TYPOLOGIE DES SITUATIONS PROBABILISTES

ET DEMARCHES DE REPONSES

M. ZAKI

Les travaux didactiques sur les raisonnements probabilistes ont privilégié la comparaison de deux sacs . Ils n'ont envisagé dans le cadre d'équiprobabilité que les situations de proptionnalité .
L'auteur propose une formule générale qui donne, dans la comparaison de deux sacs, des compositions non proportionnelles et équiprobables pour un événement donné .

PREMIERE PARTIE

1. Introduction .

Pour évaluer le jugement probabiliste des élèves la plupart des tests (questionnaires d'enquête) recourent à la situation de prévision "a priori" suivante :

Situation -type:
Choisir parmi deux sacs contenant des boules blanches et noires, celui dans lequel il est plus probable de tirer une boule d'une couleur donnée. Les compositions des deux sacs sont connues.

Dans sa thèse , Alarcon a critiqué le recours à cette situation-type . Une telle situation, exploitée lors d'études sur la quantification des probabilités, ne suffit pas pour obtenir des résultats qui aident à l'interprétation du jugement des comportements probabilistes des élèves.

Cette situation-type conduit d'emblée l'élève à faire des calculs de rapports . Les réponses à un questionnaire de type standard, c'est à dire à choix multiple ou en vrai ou faux, ne permettent pas de distinguer les réussites et les échecs relevant de la démarche probabiliste, et ceux tenant surtout à l'utilisation de la notion de rapport.

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
1 (1988) (p.203-216) IREM de Strasbourg

Afin d'accéder à une meilleure information sur le jugement probabiliste, Alarcon exploite une situation, qu'il appelle de décision " a posteriori ", et fait intervenir les deux variables suivantes:

Variable 1 : ◆
Le nombre de tirage: il ne se limite pas au cas d'un seul tirage, mais exploite aussi celui de plusieurs tirages avec remise.

Variable 2 : ◆
Afin d'augmenter l'incertitude de la situation , il exploite le cas où l'un des deux sacs est inconnu(1) : d'un point de vue purement probabiliste, pour pondérer l'éventualité d'un tirage fait dans le sac caché, il faut tenir compte des différences qui existent entre le résultat du tirage et ce que l'on pourrait attendre si le tirage avait été fait dans le sac connu .(2)

Situation J.A :
Retrouver parmi deux sacs, celui pris lors du tirage d'une ou d'une série de boules avec remise.Les deux sacs ne contiennent que des boules blanches et noires.

Cette différence pouvant intervenir dans l'approche d'une situation de prévision "a priori" et celle d'une situation de décision "a posteriori" , Alarcon l'analyse de la facon suivante :
Une situation de prévision "a priori" comporte une double incertitude et un enchevêtrement d'au moins trois univers :

Incertitudes :

* l'une concerne le résultat du tirage, il y a possibilité d'un écart entre l'événement et le résultat obtenu.
* l'autre, qui découle de la première , se réfère au choix du sac.

(1) *le contenu d'un sac n'est pas connu.*
(2) *sac dont on connait la composition.*

Univers :

* l'univers concernant les deux sacs : on prend l'un des deux sacs pour faire le tirage .
* l'univers des événements possibles, et c'est à ce dernier que se réfère le résultat du tirage.
* "l'univers" des conditions de l'"acceptabilité" de la situation probabiliste (situation incertaine) pour produire une réponse.

Alarcon précise que, dans le cadre d'une prévision, un choix de réponse est possible si et seulement si l'un des sacs est plus probable que l'autre; en revanche,dans une décision, il faut tenir compte de la possibilité d'un écart qui existe entre l'événement voulu et le résultat du tirage.

2. Décision et Prévision .

L'analyse d'Alarcon semble associer "prévision" et "a priori", ainsi que "décision" et "a posteriori". En fait, il nous semble préférable de séparer les situations, de décision ou prévision, de l'information possédée sur des tirages (pas d'information : cas de l'"a priori", résultats connus : cas de l'"a posteriori").

