partie B

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal.
Soit $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.
On utilise l'algorithme suivant pour calculer, par la méthode des rectangles, une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$. (voir la figure ci-après).



(Suite page suivante)

Algorithme :

Variables
  k et n sont des entiers naturels
  U, V sont des nombres réels
Initialisation
  U prend la valeur 0
  V prend la valeur 0
  n prend la valeur 4
Traitement
Pour k allant de 0 à $n-1$
  Affecter à U la valeur $U + \frac{1}{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right)$
  Affecter à V la valeur $V + \frac{1}{n} f\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$
Fin pour
Affichage
  Afficher U
  Afficher V

1. **a.** Que représentent U et V sur le graphique précédent ?
   b. Quelles sont les valeurs U et V affichées en sortie de l'algorithme (on donnera une valeur approchée de U par défaut à 10^{-4} près et une valeur approchée par excès de V à 10^{-4} près) ?
   c. En déduire un encadrement de $\mathscr{A}$.
2. Soient les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier n non nul par :

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{n}\left[f(1) + f\left(1+\frac{1}{n}\right) + f\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right] \\ V_n &= \frac{1}{n}\left[f\left(1+\frac{1}{n}\right) + f\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(1+\frac{n-1}{n}\right) + f(2)\right] \end{aligned}.$$

   On admettra que, pour tout n entier naturel non nul, $U_n \leqslant \mathscr{A} \leqslant V_n$.
   a. Trouver le plus petit entier n tel que $V_n - U_n < 0,1$.
   b. Comment modifier l'algorithme précédent pour qu'il permette d'obtenir un encadrement de $\mathscr{A}$ d'amplitude inférieure à $0,1$?

Partie C

Soit F la fonction dérivable, définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$F(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}.$$

1. Montrer que F est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$.

Série : S Obligatoire+Spécialité
Année : 2014
Lieu : Afrique
Références : Partie B

Exercice 3

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de la façon suivante :

- $x = 0$ pour le blanc ;
- $x = 1$ pour le noir ;
- $x = 0,01$; $x = 0,02$ et ainsi de suite jusqu'à $x = 0,99$ par pas de $0,01$ pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.
Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ».
Une fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$;
- f est continue sur l'intervalle $[0 ; 1]$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x) > x$, et éclaircie, si $f(x) < x$.
Ainsi, si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée $0,2$ prendra la nuance codée $0,2^2 = 0,04$. L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.
Si $f(x) = \sqrt{x}$, la nuance codée $0,2$ prendra la nuance codée $\sqrt{0,2} \approx 0,45$. L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

Partie A

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x.$$

a) Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leqslant x$, à l'aide du graphique donné en annexe, à rendre avec la copie, en faisant apparaître les pointillés utiles.
Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

(Suite page suivante)

2. On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_2(x) = \ln[1 + (\mathrm{e} - 1)x].$$

On admet que f_2 est une fonction de retouche.

On définit sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ la fonction g par : $g(x) = f_2(x) - x$.

a) Établir que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,1]$: $g'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}-2) - (\mathrm{e}-1)x}{1 + (\mathrm{e}-1)x}$;

b) Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Démontrer que la fonction g admet un maximum en $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est $0{,}12$.

c) Établir que l'équation $g(x) = 0{,}05$ admet sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ deux solutions α et β, avec $\alpha < \beta$.

On admettra que : $0{,}08 < \alpha < 0{,}09$ et que : $0{,}85 < \beta < 0{,}86$.

Partie B

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à $0{,}05$.

1. Dans l'algorithme décrit ci-dessous, f désigne une fonction de retouche.

Quel est le rôle de cet algorithme ?

Variables :	x (nuance initiale)
	y (nuance retouchée)
	E (écart)
	c (compteur)
	k
Initialisation :	c prend la valeur 0
Traitement :	Pour k allant de 0 à 100, faire
	x prend la valeur $\frac{k}{100}$
	y prend la valeur $f(x)$
	E prend la valeur $\lvert y - x\rvert$
	Si $E \geqslant 0{,}05$, faire
	c prend la valeur $c + 1$
	Fin si
	Fin pour
Sortie :	Afficher c

2. Quelle valeur affichera cet algorithme si on l'applique à la fonction f_2 définie dans la deuxième question de la **partie A** ?

Partie C

(…)

Série :	**S**	**Spécialité**	
Année :	**2014**		
Lieu :	**Métropole**		
Références :	**14MASCSMLR1**		**Exercice 4 questions 4ab**

EXERCICE 4

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un pisciculteur dispose de deux bassins A et B pour l'élevage de ses poissons. Tous les ans à la même période :

- il vide le bassin B et vend tous les poissons qu'il contenait et transfère tous les poissons du bassin A dans le bassin B ;
- la vente de chaque poisson permet l'achat de deux petits poissons destinés au bassin A. Par ailleurs, le pisciculteur achète en plus 200 poissons pour le bassin A et 100 poissons pour le bassin B.

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, on note respectivement a_n et b_n les effectifs de poissons des bassins A et B au bout de n années. En début de première année, le nombre de poissons du bassin A est $a_0 = 200$ et celui du bassin B est $b_0 = 100$.

1. Justifier que $a_1 = 400$ et $b_1 = 300$ puis calculer a_2 et b_2.

2. On désigne par A et B les matrices telles que $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

a. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n + B$.

b. Déterminer les réels x et y tels que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$.

c. Pour tout entier naturel n, on pose $Y_n = \begin{pmatrix} a_n + 400 \\ b_n + 300 \end{pmatrix}$.

Démontrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+1} = AY_n$.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $Z_n = Y_{2n}$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = A^2 Z_n$. En déduire que pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = 2Z_n$.

b. On admet que cette relation de récurrence permet de conclure que pour tout entier naturel n,

$$Y_{2n} = 2^n Y_0.$$

En déduire que $Y_{2n+1} = 2^n Y_1$ puis démontrer que pour tout entier naturel n,

$$a_{2n} = 600 \times 2^n - 400 \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = 800 \times 2^n - 400.$$

4. Le bassin A a une capacité limitée à 10 000 poissons.

a. On donne l'algorithme suivant.

```
Variables :        a, p et n sont des entiers naturels.
Initialisation :   Demander à l'utilisateur la valeur de p.
Traitement :       Si p est pair
                      | Affecter à n la valeur p/2
                      | Affecter à a la valeur 600 × 2^n − 400.
                   Sinon
                      | Affecter à n la valeur (p − 1)/2
                      | Affecter à a la valeur 800 × 2^n − 400.
                   Fin de Si.
Sortie :           Afficher a.
```

Que fait cet algorithme ? Justifier la réponse.

b. Écrire un algorithme qui affiche le nombre d'années pendant lesquelles le pisciculteur pourra utiliser le bassin A.

Exercice 3 (6 points) - commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[3\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{x+5\ln x}$.

1) On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$. Montrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 1.

2) On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
Montrer que pour tout x de l'intervalle $[3\,;+\infty[$ on a $f'(x)=\dfrac{5(\ln x-1)}{(x+5\ln x)^2}$.

3) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $[3\,;+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur cet intervalle.

4) Montrer que sur l'intervalle $[3\,;50]$ l'équation $f(x)=0{,}5$ possède une unique solution α puis, à l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à l'entier supérieur par excès de α.

Partie B

L'organisation chargée de vendre les billets pour assister aux différentes épreuves d'un grand évènement sportif a mis en vente ces billets environ deux ans avant le début officiel des épreuves.
Une étude, portant sur la progression des ventes de ces billets, à partir du troisième jour de mise en vente, a permis de modéliser l'évolution des ventes des billets selon la fonction f étudiée dans la partie A.
La proportion des ventes effectuées par rapport à l'ensemble des billets, x jours après le début de la mise en vente, est donnée par la valeur $f(x)$, arrondie au millième, pour tout x entier de l'intervalle $[3\,;700]$.
Ainsi la valeur approchée de $f(3)$, arrondie au millième, est 0,353 ; cela signifie que trois jours après le début de la mise en vente des billets, 35,3 % des billets étaient déjà vendus.

1) En utilisant la partie A, déterminer le nombre de jours nécessaires à la vente de 50 % de l'ensemble des billets.

2) On considère l'algorithme suivant (la fonction f est celle qui est définie dans la partie A).

```
Initialisation :   Affecter à X la valeur 3.
                   Affecter à Y la valeur f(X).

Saisie :           Afficher "Entrer un nombre P compris entre 0 et 1".
                   Lire P.

Traitement :       Tant que Y < P
                        - Affecter à X la valeur X + 1.
                        - Affecter à Y la valeur f(X).
                   Fin du Tant que

Sortie :           Afficher X.
```

a) Si l'utilisateur de cet algorithme choisit 0,9 comme valeur de P, la valeur de sortie de l'algorithme est 249. Que signifie ce résultat pour les organisateurs ?

b) Si l'utilisateur de cet algorithme choisit 0,5 comme valeur de P, quelle valeur de X apparaîtra à la sortie de l'algorithme ?

EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Les services de la mairie d'une ville ont étudié l'évolution de la population de cette ville. Chaque année, 12,5 % de la population quitte la ville et 1 200 personnes s'y installent.
En 2012, la ville comptait 40 000 habitants.

On note U_n le nombre d'habitants de la ville en l'année 2012 + n.
On a donc $U_0 = 40\,000$.
On admet que la suite (U_n) est définie pour tout entier naturel n par $U_{n+1} = 0{,}875 \times U_n + 1\,200$.

On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - 9\,600$.

Les questions numérotées de 1 à 5 de cet exercice forment un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, quatre affirmations sont proposées ; une seule réponse est exacte. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Pour chaque question, le candidat notera sur sa copie le numéro de la question suivi de la proposition qui lui semble correcte. Aucune justification n'est demandée.

1) La valeur de U_1 est :

a) 6 200 **b)** 35 000 **c)** 36 200 **d)** 46 200

2) La suite (V_n) est :

a) géométrique de raison – 12,5 %
b) géométrique de raison 0,875
c) géométrique de raison – 0,875
d) arithmétique de raison – 9 600

3) La suite (U_n) a pour limite :

a) $+\infty$ **b)** 0 **c)** 1 200 **d)** 9 600

4) On donne l'algorithme suivant :

```
Variables :
        U, N
Initialisation :
        U prend la valeur 40 000
        N prend la valeur 0
Traitement :
        Tant que U > 10 000
                N prend la valeur N + 1
                U prend la valeur 0,875 × U + 1 200
        Fin du Tant que
Sortie :
        Afficher N
```

Cet algorithme permet d'obtenir :

a) la valeur de $U_{40\,000}$
b) toutes les valeurs de U_0 à U_N
c) le plus petit rang n pour lequel on a $U_n \leq 10\,000$
d) le nombre de termes inférieurs à 1 200

5) La valeur affichée est :

a) 33 **b)** 34 **c)** 9 600 **d)** 9 970,8

Série : ES Obligatoire
Année : 2013
Lieu : Amérique du Nord
Références : 13MAELAN1 Exercice 3 Partie A questions 2 et 3

EXERCICE 3 (5 points)

La bibliothèque municipale étant devenue trop petite, une commune a décidé d'ouvrir une médiathèque qui pourra contenir 100 000 ouvrages au total.
Pour l'ouverture prévue le 1er janvier 2013, la médiathèque dispose du stock de 35 000 ouvrages de l'ancienne bibliothèque augmenté de 7 000 ouvrages supplémentaires neufs offerts par la commune.

Partie A

Chaque année, la bibliothécaire est chargée de supprimer 5 % des ouvrages, trop vieux ou abîmés, et d'acheter 6 000 ouvrages neufs.
On appelle u_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1er janvier de l'année $(2013 + n)$
On donne $u_0 = 42$.

1) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = u_n \times 0,95 + 6$.

