APPROCHE COGNITIVE DES PROBLEMES DE GEOMETRIE EN TERMES DE CONGRUENCE

R. DUVAL

En dehors des tâches de construction, les figures de géométrie donnent lieu à trois formes d'appréhension : l'appréhension perceptive, l'appréhension opératoire et l'appréhension discursive. Le caractère heuristique des figures dépend de l'appréhension opératoire ; mais toutes les figures ne sont pas congruentes à la situation géométrique qu'elles sont supposées représenter. L'appréhension discursive est inséparable de la double référence à un réseau sémantique d'objets mathématiques et à une axiomatique locale. L'analyse de ces deux formes d'appréhension ouvre des perspectives non seulement pour une classification des problèmes de géométrie, mais aussi, pour une autre approche des activités géométriques par les élèves.

Les problèmes de géométrie présentent une grande originalité par rapport à beaucoup d'autres tâches mathématiques qui peuvent être proposées aux élèves.

D'une part, leur résolution exige une forme de raisonnement *qui implique la référence à une axiomatique locale mais qui se déroule dans le registre de la langue naturelle.* Cette forme de raisonnement conduit à développer un type de discours qui *fonctionne par substitution, comme si'il s'agissait d'un langage formalisé,* alors que l'on reste dans un registre où le discours se contruit, de façon naturelle, par association et par accumulation. Or, dans ces deux modes de fonctionnement la cohérence ne repose pas sur les mêmes règles d'organisation du discours. Les problèmes de géométrie exigent donc une forme d'expression qui ne se laisse pas analyser par l'opposition souvent faite entre langue naturelle et langages formalisés. R. Thom avait déjà attiré l'attention sur cette caractéristique de la géométrie : elle est "un *intermédiaire* naturel, et peut-être irremplaçable, *entre la langue usuelle et le langage formalisé"* [12 p.232].

D'autre part, l'heuristique des problèmes de géométrie réfère à un registre de représentations spatiales qui donne lieu à des formes d'interprétation autonomes. Parmi ces interprétations nous distinguerons : l'appréhension perceptive, l'appréhension opératoire, l'appréhension discursive et l'appréhension séquentielle des figures. L'appréhension séquentielle est explicitement sollicitée dans les tâches de construction ou dans les tâches de description ayant pour but la reproduction d'une figure donnée.

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 1 (1988) (p.57-74) IREM de Strasbourg*

Les orientations didactiques de ces dernières années ont accordé une certaine importance à ces tâches, dans l'espoir de mieux préparer les élèves à la forme de raisonnement que les problèmes de géométrie exigent. En revanche, les trois premières formes d'appréhension ne sont pas toujours clairement distinguées. Elles sont même confondues lorsqu'on affirme que les figures constituent "un donné intuitif sous-jacent" , ou "un support à l'intuition au cours de la recherche" [12 p.228, 2 p.35].
Pourtant la résolution des problèmes de géométrie et l'entrée dans la forme de raisonnement que cette résolution exige dépend de la *prise de conscience de la distinction,voire de l'opposition, entre les trois premières formes d'appréhension des figures.* Mais cela ne constitue encore qu'un aspect de la démarche géométrique. Il y en a un autre qui concerne le statut d'"intermédiaire naturel" du raisonnement géométrique : celui-ci ne fonctionne pas comme l'argumentation de la pensée naturelle bien qu'il utilise les ressources du langage naturel. Une analyse des fonctions cognitives sous-jacentes à l'activité de démonstration en géométrie apparaît donc nécessaire pour la conduite même de l'enseignement. Dans les pages qui suivent nous n'en présenterons qu'une toute première approche.

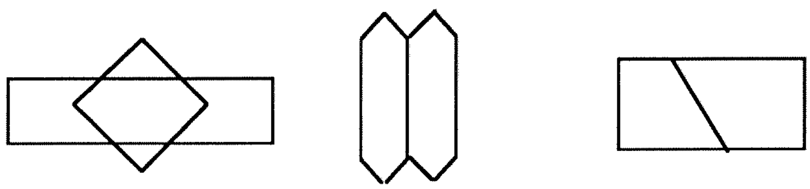
I. Appréhension perceptive des formes et interprétation figurale d'une situation géométrique.

N'importe quelle figure dessinée dans le contexte d'une activité mathématique fait l'objet de deux attitudes souvent contraires : l'une immédiate et automatique, l'appréhension perceptive de formes, et l'autre, contrôlée et relevant d'un apprentissage, l'interprétation discursive d'éléments figuraux. Ces deux attitudes se trouvent souvent en opposition parce que *la figure montre des objets qui se détachent indépendamment de tout énoncé* et que *les objets nommés par l'énoncé des hypothèses ne sont pas nécessairement ceux qui apparaissent spontanément.* En outre, la distinction entre les hypothèses et ce qui peut en être déduit n'a aucun sens quand on s'en tient à l'appréhension perceptive de la figure. Le problème des figures géométriques est tout entier dans ce décalage entre l'appréhension perceptive et une interprétation nécessairement commandée par des hypothèses.

A) Une loi de traitement régissant l'organisation perceptive des figures.

