# *PROBLEMES DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE AU COLLEGE*

C. LABORDE

Cet exposé présente quelques problèmes que connaît actuellement l'enseignement de la géométrie au collège :
- les liens parfois conflictuels entre la géométrie enseignée et les savoirs géométriques issus de l'environnement physique et culturel
- les connaissances spontannées des élèves
- les moyens que l'on peut mettre en œuvre dans l'enseignement pour faire évoluer ces connaissances spontannées à propos d'un exemple de processus d'enseignement de la symétrie orthogonale en 6ème.

La recherche en didactique des mathématiques cherche à analyser les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage et à les comprendre de façon objective, en essayant d'exclure, comme toute recherche scientifique, les présupposés et les idées préconçues. Tâche qui n'est pas si facile, alors qu'un chercheur en didactique est bien souvent aussi un enseignant avec ses opinions issues de son expérience. Certes les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage sont d'une grande complexité, ils mettent en jeu des comportements humains et ils ne se laissent enfermer, ni dans une axiomatique, ni dans un ensemble de théorèmes.

Le caractère scientifique de la recherche en didactique se traduit par un effort d'explicitation des hypothèses prises, par un souci de dégager les variables qui permettent de caractériser un phénomène, enfin par le rôle attribué à l'expérimentation. Comme l'a souvent répété Glaeser (1979), l'expérience est à prendre au sens que lui donnait le biologiste français Claude Bernard, ce n'est pas une simple observation qui nous donne à voir les faits tels que la nature nous les montre, une expérience fait suite à une analyse théorique, elle permet d'éprouver la solidité de cette analyse.Dans l'expérimentation le chercheur ne subit pas les faits, il en a préparé l'apparition par le choix de conditions appropriées et si les faits prévus n'apparaissent pas, c'est l'analyse théorique qui est à remettre en cause.

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
*1 (1988) (p.75-93) IREM de Strasbourg*

Mon exposé présentera quelques aspects des recherches en didactique dans le domaine de la géométrie et particulièrement à propos de la notion de symétrie orthogonale sur laquelle travaille un groupe de chercheurs grenoblois (J.F. Bonneville, M. Dupraz, D. Grenier, M. Guillerault et moi-même).

Un processus d'enseignement d'un savoir engage un enseignant, des élèves, ce savoir. Il a pour objectif de faire passer l'élève d'un état initial de connaissance par rapport au savoir en question à un état final souhaité. La construction et le contrôle d'un tel processus exige
- que l'on détermine les caractéristiques du savoir à enseigner
- que l'on connaisse l'état initial des connaissances de l'élève, leurs modes d'évolution possibles
- que l'on construise les moyens par lesquels on va permettre la transmission et l'acquisition de ce savoir.

## Quels contenus d'enseignement en géométrie?

Les savoirs à enseigner ne sont pas les savoirs des mathématiciens. Ils subissent une transformation pour être rendus accessibles aux apprenants, pour pouvoir être insérés dans la logique d'un cursus qui s'étend sur plusieurs années, processus que Chevallard appelle *transposition didactique* (Chevallard, 1985). Mais la détermination des contenus "officiels" d'enseignement se fait non seulement en fonction des savoirs savants au sein de la communauté des mathématiciens mais aussi en fonction des savoirs culturels et sociaux de la société au sein de laquelle a lieu le projet éducatif.

Cette double origine des contenus d'enseignement s'est exercée dans le cas de la géométrie de façon souvent conflictuelle, le plus souvent une dichotomie a été établie entre l'étude de l'espace d'une part et **une** géométrie des mathématiciens d'autre part : d'un côté l'étude des rapports de l'homme avec l'espace, qui recouvre les problèmes de perception, de représentation des objets physiques dans l'espace ainsi que la modélisation des actions et des opérations sur ces objets; de l'autre côté la géométrie en tant que lieu privilégié d'une rationalité poussée à son point d'excellence.
La géométrie enseignée trouve en effet sa source à la fois dans la géométrie développée au cours du temps par les mathématiciens et dans les savoirs culturels et sociaux, issus de pratiques diverses (arpentage, architecture,...) mettant en jeu l'espace physique dans lequel vit l'homme.

Historiquement la méthode déductive est apparue en géométrie et cette méthode de la géométrie est devenue la méthode des mathématiques parce que l'ordre géométrique est "véritable" comme l'écrit Pascal (1657, opuscule "de la méthode des démonstrations géométriques, c'est à dire méthodiques et parfaites").

Les démonstrations ont ainsi été opposées aux procédés d'obtention des figures. La démonstration parce qu'elle procède de règles d'une logique intangible est considérée comme indépendante des figures. En revanche les figures sont le résultat de procédés de construction liés au sujet qui les produit. Cette dichotomie entre le savoir et le savoir-faire, le mathématicien et l'ingénieur, issue de l'école grecque persiste longtemps. On la retrouve ainsi au XVIIe et XVIIIe siècles dans les différentes dénominations entre les ouvrages de géométrie classique (les Eléments d'Euclide) et les nombreuses géométries pratiques qui traitent de problèmes d'arpentage, de toisé, d'architecture et qui souvent donnent des procédés de construction sans justification et même parfois approchés sans qu'il soit fait mention de ce caractère approché.

