

L'ORGANISATION DEDUCTIVE DU DISCOURS

Interaction entre structure profonde et structure de surface

dans l'accès à la démonstration

R. DUVAL et M.A. EGRET

To analyse how a demonstration works, we must distinguish surface structure and deep structure. The first one is similar to the surface structure of an argumentation. But its deep structure is quite different : it is based on a proposition substitution that takes into account the status and not the meaning of propositions.

This analysis offers new ways for teaching demonstration processes : specifically propose deductive organisation tasks on representations about the deep structure, regardless of problem-solving tasks, and ask for the description of this organisation in the ordinary language of students.

Les difficultés et l'ennui que beaucoup d'élèves éprouvent, en quatrième et au delà, pour comprendre ce qu'est une démonstration, ou pour "faire" et pour rédiger une démonstration, constituent l'une des barrières les plus connues et les plus résistantes contre laquelle bute l'enseignement des mathématiques. Pour permettre à une majorité d'élèves de la franchir, deux voies sont principalement explorées. La première consiste à mettre l'accent sur le développement des capacités de raisonnement : on insiste sur l'apprentissage de certaines procédures, sur le "maniement" de certains connecteurs logiques comme l'implication..., ou, au contraire, on favorise le développement de démarches plus naturelles de pensée, comme l'argumentation, qui surgissent spontanément dans des phases de discussion ou de recherche sur des problèmes ouverts. La seconde consiste à mettre l'accent sur la découverte du jeu mutuel des contraintes qui apparaissent à propos d'une figure géométrique (F.Pluinage, art.précédent). Mais ces deux approches laissent entier le problème de l'accès des élèves à la démonstration. La démonstration relève, en effet, d'une activité cognitive spécifique et son "apprentissage" n'est ni lié à une situation d'interaction sociale, ni subordonné à la découverte d'un jeu de contraintes internes à un objet. Les différences entre la démonstration d'une part, et, d'autre part, l'argumentation, ou les contraintes découvertes dans la construction des figures géométriques, sont plus importantes que les ressemblances.

L'organisation déductive du discours

L'activité cognitive correspondant à une démonstration présente deux caractéristiques spécifiques par rapport à toute autre forme de fonctionnement du raisonnement (induction, argumentation, interprétation, ...). D'une part elle articule les énoncés *en fonction du statut qui leur est reconnu* et non en fonction de leur sens. D'autre part elle *progresses par substitutions d'énoncés* et non par enchaînements d'énoncés. Ces deux caractéristiques déterminent la structure profonde de la démonstration. Elles sont en grande partie masquées par l'expression ou par la présentation discursives qui en sont généralement faites. D'une part les marques de statut des énoncés se réduisent le plus souvent à l'emploi d'un connecteur ou même au seul ordre des énoncés. D'autre part la démonstration présentée apparaît comme un texte où tous les énoncés se tiennent sans pour autant présenter la congruence sémantique ordinairement exigée dans une argumentation. Le fonctionnement d'un texte de démonstration se trouve donc assimilé au fonctionnement de n'importe quel autre texte, bien que ses règles de production et que l'attitude de lecture qu'il requiert soient toutes différentes.

On voit tout de suite, en se plaçant dans cette perspective, deux problèmes à résoudre pour faciliter l'accès à la démonstration:

- comment faire prendre conscience de l'écart entre statut et sens d'un énoncé?
- comment faire prendre conscience que la démonstration repose sur une opération de substitution plus proche d'une démarche de calcul que de la démarche d'argumentation en interaction sociale?

La solution la plus immédiate consiste à proposer une représentation non-discursive de la structure profonde d'une démonstration, comme, par exemple, une représentation par réseau. Différentes expériences ont d'ailleurs déjà été tentées en ce sens. Mais cela ne saurait être considéré comme suffisant.

En premier lieu, une démonstration intervient souvent comme solution d'un problème, ce qui lie très étroitement les aspects heuristiques et les aspects d'organisation déductive : les seconds se trouvent alors subordonnés aux premiers. Mais comme les aspects heuristiques et les aspects d'organisation relèvent de tâches cognitivement différentes, une représentation non-discursive ne peut pas être utilisée simultanément, pour ces deux tâches, dans une situation d'initiation à la démonstration.

En second lieu, une représentation non discursive reste étrangère au fonctionnement de l'expression spontanée en langage naturel, laquelle demeure le registre de référence pour une interprétation et une intégration personnelles des connaissances traitées : il reste donc

L'organisation déductive du discours

un risque sérieux que, placés devant une représentation non-discursive, les élèves ne prennent pas réellement conscience de ce qui leur est montré. Il ne faut donc pas négliger la structure rédactionnelle de surface au profit d'une représentation de la structure profonde, mais, au contraire, les faire interargir.