Commençons par donner deux exemples simples :

Exemple 1:

Quelles sont les urnes de *Bernouilli* pour lesquelles l'extraction (sans remise) de deux boules conduit les deux événements "tirer deux boules blanches" et "tirer deux boules de couleurs différentes" à avoir même probabilité ?

Réponse :

Soit a le nombre de boules blanches et b le nombre de boules noires.

La probabilité d'extraction de deux boules blanches est C_a^2 / C_{a+b}^2 et celle d'extraction de deux boules noires est C_b^2 / C_{a+b}^2 .Donc l'obtention de deux boules de couleurs différentes a pour probabilité : $(C_{a+b}^2 - C_a^2 - C_b^2) / C_{a+b}^2$ .Ainsi l'égalité de l'énoncé se traduit par : $C_a^2 = C_{a+b}^2 - C_a^2 - C_b^2$, ou encore :

$$2a(a-1) + b(b-1) - (a+b)(a+b)(a+b-1) = 0.$$

La résolution conduit immédiatement à la condition : $a = 2b + 1$ qui est affine.
Les exemples d'urnes répondant à la question seront du type :

1 noire et 3 blanches,
2 noires et 5 blanches,
3 noires et 7 blanches,
etc...

Voici un premier exemple (de nature affine) qui traduit très "rapidement" l'éloignement de la proportionnalité.

Exemple 2 : (cité dans la thèse de J.Alarcon). ✤
On fait trois tirages avec remise dans l'un des deux sacs contenant des boules blanches(B) et des boules noires(N). Le sac1 contient 1B et 12N , le sac2 contient 9B et 4N. Le résultat du tirage a été 1B et 2N : Lequel des deux sacs a-t-on pris lors du tirage ?
En dénotant par A l'événement "sortir une blanche en trois tirages", on obtient :

pour le sac1: P(A) = 432/2197,
pour le sac2: P(A) = 432/2197.

Le rapport R du nombre de boules noires et celui du nombre total de boules est :

pour le sac1: R = 36/39,
pour le sac2: R = 12/39,
pour le tirage: R = 26/39.

Autrement dit, le résultat du tirage est beaucoup plus plus proche de la composition du sac1 que celle du sac2, cependant les deux sacs sont équiprobables pour l'événement A.

Dans l'un ou l'autre des deux exemples cités ci-dessus, malgré la simplicité des situations proposées la pondération des probabilités ne peut se réduire à un simple calcul de rapport.

Donc a partir de ces deux exemples, nous dirons que l'analyse d'Alarcon demeure incomplète, et ce pour les raisons suivantes :

* Une situation de décision n'admet que deux réponses : on choisit ou le sac1 ou le sac 2. Ce choix comporte une prise de risques qui entrainera un coût pour le sujet.
* Une situation de prévision peut admettre des degrés dans le choix d'un sac. L'examen du contenu des deux sacs(1), en fonction du rapport cas favorables sur cas possibles, conduit à une pondération des résultats prévisibles du tirage.

(1) cela suppose que l'on connait la composition des deux sacs.

Les degrés d'engagement admissibles pour le choix d'un sac (plus probable, moins probable, aussi probable...) dépendent uniquement de cette pondération, ils ne reflètent aucune prise de risque.

En définitive, dans une situation de décision, le jugement probabiliste n'intervient pas tout seul. Par définition même d'une décision, il y a comme on l'a déja dit plus haut, apparition d'une fonction de risque, elle même liée à la régle (ou fonction) de décision. Le sujet dans ce cas là sera amené à produire une réponse en faveur de l'un et un seul des deux sacs, moyennant une stratégie (pertinente ou non), toujours accompagnée d'un double risque : celui de ne pas choisir le bon sac (risque de première espèce), et celui de choisir le mauvais sac (risque de deuxième espèce), ces deux risques n'étant pas bien sûr symétriques.