Cette séparation entre une géométrie de l'espace liée au sujet et une géométrie théorique s'est traduite en France dans les contenus d'enseignement jusqu'en 1986 par une rupture entre une géométrie d'observation, mettant en jeu le tracé de figures et l'usage d'instruments destinés aux élèves les plus jeunes et une géométrie de la déduction pour les élèves plus âgés. Ainsi, dans les programmes de 1977, la géométrie ne commence qu'en 4ème (élèves de 13 ans) en même temps que l'apprentissage de la démonstration, alors que dans les classes précédentes n'est prévue qu'une "observation d'objets physiques et géométriques" qui "n'est pas à proprement parler une activité mathématique" comme le précisent les commentaires officiels des programmes.

Or Pluvinage et Rauscher (1986) ont pu observer que la perception peut gêner l'analyse de la figure en unités adaptées pour un traitement comme celui consistant à donner des instructions permettant de tracer cette figure; "dire par exemple d'un élève qu'il ne voit pas revient souvent à dire qu'au contraire il se laisse piéger par la vision" écrivent Pluvinage et Rauscher.

D'autre part, parce qu'un objectif à long terme de l'enseignement est bien l'apprentissage de la géométrie de la déduction, les objets géométriques introduits dans l'enseignement avant l'apprentissage de la démonstration sont justement ceux sur lesquels opéreront plus tard les démonstrations. Leur introduction ne répond donc qu'à une nécessité interne à l'enseignement et non pas à la construction par l'élève de connaissances spatiales. La question se pose de savoir si pour les élèves les objets géométriques de l'observation sont les mêmes que ceux de la démonstration et s'ils peuvent réinvestir leurs connaissances issues de l'observation lorsqu'ils s'engagent dans la phase déductive (Balacheff, 1985).

Une difficulté du passage d'une géométrie d'observation à une géométrie de déduction réside aussi dans le nombre très restreint de traitements mis en œuvre dans l'enseignement et du nombre limité de compétences développé de ce fait chez les élèves; en particulier les traitements débouchant sur un tracé sont généralement défavorisés au profit de ceux débouchant sur un texte (Pluvinage, Rauscher, ibid.); on retrouve là la résistance aux constructions géométriques signalée plus haut.

La séparation entre géométrie pratique et géométrie des mathématiques est très apparente dans l'histoire de la symétrie orthogonale en tant qu'objet d'enseignement. La symétrie est un objet culturel profondément implanté dans les civilisations fortement influencées par la civilisation grecque ancienne. Il suffit de regarder les temples grecs et les différents monuments classiques occidentaux pour en être persuadé. Et pourtant elle n'apparaît que tardivement dans les programmes d'enseignement, d'abord de façon incidente dans la deuxième moitié du XIX ème siècle pour des calculs de volume de polyèdres, puis plus nettement dans les programmes de 1923 avec le statut de transformation géométrique parce que justement elle l'avait acquis à la fin du XIX ème siècle en mathématiques. Jusqu'encore au XVIIIème siècle la symétrie est définie comme un terme d'architecture, de jardinage ou de réthorique : "le rapport, la proportion, la régularité des parties nécessaires pour composer un beau tout." (Encyclopédie de Diderot, d'Alembert), harmonie comparée à celle du corps humain qui a d'ailleurs servi longtemps de modèle et d'étalon de mesure dans les arts.

En France, l'objet d'enseignement symétrie en tant que transformation du plan a connu une ampleur particulière avec les programmes des années 1970 et s'est maintenu jusqu'à cette année (octobre 1986) à tel point qu'une fois donnée la définition du symétrique d'un point il paraissait inutile à certains manuels de préciser les symétriques de figures usuelles, une figure n'étant après tout qu'un ensemble de points. On pouvait même lire parfois : la figure transformée d'une figure donnée dans une symétrie orthogonale est l'ensemble des transformés de la figure initiale.

Avec les programmes entrés en vigueur cette année pour la classe de 6ème, cette dichotomie semble s'estomper pour laisser la place à des liens plus dialectiques entre construction et démonstration, savoir social et savoir mathématique : il ne s'agit plus tant de démontrer les propriétés d'invariance de certains éléments mais à partir de manipulations, dessins, mesures, constructions, dégager et utiliser des propriétés caractéristiques.

## Les connaissances des élèves et leurs modes d'évolution

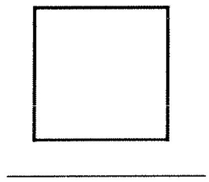
### Les conceptions des élèves

Nous travaillons à partir d'une hypothèse constructiviste de la formation des connaissances selon laquelle tout individu en situation d'apprentissage construit ses propres conceptions des contenus sur lesquels porte l'apprentissage. Ces conceptions sont la résultante de conceptions initiales existant éventuellement déjà avant l'enseignement et de l'enseignement même. On peut penser qu'en géométrie du fait que l'élève vit dans un espace qu'il utilise dans la vie quotidienne, il possède des connaissances spatiales avant tout enseignement. La notion de symétrie culturellement implantée, comme je l'ai dit, n'est pas inconnue des élèves lorsqu'ils l'abordent en mathématiques.