Pour être vraiment pertinent le recours à une représentation non-discursive exige que l'on respecte les deux contraintes suivantes:

- *dissocier* les tâches heuristiques et les tâches d'organisation déductive
- *articuler* le registre de la représentation et celui de l'expression individuelle dans le langage naturel.

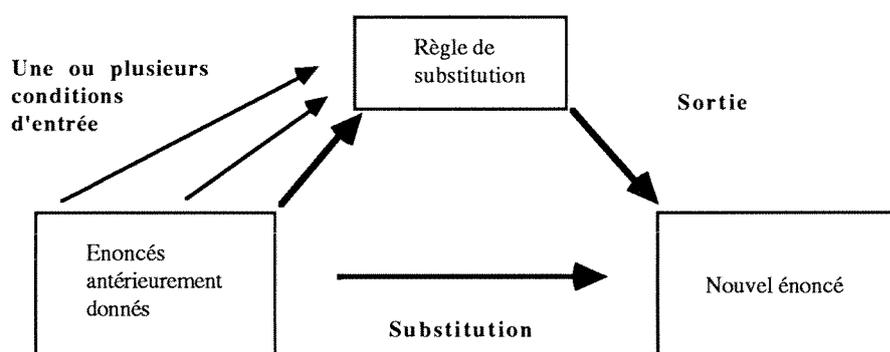
Un enseignement qui serait explicitement centré sur les deux caractéristiques cognitives de la démonstration et qui respecterait les deux contraintes indiquées permettrait-il de supprimer rapidement l'incompréhension ou le désintérêt que les démonstrations provoquent chez la grande majorité des élèves? Nous en avons tenté l'essai dans une classe de quatrième durant un trimestre. Cette expérience ainsi que la modification spectaculaire de la production des élèves sont présentées dans l'article suivant. Nous proposons ici de revenir sur l'approche cognitive de l'activité de démonstration que nous venons d'esquisser. Et nous la présenterons sous la forme de quatre principes commandant l'organisation d'un enseignement dont l'objectif serait de faire entrer la majorité des élèves dans une démarche de démonstration.

I.Représenter la structure sous-jacente à une organisation déductive des énoncés.

Dans une organisation déductive la suite des énoncés est produite par substitution d'un nouvel énoncé à un énoncé antérieurement donné (comme hypothèse ou comme résultat d'une substitution déjà effectuée). Cette substitution s'effectue explicitement en vertu d'un énoncé normatif (une définition, un axiome, ou un théorème) qui fonctionne comme règle permettant cette substitution.

Cette opération permet de définir l'unité fonctionnelle de toute organisation déductive : l'arc transitif de substitution (A.T.S.). Elle correspond soit à une démonstration de longueur minimale soit à un "pas" dans une démonstration constituée par une suite de substitutions récurrentes.

L'organisation déductive du discours



Ce schéma, qui représente le fonctionnement d'un A.T.S., met en évidence deux choses qui sont essentielles pour comprendre ce qu'est une démonstration, et que la majorité des élèves ne parvient pas à discerner.

La première est le nombre de conditions à prendre en compte pour appliquer correctement une règle de substitution : le nombre de conditions varie selon les théorèmes. Généralement dans un premier temps les élèves ont tendance à n'en retenir qu'une seule. De même, ils éprouvent beaucoup de difficultés à distinguer un théorème et sa réciproque, les formulations apparaissant symétriques l'une de l'autre. *Or un théorème et sa réciproque n'ont pas toujours le même nombre de conditions d'entrée pour fonctionner comme règle de substitution* : par exemple le théorème des milieux comporte deux conditions d'entrée et sa réciproque trois (Deledicq 83 p.146).

La seconde est la structure ternaire et non pas binaire de l'A.T.S. L'unité de base de toute organisation déductive comporte *trois énoncés, chacun ayant un statut différent*. Rédactionnellement on peut omettre l'énoncé de la règle de substitution et s'en tenir à une formulation de type "si...alors.." (Deledicq p.226, 228). Mais dans un apprentissage, il importe que la place fonctionnelle de la règle de substitution soit explicitement marquée. Et cela pour une raison simple. Dans l'organisation déductive d'un discours, *les énoncés s'articulent en raison de leur statut et ce statut est indépendant de leur contenu*. D'une situation proposée à une autre, le statut d'un énoncé peut changer : dans l'une il peut apparaître comme hypothèse et dans l'autre comme proposition à démontrer, alors que le contenu de l'affirmation reste le même.