2) On propose, ci-dessous, un algorithme, en langage naturel.
Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.

```
Variables :
    U, N
Initialisation :
    Mettre 42 dans U
    Mettre 0 dans N
Traitement :
    Tant que U < 100
       U prend la valeur U × 0,95 + 6
       N prend la valeur N + 1
    Fin du Tant que
Sortie
Afficher N.
```

3) À l'aide de votre calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme.

(…)

Série :	**ES**	**Obligatoire+Spécialité**
Année :	**2013**	
Lieu :	**Asie**	
Références :	**13MAESOJA1+13MAESSJA1**	**Exercice 3 Question 4)b)**

Exercice 3 - 6 points

Le gestionnaire d'une salle de concert constate que, chaque année, le nombre d'abonnés est constitué de 70% des abonnés de l'année précédente, auxquels s'ajoutent 210 nouveaux abonnés.
Le nombre d'abonnés en 2010 était de 600.

1) Calculer le nombre d'abonnés en 2011 et 2012

2) On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 600$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 210$.
On utilise un tableur pour calculer les termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u n
2	0	600
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	

Proposer une formule à écrire en B3 pour calculer u_1 ; cette formule «tirée vers le bas» dans la colonne devra permettre de calculer les valeurs successives de la suite (u_n).

3) On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 700$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,7.
Préciser son premier terme.

b) Justifier que pour tout entier naturel n, $u_n = 700 - 100 \times 0{,}7^n$.

4) **a)** Soit n un entier naturel. Démontrer que $u_n \geqslant 697$ est équivalent à $0{,}7^n \leqslant 0{,}03$.

b) Pour résoudre cette inéquation, on utilise l'algorithme suivant :

```
Variables :        N est un nombre entier naturel

Initialisation :   Affecter à N la valeur 0
                   Affecter à U la valeur 1

Traitement :       Tant que U > 0,03
                         Affecter à N la valeur N + 1.
                         Affecter à U la valeur 0,7 × U.
                   Fin du Tant que

Sortie :           Afficher N.
```

Quelle valeur de N obtient-on en sortie ? (On fera tourner l'algorithme).

c) Retrouvez ce résultat en résolvant l'inéquation $0{,}7^n \leqslant 0{,}03$.

d) En utilisant l'étude précédente de la suite (u_n), déterminer à partir de quelle année le nombre d'abonnés atteindra au moins 697.

Série :	**ES Obligatoire+Spécialité**
Année :	**2013**
Lieu :	**Antilles**
Références :	**Exercice 3 Partie A**

EXERCICE 3
Commun à tous les candidats

En 2005, année de sa création, un club de randonnée pédestre comportait 80 adhérents. Chacune des années suivantes on a constaté que :

— 10 % des participants ne renouvelaient pas leur adhésion au club ;
— 20 nouvelles personnes s'inscrivaient au club.

On suppose que cette évolution reste la même au fil des ans.

Partie A

On donne l'algorithme suivant :

Entrée :	Saisir n entier positif
Traitement :	X prend la valeur 80 (Initialisation) Pour i allant de 1 à n Affecter à X la valeur $0,9X+20$ Fin Pour X prend la valeur de X arrondie à l'entier inférieur
Sortie :	Afficher X

1. Pour la valeur $n=2$ saisie, quelle est la valeur affichée à la sortie de cet algorithme ?
2. Interpréter dans le contexte du club de randonnée, pour la valeur $n=2$ saisie, le nombre affiché à la sortie de cet algorithme.

Partie B

1. On considère la suite (a_n) définie par $a_0=80$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=0,9a_n+20$. Pour tout entier naturel n, on pose : $b_n=a_n-200$.
   a. Démontrer que (b_n) est une suite géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
   b. Exprimer b_n en fonction de n.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $a_n=200-120\times 0,9^n$.
3. Quelle est la limite de la suite (a_n) ?

Partie C

1. L'objectif du président du club est d'atteindre au moins 180 adhérents. Cet objectif est-il réalisable ?
2. Même question si l'objectif du président du club est d'atteindre au moins 300 adhérents.

Série :	**ES Obligatoire+Spécialité**
Année :	**2013**
Lieu :	**Nouvelle Calédonie**
Références :	**Exercice 4 Partie B**

EXERCICE 4
Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[2 ; 5]$ par

$$f(x) = (3-x)e^x + 1,$$

soit f' sa fonction dérivée et soit f'' sa fonction dérivée seconde.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[2 ; 5]$, $f'(x) = (2-x)e^x$ et $f''(x) = (1-x)e^x$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[2 ; 5]$.
3. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2 ; 5]$.
   Montrer que : $3 < \alpha < 4$.
4. **a.** Soit T la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 3.
   Montrer que T a pour équation $y = -e^3x + 3e^3 + 1$.
   b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite T et de l'axe des abscisses.
   c. Étudier le signe de $f''(x)$ sur l'intervalle $[2 ; 5]$ et en déduire la convexité ou la concavité de f sur cet intervalle.
   d. En déduire que : $\alpha < 3 + \dfrac{1}{e^3}$.
   On a donc : $3 < \alpha < 3 + \dfrac{1}{e^3} < 3,05$.
5. On considère l'algorithme suivant :

```
Variables :        a, b, m et r sont des nombres réels
Initialisation :   Affecter à a la valeur 3
                   Affecter à b la valeur 3,05
Entrée :           Saisir r
Traitement :       TANT QUE b − a > r
                      Affecter à m la valeur (a + b)/2
                      SI f(m) > 0
                         ALORS Affecter à a la valeur m
                         SINON Affecter à b la valeur m
                      FIN SI
                   FIN TANT QUE
Sortie :           Afficher a.
                   Afficher b
```

   a. Faire fonctionner l'algorithme précédent avec $r = 0,01$ en recopiant et complétant le tableau ci-dessous. On arrondira au millième les valeurs de $f(m)$.

	$b-a$	$b-a>r$	m	$f(m)$	$f(m)>0$	a	b
Initialisation						3	3,05
étape 1	0,05	oui	3,025	0,485	oui	3,025	3,05
étape 2							
étape 3							

   b. Interpréter les résultats trouvés pour a et b à la fin de l'étape 3.

Série :	**ES Obligatoire+Spécialité**
Année :	**2013**
Lieu :	**Polynésie**
Références :	**Exercice 3 Question 2**

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

La production des perles de culture de Tahiti est une activité économique importante pour la Polynésie Française.

Les montants réalisés à l'exportation des produits perliers de 2008 à 2011 sont donnés dans le tableau suivant, en milliers d'euros :

Années	2008	2009	2010	2011
Valeurs brutes des produits perliers (en milliers d'euros)	81 295	66 052	64 690	63 182

Source : ISPF (Institut de Statistiques de Polynésie Française

1. Montrer que le taux d'évolution annuel moyen des montants à l'exportation des produits perliers de Polynésie entre 2008 et 2011 est – 8,06% arrondi au centième.

   On admet pour la suite de l'exercice, que la production continuera à baisser de 8 % par an à partir de 2011.

2. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un nombre positif P

Traitement :	Affecter la valeur 0 à la variable N {initialisation}
	Affecter la valeur 63 182 à U {initialisation}
	Tant que U > P
	    Affecter la valeur N + 1 à N
	    Affecter la valeur 0,92 ×U à U
	Fin de Tant que
	Affecter la valeur N + 2011 à N

Sortie	Afficher N

   Si on saisit P = 50 000 en entrée, qu'obtient-on en sortie par cet algorithme ? Interpréter ce résultat dans le contexte de la production de perles.

(…)

Série :	**ES**	**Obligatoire+Spécialité**	
Année :	**2013**		
Lieu :	**Pondichéry**		
Références :	**13MAESOIN1+13MAESSIN1**		**Exercice 3 Question 3**

Exercice 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Le 1[er] janvier 2000, un client a placé 3000 € à intérêts composés au taux annuel de 2,5 %. On note C_n le capital du client au 1[er] janvier de l'année $2000 + n$, où n est un entier naturel.

1. Calculer C_1 et C_2. Arrondir les résultats au centime d'euro.

2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n. En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a la relation : $C_n = 3000 \times 1{,}025^n$.

3. On donne l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un nombre S supérieur à 3000

Traitement	Affecter à n la valeur 0. {*Initialisation*}
	Affecter à U la valeur 3000 {*Initialisation*}
	
	Tant que U ≤ S
	    n prend la valeur $n + 1$
	    U prend la valeur U × 1,025
	Fin tant que

Sortie	Afficher le nombre $2000 + n$

a) Pour la valeur S = 3300 saisie, recopier et compléter autant que nécessaire le tableau suivant. Les résultats seront arrondis à l'unité.

Valeur de n	0	1	....	
Valeur de U	3000		....	
Condition U ≤ S	vrai		....	

b) En déduire l'affichage obtenu quand la valeur de S saisie est 3300.

c) Dans le contexte de cet exercice, expliquer comment interpréter le nombre obtenu en sortie de cet algorithme quand on saisit un nombre S supérieur à 3000.

4. Au 1[er] janvier 2013, le client avait besoin d'une somme de 5000 €. Montrer que le capital de son placement n'est pas suffisant à cette date.

5. Déterminer, en détaillant la méthode, à partir du 1[er] janvier de quelle année le client pourrait avoir son capital initial multiplié par 10.

Série :	**ES Obligatoire+Spécialité**	
Année :	**2013**	
Lieu :	**Liban**	
Références :	**13MAESOLI1+13MAESSLI1**	**Exercice 3 Partie B Question 2**

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1{,}2$.

1) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 12$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 12 - 2 \times 0{,}9^n$.

2) Déterminer la limite de la suite (v_n) et en déduire celle de la suite (u_n).

Partie B

En 2012, la ville de Bellecité compte 10 milliers d'habitants. Les études démographiques sur les dernières années ont montré que chaque année :

- 10 % des habitants de la ville meurent ou déménagent dans une autre ville ;
- 1 200 personnes naissent ou emménagent dans cette ville.

1) Montrer que cette situation peut être modélisée par la suite (u_n), où u_n désigne le nombre de milliers d'habitants de la ville de Bellecité l'année $2012 + n$.

2) Un institut statistique décide d'utiliser un algorithme pour prévoir la population de la ville de Bellecité dans les années à venir.
Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il calcule la population de la ville de Bellecité l'année $2012 + n$.

```
VARIABLES
a, i, n.

INITIALISATION
Choisir n
a prend la valeur 10

TRAITEMENT
Pour i allant de 1 à n,
a prend la valeur …………..

SORTIE
Afficher a
```

3) a) Résoudre l'inéquation $12 - 2 \times 0{,}9^n > 11{,}5$.

b) En donner une interprétation.

EXERCICE 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

La population de l'Allemagne (nombre de personnes résidant sur le territoire allemand) s'élevait à 81 751 602 habitants au premier janvier 2011.

De plus, on sait qu'en 2011, le nombre de naissances en Allemagne ne compense pas le nombre de décès, et sans tenir compte des flux migratoires on estime le taux d'évolution de la population allemande à - 0,22%. On admet que cette évolution reste constante les années suivantes.

Les résultats seront arrondis à l'unité.

Partie A

On propose l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir le nombre entier naturel non nul S.

Traitement :	Affecter à U la valeur 81 751 602 (initialisation)
	Affecter à N la valeur 0. (initialisation)
	Tant que U > S
	    Affecter à U la valeur 0,9978×U
	    Affecter à N la valeur N+1
	Fin tant que

Sortie	Afficher N

On saisit en entrée le nombre S = 81 200 000. Recopier et compléter le tableau suivant autant que nécessaire en arrondissant les résultats à l'unité. Quel nombre obtient-on en sortie ?

U	81 751 602	81 571 748	...	
N	0		...	
Test U > S	Vrai		....	

Partie B

On note u_n l'effectif de la population de l'Allemagne au premier janvier 2011 + n.