Une figure est une organisation d'éléments d'un champ perceptif non homogène, constituant un objet qui se détache du champ. Selon le nombre de leurs dimensions, ces éléments peuvent être des points, des traits ou des zones. Les points et les traits se

caractérisent respectivement par leur aspect discret ou continu. Les zones se caractérisent par leur forme, c'est à dire par leur contour : un trait fermé, ou une suite de points, suffisent pour détacher une zone d'un champ homogène. Pour nous limiter ici au cas dans lequel les éléménts figuraux sont des traits, l'organisation perceptive d'une figure suit la loi de clôture ou de continuité : lorsque différents traits forment un contour simple et fermé, ils se détachent comme figure sur fond.
Ainsi les trois figures rangées ci-dessous de gauche à droite apparaissent prioritairement comme :
— la superposition de deux formes, un carré et un rectangle
— un assemblage de deux formes qui se touchent
— le partage d'une forme, un rectangle, en deux parties.



Cette loi de clôture ou de continuité a une grande importance dans les figures habituellement présentées aux élèves. D'une part elle provoque une certaine résistance à l'oubli de la forme qui apparaît au profit des traits organisés en une forme perçue (ou seulement de certains des traits); d'autre part elle exclut d'autres réorganisations moins simples et empêche ainsi de voir d'autres formes. Le décalage entre l'interprétation discursive d'une figure, exigée par une situation géométrique, et l'appréhension perceptive trouve, en grande partie, son origine dans cette loi d'organisation perceptive.

B) Deux exemples de la primauté exclusive de l'appréhension perceptive.

1. Considérons les trois figures suivantes:

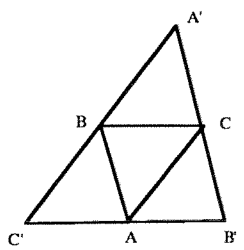


Fig. I

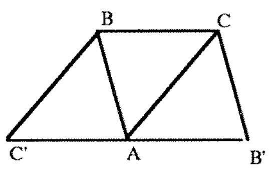


Fig. II

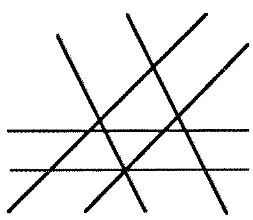


Fig. III

La figure **I** apparaît comme un triangle inscrit dans un autre triangle, ou comme un petit triangle "posé" sur un plus grand triangle. La figure **II** ressemble à deux parallélogrammes "qui se recouvrent (sous certaines conditions que nous décrirons plus loin) ou à un livre ouvert aperçu de biais. La figure **III** apparaît comme une superposition de bandes, ou comme un réseau de droites parallèles.

La figure **I** a été proposée à des élèves de 3ème (14-15 ans) avec l'énoncé suivant :
A'C' et AC
A'B' et AB sont parallèles
B'C' et BC
Montrer que A est le milieu de B'C'.

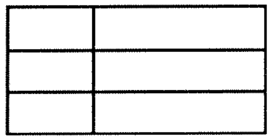
Juste avant cette question, le même problème avait été posé avec la figure **II** qui est la sous-figure utile. Et l'énoncé fournissait les hypothèses non plus en indiquant l'existence de droites parallèles mais celles de parallélogrammes. Autrement dit, dans la question préalable, l'appréhension perceptive de la figure **II** donnait les objets auxquels l'énoncé réfère. En revanche la figure **III** aurait été la figure sémantiquement la plus congruente pour l'énoncé mentionnant l'existence de droites parallèles : l'énoncé parle de droites parallèles et la figure montre un réseau de droites.

Le passage de la présentation sémantiquement congruente du problème (figure **II** et hypothèses mentionnant des parallélogrammes) à la présentation non sémantiquement congruente (figure **I** montrant des triangles et hypothèses mentionnant des droites) a entraîné une chute très nette dans le taux des réussites [6 p.75-78] :
— de 42% à 18% quand la figure II avait la même orientation que la figure I,
— de 34% à 11% quand la figure II n'avait pas la même orientation que la figure I.

Autrement dit, *plus de la moitié des élèves ayant réussi le problème dans sa version sémantiquement congruente ne reconnaissaient plus ce problème présenté aussitôt après dans une version sémantiquement non congruente.*

2. Le deuxième exemple, au contraire, est un cas dans lequel il y a congruence sémantique entre la figure et l'énoncé, mais dans lequel cette congruence, qui privilégie l'appréhension perceptive, va presque imposer un traitement mathématique du problème au détriment d'autres traitements possibles.

N.Balacheff a proposé la question " combien y a-t-il de rectangles dans cette figure? "



Présentant ce problème, il remarque :"la résolution de ce problème dépend de façon essentielle des conceptions que l'on a des objets à démontrer et *de l'analyse faite de la figure* (c'est nous qui soulignons)". Sur cette figure, les rectangles peuvent être considérés comme éléments d'un pavage, comme intersection de deux bandes, comme ensemble de quatre points ou comme ensemble de segments. Et N.Balacheff constate : "en fait c'est le premier type de solution qui domine dans les observations cliniques que nous avons faites avant comme pendant l'expérience elle-même. *Vraisemblablement* parce qu'elle correpond à une approche perceptive de la figure..."[1 p.280-281]. Le choix de ce type de solution était tout à fait prévisible : la loi de clôture et de continuité impose l'appréhension perceptive d'un grand rectangle partagé en rectangles plus petits. De plus la formulation de la question venait renforcer cette appréhension perceptive de la figure.