Explicitement la structure ternaire de l'opération de substitution, par delà la forme du "si...alors.." peut grandement faciliter le déplacement de l'attention du contenu de l'énoncé

L'organisation déductive du discours

vers son statut dans la situation-problème qui est proposée. La distinction entre le statut et le sens d'un énoncé ne peut être comprise que dans l'appréhension globale d'une organisation, dont l'A.T.S. représente l'unité fonctionnelle. Un étiquetage d'énoncés pris isolément ne permet pas de vraiment en prendre conscience. Il est vain, comme l'expérience ne cesse de le montrer, de faire écrire séparément les hypothèses et la proposition à démontrer pour que les rôles respectifs des énoncés ainsi codés cessent d'être confondus par les élèves.

Démontrer consiste donc, d'un point de vue cognitif, à transformer un énoncé donné au départ (ou plusieurs) en un énoncé-résultat par une ou plusieurs substitutions. Lorsque plusieurs substitutions sont nécessaires, certaines doivent parfois être effectuées "en parallèle" et d'autres successivement. La structure profonde de la démonstration s'apparente à celle d'un calcul : les différences entre une organisation déductive du discours et l'argumentation propre à la pensée naturelle apparaissent clairement au niveau de leurs structures profondes. Ces différences sont celles qui opposent un traitement d'informations interne à un système et une confrontation de points de vue qui ne sont pas toujours compatibles entre eux. Mais, en surface, ces différences sont souvent atténuées ou cachées, du moins pour un non-mathématicien. En effet, les pas successifs d'une démonstration n'y apparaissent pas semblables aux étapes d'un calcul : ils s'y articulent, au contraire, comme des énoncés de n'importe quel discours argumentatif, avec les connecteurs "logiques" du raisonnement de la pensée naturelle.

Remarques sur les différences de fonctionnement entre démonstration et argumentation.

Dans une argumentation les énoncés ne se remplacent pas successivement jusqu'au moment où l'on obtient l'énoncé résultat, comme dans un calcul, ils s'ajoutent les uns aux autres comme dans un texte. En effet, dans le cadre d'une argumentation, les arguments ne fonctionnent pas comme des règles de substitution mais comme des explicitations de relations de causalité, de similitude ou d'opposition entre les différents énoncés (Toulmine, 1979). Cela signifie d'ailleurs que les énoncés ne s'ordonnent pas d'abord en fonction de leur statut, préalablement reconnu et accepté, mais en fonction de leur contenu : une démarche argumentative ne peut se permettre d'enfreindre la loi de congruence sémantique sans risquer d'apparaître incohérente et donc de se ruiner.

En outre, une argumentation prend en compte l'existence de deux plans de discours, l'un relatif à des opinions admises et l'autre relatif à un état de choses pour lequel on peut procéder à des affirmations vraies. La distinction classique entre le "de dicto" et le "de re" est

L'organisation déductive du discours

fondamentale pour comprendre le fonctionnement d'une argumentation ainsi que la variété des types de contradictions qui peuvent y survenir (Grize, 1983). Dans une démonstration il ne peut y avoir qu'un seul plan de discours.

Enfin l'organisation déductive du discours suppose une clôture du champ des énoncés autorisés; au contraire une argumentation, parce qu'elle repose sur la possibilité d'introduire dans la discussion un point de vue différent que celui jusqu'alors accepté, exclut une telle clôture. Le fonctionnement d'un connecteur typique de l'argumentation, "mais", est, à cet égard, révélateur (Ducrot, 1980). Organisation déductive et argumentation constituent donc deux types de fonctionnement opposés du discours. Le passage de l'argumentation, qui est la forme la plus naturelle de raisonnement, à la démonstration exige donc un changement d'attitude intellectuelle complet.

II. Articuler la représentation de la structure sous-jacente et l'expression- dans le langage naturel

Le recours à des organigrammes ou à des réseaux s'est imposé pour représenter la structure profonde d'une démonstration (Truong, 1972; Anderson, 1982, 1987; Reynes, 1981; Gaud, 1984, ...). Et plus généralement les travaux faits dans le cadre de l'intelligence artificielle ont imposé la représentation en réseau comme un outil pour toute représentation des connaissances et par suite pour tous les modèles de compréhension du discours (Quillian 1969, Rumelhart 1972, 1975.). Les réseaux mettent en relief les relations qui lient entre eux les énoncés ainsi que le sens de ces relations. Celles-ci deviennent accessibles indépendamment de la compréhension des termes désignant l'implication, l'équivalence ou tout autre connecteur logique. En outre, par l'appréhension synoptique qu'ils donnent de l'organisation déductive, les réseaux permettent de détourner l'attention du contenu des énoncés vers leur statut.