1. Déterminer u_0 et u_1.
2. a) Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique, de 1er terme 81 751 602 et de raison 0,9978.
   b) Exprimer u_n en fonction de n.
3. Si cette évolution de −0,22% se confirme :
   a) Quel serait l'effectif de la population de l'Allemagne au premier janvier 2035 ?
   b) En quelle année la population passera-t-elle au-dessous du seuil de 81 200 000 habitants ?

Partie C

Dans cette partie, on tient compte des flux migratoires : on estime qu'en 2011, le solde migratoire (différence entre les entrées et les sorties du territoire) est positif en Allemagne et s'élève à 49 800 personnes.
On admet de plus que le taux d'évolution de −0,22% ainsi que le solde migratoire restent constants les années suivant 2011.

1. Modéliser cette situation à l'aide d'une suite (v_n) dont on précisera le premier terme v_0 ainsi qu'une relation entre v_{n+1} et v_n.
2. Calculer v_1 et v_2. Que peut-on conjecturer sur l'évolution de la population de l'Allemagne ?

(Données recueillies par l'Institut national d'études démographiques)

Série :	**ES Obligatoire**
Année :	**2014**
Lieu :	**Afrique**
Références :	**Exercice 3 Question 3**

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Dans une ville, un nouveau lycée vient d'ouvrir ses portes et accueille pour sa première rentrée 500 élèves. D'une année sur l'autre, le proviseur du lycée prévoit une perte de 30 % de l'effectif et l'arrivée de 300 nouveaux élèves.

On modélise cette situation par une suite numérique (u_n) où u_n représente le nombre d'élèves inscrits au lycée pour l'année 2013 + n, avec n entier naturel. On a donc $u_0 = 500$.

1) a) Calculer le nombre d'élèves qui seront inscrits au lycée en 2014.
b) Calculer le nombre d'élèves qui seront inscrits au lycée en 2015.

2) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 300$.

3) On souhaite, pour un entier n donné, afficher tous les termes de la suite (u_n) du rang 0 au rang n.

Lequel des trois algorithmes suivants permet d'obtenir le résultat souhaité ? Justifier.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
Variables : n, i entiers naturels, u nombre réel **Début algorithme** Lire n u prend la valeur 500 Pour i allant de 1 à n Afficher u u prend la valeur $0{,}7\times u + 300$ Fin Pour **Fin algorithme**	**Variables :** n, i entiers naturels, u nombre réel **Début algorithme** Lire n u prend la valeur 500 Pour i allant de 1 à n Afficher u u prend la valeur $0{,}7\times u + 300$ Fin Pour Afficher u **Fin algorithme**	**Variables :** n, i entiers naturels, u nombre réel **Début algorithme** Lire n u prend la valeur 500 Pour i allant de 1 à n u prend la valeur $0{,}7\times u + 300$ Fin Pour Afficher u **Fin algorithme**

4) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 1000$.
a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}7$.
b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1000 - 500\times 0{,}7^n$.
c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
d) Interpréter le résultat précédent.

5) a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_n \geqslant 990$.
b) Interpréter le résultat trouvé précédemment.

Série :	**ES Obligatoire**
Année :	**2014**
Lieu :	**Amérique du Nord**
Références :	**Exercice 4 Question 4**

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Afin d'entretenir une forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.
Le nombre d'arbres de cette forêt est modélisé par une suite notée u où u_n désigne le nombre d'arbres au cours de l'année $(2013 + n)$.

En 2013, la forêt compte 50 000 arbres.

1) a) Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2014.

b) Montrer que la suite u est définie par $u_0 = 50\,000$ et pour tout entier naturel n par la relation $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 3000$.

2) On considère la suite v définie pour tout entier naturel n par $v_n = 60\,000 - u_n$.

a) Montrer que la suite v est une suite géométrique de raison 0,95.
Déterminer son premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 10\,000\,(6 - 0{,}95^n)$.

d) Déterminer la limite de la suite u.

e) Interpréter le résultat précédent.

3) a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_n \geqslant 57000$.

b) Interpréter ce résultat.

4) a) On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite du rang 0 au rang n. Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
Variables : A,U,N sont des nombres **Début de l'algorithme** : Saisir la valeur de A N prend la valeur 0 U prend la valeur 50 000 **Tant que** $U < A$ N prend la valeur N+ 1 U prend la valeur 0,95*U+ 3000 **Fin tant que** Afficher N **Fin algorithme**	**Variables** : U, I, N sont des nombres **Début de l'algorithme** : Saisir la valeur de N U prend la valeur 50 000 **Pour** I variant de 1 à N U prend la valeur 0,95*U+ 3000 **Fin pour** Afficher U **Fin algorithme**	**Variables** : U, I, N sont des nombres **Début de l'algorithme** : Saisir la valeur de N U prend la valeur 50 000 **Pour** I variant de 1 à N Afficher U U prend la valeur 0,95*U+ 3000 **Fin pour** Afficher U **Fin algorithme**

b) Lorsque $A = 57000$, l'algorithme 1 affiche la valeur 24. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

EXERCICE 2

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

Un opérateur de téléphonie mobile constate que, chaque année, il perd 8 % de ses précédent abonnés et que, par ailleurs, il gagne 3 millions de nouveaux abonnés.
En 2013 le nombre d'abonnés est de 20 millions.
On s'intéresse au nombre d'abonnés, en millions, pour l'année $2013+n$. En supposant que cette évolution se poursuit de la même façon, la situation peut être modélisée par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 20 \\ u_{n+1} & = & 0,92u_n+3. \end{array}\right.$$

Le terme u_n donne une estimation du nombre d'abonnés pour l'année $2013+n$.

Partie A

1. **a.** En utilisant cette modélisation, l'opérateur décide d'arrondir les résultats à 10^{-3}.
À quoi correspond ce choix d'arrondi ?
b. Déterminer le nombre d'abonnés en 2014 et en 2015.
On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 37,5$ pour tout entier naturel n.
2. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,92. Préciser son premier terme.
3. Exprimer v_n en fonction de n.
En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = -17,5 \times 0,92^n + 37,5$.
4. Déterminer le nombre d'abonnés en millions en 2020. Arrondir les résultats à 10^{-3}.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n).
6. L'opérateur peut-il espérer dépasser 30 millions d'abonnés ?

Partie B

Compte tenu des investissements, l'opérateur considère qu'il réalisera des bénéfices lorsque le nombre d'abonnés dépassera 25 millions.

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant afin de déterminer le nombre d'années nécessaires à partir de 2013 pour que l'opérateur fasse des bénéfices.

```
Variables :     N un nombre entier naturel non nul
                U un nombre réel
Traitement :    Affecter à U la valeur 20
                Affecter à N la valeur 0
                Tant que ....
                   | affecter à U la valeur 0,92 × U + 3
                   | affecter à N la valeur N + 1
                Fin Tant que
Sortie :        Afficher ....
```

2. En quelle année l'opérateur fera-t-il des bénéfices pour la première fois ?

Série :	**ES Spécialité**
Année :	**2014**
Lieu :	**Antilles**
Références :	**Exercice 2 Question 2**

EXERCICE 2
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les services commerciaux d'une grande surface de produits alimentaires ont défini un profil de client qui a été appelé « consommateur bio ».

Sur la base d'observations réalisées les années précédentes, il a été constaté que :

90 % des clients « consommateur bio » maintenaient cette pratique l'année suivante ;

15 % des clients n'ayant pas le profil de « consommateur bio » entraient dans la catégorie « consommateur bio » l'année suivante.

On suppose que cette évolution se poursuit d'une année à l'autre à partir de 2013, année au cours de laquelle il a été constaté que 20 % des clients ont le profil « consommateur bio ».
Par un tirage aléatoire effectué tous les ans, on choisit un client de cette grande surface.
Pour tout nombre entier naturel n on note :

b_n, la probabilité que le client choisi lors de l'année 2013 + n soit un « consommateur bio » ;

c_n, la probabilité que le client choisi lors de l'année $2013 + n$ ne soit pas un « consommateur bio » ;

P_n, la matrice ligne $(b_n \ c_n)$ donnant l'état probabiliste lors de l'année $2013 + n$.

1. **a.** Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets B et C où B correspond à l'état « consommateur bio ».
   b. Donner P_0 l'état probabiliste en 2013 et la matrice M de transition correspondant à ce graphe, les sommets B et C étant classés dans cet ordre.
   c. On donne la matrice M^2 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0,825 & 0,175 \\ 0,2625 & 0,7375 \end{pmatrix}.$$

   En précisant la méthode de calcul, déterminer la probabilité que le client choisi en 2015 soit un « consommateur bio ».
   d. Déterminer l'état stable $(b \ c)$ du graphe probabiliste.
2. Le directeur du supermarché affirme que, dans un futur proche, plus de la moitié de sa clientèle aura le profil de « consommateur bio ».
   a. Recopier et compléter l'algorithme suivant qui doit permettre de déterminer le nombre minimal d'années pour que l'affirmation du directeur soit vérifiée.

Variables :	N un nombre entier naturel non nul
	B un nombre réel
Traitement :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à B la valeur 0,2
	Affecter à C la valeur 0,8
	Tant que ...
	affecter à B la valeur $0,9 \times B + 0,15 \times C$
	affecter à C la valeur $1 - B$
	affecter à N la valeur $N + 1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher ...

   b. Déterminer le nombre minimal d'années recherché en expliquant la démarche.

Série :	**ES Obligatoire+Spécialité**
Année :	**2014**
Lieu :	**Asie**
Références :	**14MAELJA1+14MAESSJA1 Exercice 4 Partie B**

Exercice 4 – 6 points

On étudie l'évolution de la population d'une ville, depuis le 1er janvier 2008.

Partie A : *un premier modèle.*

Pour cette partie, on admet que la population augmente de 3,5 % par an depuis le 1er janvier 2008.

1. Déterminer le pourcentage d'augmentation de la population entre le 1er janvier 2008 et le 1er janvier 2014. Donner une réponse à 0,1% près.

2. À partir de 2008, on modélise la population de cette ville au 1er janvier à l'aide d'une suite :
   Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'habitants, exprimé en centaines de milliers d'habitants, au 1er janvier de l'année 2008 + n.
   Au 1er janvier 2008, cette ville comptait 100 000 habitants.
   a. Que vaut u_0 ?
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1{,}035^n$.
   c. Suivant ce modèle, en quelle année la population aura-t-elle doublé ? Justifier la réponse.

Partie B : *un second modèle.*

On modélise la population de cette ville à partir du 1er janvier 2008 par la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{3}{1+2e^{-0{,}05x}}$ où x désigne le nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2008 et $f(x)$ le nombre d'habitants en centaines de milliers.

On admet que f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

1. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation:	X prend la valeur 0
Traitement :	Tant que $f(X) \leq 2$
	X prend la valeur X +1
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher X

Si l'on fait fonctionner cet algorithme, alors le résultat affiché en sortie est 28.
Interpréter ce résultat dans le contexte de ce problème.

Exercice 2 : (5 points)

À l'automne 2010, Claude achète une maison à la campagne ; il dispose d'un terrain de 1500m^2 entièrement engazonné. Mais tous les ans, 20% de la surface engazonnée est détruite et remplacée par de la mousse. Claude arrache alors, à chaque automne, la mousse sur une surface de 50m^2 et la remplace par du gazon.

Pour tout nombre entier naturel n, on note u_n la surface en m^2 de terrain engazonné au bout de n années, c'est-à-dire à l'automne 2010 + n. On a donc $u_0 = 1\,500$.

1. Calculer u_1.

2. Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8\, u_n + 50$.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout nombre entier naturel n par : $v_n = u_n - 250$.
a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
b) Exprimer v_n en fonction de n.
En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 250 + 1\,250 \times 0{,}8^n$.
c) Quelle est la surface de terrain engazonné au bout de 4 années ?