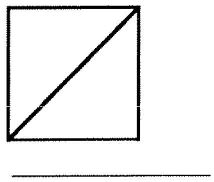
Ces conceptions, connaissances, sont fragmentaires, parfois partiellement erronées. On l'admet aisément dans le cas de conceptions initiales ou "spontanées". Par exemple, du fait de l'importance du modèle fourni par le corps humain, la symétrie orthogonale est d'abord perçue de façon privilégiée comme d'axe vertical.

Mais suite à un enseignement, le caractère local, partiellement erroné de ces conceptions peut continuer d'être présent et nous prenons comme hypothèse que les connaissances des individus n'atteignent jamais un seuil définitivement stable mais qu'elles sont susceptibles de modifications sous l'influence d'autres connaissances ou expériences mettant en cause certaines des caractéristiques des connaissances disponibles. Un des objectifs de l'enseignement est d'arriver à contrôler les caractéristiques des connaissances construites par les élèves.

Le caractère incomplet de ces connaissances est mis à jour lors de la résolution de problèmes. Ces connaissances permettent de résoudre correctement certains problèmes mais ne fonctionnent plus ou fonctionnent mal sur d'autres problèmes.
Ainsi au début d'un enseignement de la symétrie, les élèves envisagent souvent la symétrie comme une isométrie conservant l'orientation. Dans une tâche de construction du symétrique, cela conduit à une réponse exacte dans le cas 1 et à une réponse fausse dans le cas 2 (Gallou-Dumiel, 1985).



cas 1

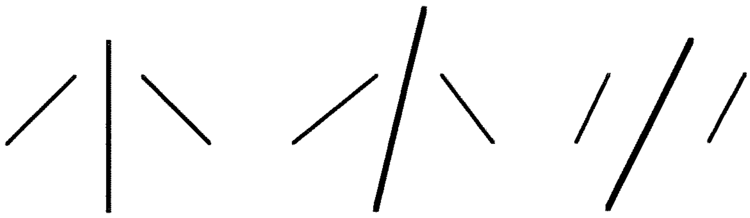


cas 2

Différentes recherches qui ont eu pour objectif de dégager les conceptions des élèves à propos d'une notion donnée ont en général pris pour objet d'analyse les réponses d'élèves à des problèmes. Par exemple dans le cas de transformations géométriques, comme translation, rotation, symétrie, des recherches ont porté sur le respect ou le non respect des invariants d'une transformation par les élèves : conservation des longueurs (Thomas, 1978, Kidder, 1978), conservation des propriétés d'incidence (Thomas) dans des tâches de construction du transformé d'une figure donnée ou dans une tâche de comparaison entre figure objet et figure image.
Certaines de ces recherches ont dégagé des **variables** dont dépendent les tâches données aux élèves telles que leur modification entraîne un passage de réponses correctes à des réponses erronées ou même des stratégies de réponse différentes. Donnons un exemple.

De nombreux élèves savent construire le symétrique d'un segment par rapport à un axe vertical, en plaçant les points correspondants dans la transformation sur des droites horizontales perpendiculaires à l'axe. Lorsque l'axe est oblique, ils ont recours à ces mêmes lignes de rappel horizontales alors qu'elles ne sont plus perpendiculaires à l'axe. On peut en induire que c'est la propriété pour deux points symétriques d'être sur une même horizontale qui est utilisée par les élèves et non pas la propriété d'orthogonalité à l'axe (Grenier, 1985).

Cette propriété donne une réponse correcte dans le cas de l'axe vertical et erronée dans le cas de l'axe oblique.



Dans le cas où la figure objet coupe l'axe, les stratégies des réponses changent; elles consistent par exemple à ne considérer qu'une partie de la figure objet située dans un demi-plan déterminé par l'axe et à ne construire que sa transformée ou à construire de façon séparée la transformée de chacune des deux parties de la figure situées de part et d'autre de l'axe.

On a ainsi pu mettre en évidence à propos de cette tâche de construction que suivant
- la complexité de la figure objet (segment, triangle, polygone, ...)
- la pente de l'axe de symétrie par rapport aux bords de la feuille
- la position de la figure objet par rapport à l'axe (distance, intersection vide ou non)

le taux de réussite des élèves et leurs stratégies de réponses changent considérablement (Grenier, 1985, Hart, 1981, Schultz, 1978, 1983).

De façon plus générale ont pu être mises en évidence des variables relatives au type d'espace et d'objets sur lesquels portent les problèmes, variables qui ont une incidence sur les conceptions des élèves et le traitement qu'ils font des objets géométriques engagés dans le problème.

**- la taille de l'espace**

On peut distinguer trois espaces dans lesquels les problèmes ne se posent pas de la même façon parce qu'ils ne mettent pas en jeu les mêmes possibilités de contrôle (Brousseau, 1983b).

.le micro-espace, l'espace des objets que l'on peut déplacer sur une table

.le méso-espace, entre O.5 et 50 fois la taille du sujet; les déplacements y sont coûteux.

.le macro-espace qui met en jeu des problèmes de repérage et d'orientation. La mesure d'une distance y est plus coûteuse que celle d'un angle.