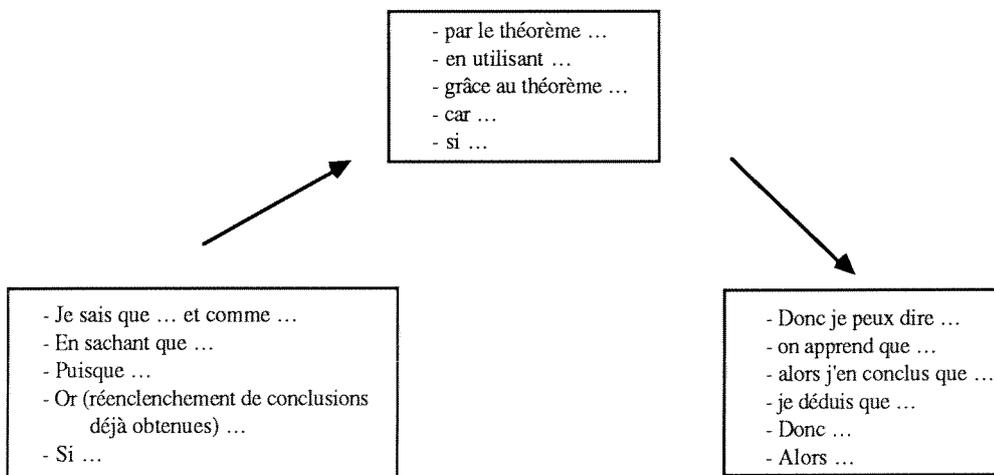
Il serait vain de croire cependant qu'il suffise de recourir à une représentation par réseau pour aplanir toutes les difficultés que la démarche de démonstration soulève chez les élèves. Il existe de multiples représentations possibles. Pour être pertinente par rapport à la structure profonde de la démonstration, une représentation doit respecter le caractère ternaire de l'A.T.S. Or si l'on regarde les modèles de représentation actuellement proposés aux élèves cela semble loin d'être toujours le cas : la représentation y semble encore commandée par le caractère binaire du "si...alors..." (Deledicq p.228, Gaud p.23). De plus nous verrons qu'une telle représentation ternaire doit être construite par l'élève. Mais plus fondamentalement on ne peut s'en tenir au seul plan d'une représentation non-discursive, fût-elle pertinente, si l'on veut faire entrer les élèves dans une démarche de démonstration.

L'organisation déductive du discours

L'expression dans le langage naturel reste le lieu où s'accomplit en définitive toute prise de conscience. L'activité d'expression joue un rôle central dans l'appropriation et l'objectivation du sens par chaque individu. Piaget l'avait d'ailleurs déjà remarqué lorsqu'il s'appuyait sur le fait que le langage est " l'indice de la prise de conscience" pour décrire la logique propre à l'enfant (Piaget,1967, p.79).

Nous avons pu observer une transformation complète des textes produits par les élèves en même temps qu'ils prenaient conscience de l'organisation déductive des énoncés et de son fonctionnement. Un des changements les plus spectaculaires a été l'apparition simultanée, chez presque tous, d'expressions marquant le statut propre de chaque énoncé et de constructions qui tentaient souvent d'exprimer les trois éléments constituant un pas de déduction. Ces constructions revenaient à exprimer soit en une seule phrase le passage des hypothèses (ou de conclusions antérieures) à la conclusion par un énoncé normatif, soit en plusieurs phrases mais en les regroupant alors en un seul paragraphe. Ce qui fut non moins surprenant fut *le recours spontané à un emploi varié d'expressions d'attitudes propositionnelles pour souligner la différence de statut entre les énoncés articulés*. Et il y eut en outre une proportion importante de ce qu'on a appelé "la prise en charge de l'énoncé par le locuteur".

Voici, à titre d'exemple, quelques unes des expressions employées dans leurs textes de démonstrations. Des textes complets sont présentés dans l'article suivant.



L'organisation déductive du discours

La prise de conscience de ce qu'est une démonstration et son expression ne se font pas à partir d'un emploi correct des connecteurs logiques mais dans l'explicitation d'attitudes propositionnelles.

Cette observation est essentielle. En effet, les attitudes propositionnelles ne réfèrent pas directement au contenu des énoncés mais au statut que ces énoncés ont pour le locuteur ou à celui qu'ils prennent dans le discours engagé. Les attitudes propositionnelles indiquent le mode particulier de certitude attaché à un énoncé, ou l'opération discursive remplie par un énoncé. La compréhension de ce qu'est une démonstration repose d'abord sur l'attention portée à la différence de mode de certitude qui existe entre les différents énoncés ainsi qu'à l'opération discursive accomplie par chaque type d'énoncé.

Ainsi une élève, dans le même texte, marque l'énoncé:

- d'une hypothèse par l'expression " *On sait quepuisque'ils nous le disent*"
- des conclusions intermédiaires par les expressions " *Je suis sûre que..*", " *Maintenant je sais que..*"
- la prise en compte des conditions d'application d'un théorème en soulignant qu'il en manque momentanément une par l'expression " *On sait que...mais il nous faut un autre milieu*".