Ces deux exemples montrent qu'une figure géométrique garde une structuration perceptive autonome : les objets qui apparaissent peuvent alors être différents du type d'objets que la situation géométrique exige de voir. Ils rappellent aussi que les élèves s'en tiennent, en grande majorité, à l'appréhension perceptive : *ceux-ci ne soupçonnent pas qu'une figure ne doive être regardée qu'à travers ou en fonction de propriétés ou de conditions formulées comme hypothèses*. Cela se remarque dans leur attitude devant un problème : ils lisent l'énoncé, construisent la figure et, ensuite, se concentrent sur la figure sans revenir à l'énoncé. Cet oubli, ou cet abandon, de l'énoncé marque l'absence de cette attitude que nous avons appelée l'interprétation discursive des figures. C'est pourquoi les problèmes qui sont accessibles à ces élèves sont ceux dont l'énoncé est sémantiquement congruent avec la figure construite ou à contruire. Mais cela n'est encore qu'une condition nécessaire. La congruence sémantique ouvre ou ferme l'entrée dans le problème ; elle n'est pas suffisante pour sa recherche. Pour élucider cet aspect plus essentiel, il nous faut considérer non plus l'appréhension perceptive de la figure mais son appréhension opératoire.

II. Appréhension opératoire des figures et démarche heuristique.

Toute figure peut être modifiée de plusieurs manières. On peut soit la partager en plusieurs parties qui sont comme autant de sous-figures, soit l'inclure dans une autre figure dont elle devient alors une sous-figure : cette modification est une *modification méréologique*, elle se fait en fonction de la relation entre partie et tout. On peut aussi l'aggrandir, la diminuer, ou la déformer : cette modification est une *modification optique,* elle transforme une figure en une autre, appelée son image. Cette transformation, qui est réalisable par un jeu de lentilles ou de miroirs, peut conserver la forme de départ ou l'altérer. On peut enfin la déplacer ou la faire tourner par rapport aux repères du champ dont elle se détache : cette modification est une *modification positionnelle,* elle ne concerne que l'orientation et la place de la figure dans son environnement (généralement le plan fronto-parallèle). Chacune de ces modifications est réalisable physiquement, graphiquement ou mentalement. Mais, à la différence d'une procédure de construction, le mode choisi pour la modification d'une figure est neutre : il ne change ni l'appréhension ni l'analyse qui peut en être faite. *En revanche le type de modification choisi fait apparaître des possibilités de traitement sans rapport les unes avec les autres.* Le partage d'une figure en sous-figures permet, par exemple, de mettre en évidence des égalités d'aire tandis que le fait de considérer une figure comme l'aggrandissement d'une autre permet de voir un centre d'homothétie. L'**appréhension opératoire des figures** est une appréhension centrée sur les modifications possibles d'une figure de départ et par suite sur les réorganisations perceptives que ces modifications entraînent. Pour chaque type de modification il y a plusieurs opérations (voir le tableau de la page suivante). *La productivité heuristique d'une figure*, dans un problème de géométrie, *tient au fait qu'il y a congruence entre l'une de ces opérations et un des traitements mathématiques possibles du problème posé.*

Si on peut toujours associer une figure à une situation géométrique décrite, les figures n'ont pas nécessairement dans chaque situation une productivité heuristique . Cela pour deux raisons très différentes.

La première, sur laquelle nous ne nous arrêterons pas ici, est la non-congruence entre le traitement mathématique et l'appréhension opératoire. Presque tous les problèmes mettant en jeu des propriétés d'homothétie présentent cette difficulté. En effet l'appréhension opératoire appropriée à ce genre de problèmes serait celle liée aux modifications optiques : deux figures égales peuvent apparaître l'une plus petite et l'autre plus grande selon le repère choisi, et, inversement, deux figures de grandeurs différentes peuvent apparaître comme deux figures égales mais placées à des distances différentes d'un centre de visée [5 p. 250,254]. Ici l'appréhension opératoire se fait selon la dimension de profondeur exactement comme lorsque nous regardons une photographie. Or les traitements mathématiques des problèmes d'homothétie exigent qu'on se limite à des opérations dans le plan,

par exemple des translations, et que l'on fasse abstraction de la mise en perspective selon la dimension de profondeur. En revanche, dans la construction d'un centre d'homothétie, l'appréhension opératoire permet d'anticiper et d'organiser, sans aller à l'encontre de contraintes propres au traitement mathématique. Rien d'étonnant alors à ce que la construction d'un centre d'homothétie pour deux figures soit une tâche triviale, tandis que les problèmes exigeant plus qu'une reconnaissance ou qu'une construction s'avèrent difficiles. Les obstacles rencontrés par les élèves pour l'utilisation des transformations en géométrie plane tiennent aussi à la non-congruence entre le traitement mathématique du problème et l'appréhension opératoire de la figure [4 p.52-53].
La deuxième raison concerne les cas où il y a congruence entre l'appréhension opératoire et un traitement mathématique du problème. Différents facteurs peuvent jouer pour faciliter ou au contraire pour occulter l'appréhension opératoire de la figure qui conduit à la solution du problème posé. De ces facteurs dépend le fait que les élèves "voient " rapidement ou "ne voient pas" l'opération figurale suggérant un traitement mathématique. Nous indiquerons plus loin, dans l'exemple de l'opération de reconfiguration intermédiaire, certains de ces facteurs. Naturellement, si l'on veut initier la grande majorité des élèves à la géométrie, ce type de problème et le jeu des facteurs de visibilité doit tout particulièrement retenir l'attention.