Pour la situation de prévision, une variante au niveau de la formulation de l'énoncé du tirage[(1)], permet de distinguer deux sortes de prévisions : une prévision " a priori " et une prévision " a posteriori " .Cette expression de "prévision a posteriori" semble contradictoire. Mais après tout , une voyante ne "lit" elle pas le passé aussi bien qu'elle "prédit" l'avenir. Plus précisement, imaginons qu'une épreuve choisie parmi deux possibles soit indiquée dans une enveloppe scellée . Pour un sujet qui ignore le choix fait mais qui voit des résultats, il y a effectivement une prévision : celle du contenu qu'il découvrira dans l'enveloppe quand celle-ci sera ouverte. C'est ce genre de situations que nous avons examinée dans le cadre de mémoire de D.E.A .
Dans une situation de prévision " a priori ", la formulation du résultat du tirage sera un énoncé équivalent à :

" Dans quel sac avez-vous le plus de chance de tirer tel résultat? "

Par contre, dans une situation de prévision " a posteriori ", la formulation du résultat du tirage sera un énoncé équivalent à :

" On a tiré tel résultat , quel est le sac qui a été le plus probablement utilisé?"

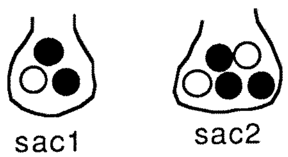
Autrement dit la situation de prévision " a priori " met en avant l'univers des événements possibles, tandis que la situation de prévision " a posteriori " met en avant l'univers des deux sacs.

(1) on se réfère à l'énoncé du tirage du questionnaire.

Le sujet dans cette dernière situation est beaucoup moins confronté à la possibilité de l'éventualité du résultat du tirage, l'univers des événements possibles dans ce cas là est beaucoup moins apparent.

En revanche cette variation au niveau de la formulation de l'énoncé du résultat du tirage, n'a pas le même effet dans une situation de décision
Dans tous les cas, c'est l'univers des deux sacs qui intervient, en un premier temps au niveau de la quantification de la probabilité du résultat du tirage et ce à l'aide du contenu des deux sacs, ensuite en un deuxième temps au niveau de la stratégie de décision (non nécessairement de nature probabiliste) pour le choix de l'un des deux sacs.
Voici quelques exemples de questions à choix multiples, pour illustrer la différence entre les trois types de situations : de décision, de prévision " a priori " et de prévision " a posteriori".

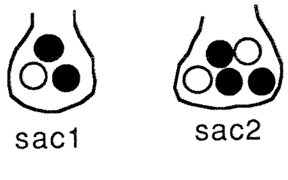
<u>Situation de décision</u> :
Vous prenez l'un des deux sacs et tirez une boule (resp. plusieurs boules avec remise).



* Dans quel sac avez-vous le plus de chance de tirer une boule B (ou N), (resp.plusieurs boules avec remise B , N) ?
* Mettez une croix dans la case de votre choix.

☐ le sac1 ☐ le sac2

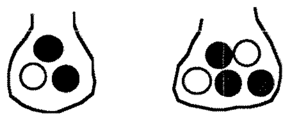
<u>Situation de prévision " a priori ":</u>
Paul prend l'un des deux sacs et tire une boule (resp. plusieurs boules avec remise).



* Dans quel sac Paul a le plus de chance de tirer une boule B (ou N), (resp.plusieurs boules avec remise B, N) ?
* Mettez une croix dans la case de votre choix.

☐	☐	☐	☐	☐
forcément le sac1	plutôt le sac1	pas de raison de préférer l'un des sacs	plutôt le sac2	forcément le sac2

Situation de prévision " a posteriori ":
Paul a pris l'un des deux sacs et a tiré une boule (resp. plusieurs boules avec remise).



sac1 sac2

* Dans quel sac Paul avait-t-il probablement tirer une boule B (ou N), (resp.plusieurs boules avec remise B, N) ?
* Mettez une croix dans la case de votre choix.