La géométrie enseignée travaille uniquement sur le micro-espace qui induit des représentations très fortes chez les élèves. Ainsi deux droites sécantes "doivent" se couper sur la feuille de papier; les relations entre objets "doivent"être visibles sur la feuille. Il est difficile de travailler en classe en dehors du micro-espace mais par des contraintes au niveau du matériel proposé on peut le simuler comme l'a fait par exemple Grecia Galvez (1985) qui a travaillé à la fois sur le macro-espace et sur des simulations en classe avec des élèves mexicains de l'école primaire à propos du déplacement en milieu urbain.

- **la direction**
  L'espace ou le plan ne sont pas isotropes pour l'enfant, du moins en Occident. Dans le plan de la feuille de papier, les directions horizontales et "verticales" sont privilégiées par les élèves. Un angle droit à côtés obliques est moins bien reconnu que s'il est à côtés horizontal et vertical (Fisher, 1978, Zykova, 1969). Les expérimentations que nous avons faites en classe montrent de même que la symétrie orthogonale est mieux perçue lorsque l'axe est vertical

## Quels moyens pour permettre l'acquisition de nouvelles connaissances par les élèves ?

Comme il a été dit plus haut, on a pu constater que les stratégies de réponse fournies par les élèves dépendent du choix des problèmes auquels ils sont confrontés. Des variables ont ainsi été dégagées dont les changements de valeur entraînent des modifications importantes dans les stratégies de réponses des élèves. Grâce à des choix adéquats des valeurs de ces variables on peut donc bloquer le fonctionnement de stratégies connues des élèves et les mettre en situation d'en utiliser de nouvelles faisant appel à des connaissances non mobilisées par les stratégies antérieures ou permettant la construction de nouvelles connaissances. Dans le domaine de la géométrie ces variables concernent le type d'espace et les objets engagés dans le problème. La modification du fonctionnement des connaissances en situation-problème peut aussi être obtenue en jouant sur deux autres caractéristiques de la situation :

- les **contraintes** liées au matériel permis (instruments de tracé, de mesure,...) (on peut aussi considérer que ce sont des variables de la situation)

- la **finalité** de la situation.

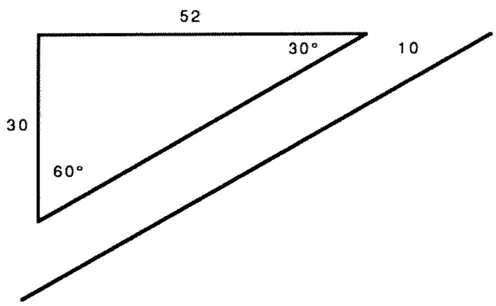
Le choix des contraintes permet de modifier le type de contrôles possibles de la part de l'élève et donc la nature et la signification des connaissances qu'il investit dans le problème. Prenons un exemple simple.

Le pliage selon une droite permet
- de décider si deux figures sont symétriques par rapport à une droite
- ou de trouver l'axe de symétrie d'une figure
- ou de construire le symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite donnée.

Dans tous ces cas la réponse est obtenue par la seule observation; elle relève uniquement d'une activité immédiate de perception. En revanche si l'on empêche le pliage ou le retournement par un artifice quelconque (matériau rigide ou inamovible), les problèmes précédents requièrent pour leur solution l'utilisation de propriétés de la symétrie orthogonale (équidistance de l'axe de points symétriques, conservation des longueurs,...). La transformation d'une simple situation d'observation, sans question pour l'individu qui observe, en un problème dans lequel il engage ses connaissances repose dans ce cas sur des contraintes rendant moins immédiates les décisions à prendre parce que des contrôles de type perceptif ont été empêchés. Ce sont les **savoirs géométriques** qui jouent alors le rôle **d'éléments de contrôle et d'instruments de décision.**

Il paraît important de dresser un répertoire d'actions permises par chaque type de matériel et celles rendues impossibles pour associer à chaque problème en fonction du matériel utilisé les connaissances les plus efficaces pour résoudre le problème. En effet le même problème suivant les contraintes choisies peut conduire à l'utilisation de propriétés différentes(cf. plus bas).
Exemple : construire la droite de symétrie d'un trapèze isocéle (i) avec une règle graduée (ii) avec seulement une règle non graduée (iii) avec une règle non graduée et une équerre.

De la même façon construire le symétrique d'une figure rectiligne donnée par rapport à un axe, telle celle de la page suivante, ne met pas en jeu les mêmes propriétés suivant que l'on dispose
- d'une feuille de papier, d'un crayon, d'une règle graduée et d'une équerre
- d'un micro-ordinateur avec la tortue LOGO ne pouvant que se déplacer dans une direction donnée d'une longueur donnée et tourner d'un angle donné.




Dans le deuxième cas la solution la moins coûteuse revient à construire le contour de la figure symétrique en utilisant les angles de la figure initiale. Par ce type de dispositif la notion d'angle prend l'importance qu'elle possède dans le macro-espace et qu'elle a en général perdu dans l'espace de la feuille de papier avec les instruments usuels où les propriétés d'incidence sont plus efficaces (Gallou-Dumiel, 1985). On retrouve aussi le fait qu'en jouant sur les contraintes de la situation on peut simuler le macro-espace.

## Un exemple de processus d'enseignement

Présentons l'exemple des trois premières phases d'un processus d'enseignement de la notion de droite de symétrie que nous avons construit et réalisé en classe de 6ème avec l'intention de jouer sur les tâches et sur les contraintes pour modifier les connaissances des élèves.