L'expression caractérisant l'hypothèse est particulièrement remarquable. Elle traduit une neutralisation du sens que le terme hypothèse a dans l'esprit des élèves: pour eux ce terme évoque quelque chose que l'on suppose être vrai, ou même qui "doit" être vrai, et que l'on va chercher à confirmer. C'est donc dans la perspective d'une démarche expérimentale, ou dans celle d'une conjecture, que ce terme est entendu. Plus généralement faire une hypothèse revient, d'une certaine façon, à anticiper un résultat. Il est alors difficile, pour les élèves, de comprendre que la démonstration puisse avoir un autre but que celui de vérifier des hypothèses. L'expression "puisque'ils nous le disent" traduit bien l'accès à un autre sens du terme "hypothèse": celui d'une information qui est donnée et qui a simplement à être utilisée localement, sans qu'elle ait à jouer un rôle de thème organisateur de toute la démonstration.

C'est seulement dans le langage naturel que le jeu des attitudes propositionnelles peut être pleinement manifesté et maîtrisé. Dès lors tout entraînement à l'emploi correct de "mots ou d'expressions mathématiques", à celui du "si...alors..;" (Deledicq, p.224) ne peut d'aucune manière préparer les élèves à entrer dans une démarche de démonstration : il ne peut que conduire à un emploi imitatif de ces expressions indépendamment du statut des énoncés articulés.

L'organisation déductive du discours

Si nous revenons maintenant au cadre particulier des situations géométriques, dans lequel des démonstrations sont ordinairement demandées ou proposées aux élèves de quatrième, il faut reconnaître que les figures géométriques ne peuvent avoir aucun rôle intuitif pour accéder à une démarche de démonstration. Les représentations qui peuvent remplir ce rôle sont des représentations par réseau développées à partir d'A.T.S. Ce que nous avons appelé "l'appréhension discursive des figures" ne peut se faire qu'à travers des représentations de ce type (Duval, 1988b). Reste alors le problème du rôle heuristique des figures et celui de l'argumentation qui peut être observée dans une phase de recherche. Cela nous conduit au troisième principe.

III. Séparer strictement les tâches propres à une démarche de démonstration et celles liées à une situation de "problem-solving".

Les tâches spécifiques à une démarche de démonstration sont des tâches d'*organisation*. Elles supposent que l'on dispose *explicitement de tout le corpus des énoncés* nécessaires pour la démonstration, c'est-à-dire que l'on dispose non seulement des énoncés de départ et de l'énoncé-résultat mais aussi des règles de substitution à utiliser. A aucun moment, dans une tâche d'organisation déductive on ne doit avoir à chercher lequel des théorèmes déjà appris pourrait servir. Toutes les pièces doivent, en quelque sorte, être déjà sur la table, sans aucune hésitation possible.

Or très souvent, sinon presque toujours, au lieu de proposer, pour elle-même, une tâche d'organisation déductive, on la propose "*mélangée*" à une tâche de *problem-solving* : les élèves doivent trouver ou "voir" la (les) règle(s) de substitution qui donnent les conclusions intermédiaires entre les hypothèses et l'énoncé-résultat. Et on fait comme si la découverte de l'idée de la solution entraînait la compréhension de la démonstration, celle-ci se ramenant alors à une question de rédaction ou de présentation.

Cette subordination de la tâche d'organisation à celle de *problem-solving* est commune aux deux attitudes didactiques suivantes:

— celle qui consiste, pour introduire les démonstrations, à ne prendre que des situations dans lesquelles la démonstration devient nécessaire, parce que *le résultat n'est pas évident par lui-même*. Par un tel choix, on peut montrer que la démonstration est un moyen pour découvrir des résultats imprévisibles autrement ; mais on ne montre pas en quoi consiste une démarche de démonstration. Cette attitude didactique conduit à l'opinion

L'organisation déductive du discours

que Thom exprimait brutalement après les premières tentatives de réforme de l'enseignement secondaire : " Reste que, de toute manière, le problème de géométrie exige beaucoup de temps, d'efforts, une réflexion soutenue, des capacités combinatoires dont peu d'élèves sont capables. Peut-être la géométrie euclidienne est-elle, comme la version latine, un de ces exercices nobles et désuets, réservés à une élite, et incompatibles avec un enseignement de masse" (Thom 1972, p.228).