4. *a)* Déterminer par le calcul la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que :
$$250 + 1\,250 \times 0{,}8^n < 500$$
Interpréter le résultat obtenu.
b) Compléter l'algorithme fourni en **annexe 1** pour qu'il affiche la solution obtenue à la question précédente.

5. Claude est certain que les mauvaises herbes ne peuvent envahir la totalité de son terrain. A-t-il raison ? Justifier la réponse.

Annexe 1

```
Initialisation
u prend la valeur 1500
n prend la valeur 0
Traitement
Tant que ………… faire
  u prend la valeur ………………
  n prend la valeur ………………
Fin Tant que
Sortie
Afficher n
```

Série :	**ES Spécialité**		
Année :	**2014**		
Lieu :	**Métropole**		
Références :	**14MAELMLR1+14MAESSMLR1**	**Exercice 2 Question 3**	

Exercice 2 : (5 points)

Alice participe à une compétition de tir à l'arc ; elle effectue plusieurs lancers de flèches.
Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à 0,9.
Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, Alice se déconcentre et la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à 0,4.
On suppose qu'au premier lancer, elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.
Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note :

a_n la probabilité qu'Alice atteigne la cible au n-ième lancer ;
b_n la probabilité qu'Alice manque la cible au n-ième lancer ;
$P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste au n-ième lancer.

1. ***a)*** Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B (A représentant l'état « Alice atteint la cible » et B l'état « Alice manque sa cible »).

b) Indiquer la matrice de transition M associée à ce graphe. On prendra les sommets A et B dans l'ordre (A, B).

c) Justifier que $P_1 = (0{,}5 \quad 0{,}5)$ et $P_2 = (0{,}65 \quad 0{,}35)$.

2. ***a)*** Montrer que, pour tout nombre entier n strictement positif, $a_{n+1} = 0{,}9a_n + 0{,}4b_n$.

b) En déduire que, pour tout nombre entier n strictement positif, $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}4$.

3. ***a)*** Compléter l'algorithme fourni en **annexe 1** de façon à ce qu'il affiche l'état probabiliste au n-ième lancer.

b) Déterminer l'affichage de cet algorithme pour $n = 5$.

4. ***a)*** On considère la suite (u_n) définie pour tout nombre entier naturel n strictement positif par : $u_n = a_n - 0{,}8$.
Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Donner l'expression de u_n en fonction de n, puis en déduire que pour tout nombre entier naturel n strictement positif, $a_n = 0{,}8 - 0{,}3 \times 0{,}5^{n-1}$.

Annexe 1

Entrées
Saisir n.
Traitement
a prend la valeur 0,5
b prend la valeur 0,5
Pour i allant de 2 à n
  a prend la valeur …… × a + ……
  b prend la valeur 1 – a
Fin Pour
Sortie
Afficher a, b

Série :	**ES**	**Obligatoire+Spécialité**
Année :	**2014**	
Lieu :	**Nouvelle Calédonie**	
Références :	**Exercice 4 Question 3**	

EXERCICE 4
Commun à tous les candidats

On a utilisé un logiciel de calcul formel et on a obtenu les résultats suivants :

1	dériver $\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$	$\frac{1-\ln(x)}{x^2}$
2	dériver $\left(\frac{1}{x^2}\right)$	$-\frac{2}{x^3}$
3	dériver $\left(\frac{\ln(x)}{x^2}\right)$	$\frac{1-2\ln(x)}{x^3}$

On pourra utiliser les résultats obtenus par ce logiciel pour répondre à certaines questions de l'exercice.
On considère la fonction f définie sur $[1\,;10]$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.
La fonction f est deux fois dérivable sur $[1\,;10]$, on note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

1. **a.** Déterminer $f'(x)$ sur $[1\,;10]$.
   b. Construire le tableau de variation de la fonction f sur $[1\,;10]$.

2. **a.** Justifier que $f''(x) = \dfrac{2\ln(x) - 3}{x^3}$ sur $[1\,;10]$.
   b. Étudier le signe de f'' sur $[1\,;10]$.
   c. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ possède un point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

3. On considère l'algorithme suivant :

```
INITIALISATION
              X PREND LA VALEUR 2
              Y PREND LA VALEUR ln(2)/2
              Z PREND LA VALEUR ln(2,1)/2,1
TRAITEMENT
              TANT QUE (Y < Z) FAIRE
                  X PREND LA VALEUR X + 0,1
                  Y PREND LA VALEUR ln(X)/X
                  Z PREND LA VALEUR ln(X+0,1)/(X+0,1)
              FIN TANT QUE
SORTIE
              AFFICHER X
```

   a. Recopier et compléter le tableau suivant où les résultats sont arrondis au dix millième :

X	Y	Z	Test : $Y < Z$
2	0,346 6	0,353 3	vrai
2,1	0,353 3	0,358 4	vrai
2,2	...		

   b. Quelle est la valeur affichée en sortie ? Que représente-t-elle pour la fonction f ?

Série : ES Obligatoire+Spécialité
Année : 2014
Lieu : Polynésie
Références : 14MAELPO1+14MAESSPO1 Exercice 3 Partie A Question 1

EXERCICE 3 (5 points) Commun à tous les candidats

La suite (u_n) est définie pour tout nombre entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$$

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n non nul donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.
Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient.
Indiquer lequel et justifier pourquoi les deux autres ne peuvent donner le résultat attendu.

```
Variables :
U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers
Début
  Saisir une valeur pour N
  U prend la valeur 5
  Pour i de 0 à N faire
  | Affecter à U la valeur 1/2 × U + 1
  Fin Pour
  Afficher U
Fin
```

algorithme 1

```
Variables :
U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers
Début
  Saisir une valeur pour N
  Pour i de 0 à N faire
  | U prend la valeur 5
  | Afficher U
  | Affecter à U la valeur 1/2 × U + 1
  Fin Pour
Fin
```

algorithme 2

```
Variables :
U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers
Début
  Saisir une valeur pour N
  U prend la valeur 5
  Pour i de 0 à N faire :
  | Afficher U
  | Affecter à U la valeur 1/2 × U + 1
  Fin Pour
Fin
```

algorithme 3

2. On saisit la valeur 9 pour N, l'affichage est le suivant :

5	3,5	2,75	2,375	2,1875	2,0938	2,0469	2,0234	2,0117	2,0059

Quelle conjecture peut-on émettre sur le sens de variation de cette suite ?

Partie B

On introduit une suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 2$.

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison q et son premier terme v_0.

2. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a $u_n = 2 + 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

3. Etudier les variations de la suite (u_n).

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

5. À partir de quel rang a-t-on : $u_n - 2 \leqslant 10^{-6}$?

EXERCICE 2 (5points)

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

Une association décide d'ouvrir un centre de soin pour les oiseaux sauvages victimes de la pollution. Leur but est de soigner puis relâcher ces oiseaux une fois guéris.

Le centre ouvre ses portes le 1er janvier 2013 avec 115 oiseaux.

Les spécialistes prévoient que 40 % des oiseaux présents dans le centre au 1er janvier d'une année restent présents le 1er janvier suivant et que 120 oiseaux nouveaux sont accueillis dans le centre chaque année.

On s'intéresse au nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1er janvier des années suivantes. La situation peut être modélisée par une suite (u_n) admettant pour premier terme $u_0 = 115$, le terme u_n donnant une estimation du nombre d'oiseaux l'année $2013 + n$.

1. Calculer u_1 et u_2. Avec quelle précision convient-il de donner ces résultats ?
2. Les spécialistes déterminent le nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1er janvier de chaque année à l'aide d'un algorithme.

   a) Parmi les trois algorithmes proposés ci-dessous, seul **l'algorithme 3** permet d'estimer le nombre d'oiseaux présents au 1er janvier de l'année $2013 + n$.
   Expliquer pourquoi les deux premiers algorithmes ne donnent pas le résultat attendu.

```
Variables :
U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers
Début
  Saisir une valeur pour N
  Affecter 115 à U
  Pour i de 1 à N faire
  | Affecter 0,6×U+120 à U
  Fin Pour
  Afficher U
Fin
```
algorithme 1

```
Variables :
U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers
Début
  Saisir une valeur pour N
  Pour i de 1 à N faire
  | Affecter 115 à U
  | Affecter 0,4×U+115 à U
  Fin Pour
  Afficher U
Fin
```
algorithme 2

```
Variables :
U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers
Début
  Saisir une valeur pour N
  Affecter 115 à U
  Pour i de 1 à N faire
  | Affecter 0,4×U+120 à U
  Fin Pour
  Afficher U
Fin
```
algorithme 3

   b) Donner, pour tout entier naturel n, l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 200$.

   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,4. Préciser v_0.

   b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

   c) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 200 - 85 \times 0,4^n$.

   d) La capacité d'accueil du centre est de 200 oiseaux. Est-ce suffisant ? Justifier la réponse.

4. Chaque année, le centre touche une subvention de 20 euros par oiseau présent au 1er janvier.

   Calculer le montant total des subventions perçues par le centre entre le 1er janvier 2013 et le 31 décembre 2018 si l'on suppose que l'évolution du nombre d'oiseaux se poursuit selon les mêmes modalités durant cette période.

Série : **ES** **Spécialité**
Année : **2014**
Lieu : **Pondichéry**
Références : **14MAESSIN1** **Exercice 2 Partie A Question 3**

EXERCICE 2 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes.

Deux sociétés, Ultra-eau (U) et Vital-eau (V), se partagent le marché des fontaines d'eau à bonbonnes dans les entreprises d'une grande ville.

Partie A

En 2013, l'entreprise U avait 45 % du marché et l'entreprise V le reste.

Chaque année, l'entreprise U conserve 90 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise V. Quant à l'entreprise V, elle conserve 85 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise U.

On choisit un client au hasard tous les ans et on note pour tout entier naturel n :
u_n la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise U l'année $2013+n$, ainsi $u_0 = 0,45$;
v_n la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise V l'année $2013+n$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets U et V.

2. Donner v_0, calculer u_1 et v_1.

3. On considère l'algorithme (incomplet) donné **en annexe**. Celui-ci doit donner en sortie les valeurs de u_n et v_n pour un entier naturel n saisi en entrée.
Compléter les lignes (L5) et (L8) de l'algorithme pour obtenir le résultat attendu.

4. On admet que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 0,75u_n + 0,15$. On note, pour tout nombre entier naturel n, $w_n = u_n - 0,6$.

a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 0,75.

b) Quelle est la limite de la suite (w_n) ? En déduire la limite de la suite (u_n). Interpréter le résultat dans le contexte de cet exercice.

(…)

Annexe à l'exercice 2

Recopier sur la copie la partie « traitement »(lignes L3 à L9) en complétant les lignes L5 et L8

Variables :	N un nombre entier naturel non nul	L1
	U et V des nombres réels	L2
Traitement :	Saisir une valeur pour N	L3
	Affecter à U la valeur 0,45	L4
	Affecter à V la valeur ……	L5
	Pour i allant de 1 jusqu'à N	L6
	affecter à U la valeur 0,9×U+0,15×V	L7
	affecter à V la valeur ………	L8
	Fin Pour	L9
Sortie :	Afficher U et Afficher V	L8

Série :	**ES**	**Obligatoire**	
Année :	**2014**		
Lieu :	**Liban**		
Références :	**14MAELLI1**		**Exercice 2 Partie A Question 3**

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes le 2 janvier 2013 et a enregistré 2500 inscriptions en 2013.
Elle estime que, chaque année, 80 % des anciens inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 400 nouveaux adhérents.

On modélise cette situation par une suite numérique (a_n).
On note $a_0 = 2500$ le nombre d'inscrits à la médiathèque en 2013 et a_n représente le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année 2013 + n.

1) **a)** Calculer a_1 et a_2.
b) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a la relation $a_{n+1} = 0,8 \times a_n + 400$.