☐	☐	☐	☐	☐
forcément le sac1	plutôt le sac1	pas de raison de préférer l'un des sacs	plutôt le sac2	forcément le sac2

3. Une variante méthologique et conclusion .

Variante méthodologique :
Si l'objectif est d'étudier le comportement des élèves devant une situation probabiliste, on peut penser que les deux variables relevées par Alarcon (voir ◆) ne suffiraient pas dans le cadre d'enquêtes de type standard(1).
Tout en restant dans les conditions expérimentales traditionnelles (questionnaire à choix multiples ou en vrai ou faux) qui permettent de comparer les réactions d'élèves, si on leur demande de justifier leur choix de réponse, on peut ainsi accéder à beaucoup plus d'informations sur les mécanismes formateurs de leurs réactions.

(1) à choix multiples ou en vrai ou faux.

Sylvette Maury a adopté cette méthode d'interrogation qui s'est avérée très révélatrice : des réponses identiques à une même question étaient justifiées par des argumentations tout à fait différentes.
En conséquence, nous pensons qu'à un questionnaire de type standard il convient d'adjoindre une demande de justification des réponses, pour permettre une l'analyse des argumentations et des procédures développées par les élèves.

Conclusion :
A propos de l'exemple 2 (voir ✚), Alarcon dit que cet exemple "marque une rupture avec la proportionalité : la décision correcte ne peut se réduire à un simple calcul de rapport, nous n'avons pas envisagé ce type de situations "
Selon nous, les élèves auront tendance à considérer la situation probabiliste qu'on leur présente, soit comme une situation de décision soit comme une situation de prévision " a priori " ou " a posteriori ", et cela indépendamment de la formulation de la question. La première difficulté ne concernerait donc pas "le" raisonnement probabiliste, mais comme on a essayé de le mettre en valeur plus haut, la discrimination des différents types de situations que l'on peut présenter.
Dans le même exemple (tel qu'il a été cité par Alarcon) , on pense qu'un élève ayant calculé la probabilité du résultat du tirage sous l'hypothèse du sac1 et ensuite sous celle du sac 2, mais n'ayant pas relevé la non équivalence des deux sacs, aura tendance à se mettre en situation de prévision, donc à ne pas préférer l'un des deux sacs. Par contre, un élève qui ne se limite pas à cette pondération et qui remarque la non équivalence des deux sacs, aura tendance à se mettre en situation de décision, et ce, moyenant une procédure de décision tel que le calcul du rapport nombre de boules noires sur nombre total de boules, ou autre stratégie de décision :
En conséquence, dans le cadre d'une situation de décision, les procédures et argumentations des élèves peuvent ne plus se limiter à un calcul purement probabiliste. Des estimations relevant de stratégies, dites de décision, quelles soient pertinentes ou non, peuvent aussi intervenir.
Parmi les situations probabilistes les plus pertinentes, on peut relever celles où les deux sacs sont équivalents, indépendamment du résultat du tirage, ou encore celles où les deux sacs sont équiprobables pour un certain type de résultat de tirage. C'est devant ce type de situations que nous pensons que les procédures des élèves varieront, indépendamment de la formulation de la question, mais suivant le type de situation, de décision ou de pévision, dans laquel ils se placeront .

La pertinence du jugement probabiliste des élèves dans ce cas là ne pourra être appréciée qu'en fonction du type de situation dans lequel ils se sont placés .
Sylvette Maury a obtenu pour certaines questions où les deux sacs étaient équivalents ($N1/B1=N2/B2$) , des réponses en faveur d'un sac alors que dans leur argumentations ils avaient fait remarquer l'équiprobabilité des deux sacs pour l'événement demandé. Elle a attribué ce genre de procédure, qu'elle a classée parmi les non pertinentes , à la mauvaise formulation de la question (dans son questionnaire,elle a utilisé le mot " choisir ") : pour notre part ces élèves se sont placés dans une situation de décision.