— celle qui consiste à privilégier la découverte pas à pas des chaînons manquants entre les deux "bouts" de la démonstration, hypothèses et énoncé-résultat. Cette attitude semble s'imposer dès que l'on introduit des représentations par réseau ou dès que l'on veut faire apprendre une méthode. Ainsi, pour Anderson, qui recourt à une représentation par "réseaux logiques", "une bonne approximation" de la tâche de démonstration " est de trouver une chaîne d'inférences légitimes depuis les données posées jusqu'à la conclusions" (Anderson 87, p.112). Les hypothèses et l'énoncé-but étant respectivement placés en haut et en bas de l'écran, il s'agit de les relier progressivement par des "forward deductions" et des "backward deductions" . La démonstration se trouve ainsi ramenée à une tâche heuristique, *l'organisation des énoncés étant automatiquement réalisée par le dispositif informatique*, ou plus généralement par le graphe adopté pour représenter la structure.

Dans ces deux approches, la démarche de démonstration ne se trouve envisagée en fait que sous l'aspect heuristique. Dans un cas on fait comme si l'idée de la démonstration ayant été trouvée, sa rédaction allait de soi ou était secondaire. Dans le second on fait comme si le fait d'avoir produit les chaînons manquants dans un cadre déjà organisé équivalait à une compréhension globale de la spécificité de la démarche exécutée. En particulier le problème de l'interprétation des flèches du réseau et celui de la distinction entre le statut et le contenu d'un énoncé y sont ignorés. Bref, la phase d'organisation déductive des énoncés se trouve soit sous-estimée soit éliminée. *Or d'un point de vue cognitif les tâches d'organisation déductive et les tâches heuristiques ne sont pas de même nature.*

Les premières portent sur un corpus d'énoncés déjà rassemblés et consistent à les ordonner en fonction de leur statut par un jeu de substitutions qui fasse apparaître l'assertion de l'énoncé résultat dès qu'on inscrit les hypothèses de départ. Le premier travail d'axiomatisation connu semble s'être développé d'une façon analogue : il a consisté en une organisation globale de démonstrations déjà faites, en dégagant les propositions les plus fréquemment utilisées dans les démonstrations locales et en leur conférant un statut de principe (Heath,1956, p.114-116).

L'organisation déductive du discours

Les tâches heuristiques portent au contraire sur un problème. La découverte de sa solution peut d'ailleurs exiger soit un changement de registre soit le rattachement à une classe de problèmes ou à un pattern. Si on s'en tient au seul cadre de la géométrie euclidienne, la différence entre les deux types de tâche apparaît avec le rôle des figures: elles font très souvent écran à l'organisation déductive des énoncés alors qu'elles constituent une aide heuristique indéniable. Car les propriétés qui peuvent être discernées sur une figure n'ont pas de statut déterminé; et ce qui est demandé comme résultat à démontrer y est visible, donc évident, de par l'existence même de la figure.

Il est d'ailleurs significatif qu'au terme d'un chapitre tout entier consacré à la démonstration et aux activités pouvant y préparer, les auteurs d'un manuel par ailleurs remarquable concluent : "le plus difficile reste à faire : "déduire" c'est-à-dire écrire une suite de phrases avec pour point de départ des hypothèses; pour point d'arrivée ce qui est à démontrer; et où chaque phrase est une conséquence de la précédente" (Deledicq p.232). L'embarras des auteurs se comprend aisément quand on s'aperçoit qu'ils n'ont pas pris soin de distinguer les tâches heuristiques et les tâches d'organisation.

IV. Ne donner aux représentations de la structure profonde qu'une fonction d'objet transitionnel.

Le grand risque dans toute intervention didactique est une multiplication des apprentissages intermédiaires qui fasse perdre de vue ce pour quoi ils sont instaurés. Le risque, ici, serait de subordonner la découverte de la démarche démonstrative à l'apprentissage d'un certain type de réseau. Les représentations ne peuvent être introduites qu'à titre d' "objets transitionnels". Rappelons deux des caractéristiques de cette notion introduite par Winnicott (1971, p.11-14)

Un objet transitionnel est un objet qui est intermédiaire entre la réalité interne propre à un individu et le milieu extérieur; cet objet, qui permet le passage à l'objectivité, est soumis à un désinvestissement progressif au fur et à mesure que l'individu accède à l' autonomie.

Pour que les représentations par réseau puissent remplir cette fonction d'"objet transitionnel", dans le passage d'une pratique spontanée de discours et de l'argumentation à une démarche de démonstration, plusieurs conditions doivent être respectées dans l'introduction des représentations.