2) On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = a_n - 2000$.
a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 500$ et de raison $q = 0,8$.
b) En déduire que le terme général de la suite (a_n) est $a_n = 500 \times 0,8^n + 2000$.
c) Calculer la limite de la suite (a_n).
d) Que peut-on en déduire pour le nombre d'adhérents à la médiathèque si le schéma d'inscription reste le même au cours des années à venir ?

3) On propose l'algorithme suivant :

```
Variables :        N entier,
                   A réel.
Initialisation :   N prend la valeur 0
                   A prend la valeur 2 500
Traitement :       Tant que A – 2000 > 50
                        A prend la valeur A×0,8+ 400
                        N prend la valeur N + 1
                   Fin du Tant que
Sortie :           Afficher N.
```

a) Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme et interpréter la réponse dans le contexte de l'exercice.

Série :	**ES Obligatoire+Spécialité**
Année :	**2014 (Rattrapage 2ème session)**
Lieu :	**Polynésie**
Références :	**14MAELPO3+14MAESSPO3 Exercice 3 Question 4b**

EXERCICE 4 (6 points) Commun à tous les candidats

Une personne décide d'ouvrir un compte épargne le premier janvier 2014 et d'y placer 2000 euros. Le placement à intérêts composés est au taux annuel de 3 %. Elle verse 150 euros sur ce compte tous les 1er janvier suivants.

Pour tout entier naturel n , on note u_n le montant présent sur ce compte au premier janvier de l'année $2014+n$ après le versement de 150 euros. On a $u_0 = 2000$.

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Partie A

1. Calculer les termes u_1 et u_2 de la suite (u_n).

2. Justifier que pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} = 1,03u_n + 150$.

3. Pour tout entier n, on pose $v_n = u_n + 5000$.
Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,03.

4. Exprimer v_n en fonction de n et en déduire que pour tout nombre entier n on a :
$u_n = 7000 \times 1,03^n - 5000$.

5. À partir de quelle année, cette personne aura-t-elle au moins 4000 euros sur son compte épargne ? Indiquer la façon dont la réponse a été trouvée.

Partie B

L'algorithme ci-dessous modélise l'évolution d'un autre compte épargne, ouvert le premier janvier 2014, par une seconde personne.

Variables :	C et D sont des nombres réels
	N est un nombre entier
Entrée :	Saisir une valeur pour C
Traitement :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à D la valeur 2×C
	Tant que C<D faire
	affecter à C la valeur 1,03×C+600
	affecter à N la valeur N+1
	Fin du Tant que
Sortie :	Afficher N

1. a) Que représente la variable C dans cet algorithme ?

b) Quel est le taux de ce placement ?

c) Quel est le versement annuel fait par cette personne ?

2. On saisit, pour la variable C, la valeur 3000.

a) Pour cette valeur de C, en suivant pas à pas l'algorithme précédent, recopier le tableau suivant et le compléter en ajoutant autant de colonnes que nécessaire.

Valeur de C	3000			
Valeur de N	0			
Valeur de D	6000			
Test C<D	vrai			

....

b) Qu'affiche l'algorithme ? Interpréter ce résultat.

Série :	**S**	**Obligatoire+Spécialité**
Année :	**2015**	
Lieu :	**Centres Etrangers**	
Références :	**15MASCOG11+15MASCSG11**	**Exercice 3 Question 4**

Exercice 3 (7 points)

commun à tous les candidats

Soit a un nombre réel fixé non nul.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par : $u_0 = a$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}$.

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = e^{u_n}\left(e^{u_n} - 1\right)$.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par : $g(x) = e^{2x} - e^x - x$.

a) Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = \left(e^x - 1\right)\left(2e^x + 1\right)$.

b) Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.

c) En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n).

2. Dans cette question, on suppose que $a \leq 0$.

a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq 0$.

b) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

c) Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n).

3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

La suite (u_n) étant croissante, la question **1.** permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq a$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq a + n \times g(a)$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Dans cette question, on prend $a = 0,02$.

L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$, où M désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur 0,02 n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que …………. …………………. …………………. Fin tant que
Sortie	Afficher n

a) Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $M = 60$.

Série :	**S**	**Obligatoire**	
Année :	**2015**		
Lieu :	**Amérique du Nord**		
Références :	**15MASCOAN1**		**Exercice 2 Question 1b**

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel n, on définit les points (A_n) par leurs coordonnées $(x_n\,;\,y_n)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 4 \end{cases} \quad \text{et pour tout entier naturel } n : \begin{cases} x_{n+1} = 0,8x_n - 0,6y_n \\ y_{n+1} = 0,6x_n + 0,8y_n \end{cases}$$

1. **a)** Déterminer les coordonnées des points A_0, A_1 et A_2.

b) Pour construire les points A_n ainsi obtenus, on écrit l'algorithme suivant :

```
Variables :
i, x, y, t : nombres réels

Initialisation :
x prend la valeur −3
y prend la valeur 4

Traitement :
Pour i allant de 0 à 20
        Construire le point de coordonnées (x; y)
        t prend la valeur x
        x prend la valeur ..........
        y prend la valeur ..........
Fin Pour
```

Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il construise les points A_0 à A_{20}.

(…)

EXERCICE 4 *(5 points)*

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

```
Variables :    k et p sont des entiers naturels
               u est un réel
Entrée :       Demander la valeur de p
Traitement :   Affecter à u la valeur 5
                 Pour k variant de 1 à p
                   Affecter à u la valeur 0,5u + 0,5(k − 1) − 1,5
                 Fin de pour
Sortie :       Afficher u
```

Faire fonctionner cet algorithme pour $p = 2$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape. Quel nombre obtient-on en sortie ?

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = 0{,}5u_n + 0{,}5n - 1{,}5.$$

1. Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p.
2. À l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi $p = 4$, on obtient les résultats suivants :

n	1	2	3	4
u_n	1	$-0{,}5$	$-0{,}75$	$-0{,}375$

Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ? Justifier.

(…)

EXERCICE 4 *(5 points)*

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

*Les **parties A** et **B** peuvent être traitées de façon indépendante.*

Partie A

Pour deux entiers naturels non nuls a et b, on note $r(a, b)$ le reste dans la division euclidienne de a par b.

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	c est un entier naturel
	a et b sont des entiers naturels non nuls
Entrées :	Demander a
	Demander b
Traitement :	Affecter à c le nombre $r(a, b)$
	Tant que $c \neq 0$
	Affecter à a le nombre b
	Affecter à b la valeur de c
	Affecter à c le nombre $r(a, b)$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher b

1. Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 26$ et $b = 9$ en indiquant les valeurs de a, b et c à chaque étape.
2. Cet algorithme donne en sortie le PGCD des entiers naturels non nuls a et b.
Le modifier pour qu'il indique si deux entiers naturels non nuls a et b sont premiers entre eux ou non.

(…)

Exercice 2 (4 points)

commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

(…)

4. On considère l'algorithme suivant :

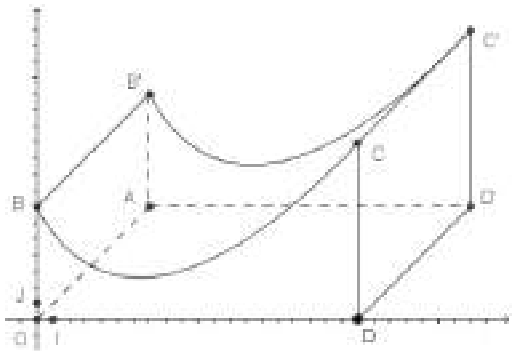
VARIABLES	a, b sont deux nombres réels tels que $a < b$ x est un nombre réel f est une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$

TRAITEMENT	Lire a et b
	Tant que $b - a > 0,3$
	    x prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
	    Si $f(x)f(a) > 0$, alors a prend la valeur x
	        sinon b prend la valeur x
	    Fin Si
	Fin Tant que
	Afficher $\dfrac{a+b}{2}$

Affirmation 4 : si l'on entre $a = 1$, $b = 2$ et $f(x) = x^2 - 3$, alors l'algorithme affiche en sortie le nombre 1,6875.

Série :	**S Obligatoire+Spécialité**	
Année :	**2015**	
Lieu :	**Métropole**	
Références :	**15MASCOMLR1+15MASCSMLR1**	**Exercice 4 Partie 2 Question 3**

Exercice 4 **(6 points)** **Commun à tous les candidats**



Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune.
Le dessin ci-contre en fournit une perspective cavalière. Les quadrilatères OAD'D, DD'C'C, et OAB'B sont des rectangles.
Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité est le mètre. La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit, DD' = 10, sa longueur OD est de 20 mètres.

Le but du problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre.

Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 20]$ par

$$f(x)=(x+1)\ln(x+1)-3x+7$$

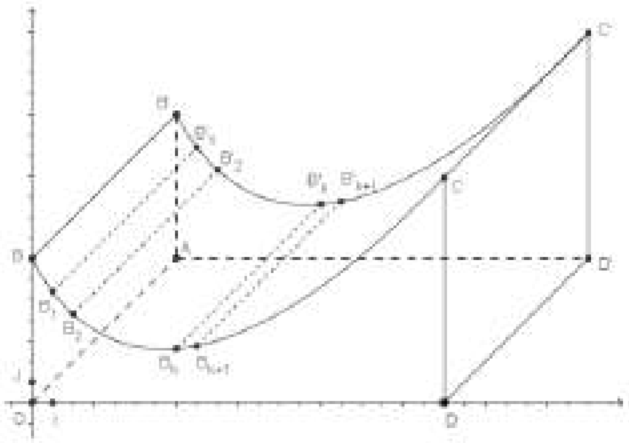
(…)

Partie 2

(…)

3. On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module.

Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère (O, I, J) du plan de face, les points $B_k\,(k\,;f(k))$ pour k variant de 0 à 20.
Ainsi, $B_0 = B$.
On décide d'approcher l'arc de la courbe $\mathscr{C}$ allant de B_k à B_{k+1} par le segment $[B_kB_{k+1}]$.
Ainsi l'aire de la surface à peindre sera approchée par la somme des aires des rectangles du type $B_k\ B_{k+1}\ B'_{k+1}\ B'_k$ (voir figure).



a. Montrer que pour tout entier k variant de 0 à 19, $B_kB_{k+1}=\sqrt{1+(f(k+1)-f(k))^2}$.

b. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche une estimation de l'aire de la partie roulante.

Variables Fonction	S: réel K: entier f : définie par $f(x)=(x+1)\ln(x+1)-3x+7$
Traitement	S prend pour valeur 0 Pour K variant de …… à …… S prend pour valeur …………………… Fin Pour
Sortie	Afficher …..

EXERCICE 4 (5 points)

(candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On considère deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0 = 300$, $a_0 = 450$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$

$$\begin{cases} d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70 \end{cases}$$

1) Calculer d_1 et a_1.

2) On souhaite écrire un algorithme qui permet d'afficher en sortie les valeurs de d_n et a_n pour une valeur entière de n saisie par l'utilisateur.
L'algorithme suivant est proposé :

Variables :	n et k sont des entiers naturels D et A sont des réels
Initialisation :	D prend la valeur 300 A prend la valeur 450 Saisir la valeur de n

Traitement :	Pour k variant de 1 à n
	    D prend la valeur $\frac{D}{2} + 100$
	    A prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{D}{2} + 70$
	Fin pour

Sortie :	Afficher D Afficher A

a) Quels nombres obtient-on en sortie de l'algorithme pour $n = 1$?
Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus à la question **1)** ?

b) Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.

(…)

EXERCICE 5 (5 points)

Soit (v_n) la suite définie par $v_1 = \ln(2)$ et, pour tout entier naturel n non nul, $v_{n+1} = \ln\left(2 - e^{-v_n}\right)$.

On admet que cette suite est définie pour tout entier naturel n non nul.