L'objectif des premières phases était d'apprendre aux élèves à utiliser les propriétés de la droite de symétrie d'une figure pour la construire.

### *Une première phase de diagnostic*

Dans une première phase nous avons cherché à connaître les conceptions initiales des élèves de la classe à propos de la notion de droite de symétrie en leur demandant individuellement par écrit de dire si chacune des figures qu'ils avaient reçues admettait une droite de symétrie et si c'était le cas de tracer à main levée la droite de symétrie. L'étude des productions des élèves a montré essentiellement la présence des aspects erronés suivants (pour certains élèves) :

- les seules droites de symétrie tracées sont verticales (cf. les aspects historiques de la symétrie)
- les droites de symétrie sont les droites qui partagent la figure en deux parties "identiques" le concept d'identique recouvrant aussi bien des parties de figures se déduisant par translation, demi-tour ou symétrie orthogonale.

A partir de ce constat, un premier objectif du processus d'enseignement était de déstabiliser ces conceptions erronées.

***Deuxième phase : déstabilisation des conceptions erronées***

On a donc posé à nouveau la tâche de construction à main levée de la droite de symétrie si elle existe; les figures étaient tracées sur du carton pour que tout pliage soit empêché et que la tâche constitue ainsi effectivement un problème pour les élèves. Dans les figures proposées figuraient les figures, sources d'erreur chez les élèves : une figure pouvant être décomposée en deux "moitiés identiques" mais ne présentant pas de symétrie orthogonale (plume d'oiseau), figures possédant une symétrie centrale mais non orthogonale (différents parallélogrammes), figures ayant plusieurs droites de symétrie (triangle équilatéral, rectangle, segment, deux points), figures ayant une ou des droites de symétrie obliques par rapport aux bords de la feuille (triangle équilatéral, segment, deux points, rectangle) ou horizontale (deux cercles tangents).

L'organisation du travail dans la classe a été choisie pour favoriser les interactions sociales dans la classe et en particulier la mise en évidence de contradictions et ceci en deux étapes :

- d'abord les élèves travaillaient par groupes de quatre pour cette tâche et le groupe devait se mettre d'accord sur une réponse commune pour chaque figure; la compostion des groupes n'avait pas été faite au hasard, mais de façon à privilégier la discussion. La tâche individuelle de tracé de droites de symétrie donnée en début du processus d'enseignement avait permis de répertorier les conceptions de chacun des élèves (relativement à la tâche); on a fait en sorte que dans un groupe soient présents des élèves ayant manifesté des conceptions différentes.

- ensuite un débat entre les groupes était organisé sous le contrôle de l'enseignant; chaque groupe envoyait un représentant au tableau exposer sa réponse; en cas de désaccord entre ces réponses, le représentant de chacun des groupes devait pouvoir défendre la solution du groupe en l'argumentant. On ne peut garantir que l'issue d'un tel débat se fasse de façon satisfaisante sur le plan des mathématiques si l'enseignant ne le gère pas. C'est lui qui finalement peut mettre en évidence les aspects erronés d'une solution sur laquelle toute la classe serait d'accord; c'est lui qui peut intervenir pour que soit reconnue une solution correcte non reconnue comme telle par la classe. Un débat ne se règle pas seulement sur des bases rationnelles mais aussi relationnelles, et s'il se règle sur des bases rationnelles, il se peut qu'il débouche sur un accord mathématiquement faux parce que une même conception erronée est partagée par l'ensemble des élèves.

Cette deuxième phase se terminait donc par un débat entre groupes dont la conclusion était tirée sous contrôle de l'enseignant. Le rôle de l'enseignant ne se bornait pas à cela, il récapitulait ensuite les aspects importants à retenir de l'activité dans une phase *d'institutionnalisation* en insistant sur le fait que les propriétés ainsi soulignées par lui seraient réutilisées dans la suite. Dans le cas présent étaient soulignées par l'enseignant les propriétés suivantes :

- une droite de symétrie est une ligne droite
- il y a des droites de symétrie non "verticales"
- des figures peuvent présenter plusieurs droites de symétrie
- une droite de symétrie passe par le milieu de deux points symétriques (propriété en général reconnue et utilisée par tous les élèves)
- elle est orthogonale à la droite joignant deux points symétriques (propriété non utilisée par tous et dans tous les cas restant implicite, même si elle est utilisée).

La tâche de tracé à main levée n'exige pas un usage analytique de ces propriétés mais plutôt un respect global de celles-ci. Il suffit que la droite de symétrie passe "au milieu" de la figure et qu'elle ne soit pas trop "penchée" par rapport à la droite joignant deux points homologues.

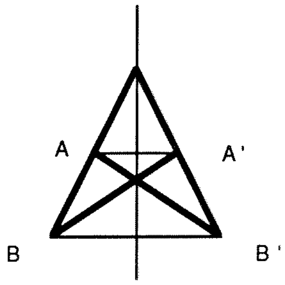
***Troisième phase : utilisation analytique des propriétés de la droite de symétrie***

Une troisième phase était donc nécessaire pour que ces propriétés soient mises en œuvre de façon plus opératoire; il fallait concevoir des situations-problèmes dans lesquelles elles étaient les instruments de solution. La propriété du milieu étant privilégiée par les élèves, il nous fallait construire des tâches rendant impossible son emploi et exigeant au contraire l'usage des autres propriétés moins présentes chez les élèves : orthogonalité, invariance des points de la droite de symétrie, équidistance des points de la droite de symétrie de toute paire de points symétriques. C'est le jeu sur les variables des figures et sur les contraintes de la tâche (instruments fournis) qui l'a permis.
Les élèves savaient utiliser quatre instruments : la règle graduée, la règle non graduée, l'équerre et le compas.