DEUXIEME PARTIE

UNE SITUATION PROBABILISTE DE NON PROPORTIONNALITE

Dans le cas où le contenu des deux sacs était connu , S.Maury et J.Alarcon avaient exploré les trois situations suivantes :

* comparaison à une variable (sans grand interêt) :
$B_1 = B_2$ et $N_1 \neq N_2$ (ou $B_1 \neq B_2$ et $N_1 = N_2$)

* comparaison à deux variables :

$$N_1 \neq N_2 \quad , \quad B_1 \neq B_2 \quad \text{et} \quad \frac{N_1}{B_1} \neq \frac{N_1}{B_2} \; .$$

* proportionnalité :

$$\frac{N_1}{B_1} = \frac{N_2}{B_2} \; .$$

Une quatrième situation non moins pertinente que les trois précédentes , nous semble s'imposer lors d'une étude sur le comportement probabiliste des élèves :
Il s'agit du cas où les deux sacs ne sont pas proportionnels , mais équiprobables pour un même tirage avec remise .
Quelques exemples de ce type de situation permettent de mettre en valeur son interêt , ainsi on se propose de l'étudier de manière générale .

Situation explorée :

On considère deux sacs S_1 et S_2 remplis de boules blanches et de boules noires , où p_1 (resp p_2) désigne la proportion de boules blanches dans S_1 (resp dans S_2). En supposant qu'à l'issue d'un tirage avec remise on ait obtenu k_1 boules blanches et k_2 boules noires :

Pour quelles valeurs de p_1 et p_2 , avec $p_1 \neq p_2$, la probabilité de cet événement est la même pour les deux sacs S_1 et S_2 ?
ou encore :
k_1 et k_2 etant fixés dans $\mathbb{N}$, existe-t-il p_1 et p_2 tels que :

$$p_1^{k_1}(1 - p_1)^{k_2} = p_2^{k_1}(1 - p_2)^{k_2} \qquad (1) \quad ?$$

Remarquons tout d'abord que :
si $k_1 = 0$ et $k_2 \neq 0$ alors l'équation (1) devient :

$$p_1 = p_2 \ .$$

Ce qui traduit la proportionnalité des deux sacs S_1 et S_2 .
Nous supposerons par conséquent que :

$$(k_1,k_2) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \ .$$

Pour k_1 et k_2 fixés dans $\mathbb{N}^*$, on est donc amené à résoudre l'équation :

$$x^{k_1}(1 - x)^{k_2} = y^{k_1}(1 - y)^{k_2} \qquad (2)$$

où $(x,y) \in \,]0,1[x]0,1[\, / \, \Delta$, avec $\Delta = \{(t,t) \in R^2 / t \in \,]0,1[\}$.

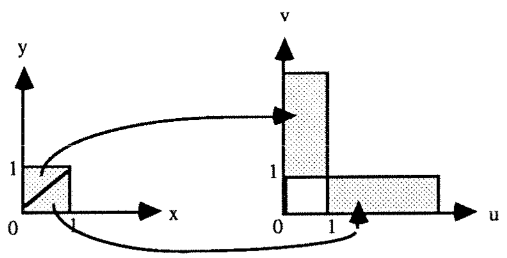
$$(2) \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^{k_1}\left(\frac{1 - x}{1 - y}\right)^{k_2} = 1$$

A l'aide du changement de variables :

$u = \dfrac{x}{y}$ et $v = \dfrac{1-x}{1-y}$

où $(u,v) \in \Phi = (]0,1[\times R) \cup (R \times]0,1[) /]0,1[^2$,

qui revient à faire la correspondance biunivoque suivante :



on devra résoudre :

$u^{k_1}.v^{k_2} = 1$ où $(u,v) \in \Phi$.

Par conséquent l'ensemble des solutions sera :

$(u,v) \in \{(t, t^{-\frac{k_1}{k_2}}) / t \in R_+^* - \{1\}\}$

ou encore en terme de p1 et de p2 :

$$(p_1,p_2) \in \left\{ \left(\frac{t - t^{1-k_1/k_2}}{t - t^{-k_1/k_2}} , \frac{1 - t^{-k_2/k_1}}{t - t^{-k_2/k_1}} \right) \Big/ t \in R_+^* - \{1\} \right\}$$

d'où une infinité de solutions .

Quelques exemples :

Pour donner une illustration à cet ensemble de solutions , nous présenterons quelques tableaux donnant la composition des deux sacs S_1 et S_2 .