On définit ensuite la suite (S_n) pour tout entier naturel n non nul par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

Le but de cet exercice est de déterminer la limite de (S_n).

Partie A Conjectures à l'aide d'un algorithme

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant qui calcule et affiche la valeur de S_n pour une valeur de n choisie par l'utilisateur :

Variables :	n, k entiers
	S, v réels
Initialisation :	Saisir la valeur de n
	v prend la valeur ...
	S prend la valeur ...
Traitement :	Pour k variant de ... à ... faire
	... prend la valeur ...
	... prend la valeur ...
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

2. À l'aide de cet algorithme, on obtient quelques valeurs de S_n. Les valeurs arrondies au dixième sont données dans le tableau ci-dessous :

n	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
S_n	2,4	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8

En expliquant votre démarche, émettre une conjecture quant au comportement de la suite (S_n).

(…)

EXERCICE 4 (5 points)

Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.

Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on considère les points M, N et P de coordonnées respectives $M\left(1;\ 1; \frac{3}{4}\right)$, $N\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$, $P\left(1; 0; -\frac{5}{4}\right)$.

1. Placer M, N et P sur la figure donnée en annexe page 7/7.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.
   En déduire que les points M, N et P ne sont pas alignés.
3. On considère l'algorithme 1 donné en annexe page 7/7.
   a. Exécuter *à la main* cet algorithme avec les coordonnées des points M, N et P données ci- dessus.
   b. À quoi correspond le résultat affiché par l'algorithme ? Qu'en déduire pour le triangle MNP ?
4. On considère l'algorithme 2 donné en annexe page 7/7. Le compléter pour qu'il teste et affiche si un triangle MNP est rectangle et isocèle en M.
5. On considère le vecteur $\vec{n}(5\ ; -8\ ; 4)$ normal au plan (MNP).
   a. Déterminer une équation cartésienne du plan (MNP).
   b. On considère la droite Δ passant par F et de vecteur directeur $\vec{n}$.
   Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
6. Soit K le point d'intersection du plan (MNP) et de la droite Δ.
   a. Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{4}{7}; \frac{24}{35}; \frac{23}{35}\right)$.
   b. On donne $FK = \sqrt{\frac{27}{35}}$.
   Calculer le volume du tétraèdre $MNPF$.

Algorithme 1

```
Saisir x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P
d prend la valeur x_N − x_M
e prend la valeur y_N − y_M
f prend la valeur z_N − z_M
g prend la valeur x_P − x_M
h prend la valeur y_P − y_M
i prend la valeur z_P − z_M
k prend la valeur d × g + e × h + f × i
Afficher k
```

Algorithme 2 (à compléter)

```
Saisir x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P
d prend la valeur x_N − x_M
e prend la valeur y_N − y_M
f prend la valeur z_N − z_M
g prend la valeur x_P − x_M
h prend la valeur y_P − y_M
i prend la valeur z_P − z_M
k prend la valeur d × g + e × h + f × i
```

Série :	**S**	**Spécialité**	
Année :	**2015**		
Lieu :	**Pondichéry**		
Références :	**15MASCSIN1**		**Exercice 4 Question 4**

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les nombres de la forme $2^n - 1$ où n est un entier naturel non nul sont appelés **nombres de Mersenne**.

1. On désigne par a, b et c trois entiers naturels non nuls tels que PGCD $(b, c) = 1$.

   Prouver, à l'aide du théorème de Gauss, que :

   si b divise a et c divise a alors le produit bc divise a.

2. On considère le nombre de Mersenne $2^{33} - 1$.
   Un élève utilise sa calculatrice et obtient les résultats ci-dessous.

$(2^{33}-1)\div 3$	
	2863311530
$(2^{33}-1)\div 4$	
	2147483648
$(2^{33}-1)\div 12$	
	715827882.6

   Il affirme que 3 divise $2^{33} - 1$ et 4 divise $2^{33} - 1$ et 12 ne divise pas $2^{33} - 1$.

   a. En quoi cette affirmation contredit-elle le résultat démontré à la question 1. ?

   b. Justifier que, en réalité, 4 ne divise pas $2^{33} - 1$.

   c. En remarquant que $2 \equiv -1\ [3]$, montrer que, en réalité, 3 ne divise pas $2^{33} - 1$.

   d. Calculer la somme $S = 1 + 2^3 + (2^3)^2 + (2^3)^3 + \ldots + (2^3)^{10}$.

   e. En déduire que 7 divise $2^{33} - 1$.

3. On considère le nombre de Mersenne $2^7 - 1$. Est-il premier ? Justifier.

4. On donne l'algorithme suivant où MOD (N,k) représente le reste de la division euclidienne de N par k.

Variables :	n entier naturel supérieur ou égal à 3
	k entier naturel supérieur ou égal à 2
Initialisation :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
	Affecter à k la valeur 2 .
Traitement :	Tant que MOD $(2^n - 1, k) \neq 0$ et $k \leq \sqrt{2^n - 1}$
	Affecter à k la valeur $k + 1$
	Fin de Tant que.
Sortie :	**Afficher** k.
	Si $k > \sqrt{2^n - 1}$
	Afficher « CAS 1 »
	Sinon
	Afficher « CAS 2 »
	Fin de Si

   a. Qu'affiche cet algorithme si on saisit $n = 33$? Et si on saisit $n = 7$?

   b. Que représente le CAS 2 pour le nombre de Mersenne étudié ? Que représente alors le nombre k affiché pour le nombre de Mersenne étudié ?

   c. Que représente le CAS 1 pour le nombre de Mersenne étudié ?

EXERCICE 2 (6 points)

On définit la suite (u_n) de la façon suivante : pour tout entier naturel n, $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$.
2. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$.
   b) En déduire la valeur exacte de u_1.
3. a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang n de la suite (u_n) où n est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

```
Variables :       i et n sont des entiers naturels
                  u est un réel
Entrée :          Saisir n
Initialisation :  Affecter à u la valeur ...
Traitement :      Pour i variant de 1 à ...
                  |  Affecter à u la valeur ...
                  Fin de Pour
Sortie :          Afficher u
```

   b) À l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	10	50	100
u_n	0,6931	0,3069	0,1931	0,1402	0,1098	0,0902	0,0475	0,0099	0,0050

   Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ?
4. a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
5. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Démontrer que $\ell = 0$.

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

Depuis le 1er janvier 2015, une commune dispose de vélos en libre service. La société Bicycl'Aime est chargée de l'exploitation et de l'entretien du parc de vélos.

La commune disposait de 200 vélos au 1er janvier 2015.

La société estime que, chaque année, 15 % des vélos sont retirés de la circulation à cause de dégradations et que 42 nouveaux vélos sont mis en service.

On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de vélos de cette commune au 1er janvier de l'année $2015 + n$.

1) Déterminer le nombre de vélos au 1er janvier 2016.

2) Justifier que la suite (u_n) est définie par $u_0 = 200$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = 0{,}85u_n + 42\ .$$

3) On donne l'algorithme suivant :

```
Variables :        N entier
                   U réel
Initialisation :   N prend la valeur 0
                   U prend la valeur 200
Traitement :       Tant que N < 4
                       U prend la valeur 0,85× U + 42
                       N prend la valeur N + 1
                   Fin tant que
Sortie :           Afficher U
```

a) Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les résultats à l'unité. Quel nombre obtient-on à l'arrêt de l'algorithme ?

U	200				
N	0	1	2	3	4
Condition N < 4	Vrai				

b) Interpréter la valeur du nombre U obtenue à l'issue de l'exécution de cet algorithme.

(…)

Série :	**ES**	**Obligatoire + Spécialité**
Année :	**2015**	
Lieu :	**Amérique du Nord**	
Références :	**15MAELAN1+15MAESSAN1**	**Exercice 3 Partie A Questions 3 et 4**

EXERCICE 3 (6 points)

Commun à tous les candidats

Dans une réserve naturelle, on étudie l'évolution de la population d'une race de singes en voie d'extinction à cause d'une maladie.

Partie A

Une étude sur cette population de singes a montré que leur nombre baisse de 15 % chaque année.
Au 1er janvier 2004, la population était estimée à 25 000 singes.
À l'aide d'une suite, on modélise la population au 1er janvier de chaque année. Pour tout entier naturel n, le terme u_n de la suite représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année $2004 + n$.
On a ainsi $u_0 = 25\,000$.

1) Calculer l'effectif de cette population de singes :

a) au 1er janvier 2005,

b) au 1er janvier 2006, en arrondissant à l'entier.

2) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 25\,000 \times 0{,}85^n$.

3) Suivant ce modèle, on souhaite savoir, à l'aide d'un algorithme, au bout de combien d'années après le 1er janvier 2004 le nombre de singes sera inférieur à 5 000.
Recopier et compléter les lignes L4, L5 et L6 de l'algorithme ci-dessous.

L1 : Variables	u un réel, n un entier
L2 : Initialisation	u prend la valeur 25 000
L3 :	n prend la valeur 0
L4 : Traitement	Tant que ……………….. faire
L5 :	u prend la valeur …………..
L6 :	n prend la valeur …………
L7 :	Fin Tant que
L8 : Sortie	Afficher n

4) Montrer que la valeur de n affichée après l'exécution de l'algorithme est 10.

(…)

Série :	**ES**	**Obligatoire + Spécialité**
Année :	**2015**	
Lieu :	**Antilles**	
Références :		**Exercice 3 Question 1**

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

En 2010, un opérateur de téléphonie mobile avait un million de clients. Depuis, chaque année, l'opérateur perd 10 % de ses clients, mais regagne dans le même temps 60 000 nouveaux clients.

1) a) On donne l'algorithme ci-dessous. Expliquer ce que l'on obtient avec cet algorithme.

```
Variables :     k, NbClients
Traitement :    Affecter à k la valeur 0
                Affecter à NbClients la valeur 1 000 000
                Tant que k < 8
                  | affecter à k la valeur k + 1
                  | affecter à NbClients la valeur 0,9 × NbClients + 60 000
                  | Afficher NbClients
                Fin Tant que
```

b) Recopier et compléter le tableau ci-dessous avec toutes les valeurs affichées pour k de 0 jusqu'à 5.

k	0	1	2	3	4	5
NbClients						

(…)

Série :	**ES**	**Obligatoire**	
Année :	**2015**		
Lieu :	**Asie**		
Références :	**MAELJA1**		**Exercice 2 Partie A (et Partie B q4 ?)**

Exercice 2 (*5 points*)

Valentine place un capital c_0 dans une banque le 1er janvier 2014 au taux annuel de 2%. À la fin de chaque année les intérêts sont ajoutés au capital, mais les frais de gestion s'élèvent à 25€ par an.
On note c_n la valeur du capital au 1er janvier de l'année $2014 + n$.

Partie A

On considère l'algorithme ci-dessous :

```
Initialisation
Affecter à N la valeur 0
Traitement
Saisir une valeur pour C
    Tant que C < 2 000 faire
        Affecter à N la valeur N + 1
        Affecter à C la valeur 1,02C – 25
    Fin Tant que
Sortie
Afficher N
```

1. a. On saisit la valeur 1 900 pour C. Pour cette valeur de C, recopier le tableau ci-dessous et le compléter, en suivant pas à pas l'algorithme précédent et en ajoutant autant de colonnes que nécessaire.

Valeur de N	0		
Valeur de C	1 900		

b. Quel est le résultat affiché par l'algorithme ? Dans le contexte de l'exercice, interpréter ce résultat.

2. Que se passerait-il si on affectait la valeur 1 250 à C ?

Partie B

Valentine a placé 1 900€ à la banque au 1er janvier 2014. On a donc $c_0 = 1\,900$.

1. Expliquer pourquoi, pour tout nombre entier naturel n, on a : $c_{n+1} = 1{,}02c_n - 25$.
2. Soit (u_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par $u_n = c_n - 1\,250$.