Quelles sont les actions permises par chacun de ces instruments ?

La **règle graduée** permet de prendre le milieu de deux points, donc de connaître un point de la droite de symétrie dès que l'on connaît une paire de points symétriques. **Deux paires de points symétriques** permettent donc de construire la droite de symétrie si l'on dispose d'une règle graduée. C'est uniquement **la propriété du milieu** qui est mise en œuvre.

La **règle non graduée** permet de tracer la droite passant par deux points et d'obtenir le point intersection de deux droites. Elle ne permet que la mise en œuvre de **propriétés d'incidence.** Elle permet de construire la droite de symétrie dans la mesure où l'on connaît deux de ses points obtenus en tant qu'intersection; c'est le cas si l'**on connaît deux paires de points symétriques ne formant pas un rectangle** grâce à la construction suivante.




C'est la propriété d'appartenance à la droite de symétrie de l'intersection de deux segments symétriques qui est uniquement mise en œuvre.

**Le compas** permet de tracer des points équidistants d'un point donné et d'obtenir ainsi des points à égale distance de deux points donnés comme intersection de deux arcs de cercle. **Une paire de points symétriques** permet donc de déterminer au moins deux points de la droite de symétrie. C'est la **propriété d'équidistance** des points de la droite de symétrie de toute paire de points symétriques de la figure qui est mise en œuvre. Pour tracer effectivement la droite de symétrie, il faut ensuite une règle.

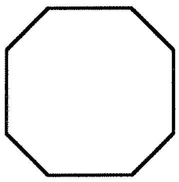
**L'équerre** dans son usage non dégénéré c'est à dire dans un usage non réduit à celui de tracer des droites, permet de tracer une droite perpendiculaire à une autre droite passant par un point donné. L'équerre ne permet dans son usage non dégénéré que de trouver **la direction de la droite de symétrie**; elle doit être **associée avec un autre instrument** pour permettre la construction de la droite de symétrie. La **propriété d'orthogonalité** est alors utilisée conjointement avec une autre propriété.

Dans chacun de ces cas il faut exhiber au moins une paire de points symétriques ce qui nécessite **une anticipation de la position de la droite de symétrie**. La tâche précédente de tracé à main levée peut constituer une aide à cette anticipation. Si ces points symétriques sont en évidence sur la figure, c'est à dire déjà marqués, cela nécessite leur reconnaissance. S'ils ne sont pas tracés, ils doivent être eux aussi le résultat d'une construction exigeant encore la mise en œuvre de propriétés de la symétrie. Notons que ce deuxième cas est beaucoup plus difficile pour les élèves car il demande non seulement une étape de construction supplémentaire mais une étape de construction d'éléments nouveaux par rapport à ceux donnés dans l'énoncé, exigence rare dans le déroulement coutumier d'une classe de ce niveau.

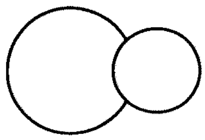
On a demandé aux élèves de tracer avec les instruments fournis les droites de symétrie de figures données sur du carton rigide. L'organisation sociale du travail était la même que dans la phase précédente. Les figures et instruments fournis étaient les suivants :

**instruments** **figures**

**groupe de figures 1** règle graduée et équerre

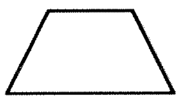


octogone

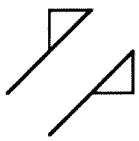


cercles sans leur centre

**groupe de figures 2** règle **non** graduée et équerre

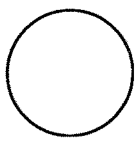


trapèze isocèle

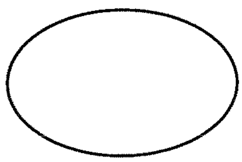


drapeaux

**groupe de figures 3** règle **non** graduée et compas



cercle sans centre



ellipse avec centre

**groupe 1**

Tracer chacune des droites de symétrie de l'octogone pouvait être réalisé uniquement avec la règle graduée en utilisant deux paires de sommets symétriques (propriété du milieu) ou avec la règle graduée et l'équerre en utilisant une paire de sommets symétriques et l'orthogonalité au côté correspondant (propriété du milieu et orthogonalité).
En revanche la doite de symétrie des deux cercles ne pouvait être tracée qu'en utilisant à la fois la règle graduée et l'équerre en tant que perpendiculaire à la corde commune des deux cercles en son milieu

**groupe 2**

Pour les deux figures deux solutions se présentaient
- l'usage exclusif de la règle en utilisant les deux intersections de deux paires de segments symétriques (propriétés d'incidence)
- l'usage de la règle et de l'équerre en déterminant un point de la droite de symétrie par des propriétés d'incidence et sa direction par orthogonalité au segment joignant deux points symétriques.

Dans le groupe 1 et 2 les paires de points symétriques n'étaient qu'à reconnaître.