1) k1=k2=1 (càd qu'on tire avec remise 1B et 1N).

t	composition Sac1	composition Sac2
1/4	1B et 4N	4B et 1N
1/5	1B et 5N	5B et 1N
1/6	1B et 6N	6B et 1N
3/4	3B et 4N	4B et 3N
5/6	5B et 6N	6B et 5N

2) k1=1 et k2=2 (càd qu'on tire avec remise 1B et 2N).

t	composition Sac1	composition Sac2
4	4B et 3N	1B et 6N
9	1B et 12N	9B et 4N
16	16B et 5N	1B et 20N
25	25B et 6N	1B et 30N
9/4	9B et 10N	4B et 15N
9/16	9B et 28N	16B et 21N
9/25	9B et 80N	25B et 64N
4/25	4B et35N	25B et 14N
16/25	16B et 45N	25B et 36N

3) k1=1 et k2=3 (c-à-d qu'on tire avec remise 1B et 3N).

t	composition Sac1	composition Sac2
8	8B et 7N	1B et 14N
27	27B et 13N	1B et 39N
64	192B et 13N	3B et 260N
125	125B et 31N	1B et 155N
216	216B et 43N	1B et 258N
8/27	8B et 57N	27B et 38N
8/125	8B et 195N	125B et 78N
27/64	27B et 148N	64B et 111N

4) k1=1 et k2=4 (càd qu'on tire avec remise 1B et 4N).

t	composition Sac1	composition Sac2
16	16B et 15N	1B et 30N
81	81B et 60N	1B et 140N
4^4	256B et 85N	1B et 340N
5^4	625B et 156N	1B et 780N
16/81	16B et 195N	81B et 130N
$16/5^4$	16B et 1015N	625B et 406N
$81/4^4$	81B et 700N	256B et 525N
$81/5^4$	81B et 1360N	625B et 816N
$4^4/5^4$	256B et 1845N	625B et 1476N

5) k1=2 et k2=3 (càd qu'on tire avec remise 2B et 3N).

t	composition Sac1	composition Sac2
8	24B et 7N	3B et 28N
27	108B et 13N	4B et 117N
64	320B et 21N	5B et 336N
125	750B et 31N	6B et 775N
216	1512B et 43N	7B et 1748N
8/27	40B et 171N	135B et 76N
8/125	56B et 975N	875B et 156N
27/64	189B et 592N	448B et 333N
27/125	216B et 1225N	8B et 1433N
64/125	576B et 1525N	1125B et 976N
125/216	1375B et 3276N	2376B et 2275N

Pour conclure cet article, on voudrait attirer l'attention du lecteur sur quelques exemples issus des tableaux ci-dessus , qui paraissent particulièrement interessants:

Exemple 1 :

On tire avec remise 1B et 2N dans l'un des deux sacs où :

- la composition du sac1 est 4B et 3N,
- la composition du sac2 est 1B et 6N.

Exemple 2 :

On tire avec remise 1B et 2N dans l'un des deux sacs où :
- la composition du sac1 est 1B et 12N,
- la composition du sac2 est 9B et 4N.

Exemple 3 :

On tire avec remise 1B et 3N dans l'un des deux sacs où :
- la composition du sac1 est 8B et 7N,
- la composition du sac2 est 1B et 14N.

Exemple 4:

On tire avec remise 1B et 4N dans l'un des deux sacs où :
- la composition du sac1 est 16B et 15N,
- la composition du sac2 est 1B et 30N.

Exemple 5 :

On tire avec remise 2B et 3N dans l'un des deux sacs où :
- la composition du sac1 est 24B et 7N,
- la composition du sac2 est 3B et 28N.

REFERENCES

J.Alarcon : *L'apprehension des situations probabilistes chez des élèves 12 - 14 ans.* Thèse de 3ème cycle .Strasbourg , Juin 1982.

S.Maury : *Contribution à l'étude didactique de quelques notions de probabilité et de combinatoire à travers la résolution de problèmes* Doctorat és-science. Montpellier, Juillet 1986.