   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.

   b. Soit n un nombre entier naturel ; exprimer u_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $c_n = 650 \times 1{,}02^n + 1\,250$.
3. Montrer que la suite (c_n) est croissante.
4. Déterminer, par la méthode de votre choix, le nombre d'années nécessaires pour que la valeur du capital dépasse 2 100€.

EXERCICE 2 – 5 points

Le fonctionnement de certaines centrales géothermiques repose sur l'utilisation de la chaleur du sous-sol. Pour pouvoir exploiter cette chaleur naturelle, il est nécessaire de creuser plusieurs puits suffisamment profonds.

Lors de la construction d'une telle centrale, on modélise le tarif pour le forage du premier puits par la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n non nul, par :
$u_n = 2\,000 \times 1{,}008^{n-1}$ où u_n représente le coût en euros du forage de la n-ième dizaine de mètres.
On a ainsi $u_1 = 2\,000$ et $u_2 = 2\,016$, c'est-à-dire que le forage des dix premiers mètres coûte 2 000 euros, et celui des dix mètres suivants coûte 2 016 euros.

Dans tout l'exercice, arrondir les résultats obtenus au centième.

1. Calculer u_3 puis le coût total de forage des 30 premiers mètres.
2. Pour tout entier naturel n non nul :
   a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et préciser la nature de la suite (u_n).
   b. En déduire le pourcentage d'augmentation du coût du forage de la $(n+1)$-ième dizaine de mètres par rapport à celui de la n-ième dizaine de mètres.
3. On considère l'algorithme ci-dessous :

```
INITIALISATION
u prend la valeur 2 000
S prend la valeur 2 000

TRAITEMENT
Saisir n
Pour i allant de 2 à n
      u prend la valeur u × 1,008
      S prend la valeur S + u
Fin Pour

SORTIE
Afficher S
```

La valeur de n saisie est 5.

a. Faire fonctionner l'algorithme précédent pour cette valeur de n.

Résumer les résultats obtenus à chaque étape dans le tableau ci-dessous (à recopier sur la copie et à compléter en ajoutant autant de colonnes que nécessaire).

Valeur de i		2	
Valeur de u	2 000		
Valeur de S	2 000		

b. Quelle est la valeur de S affichée en sortie ? Interpréter cette valeur dans le contexte de cet exercice.

4. On note $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ la somme des n premiers termes de la suite (u_n), n étant un entier naturel non nul. On admet que :

$$S_n = -250\,000 + 250\,000 \times 1{,}008^n.$$

Le budget consenti pour le forage du premier puits est de 125 000 euros. On souhaite déterminer la profondeur maximale du puits que l'on peut espérer avec ce budget.

a. Calculer la profondeur maximale par la méthode de votre choix (utilisation de la calculatrice, résolution d'une inéquation...).

b. Modifier l'algorithme précédent afin qu'il permette de répondre au problème posé.

Série :	**ES Obligatoire**	
Année :	**2015**	
Lieu :	**Nouvelle Calédonie**	
Références :		**Exercice 2 Questions 3ab**

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Dans une ville, un service périscolaire comptabilise 150 élèves inscrits en septembre 2014. On admet que, chaque année, 80 % des élèves inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 40 nouveaux élèves inscrits. La capacité d'accueil du périscolaire est de 190 élèves maximum.

On modélise cette situation par une suite numérique (u_n) où u_n représente le nombre d'élèves inscrits au périscolaire en septembre de l'année $2014+n$, avec n un nombre entier naturel.

On a donc $u_0 = 150$.

1. Calculer le nombre d'élèves qui seront inscrits au périscolaire en septembre 2015.
2. Pour tout entier naturel n, justifier que $u_{n+1} = 0,8u_n + 40$.
3. On donne l'algorithme suivant :

```
Initialisation
Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 150

Traitement
Tant que U ⩽ 190
    n prend la valeur n+1
    U prend la valeur 0,8U+40
Fin tant que

Sortie Afficher le nombre 2014+n
```

   a. Recopier et compléter le tableau suivant par autant de colonnes que nécessaire pour retranscrire l'exécution de l'algorithme. Arrondir les résultats au centième.

Valeur de n	0	1	2	
Valeur de U	150			
Condition $U \leqslant 190$	vraie			

   b. En déduire l'affichage obtenu en sortie de l'algorithme et interpréter ce résultat.

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 200$.

   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   b. Pour tout entier naturel n, démontrer que $u_n = 200 - 50 \times 0,8^n$.

   c. Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel n tel que :

$$200 - 50 \times 0,8^n > 190.$$

   d. À partir de quelle année la directrice du périscolaire sera-t-elle obligée de refuser des inscriptions faute de places disponibles ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

L'été un centre de loisirs propose aux adolescents la pratique du canoë-kayak ou de la planche à rame.
Tous les matins, chaque adolescent doit choisir un et un seul sport parmi les deux proposés.
On admet que :

- si un adolescent choisit le canoë-kayak un jour donné, alors la probabilité qu'il choisisse la planche à rame le jour suivant est égale à 0,4 ;
- si un adolescent choisit la planche à rame un jour donné, alors la probabilité qu'il choisisse le canoë-kayak le jour suivant est égale à 0,2 ;
- le premier jour, la proportion d'adolescents qui choisissent le canoë-kayak est égale à 0,85.

On note :

- K l'état : « l'adolescent choisit le canoë-kayak » ;
- $\overline{K}$ l'état : « l'adolescent choisit la planche à rame ».

On note, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

- p_n la probabilité qu'un adolescent pris au hasard choisisse le canoë-kayak lors du n-ième jour ;
- q_n la probabilité qu'un adolescent pris au hasard choisisse la planche à rame le n-ième jour ;
- $P_n = (p_n \quad q_n)$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste lors du n-ième jour.

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets K et $\overline{K}$.
2. Donner la matrice de transition M associée à ce graphe, les sommets K et $\overline{K}$ étant classés dans cet ordre.
3. Justifier que $P_1 = (0,85 \quad 0,15)$.
4. Avec la calculatrice, déterminer l'état probabiliste lors du 3ᵉ jour.
5. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, montrer que $p_{n+1} = 0,4p_n + 0,2$.
6. On considère l'algorithme suivant :

```
Initialisation
Choisir un nombre entier naturel N ⩾ 2
p prend la valeur 0,85

Traitement
Pour i allant de 2 à N
    p prend la valeur 0,4p + 0,2
Fin pour

Sortie
Afficher p
```

a. Pour la valeur $N = 5$ saisie, recopier et compléter le tableau suivant par autant de colonnes que nécessaire pour retranscrire l'exécution de l'algorithme. Arrondir les résultats au millième.

Valeur de i		2		
Valeur de p	0,85			

b. En déduire l'affichage obtenu quand la valeur de N saisie est 5.

c. Dans le contexte de cet exercice, expliquer comment interpréter le nombre obtenu en sortie de cet algorithme.

(…)

EXERCICE 1 **(4 points)** **Commun à tous les candidats**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

(…)

3. On donne l'algorithme ci-dessous.

La valeur affichée en sortie de cet algorithme est :

a. 7,1
b. 7,6
c. 8
d. 17

```
Variables
   n : un nombre entier naturel
Traitement
   Affecter à n la valeur 0
   Tant que 1,9^n < 100
      Affecter à n la valeur n+1
   Fin Tant que
Sortie
   Afficher n
```

(…)

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L.

Un apiculteur souhaite étendre son activité de production de miel à une nouvelle région. En juillet 2014, il achète 300 colonies d'abeilles qu'il installe dans cette région.

Après renseignements pris auprès des services spécialisés, il s'attend à perdre 8 % des colonies durant l'hiver. Pour maintenir son activité et la développer, il a prévu d'installer 50 nouvelles colonies chaque printemps.

1. On considère l'algorithme suivant :

```
Variables :   n est un nombre entier naturel
              C est un nombre réel
Traitement :  Affecter à C la valeur 300
              Affecter à n la valeur 0
              Tant que C < 400 faire
                | C prend la valeur C - C×0,08 + 50
                | n prend la valeur n+1
              Fin Tant que
Sortie :      Afficher n
```

   a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en ajoutant autant de colonnes que nécessaire. Les résultats seront arrondis à l'entier le plus proche.

Test C<400	× × ×	vrai		...
Valeur de C	300	326		...
Valeur de n	0	1		...

   b. Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ? Interpréter cette valeur dans le contexte de ce problème.

2. On modélise l'évolution du nombre de colonies par une suite (C_n), le terme C_n donnant une estimation du nombre de colonies pendant l'année $2014 + n$. Ainsi $C_0 = 300$ est le nombre de colonies en 2014.

   a. Exprimer pour tout entier n le terme C_{n+1} en fonction de C_n.

   b. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier n par $V_n = 625 - C_n$.
   Montrer que pour tout nombre entier n on a $V_{n+1} = 0{,}92 \times V_n$.

   c. En déduire que pour tout entier naturel n, on a $C_n = 625 - 325 \times 0{,}92^n$.

   d. Combien de colonies l'apiculteur peut-il espérer posséder en juillet 2024 ?

3. L'apiculteur espère doubler son nombre initial de colonies. Il voudrait savoir combien d'années il lui faudra pour atteindre cet objectif.

   a. Comment modifier l'algorithme pour répondre à sa question ?

   b. Donner une réponse à cette question de l'apiculteur.

Série : **ES** **Obligatoire**
Année : **2015**
Lieu : **Liban**
Références : **15MAELLI1** **Exercice 4 Question 2**

EXERCICE 4 **(5 points)**

Commun à tous les candidats

Une retenue d'eau artificielle contient 100 000 m^3 d'eau le 1[er] juillet 2013 au matin.
La chaleur provoque dans la retenue une évaporation de 4 % du volume total de l'eau par jour. De plus, chaque soir, on doit libérer de la retenue 500 m^3 pour l'irrigation des cultures aux alentours.
Cette situation peut être modélisée par une suite (V_n).
Le premier juillet 2013 au matin, le volume d'eau en m^3 est $V_0 = 100\,000$.

Pour tout entier naturel n supérieur à 0, V_n désigne le volume d'eau en m^3 au matin du n-ième jour qui suit le 1[er] juillet 2013.

1) a) Justifier que le volume d'eau V_1 au matin du 2 juillet 2013 est égal à 95 500 m^3.
b) Déterminer le volume d'eau V_2 au matin du 3 juillet 2013.
c) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $V_{n+1} = 0{,}96V_n - 500$.

2) Pour déterminer à quelle date la retenue ne contiendra plus d'eau, on a commencé par élaborer l'algorithme ci-dessous. Recopier et compléter les lignes **L6**, **L7** et **L9** de cet algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.

L1	**Variables :**	V est un nombre réel
L2		N est un entier naturel
L3	**Traitement :**	Affecter à V la valeur 100 000
L4		Affecter à N la valeur 0
L5		Tant que $V > 0$
L6		Affecter à V la valeur ………
L7		Affecter à N la valeur ………
L8		Fin Tant que
L9	**Sortie :**	Afficher …….

3) On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = V_n + 12\,500$.
a) Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique de raison 0,96. Préciser son premier terme.
b) Exprimer U_n en fonction de n.
c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $V_n = 112\,500 \times 0{,}96^n - 12\,500$.

4) a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $112\,500 \times 0{,}96^n - 12\,500 \leq 0$.
b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Série :	**ES Spécialité**	
Année :	**2015**	
Lieu :	**Liban**	
Références :	**15MAESSLI1**	**Exercice 2 Questions 1ab et 3ab**

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans un pays, seulement deux opérateurs de téléphonie mobile SAFIR et TECIM proposent la 4G (standard de transmission de données).
Une étude a montré que d'une année à l'autre :

- 41 % des clients de l'opérateur SAFIR le quittent pour l'opérateur TECIM ;
- 9 % des clients de l'opérateur TECIM le quittent pour l'opérateur SAFIR ;
- Aucun client ne renonce à l'utilisation de la 4G.