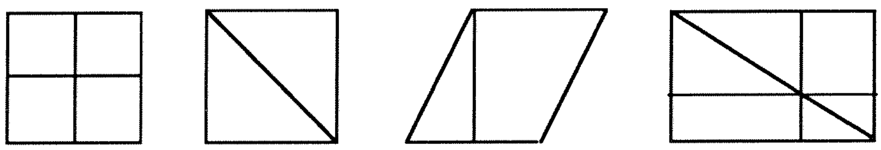
Le tableau suivant donne une idée de la richesse et de la complexité de l'appréhension opératoire des figures.

Type de modification configurale	Opérations constituant la productivité heuristique	Facteurs jouant sur la visibilité
Modifications méréologiques	Reconfiguation intermédiaire Plongement	- Caractère convexe ou non convexe des parties élémentaires
Modifications optiques	Superposabilité Anamorphose	- Recouvrement partiel - Orientation
Modifications positionnelles	Rotation Translation	- Stabilité des repères du champ perceptif pour le support des figures

Ne pouvant décrire et analyser, dans le cadre de cet article, tout le champ de l'appréhension opératoire, nous allons nous limiter à l'étude de l'opération de reconfiguration intermédiaire. Elle intervient dans les premiers problèmes de géométrie qui peuvent être proposés aux élèves, ceux dont la résolution ne requiert pas l'utilisation d'un corpus explicite de définitions et de théorèmes.

A) L'opération de reconfiguration intermédiaire.

Une modification méréologique est une modification qui fait apparaître une forme comme un tout fractionnable en parties homogènes ou en parties hétérogènes. Dans un fractionnement homogène, les parties obtenues ont la même forme que le tout : le quadrillage constitue la modification méréologique la plus familière. Dans un fractionnement hétérogène, les parties obtenues n'ont plus la même forme que le tout : par exemple le partage d'un quadrilatère en deux, trois ou quatre triangles. Ces modifications se traduisent graphiquement par l'adjonction d'un ou plusieurs traits à la figure de départ. Elles peuvent être réalisées physiquement par des actions de découpage ou de pliage. Ainsi les quadrilatères suivants peuvent être partagés de différentes manières :



homogène   hétérogène   homogène & hétérogène

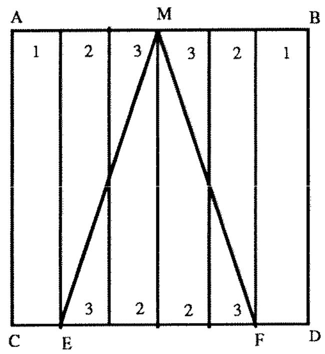
L'intérêt du fractionnement d'une figure (ou de son examen à partir des parties élémentaires qui y apparaissent) est qu'il donne lieu à l'opération de reconfiguration intermédiaire. *En effet les parties élémentaires obtenues par fractionnement peuvent être regroupées en plusieurs sous-figures, toutes incluses dans la figure de départ.* Cette opération permet donc d'enclencher immédiatement des traitements tels que la mesure d'aires, par sommation des parties élémentaires, ou la mise en évidence de l'équivalence de deux regroupements intermédiaires.

B) Trois exemples de résolution par reconfiguration intermédiaire .

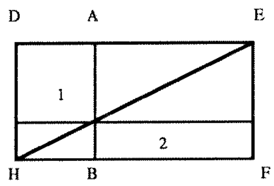
Dans les trois situations suivantes, le recours à l'opération de reconfiguration intermédiaire constitue une approche naturelle du problème posé.

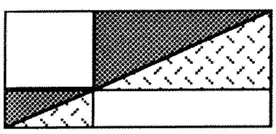
1) Faire la partition d'un carré en trois parties égales, à partir du milieu du côté AB.

Un élève de 5ème a de lui-même effectué le fractionnement du carré en six bandes égales. Puis il a expliqué l'égalité des reconfigurations intermédiaires [AMEC,MFE, MBFD] en indiquant du doigt les parties élémentairesrespectivement égales entre elles. Les difficultés ont commencé lorsqu'il lui a fallu écrire la solution expliquée [7 p.409].

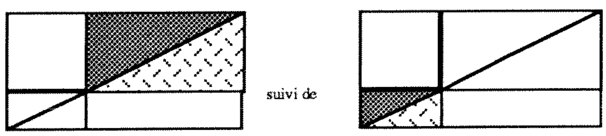


2) Le problème d'Euclide : montrer l'égalité des parties 1 et 2 quelle que soit la postion du segment AB.