**groupe 3**

Le tracé de droites de symétrie du cercle s'obtient avec le compas et la règle simple en utilisant les propriétés d'équidistance de deux points quelconques qu'on choisit sur le cercle. Il faut donc savoir au préalable que deux points quelconques du cercle sont symétriques.
Le tracé d'une droite de symétrie de l'ellipse avec le compas nécessite la détermination d'un point autre que le centre déjà donné. Ce point est obtenu par équidistance de deux points symétriques de l'ellipse. Mais ces points sont eux-mêmes à construire en tant que points équidistants du centre de l'ellipse. Ce dernier cas est donc particulièrement complexe par les allers et retours qu'il exige entre points de l'ellipse et points de la droite de symétrie.

**Finalité des situations**

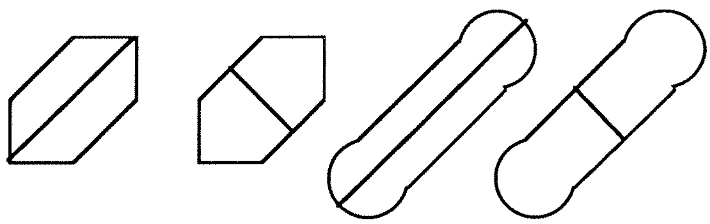
Les problèmes donnés aux élèves que nous avons cités jusqu'à présent relèvent de ce que l'on pourrait appeler une **géométrie de l'action** : le produit de l'activité est une construction. Les connaissances investies dans le problème permettent des prises de décision mais n'ont pas à être explicitées. L'apprentissage d'une connaissance exige de plus de savoir l'expliciter et éventuellement la désigner dans un langage connu des autres. Mais la formulation d'une connaissance pose d'autres problèmes que ceux de l'usage implicite de cette dernière même si les deux catégories de problèmes sont liées (Laborde, 1982). Je renvoie ici à la théorie des situations didactiques développée par G. Brousseau à propos de l'apprentissage en situation scolaire de connaissances mathématiques : l'acquisition d'une connaissance exige des phases dans lesquelles cette connaissance sert à prendre des décisions, des phases de formulation et de communication dans lesquelles la connaissance est formulée à l'intention d'autrui pour apporter des informations à cet autrui, des phases de validation dans laquelle la connaissance est utilisée pour justifier les décisions prises ou les énoncés tenus sur les objets mathématiques en jeu.

Reconnaître ou savoir construire la droite de symétrie d'une figure ne relève pas du même fonctionnement des connaissances que la désigner à l'aide de l'expression "droite de symétrie" ou décrire en mots les étapes de sa construction. "Droite du milieu" ou "droite qui partage le rectangle en deux" sont des expressions souvent employées par les élèves pour désigner une droite de symétrie du rectangle. Elles sont comprises par d'autres élèves mais elles sont aussi parfois interprétées comme renvoyant à une diagonale du rectangle. Une **situation de communication** entre élèves du type de la suivante permet leur prise de conscience de cette ambiguité et de la nécessité d'un langage commun. C'est la situation qui a été utilisée dans la quatrième phase du processus d'enseignement présenté plus haut.
A et B sont deux partenaires d'un jeu. A (resp. B) désigne un groupe de deux élèves dans la situation que nous avons réalisée (ce pourrait être un seul élève) ou un groupe plus grand d'élèves. A a une feuille de papier sur laquelle est dessinée une figure avec une droite de symétrie tracée dans une autre couleur que celle de la figure même. B a une feuille de papier sur laquelle est tracée une figure semblable de dimensions différentes mais sans droite de symétrie. Les deux partenaires ne se voient pas mais ils savent qu'ils ont des figures semblables de dimensions différentes et que la figure de A possède un élément supplémentaire. La tâche de A consiste à décrire cet élément supplémentaire dans un message écrit destiné à B pour que B puisse le reconstruire sur sa figure uniquement à l'aide du message.

Cette situation exige soit l'explicitation des propriétes de la droite de symétrie, soit l'emploi de l'expression "droite de symétrie". C'est la conjugaison de la finalité de communication et du choix des variables qui conduit à cette nécessité.

La finalité de communication est assurée par le fait qu'une activité de B est subordonnée aux informations transmises par A; B a besoin des informations données par A pour mener l'activité de tracé. Comme A et B sont partenaires, A a intérêt à veiller à la qualité de ses informations et de leur expression pour que B réussisse à l'activité de tracé.
Le choix des dimensions différentes pour les figures de A et de B empêche A de transmettre la position de la droite de symétrie au moyen de mesures et l'oblige soit à la désigner par droite de symé-

trie soit à expliciter les propriétés de cette droite. Le choix de figures possédant aussi une symétrie centrale oblige de plus A à expliciter les propriétés d'orthogonalité pour ne pas produire un message ambigu, dans lequel l'élément décrit pourrait aussi bien être une droite de symétrie qu'une droite "partageant la figure en deux parties égales" c'est à dire passant par le centre de symétrie.
Les figures utilisées ont été les suivantes :



## De la construction théorique à la pratique dans la classe

Il se produit toujours des décalages entre un processus d'enseignement conçu sur le papier et sa réalisation en classe. Ces décalages nous obligent à revenir sur notre cadre théorique d'analyse. Il semblerait qu'ils soient essentiellement de deux origines, correspondant à des aspects insuffisamment pris en compte dans la théorie :

- la prise en compte trop restreinte des différences entre élèves
- la trop faible analyse a priori du rôle de l'enseignant dans le processus.