Cette situation peut être modélisée par un graphe probabiliste $\mathcal{g}$ de sommets S et T où :

- S est l'événement « l'utilisateur de la 4G est un client de l'opérateur SAFIR » ;
- T est l'événement « l'utilisateur de la 4G est un client de l'opérateur TECIM ».

Chaque année on choisit au hasard un utilisateur de la 4G et on note pour tout entier naturel n :

- s_n la probabilité que cet utilisateur soit un client de l'opérateur SAFIR en $2014 + n$;
- t_n la probabilité que cet utilisateur soit un client de l'opérateur TECIM en $2014 + n$.

On note $P_n = (s_n \quad t_n)$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2014 + n$.

Dans cet exercice, on se propose de savoir si l'opérateur TECIM atteindra l'objectif d'avoir comme clients au moins 80 % de la population utilisatrice de la 4G.

Partie A

1) Dessiner le graphe probabiliste $\mathcal{g}$.

2) On admet que la matrice de transition du graphe $\mathcal{g}$ en considérant les sommets dans l'ordre S et T est $M = \begin{pmatrix} 0{,}59 & 0{,}41 \\ 0{,}09 & 0{,}91 \end{pmatrix}$.

On note $P = (a \quad b)$ la matrice ligne correspondant à l'état stable de ce graphe $\mathcal{g}$.

a) Montrer que les nombres a et b sont solutions du système $\begin{cases} 0{,}41a - 0{,}09b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$.

b) Résoudre le système précédent.

3) On admet que $a = 0{,}18$ et $b = 0{,}82$.
Déterminer, en justifiant, si l'opérateur TECIM peut espérer atteindre son objectif.

Partie B

En 2014, on sait que 35 % des utilisateurs de la 4G sont des clients de l'opérateur SAFIR et que 65 % sont des clients de l'opérateur TECIM. Ainsi $P_0 = (0{,}35 \quad 0{,}65)$.

1) Déterminer la répartition des clients de la 4G au bout de 2 ans.

2) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $t_{n+1} = 0{,}5t_n + 0{,}41$.

3) Pour déterminer au bout de combien d'années l'opérateur TECIM atteindra son objectif, on a commencé par élaborer l'algorithme ci-dessous. Recopier et compléter les lignes **L6, L7** et **L9** de cet algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.

L1	**Variables :**	T est un nombre
L2		N est un nombre entier
L3	**Traitement :**	Affecter à T la valeur 0,65
L4		Affecter à N la valeur 0
L5		Tant que $T < 0{,}80$
L6		Affecter à T la valeur ……………
L7		Affecter à N la valeur …………..
L8		Fin Tant que
L9	**Sortie :**	Afficher …………..

4) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = t_n - 0{,}82$.

a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5. Préciser son premier terme.

b) En déduire que : $t_n = -0{,}17 \times 0{,}5^n + 0{,}82$.

c) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation : $-0{,}17 \times 0{,}5^n + 0{,}82 \geq 0{,}80$.

d) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Série :	**ES**	**Obligatoire**	
Année :	**2015**	**(Rattrapage 2ème session)**	
Lieu :	**Métropole**		
Références :	**15MAELMLR3**		**Exercice 2 Questions 1ab et 3ab**

EXERCICE 3 - 5 points

Dans une ville, un opéra décide de proposer à partir de 2014 un abonnement annuel pour ses spectacles.
L'évolution du nombre d'abonnés d'une année à la suivante est modélisée par le directeur de l'opéra qui prévoit que 75 % des personnes abonnées renouvelleront leur abonnement l'année suivante et qu'il y aura chaque année 300 nouveaux abonnés.
Ainsi, pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre d'abonnés pour l'année (2014+n).
Pour l'année 2014, il y a 500 abonnés, autrement dit $u_0 = 500$.

1. Calculer u_1 et u_2. Arrondir à l'entier.
2. Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 300$.
3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1200$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,75 et préciser v_0.
   b. En déduire alors que pour tout entier naturel n, $u_n = -700\times0{,}75^n + 1200$.
   c. Calculer u_{10} (arrondir à l'entier). Donner une interprétation concrète de la valeur trouvée.
4. On souhaite écrire un algorithme qui permette d'afficher l'année à partir de laquelle le nombre d'abonnements sera supérieur à 1190.
   On propose trois algorithmes :

Algorithme 1
Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 500
Tant que $U \leq 1190$
    Affecter à n la valeur $n+1$
    Affecter à U la valeur
        $-700\times0{,}75^n + 1200$
Fin Tant que
Affecter à n la valeur $n + 2014$
Afficher n

Algorithme 2
Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 500
Tant que $U \leq 1190$
    Affecter à U la valeur
        $-700\times0{,}75^n + 1200$
    Affecter à n la valeur $n+1$
Fin Tant que
Affecter à n la valeur $n + 2014$
Afficher n

Algorithme 3
Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 500
Tant que $U \leq 1190$
    Affecter à n la valeur $n+1$
    Affecter à U la valeur
        $-700\times0{,}75^n + 1200$
    Affecter à n la valeur $n + 2014$
Fin Tant que
Afficher n

Parmi ces trois algorithmes, déterminer lequel convient pour répondre au problème posé et expliquer pourquoi les deux autres ne conviennent pas.

Série : ES Spécialité
Année : 2015 (Rattrapage 2ème session)
Lieu : Métropole
Références : Exercice 3 Question 6a

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans une société d'assurance, les clients peuvent choisir de payer leur cotisation chaque mois (paiement mensuel) ou en une fois (paiement annuel).
On constate que 30 % de ceux qui paient en une fois choisissent le paiement mensuel l'année suivante, alors que 85 % de ceux qui paient chaque mois conservent ce mode de paiement l'année suivante.
En 2014, 60 % des clients paient en une fois et 40 % paient mensuellement.

Dans toute la suite de l'exercice, n désigne un nombre entier naturel.
On note :

- a_n la probabilité qu'un client choisi au hasard paie en une fois pour l'année $2014+n$;
- b_n la probabilité qu'un client choisi au hasard paie mensuellement pour l'année $2014+n$.

On a $a_0 = 0,6$ et $b_0 = 0,4$ et on note P_n l'état probabiliste pour l'année $2014+n$. Ainsi $P_0 = \begin{pmatrix}0,6 & 0,4\end{pmatrix}$.
On note :

- A l'état « le client paie en une fois » ;
- B l'état « le client paie mensuellement ».

1. Représenter un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.
3. Déterminer la probabilité qu'un client paie en une fois durant l'année 2018 (arrondir les résultats au millième).
4. Déterminer l'état stable et en donner une interprétation.
5. Pour tout entier naturel n, justifier que $a_{n+1} = 0,55a_n + O,15$.
6. On cherche à déterminer le plus petit entier n tel que $a_n < 0,3334$.
   a. Écrire un algorithme permettant de déterminer cet entier n.
   b. On admet que pour tout entier naturel n,
   $$a_n = \frac{4}{15}\times 0,55^n + \frac{1}{3}.$$
   Déterminer par le calcul le plus petit entier n tel que $a_n < 0,3334$.

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L.

Dans un plan de lutte contre la pollution urbaine, une municipalité a décidé de réduire l'utilisation des voitures en ville en instaurant une taxe pour les automobiles circulant dans une zone du centre ville appelée ZTL (Zone à Trafic Limité).

En 2013, 20 000 voitures circulaient, en moyenne, chaque jour dans cette zone ZTL.

Partie A

Le premier objectif de la mairie était, qu'au bout d'un an, 30 % des automobilistes aient renoncé à circuler en zone ZTL.
Au bout d'un an, un sondage a été effectué auprès d'un échantillon de 800 automobilistes qui avaient l'habitude d'utiliser leur voiture en zone ZTL. Parmi ceux-ci, 168 ont répondu qu'ils avaient renoncé à utiliser leur voiture dans cette zone du centre-ville.

1. Déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance de 0,95 de la proportion d'automobilistes qui ont renoncé à utiliser leur voiture en zone ZTL. Arrondir les bornes de l'intervalle au millième.
2. La mairie peut-elle estimer avoir atteint son objectif ?

Partie B

L'objectif de la mairie est à présent de diviser par deux le nombre de voitures dans la zone ZTL en deux ans.

À partir de relevés effectués durant les premiers mois de l'année 2014, les services de la mairie ont estimé que l'évolution du nombre de voitures circulant en zone ZTL peut être modélisée par la suite (u_n) définie ci-dessous :

- $u_0 = 20\,000$
- pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,975\, u_n + 30$

où u_n représente le nombre moyen de voitures circulant chaque jour dans la zone ZTL, le n-ième mois, à compter du 1er janvier 2014.

1. Calculer u_1 et u_2.
   Arrondir les résultats à l'unité.
2. Les services veulent déterminer le nombre de mois nécessaires pour atteindre l'objectif d'au plus 10 000 voitures en zone ZTL.

   Recopier et compléter l'algorithme ci-contre afin qu'il affiche la réponse à cette question.

Variables :	N : nombre de mois
	U : nombre de voitures
Traitement :	Affecter à U la valeur 20 000
	Affecter à N la valeur 0
	Tant que U > 10 000 faire
	U ....
	N........................
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher N

3. Un membre du service propose d'utiliser la suite (v_n) définie, pour tout nombre entier naturel n, par $v_n = u_n - 1\,200$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison et son premier terme.
   b. Montrer que pour tout entier naturel n : $u_n = 18\,800 \times 0,975^n + 1\,200$.
4. Le nouvel objectif affiché par la mairie sera-t-il atteint ? Justifier la réponse.

EXERCICE 3 (4 points) Commun à tous les candidats

Un couple fait un placement au taux annuel de 2 % dont les intérêts sont capitalisés tous les ans. Son objectif est de constituer un capital de 18 000 euros.

Le couple a placé le montant de 1 000 euros à l'ouverture le 1er janvier 2010 puis, tous les ans à chaque 1er janvier, verse 2 400 euros.

1. Déterminer le capital présent sur le compte le 1er janvier 2011 après le versement annuel.

2. On veut déterminer la somme présente sur le compte après un certain nombre d'années. On donne ci-dessous trois algorithmes :

```
Variables :
U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers
Entrée
  Saisir une valeur pour N
Début traitement
  Affecter 1000 à U
  Pour i de 1 à N faire
  | Affecter 1,02×U+2400 à U
  Fin Pour
  Afficher U
Fin traitement
```

algorithme 1

```
Variables :
U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers
Entrée
  Saisir une valeur pour N
Début traitement
  Pour i de 1 à N faire
  | Affecter 1000 à U
  | Affecter 1,02×U+2400 à U
  Fin Pour
  Afficher U
Fin traitement
```

algorithme 2

```
Variables :
U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers
Entrée
  Saisir une valeur pour N
Début traitement
  Affecter 1000 à U
  Pour i de 1 à N faire
  | Affecter 1,02×U+2400 à U
  | Affecter N+1 à N
  Fin Pour
  Afficher U
Fin traitement
```

algorithme 3

a. Pour la valeur 5 de N saisie dans l'algorithme 1, recopier puis compléter, en le prolongeant avec autant de colonnes que nécessaire, le tableau ci-dessous (arrondir les valeurs calculées au centième).

valeur de i	xxx	1	...
valeur de U	1000		...

b. Pour la valeur 5 de N saisie, quel affichage obtient-on en sortie de cet algorithme ? Comment s'interprète cet affichage ?

c. En quoi les algorithmes 2 et 3 ne fournissent pas la réponse attendue ?

3. À partir de la naissance de son premier enfant en 2016, le couple décide de ne pas effectuer le versement du premier janvier 2017 et de cesser les versements annuels tout en laissant le capital sur ce compte rémunéré à 2 %.
Au premier janvier de quelle année l'objectif de 18 000 euros est-il atteint ?