Ce problème peut être résolu par le retranchement, aux triangles DEH et EHF, de deux configurations intermédiaires non convexes et égales, ou par le retranchement successif de 2 parties élémentaires égales.



Les deux démarches ont été observées chez des élèves de CM2 (10-11ans) et de 5ème (12-13 ans) [10].

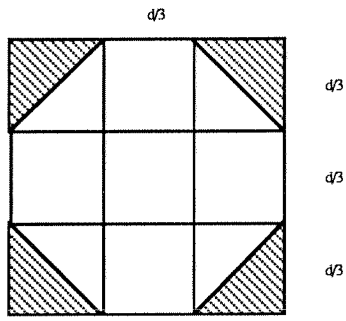
3) La première approximation connue historiquement (période Babylonienne) de l'aire du cercle repose aussi sur cette opération de reconfiguration intermédiaire [8].

On calcule l'aire du regroupement des parties non hachurées

soit $7\left(\frac{d}{3}\right)^2$

Il n'y a plus alors qu'à effectuer la réécriture et l'approximation suivante :

$$\frac{7}{9}d^2 \times \frac{9}{9} = \frac{63}{81}d^2 \approx \left(\frac{8}{9}d\right)^2$$



Dans ces problèmes l'opération de reconfiguration intermédiaire constitue la productivité heuristique de la figure. On pourrait regrouper tous les problèmes dans lesquels cette opération est congruente à un traitement mathématique possible en une classe de problèmes directement accessibles aux élèves, parce que ne requièrant de façon explicite la mise en oeuvre d'aucune définition et d'aucun théorème.

La reconfiguration intermédiaire n'est pas la seule appréhension opératoire liée aux modifications méréologiques. Il y a aussi le plongement. Cette opération s'appuie sur une modification méréologique inverse de celle impliquée dans la reconfiguration intermédiaire : un triangle, par exemple, devient un morceau de parallélogramme.La figure est, en quelque sorte, plongée et dépliée dans le plan. B.Betinelli la décrit ainsi : " on prolonge ce qui peut l'être, c'est à dire les côtés des pièces dessinées"[3]. Et il présente cette appréhension opératoire comme une "vision plus profonde" que la simple appréhension perceptive.

C) Facteurs jouant sur la visibilité de l'opération.

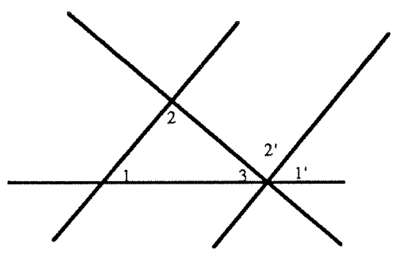
Sur unr figure donnée l'opération de reconfiguration intermédiaire peut être effectuée de plusieurs façons. Différents facteurs influent sur le discernement de l'application pertinente de cette opération. Nous en distinguerons quatre :

1) Le fait que le fractionnement de la figure en parties élémentaires soit donné au départ ou qu'il doive être trouvé. Ainsi dans l'exemple du premier problème le fractionnement du

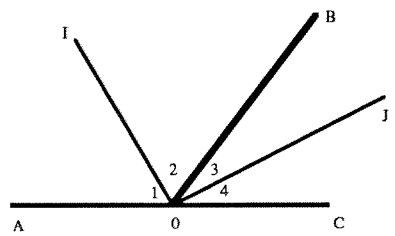
carré en bandes égales pourrait être indiqué : il n'y aurait donc aucune recherche préalable à la mise en oeuvre de l'opération de reconfiguration intermédiaire.

2) Le regroupement pertinent des parties élémentaires forme une sous-figure qui est *convexe ou non convexe*. Une sous-figure non convexe est plus difficile à détacher de la figure qu'une sous-figure convexe, car la loi perceptive de l'unité de contour n'est plus respectée[10].

3) Le regroupement pertinent peut exiger que l'on substitue des parties élémentaires auxiliaires à celles auxquelles l'énoncé du problème réfère. Pour montrer, par exemple, que la somme des angles d'un triangle fait 180°, on reconfigure les angles du triangle en un angle plat : cette reconfiguration exige la *substitution des parties élémentaires* 1' et 2' respectivement à 1 et à 2.



4) Le fait qu'une même partie élémentaire doive entrer simultanément dans deux regroupements intermédiaires à comparer. C'est ce que nous avons appelé dans un autre travail l'obstacle du *dédoublement des objets* [7]. Ce facteur n'est pas négligeable dans le problème suivant : IO et JO étant respectivement les bissectrices des angles AOB et BOC, quelle est la valeur de l'angle IOJ ? Pourquoi ?



Les parties élémentaires 2 et 3 entrent simultanément dans deux regroupements intermédiaires : IOJ et AOB pour la partie élémentaire 2, IOJ et BOC pour la partie élémentaire 3. Nous avons pu observer que cela constituait un réél obstacle pour certains élèves : ils ne pouvaient voir et comprendre qu'un même objet puisse être en même temps dans deux regroupements posés comme différents puisqu'on cherchait à les comparer.