L'organisation déductive du discours

- 1). Les réseaux doivent être conçus et élaborés par les élèves eux-mêmes. C'est dans cette construction que les élèves se trouvent réellement confrontés aux exigences et au fonctionnement d'une organisation déductive. *Cette tâche de construction exige, en particulier, que les élèves considèrent les énoncés en fonction de leur statut* : placer, dans un réseau, les hypothèses au point de départ et l'énoncé but à l'arrivée est loin d'être une opération d'emblée évidente pour beaucoup.
- 2). Les réseaux sont pour chacun un moyen d'objectiver et de contrôler soit ce qu'il comprend soit le discours qu'il produit. Par exemple, une hypothèse se trouve-t-elle placée à l'arrivée d'une flèche ? L'observation a montré que les élèves, dans leurs premiers essais, ne respectaient pas tous cette règle de construction qui leur avait été donnée et que ce fut là le moyen de réaliser ce que signifiait concrètement "hypothèse" dans une organisation déductive (Egret 1989).
- 3). Les réseaux doivent être considérés comme une production "privée", non sujette à une évaluation quelconque. Leur élaboration n'est que le "brouillon" d'un texte de démonstration à écrire. Elle reste l'objet d'un investissement dont chaque élève reste le seul maître.

CONCLUSION

Considérer la démonstration comme un mode de fonctionnement cognitif autonome et non pas comme le genre littéraire des mathématiques conduit à une toute autre approche didactique que celles qui sont actuellement proposées.

L'"apprentissage" de la démonstration consiste d'abord en une prise de conscience d'un fonctionnement de discours différent de celui qui est spontanément pratiqué par la pensée naturelle. En particulier *ce que le mathématicien appelle "déduction" est, d'un point de vue cognitif, une substitution d'énoncés* effectuée d'abord en fonction de leur statut. La compréhension opératoire des définitions et des théorèmes suppose que ceux-ci soient vus comme des règles de substitution. Le schéma A.T.S. en représente la structure profonde. La "déduction" est une forme de calcul dont l'organisation n'est pas directement automatisable. Et de ce fait un "enchaînement de déductions" n'est pas soumis au principe de congruence sémantique. Nous sommes donc loin du fonctionnement normal du raisonnement dans le langage naturel. L'"apprentissage" de la démonstration est la prise de conscience de cet écart.

L'organisation déductive du discours

Cela veut dire deux choses. D'une part cet "apprentissage" ne dépend ni de la multiplication d'exercices ni de l'acquisition de certaines procédures logiques considérées comme élémentaires. Depuis certains travaux célèbres de Piaget, on a trop souvent associé, voire confondu, trois processus: le maniement explicite de l'implication matérielle (en oubliant l'implication formelle, l'implication stricte,...), l'accès à "la pensée formelle", et la prise de conscience de ce qu'est une démonstration. En fait d'un point de vue cognitif cette prise de conscience renvoie à des structures différentes et plus riches que celles que Piaget a décrites pour le stade de la "pensée formelle". En outre le maniement explicite de l'implication matérielle présuppose la prise de conscience du fonctionnement de la démonstration comme calcul, il ne peut y conduire, comme on a pu s'en rendre compte dans les différentes tentatives faites ces vingt dernières années.

D'autre part une approche dans laquelle la démarche de démonstration serait trop décomposée ne peut favoriser cette prise de conscience. C'est peut-être le risque de certaines recherches actuelles inspirées de l'Intelligence Artificielle que de méconnaître l'aspect global nécessaire à une prise de conscience. La distinction entre statut et contenu d'un énoncé ne peut avoir de sens que dans une organisation globale.

La prise de conscience de ce qu'est une démonstration ne peut se faire que dans l'articulation de deux registres, dont l'un est l'utilisation que chaque élève fait du langage naturel. La prise de conscience naît de l'interaction qui se produit entre la représentation non-discursive produite et le discours exprimé. Une telle interaction ne peut se produire, ou ne peut avoir la même portée, si représentation et expression sont proposées, entièrement constituées par un autre. D'ailleurs, pour nous limiter au registre des représentations on pourrait montrer que les élèves ne voient dans un schéma, dans un arbre, dans un diagramme, que ce qu'ils sont en mesure de reconstruire effectivement. Présenter des démonstrations sous forme de graphes ne représente qu'un aide très limitée par rapport à une présentation discursive.

La prise de conscience de ce qu'est une démonstration ne peut être liée à un contenu mathématique particulier. Savoir comment fonctionne une démonstration et "savoir démontrer qu'un quadrilatère non croisé est un parallélogramme (ou un rectangle,...)" (Deledicq p. 138) relèvent de compétences hétérogènes. "*Savoir démontrer que ...*" renvoie exclusivement à l'aspect heuristique : les auteurs qui insistent sur ce "savoir démontrer que.." proposent chaque fois plusieurs solutions pour démontrer que... D'ailleurs d'anciens manuels de géométrie utilisaient déjà très systématiquement cette méthode de présentation, toute centrée sur l'heuristique (Chauvel 1963). Naturellement un tel savoir n'est pas transférable

L'organisation déductive du discours

puisque'il faut expliciter autant de listes différentes de solutions qu'il y a de propositions différentes à démontrer. Les jeunes élèves risquent donc de se trouver devant une accumulation factuelle de connaissances qui peuvent être déduites de différentes manières, sans qu'ils puissent comprendre ce que cela signifie réellement. Savoir comment fonctionne une démonstration renvoie à l'organisation déductive d'un corpus d'énoncés : on reconnaît très rapidement si une suite d'énoncés a ou non la structure d'une démonstration, quelle que soit la présentation choisie et on est alors en mesure d'en contrôler le déroulement.

