ÜBERLEGUNGEN UND ERFAHRUNGEN ZUR EINFÜHRUNG DER NEGATIVEN ZAHLEN

L. HEFENDEHL-HEBEKER

A fundamental step in the history of negative numbers was the transition from the concrete to the formal point of view.
By this step, the last resistance to negative numbers, wich resulted from a concrete-based thinking, was conquered.
Pupils as well have to achieve the step from concrete-based thinking to a formal point of view and to grasp the negative numbers as autonomous mental objetcts. The fundamental didactical problem is how to support this transition. The present paper deals with this problem and especially discusses the role of didactical models and a teaching experience within this context.

1. DIE EINFÜHRUNG DER NEGATIVEN ZAHLEN ALS DIDAKTISCHES PROBLEM

1.1 Zur Entwicklungsgeschichte der negativen Zahlen : geistige Hindernisse und ihre Überwindung

Für die Wissenschaft Mathematik sind die negativen Zahlen heute kein Problem mehr. Mit der Methode der Einbettung einer Halbgruppe in eine Gruppe lassen sie sich in eleganter Weise konstruktiv aus der Menge der natürlichen Zahlen gewinnen. Diese Methode gehört zu den Grundtechniken der modernen Algebra. Mit ihrer Hilfe läßt sich auch ein weiterer Schritt im Aufbau des Zahlensystems vollziehen: die Erweiterung des Ringes der ganzen Zahlen zum Körper der rationalen Zahlen. Die praktisch-rechnerische Beherrschung der "relativen Zahlen" und sachgerechter Einsatz in Anwendungssituationen sind auf Hochschulniveau zur selbstverständlichen Routine geworden.

©Annales de Didactique et de Sciences Cognitives
3 (1990) (p.78-102) IREM de Strasbourg

Jedoch ist seit dem ersten Auftauchen der negativen Zahlen in der Mathematikgeschichte mehr als ein halbes Jahrtausend vergangen, bis dieses Stadium der begrifflichen Durchdringung erreicht war und die negativen Zahlen in einem umfassenden Zahlensystem einen wohlbestimmten Platz zugewiesen bekamen. Welchen Entwicklungsprozeß die negativen Zahlen dabei durchgemacht haben und welche geistigen Hindernisse zu überwinden waren, hat Glaeser (1981) eindrücklich geschildert (vgl. auch Freudenthal 1983 und 1989). Ich möchte einige Aspekte dieser Entwicklung kurz skizzieren, sofern sie für die nachfolgenden didaktischen Überlegungen von Bedeutung sind (s. auch Tropfke 1980).

Erstmals in der Mathematikgeschichte treten negative Zahlen um das 2. Jh. n. Chr. in dem chinesischen Werk "Neun Bücher über die Kunst der Mathematik" auf, und zwar im Zusammenhang mit Sachproblemen, die auf Systeme linearer Gleichungen führen. Diophant formulierte die Rechenregel "Minus mal minus ergibt plus, plus mal minus ergibt minus." Dabei dachte er jedoch an die Ausrechnung von Ausdrücken der Form $(a-b) \cdot (c-d)$ mit abzuziehenden positiven Zahlen und nicht an echte negative Zahlen. Negative Gleichungslösungen sah er als unstatthaft an.

Spätestens im 15. Jahrhundert tauchten dann auch negative Zahlen sozusagen als "reine Zahlen" in formalen Rechnungen auf. Cardano arbeitete schließlich unbedenklich mit negativen Gleichungslösungen.

Seit Beginn des 17. Jahrhunderts setzte sich die Anerkennung der negativen Zahlen durch - zuerst zaghaft, dann immer entschiedener. Ihre Bewährung lag auf der Hand: sie ermöglichten es, das Lösen von Gleichungen in allgemeingültiger Weise zu schematisieren.