Les constructions de processus d'enseignement en didactique travaillent actuellement avec un élève générique et ne tiennent compte des différences entre élèves que pour créer des contradictions sociales entre élèves dont l'issue n'est pas assurée. Lorsqu'une activité est donnée en classe, il se produit des différences de rythme importantes entre élèves. Quelle décision doit prendre l'enseignant : attendre que tous aient terminé ou passer à l'activité suivante avant que certains aient fini. Dans la construction d'un processus, on fait l'hypothèse implicite que tous les élèves en sont au même point à la fin d'une phase avant d'aborder la phase suivante. On fait aussi l'hypothèse que les périodes d'institutionnalisation faites par l'enseignant sont unificatrices du savoir en classe mais nous ne savons rien de la manière dont les élèves les comprennent. Peut-être les effets en diffèrent-ils d'un élève à l'autre ?

Avant de réaliser une séquence d'enseignement, on essaie de prévoir les grandes décisions qu'aura à prendre l'enseignant en prévoyant différents comportements d'élèves. Mais des comportements non attendus se produisent en nombre d'autant plus grand que la séquence n'a encore été réalisée qu'un petit nombre de fois. L'enseignant a toujours à prendre des décisions à chaud dans des situations non prévues et ces décisions peuvent orienter le déroulement de la séquence d'une manière

déterminante. Là encore la didactique fait l'hypothèse implicite trop grossière d'un enseignant générique et stable (même par rapport à lui-même).
Ces pistes sont à explorer; on peut penser que la répétition d'un même processus avec analyse des décalages entre prévisions et réalisations et allers et retours entre l'analyse et la mise en pratique permettront de progresser.

## *REFERENCES*

**Balacheff N.**, 1985, Processus de preuve et situations de validation, *Rapport de recherche IMAG-LSD*, n° 528

**Brousseau G.**, 1983a, Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, **4**. 2, p. 164-98

**Brousseau G.**, 1983b, Etude de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie, *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, IMAG, LSD, Université de Grenoble, année 1982-83, n° 45, p. 183-227

**Chevallard Y.**, 1985, *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*, Editions la Pensée Sauvage, Grenoble

**Fisher N.**, 1978, Visual Influences of figure orientation on concept formation in geometry, in *Recent Research concerning the development of spatial and geometric concepts*, Ed. Lesh R., Mierkiewicz D., ERIC SMEAC, p. 307-21

**Gallou-Dumiel E.**, 1985, *Symétrie orthogonale et angles*, Thèse de 3ème cycle, Institut Fourier, Grenoble

**Galvez G.**, 1985, *Une proposition pour l'enseignement de la géométrie à l'école primaire*, Thèse, Centre d'investigation de l'IPN, Mexico

**Glaeser G.**, 1979, Neue Richtungen in der mathematikdidaktischen Forschung Frankreichs, *Beiträge zum Mathematikunterricht*, pp.131-7, Hermann Schrödel Verlag KG

**Grenier D.**, 1985, Middle school pupils conceptions about reflection according to a task of construction, *Proceedings of the ninth conference for the psychology of mathematics education*, p.183-8

**Hart K.**, 1981, *Children's understanding of mathematics : 11-16*, Alden Press, Oxford, London and Northampton

**Kidder F.R.**, 1978, Conservation of length : a function of the mental operation involved, in *Recent Research concerning the development of spatial and geometric concepts,* Ed. Lesh R., Mierkiewicz D., ERIC SMEAC, p. 213-27

**Laborde C.**, 1982, *Langue naturelle et écriture symbolique : deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique*, Thèse d'état, IMAG, Université de Grenoble

**Pluvinage F., Rauscher J.C**, 1986, La géométrie construite mise à l'essai, *Petit x*, n° 11, pp.5-36

**Schultz K., Austin J.D.**, 1978, Variables influencing the difficulty of rigid transformation during the transition between the concrete and the operational stages of cognitive development, in *Rcent Research concerning the development of spatial and geometric concepts,* Ed. Lesh R., Mierkiewicz D., ERIC SMEAC, p. 191-211

**Schultz K., Austin J.D.**, 1983, Directional effects in transformation tasks, *Journal for Research in Mathematics Education*, 14, p. 95-101, March 1983

**Thomas D.**, 1978, Students' understanding of selected transformation geometry concepts, in *Recent Research concerning the development of spatial and geometric concepts,* Ed. Lesh R., Mierkiewicz D., ERIC SMEAC, p. 177-93

**Vergnaud G.**, 1981, Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques,* **2**.2, p. 215-31

**Vergnaud G.**, 1982, Cognitive and Developmental Psychology and Research in Mathematics Education : some theoretical and methodological issues, *For the Learning of Mathematics,* 3.2, November 1982, p. 31-41

**Zykova V.I.**, 1969, The psychology of sixth grade pupils' mastery of geometric concepts, in *Soviet Studies in the psychology of learning and teaching mathematics,* Vol. 1, Standford University, School Mathematics Study Group, p. 149-88.