Un mathématicien pourra être irrité par cette insistance mise sur la tâche d'organisation déductive et par l'indépendance qui lui est ainsi reconnue. Dans une démonstration l'heuristique reste l'aspect le plus important et le plus difficile; et si l'on n'a pas une idée de la solution, le tâche d'organisation déductive devient impossible. Cela n'impose-t-il pas que l'on mette d'abord l'accent sur les tâches de problem-solving ? Sans vouloir traiter ici la question d'un curriculum acheminant à la découverte de la démonstration, contentons nous de rappeler deux observations. La première est que, dans l'enseignement, on insiste déjà beaucoup sur l'aspect heuristique des démonstrations. La seconde est que les élèves assimilent et développent plus rapidement et plus finement des stratégies heuristiques lorsqu'ils ont pris conscience de la façon dont fonctionne une démonstration. Tout se passe comme si les élèves qui ont appris à maîtriser le jeu de l'organisation déductive disposaient d'un cadre pour interpréter correctement, pour généraliser des procédures rencontrées et pour contrôler les solutions obtenues.

Il reste maintenant la seule question importante : quelles sont les réactions et les productions des élèves d'une classe de quatrième dans un enseignement qui a été organisé selon ces quatre principes cognitifs?

REFERENCES

Anderson J.R., 1982, Acquisition of Cognitive Skill, in *Psychological Review*, 89,4, p.369-406.

Anderson J.R., Franklin Boyle C.,..., 1987, Cognitive principles in the design of computer tutors, in Morris P.(Ed.), *Modelling Cognition*, John Wiley & Sons Ltd.

Chauvel J.,1963, *Méthodes de résolution des problèmes de géométrie*, Robert, Lyon.

Deledicq A., Lassave C., Missenand C. et D., 1983, *Mathématiques 4ème*, CEDIC.

Ducrot O., 1980, Analyses Pragmatiques, in *Communications*, 32, p.11-60,1980.

Duval R., 1988, Ecarts sémantiques et Cohérence mathématique, in *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, p.7-25.

Duval R., 1988, Approche cognitive des problèmes de géométrie, in *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, p.57-74.

Egret M.A., & Duval R., 1989, Faire entrer toute une classe de quatrième dans une démarche de démonstration, in *Annales de didactique et de Sciences Cognitives*, 2, p.41-63

Gaud D.,Guichard J.P., 1984, Apprentissage de la démonstration in *Petit x*,4, 5-25.

Grize J.B., & Piérait-le Bonniec G., 1983, *La Contradiction*, P.U.F. Paris.

Heath T.L. (Ed.Trad.), 1956, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Vol.I,Doner, New-York.

Piaget J., 1967, *Le Jugement et le raisonnement chez l'enfant*, Delachaux-Nestlé, Neuchâtel.

L'organisation déductive du discours

Pluinage F.,1989, Aspects multidimensionnels du raisonnement en géométrie, in *Annales de Didactique et De Sciences Cognitives*, 2, p.5-24

Quillian M.R., 1969, Semantic Memory, in Minsky (Ed.) *Semantic Information Processing*.

Reynes F., 1981, Langage, synonymie et démonstration, in *Bulletin de l'A.P.M.E.P.*, 331, p.835-851.

Rumelhart D.E., Lindsay P.H., Norman D.A.,1972, A process model for Long Term Memory, in Tulving&Donaldson (Eds.) *Organisation of Memory*, Academic Press, New-York.

Rumelhart D.E., 1975, Notes on a schema for stories, in Bobrow&Collins (Eds.) *Representation and Understanding : studies in Cognitives Sciences.*, Academic Press, New-York.

Thom R., 1972, Les Mathématiques "Modernes": une erreur pédagogique et philosophique, *L'Age de la Science*, III,3, p.225-242.

Toulmin S.E., 1958, *The uses of Arguments*, Cambridge university Press.

Toulmin S.E., Rieke R., & Janik A., 1979, *An Introduction to Reasoning*, MacMillan, New-Yok.

Truong-Cong-Nghe., 1972, *Sur quelques théorèmes importants pour les variétés différentielles infinies*, Diplôme ,Université de Saigon.

Winnicott D.W., 1971, *Jeu et Réalité* (tr. C.Monod et J.B.Pontalis), Gallimard, Paris, 1975.