Le caractère non convexe d'un regroupement intermédiaire, la nécéssité de recourir à des parties élémentaires auxiliaires ou le dédoublement d'une même partie sont autant de facteurs qui diminuent la visibilité de l'opération de reconfiguration intermédiaire. L'occultation résultant de la présence de ces facteurs se traduit par le fait que l'on va chercher plus ou moins longtemps sans avancer dans la solution du problème. Il semble que dans des problèmes de ce type (problèmes dans lesquels l'opération de reconfiguration intermédiaire est congruente avec un traitement mathématique) la différence entre les élèves se fasse d'abord sur la résistance à l'occultation de l'appréhension opératoire et non sur l'opération figurale. Certaines observations semblent montrer que l'élève qui cherché longtemps sans rien voir met en oeuvre, dès qu'il voit, les mêmes procédures que l'élève qui a vu et trouvé tout de suite. *Et cela aussi rapidement* [10].

Il importe donc de *ne pas confondre*, dans l'analyse cognitive d'un problème de géométrie, *la productivité heuristique de la figure et la visibilité des opérations liées à cette productivité*. La productivité heuristique dépend de la congruence entre une opération et un traitement mathématique possible. En revanche, la visibilité de la figure est extrinsèque aux traitements mathématiques : le fait d'apercevoir ou de ne pas apercevoir, sur une figure, la reconfiguration intermédiaire pertinente ne signifie rien quant à la possibilité d'appliquer cette reconfiguration lorsqu'elle est aperçue. Dans l'état actuel des observations, il semble que le principal obstacle des problèmes de géométrie présentant une congruence entre l'appréhension opératoire et un traitement mathématique possible, tienne à la visibilité, apparement aléatoire selon les individus, des opérations figurales. Cela nous renvoie-t-il à un facteur d'aptitude spatiale ? Cela semble pour l'instant difficile à avancer : car tous les tests intervenant dans la détermination d'un tel facteur sollicitent essentiellement soit des tâches du type puzzle soit l'identification de la représentation plane d'un objet tridimensionnel soumis à des rotations [11 p.314-317,348-349]. Même lorsqu'elle implique des translations ou des rotations, l'appréhension opératoire des figures est d'une autre nature car elle ne se limite pas à une manipulation perceptive de formes.

III Appréhension discursive d'une figure et Démonstration

En examinant le problème de congruence entre figure et énoncé d'une part, entre figure et traitement mathématique d'autre part, nous avons passé sous silence le problème du statut des figures géométriques. En fait, elles ne constituent pas un registre de traitement autonome analogue, par exemple, à celui des représentations graphiques cartésiennes. C'est qu'en effet les propriétés pertinentes et seules acceptables d'une figure géométrique dépendent chaque fois de ce qui est énoncé comme hypothèse. Cela implique une *subordination de l'appréhension perceptive à l'appréhension discursive,* et par voie de conséquence *une restriction de l'appréhension perceptive* : une figure géométrique ne montre pas d'abord à partir de son tracé et de ses formes, mais à partir de ce qui en est dit. Cette subordination de l'appréhension perceptive à l'appréhensiuon discursive peut être considérée comme une théorisation de la représentation figurale : la figure géométrique devient, en quelque sorte, un fragment de discours théorique. Les éléments et les propriétés qui apparaissent sur la figure n'ont que le statut et la certitude des assertions correspondantes dans le discours géométrique, lequel est commandé par des définitions,des axiomes et des théorèmes déja établis. *La même figure*, du point de vue perceptif, *peut donc être une figure géométrique différente* si l'on modifie l'énoncé des hypothèses.
La compréhension de cette théorisation des figures géométriques, dans lequel leur appréhension perceptive doit être subordonnée à leur appréhension discursive, constitiue l'un des seuils d'accés à la démonstration. Il est bien connu que les élèves trouvent inutile, et parfois absurde, de démontrer une propriété qui "se voit" sur la figure! De même beaucoup d'élèves ont parfois du mal à ne pas confondre les hypothèses et ce qui est à démontrer. Moins que d'un cercle vicieux , il s'agit là d'une instabilité analogue à celle de certaines figures que l'on voit alternativement en creux ou en relief sans pouvoir en fixer l'interprétation. On pense généralement que, pour contourner cette résistance ou cette instabilité, il faille proposer des problèmes dans lequel le résultat apparaisse incertain. Mais en procédant de cette manière on laisse subsister l'obstacle sans donner aux élèves l'occasion d'en prendre conscience et de le surmonter : celui de la théorisation laquelle introduit, dans l'évidence et l'homogénéité synoptiques de l'appréhension perceptive des figures, une différenciation de nature discursive et axiomatique. Le statut spécifique d'une figure en géométrie reste alors entièrement ignoré.

C'est cette appréhension discursive des figures qui différencie radicalement les tâches de démonstration et les tâches de construction. *Et cette appréhension discursive est d'une toute* *autre nature que la description d'un procédure de construction que l'on exige parfois en plaçant les élèves dans une situation de jeu de message.*

Dans une tâche de construction la figure est d'une certaine façon indépendante de tout énoncé. L'appréhension perceptive peut servir de registre de contrôle pour juger d'une exécution acceptable ou non de la tâche. Son statut n'est donc pas le même que dans une tâche de démonstration. Certes l'exécution impose des contraintes qu'il n'est pas toujours possible de contourner par approximations successives d'un tracé. *Mais ces contraintes ne sont en rien comparables à des hypothèses.* Car elles sont propres à chaque figure et elle ne changent qu'en fonction du registre d'éxécution : règle et compas pour une réalisation sur papier ou liste d'intructions de base pour réalisation sur écran. Pour un registre d'éxécution donné les contraintes propres à une figure ne changent pas : cela constitue l'autonomie des figures par rapport au discours géométrique. En revanche c'est exactement le contraire qui se passe avec les hypothèses. Un même figure peut illustrer des situations géométriques différentes, c'est-à-dire des situations dans lesquelles les hypothèses de départ ne sont pas les mêmes.

La formulation d'instructions permettant à un tiers (humain) de construire une figure est elle-même étrangère à une appréhension discursive des figures. Elle exige surtout trois choses communes à toute tâche de rédaction d'un texte :
— ne donner, dans la mesure du possible, qu'une instruction par phrase
— éviter toute ambiguité dans l'énoncé de chaque instruction
— définir un cadre de référence autonome qui permette une description explicite de tout ce qui, dans une interaction directe, est simplement montré.
De ces trois exigences, la seconde est naturellement celle qui a le plus retenu l'attention.Toute imprécision, toute analyse insuffisante des possibilités de sens de la formulation donnée sont sanctionnées, ou sont sanctionnables, par une réalisation différente de celle attendue. La nécessité d'une terminologie précise et commune, celle de références indépendantes du contexte perceptif particulier où l'on se trouve surgissent du conflit ainsi créé. Mais l'activité de construction et son produit , la figure perceptible, sont la fois source et contrôle de la formulation des instructions. L'ordre des instructions reproduit simplement la succession découverte dans l'activité de construction : au plan du discours, il n'a d'autre cohérence que celui d'"enrichir" et de compléter un objet. On reste dans le genre de la description. L'appréhension discursive d'une figure exigée par une tâche de démonstration privilégie au contraire l'articulation des énoncés, leur statut et leur

compatibilité interne. *En fait, la véritable repésentation correspondant à une tâche de démonstration, en géométrie, ne serait pas une figure mais un réseau sémantique de propriétés et d'objets* ! C'est relativement à la représentation d'un tel réseau que la distinction du statut des énoncés (hypothèses, proposition à démonter, propositions utilisables) et l'importance de l'ordre des énoncés peuvent prendre tout leur sens pour les élèves. Naturellement l'élaboration de telles représentations est complexe et très peu de tentatives ont été faites jusqu'à présent pour développer ce type de représentation. Mais sans le recours,implicite ou explicite, à ce typre de représentation il ne peut y avoir d'appréhension discursive des figures. *L'appréhension discursive d'une figure équivaut à plonger, selon les indications d'un énoncé, une figure géométrique particulière dans un réseau sémantique à la fois plus complexe et plus stable.*

On voit donc apparaître, d'un point de vue cognitif, une différence importante entre la rédaction d'une liste d'instructions pour la construction d'une figure et la rédaction d'une démonstration. Dans un cas la linéarité du discours reflète simplement la séquence des pas successifs d'éxecution : la formulation peut être inutilement explicite, insuffisament explicite ou non adaptée, elle ne peut être contradictoire. Les énoncé sont des ordres et non des assertions. Dans l'autre cas, la linéarité du discours n'est pas préalablement donnée, elle est à organiser à partir d'un réseau de relations conceptuelles : la formulation peut alors être non cohérente ou explicitement contradictoire.

Conclusion

L'existence d'*une triple appréhension* de ce qui est, du point de vue de la représentation graphique, *la même figure* montre la complexité des problèmes de géométrie apparemment les plus simples.
Selon qu'elle est congruente, ou non, à l''énoncé du problème, l'appréhension perceptive des figures peut avoir un rôle facilitateur ou inhibiteur sur la compréhension du problème posé.
Si elle est congruente à un traitement mathématique possible du problème posé, l'appréhension opératoire joue un rôle heuristique important dans la résolution du

problème.

Il y a enfin l'appréhension discursive des figures : dans ce qu'elle a de spécifique elle implique une neutralisation de l'appréhension perceptive. *Lorsqu'il y a congruence entre l'appréhension opératoire et un traitement mathématique possible du problème, l'appréhension discursive peut être négligée* : la rédaction du problème prend une forme de démonstration, mais, d'un point de vue cognitif, cette rédaction ne diffère d'une formulation d'instructions exigée dans un jeu de messages. *Mais lorsqu'il n'y a plus congruence entre l'appréhension opératoire et un traitement mathématique possible. l'appréhension discursive devient nécessaire* . Les élèves se trouvent alors affrontés à une véritable tâche de démonstration.

On voit donc qu'il y a une très grande hétérogénéité cognitive entre des problèmes de géométrie mathématiquement très proches, ou sollicitant les mêmes connaissances. une catégorisation cognitive des problèmes est indispensable non seulement pour pouvoir interpréter les performances et les productions observées sur un problème mais aussi pour aborder ce qui a été appelé "un apprentissage de la démonstration". Il apparaît qu'il faille distinguer trois niveaux de problèmes en géométrie :

1) Celui des problèmes pour lesquels il y a congruence entre une appréhension opératoire de la figure et un traitement mathématique possible. A ce niveau, une appréhénsion discursive explicite n'est pas nécessaire.

2) Celui des problèmes pour lesquels l'appréhension discursive est au contraire nécessaire, soit parce qu'il n'y a plus congruence soit parce qu'elle est explicitemnt demandée comme justification théorique.

3) Celui des problèmes qui exigent, en plus d'une appréhension discursive, le recours à des schèmes formels logiques spécifiques tels que le raisonnement par l'absurde, le dilemme ou raisonnement disjonctif, le raisonnement par contraposition,...[9 p.103-104]. Naturellement pour chacun de ces niveaux d'autres distinctions doivent être prises en compte. Mais cela relève d'une classification des problèmes, laquelle déborde le cadre de cette approche.

"L'apprentissage de la démonstration" a été envisagée,dans l'enseignement, avec des problèmes du second niveau. Sans reprendre ici une analyse développée plus loin par A.L. Mesquita et J.C.Rauscher, nous nous contenterons de mentionner plusieurs conditions qui apparaissent nécéssaires pour rendre les problèmes du second niveau pleinement accessibles à la majorité des élèves :

— une pratique systématique des problèmes du premier niveau.

— la prise de conscience de l'opposition entre appréhension perceptive et appréhension discursive

— la constitution en un réseau sémantique de toutes les connaissances qui peuvent être sollicités par une démonstration. De ce point de vue la représentation d'un réseau de propriétés constitue un registre peut-être plus indispensable que le tracé ou que la construction de figures.

— la prise de conscience du décalage entre une déduction et une argumentation développée dans le cadre de la pratique naturelle du discours. Car les connecteurs argumentatifs de la langues naturelle ont un sens et un emploi qui ne correspond pas souvent à l'articulation déductive de deux énoncés dans un cadre donné par des définitions et des axiomes.

Tout cela revient à dire que l'activité cognitive de démonstation est moins simple et moins homogène que son produit, la démonstration exposée à autrui. On ne peut assimiler l'activité de démonstration au raisonnement dans la mesure où, par ce terme, on désigne la production d'arguments, l'inférence constament sollicitée dans la compréhension de n'importe quel discours, ou encore l'interprétation qui permet de saisir un changement de registre...L'activité de démonstration ne peut surgir qu'au point de convergence de nombreuses fonctions cognitives. Favoriser le développement de toutes ces fonctions serait peut-être une voie plus rapide et plus fructueuse pour l'enseignement que celle qui propose des procédures imitables pour simuler ou reproduire une activité de démonstration. Il n'y a peut-être pas de transition progressive et graduée vers l'exigence et la pratique des démonstrations, car il restera toujours un seuil à franchir d'une description, d'une argumentation, ou d'une construction à une démonstration. Mais la compréhension de ce qu'est une démonstration est liée à la prise de conscience de la différence entre ces multiples activités discursices et représentatives.

REFERENCES

[1] **Balacheff N.**, 1982, Preuve et démonstration en mathématiques au collège, in *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3,3, p.262-306.

[2] **Bessot D.**, 1983, Problèmes de représentation de l'espace, *Enseignement de la Géométrie*, Bulletin Inter-Irem, 23, p.33-40.

[3] **Betinelli B.**, 1984, *Jeux de forme Forme de jeux*, Besançon, Irem.

[4] **Burgaud C.**, 1983, Quelques exemples d'utilisation des transformations en géométrie plane Obstacles rencontrés chez les élèves, *Enseignement de la Géométrie*, Bulletin Inter-Irem, 23, p.52-56.

[5] **Coren S., Porac C., Ward L.M.**, 1979, *Sensation and Perception*, Academic Press, New-York.

[6] **Dupuis C., Duval R., Pluvinage F.**, 1978, Etude sur la stabilité de la géométrie en fin de troisième, in *Géométrie au premier cycle*, tome II, A.P.M.E.P., p.65-99.

[7] **Duval R.**, 1983, L'obstacle du dédoublement des objets mathématiques, in *Educational Studies in Mathématics*, 4, p.385-414.

[8] **Edwards C.H.**, 1979, *The historical Development of Calculus*, Springer

[9] **Glaeser G.**, 1971, *Mathématiques pour l'élève professeur*, Paris , Hermann.

[10] **Mesquita A.**, Sur une situation d'éveil à la déduction en géométrie, à paraître.

[11] **Pellegrino J.W. Kail Jr.**, 1982,Process Analyses of Spatial Aptitude,in *Advances in the Psychology of human intelligence*,ed. by J. Sternberg, Hillsdale, Lawrence Erlbaum .

[12] **Thom R.**, 1972, Les Mathématiques "Modernes": une erreur pédagogique et philosophique , *L'age de la science*, III,3, p.225-242.