Diophant betrachtete noch fünf verschiedene Typen von quadratischen Gleichungen mit positiven Koeffizienten und behandelte sie getrennt:

$$\begin{array}{rcl} ax^2 & = & bx \\ ax^2 & = & b \\ ax^2 + bx & = & c \\ ax^2 + c & = & bx \\ ax^2 & = & bx + c \end{array}$$

Werden auch negative Koeffizienten zugelassen, so kann man alle diese fünf Typen zu einer einzigen Normalform $ax^2 + bx + c = 0$ zusammenfassen.

Die Rechenregeln ermöglichen es, Diophants verschiedene Lösungsverfahren zu einem Lösungsschema zu vereinheitlichen. Dieses liefert insbesondere die ursprünglich allein interessierenden positiven Lösungen der verschiedenen Gleichungstypen. (vgl. H.-H. 1989).

Folgenreich erwies sich die Einführung der negativen Zahlen im Laufe der Zeit auch in der Geometrie. Es wurde möglich, geometrische Figuren in einem von Problem und Figur unabhängigen Koordinatensystem in allgemeingültiger Weise durch algebraische Ausdrücke zu beschreiben. Jedoch versuchte Descartes, der den Grundstein für den Einsatz analytischer Methoden in der Geometrie legte, die negativen Zahlen als "racines fausses" noch zu vermeiden und Aufgabenstellungen so umzuformulieren, daß sie positive Lösungen bekamen.

Jedenfalls werden in der Algebra seit dem 17. Jh. negative Zahlen allgemein benutzt.

> "Ihre Deutung bleibt aber lange problematisch. Was soll man sich unter Größen vorstellen, die *weniger sind als nichts*? Die Deutung als Schulden ist ja nur für einen eng begrenzten Problemkreis brauchbar. In der Geometrie lassen sich positive und negative Zahlen als entgegengesetzt gerichtete Strecken auffassen." (Tropfke 1980, S. 148)

Dieses Zitat enthält im Kern alle Schwierigkeiten, die dafür verantwortlich waren, daß die begriffliche Einordnung der negativen Zahlen noch bis ins 19. Jahrhundert hinter ihrer formalen rechnerischen Beherrschung zurückblieb. Glaeser (1981) diagnostiziert "große Inseln des Unverständnisses" (de larges îlots d'incompréhension) und beschreibt einen Komplex von sechs prinzipiellen Schwierigkeiten, mit denen Mathematiker und Denker zu verschiedenen Zeiten immer wieder gekämpft haben.

1 <u>Die Unfähigkeit, isolierte negative Größen rechnerisch zu handhaben</u>
Diese z.B. bei Diophant vorhandene Schwierigkeit ist die einzige, die vom 17. Jahrhundert an generell überwunden war.

2 <u>Die Schwierigkeit, isolierten negativen Größen einen Sinn zu verleihen.</u> So schreibt noch d'Alembert in der 2. Hälfte des 18. Jahrhunderts in dem Artikel "Négatif" der Enzyklopädie von Diderot:

> "Es gibt also in einem wirklichen und absoluten Sinn keine isolierte negative Größe, -3, abstrakt genommen, vermittelt dem Geist keine Idee; aber wenn ich

sage, daß ein Mann einem anderen -3 Taler gegeben hat, so heißt das in verständlicher Sprache, daß er ihm 3 Taler abgenommen hat."

3 Die Schwierigkeit, die Vorstellung einer einheitlichen Zahlengeraden auszubilden. Man beharrte auf der qualitativen Differenz zwischen den negativen und den positiven Quantitäten und visualisierte diese mit Hilfe zweier entgegengesetzt gerichteter Halbgeraden. Man begriff also die positiven und negativen Zahlen nicht einheitlich als "relative Zahlen".

4 Die Doppelgesichtigkeit der Null. Entsprechend der Orientierung an gegensätzlichen Größenvorstellungen verstand man die Null lange Zeit als *absolute Null*, unterhalb derer man sich nichts mehr vorstellen konnte. Der Übergang zur *Null als Ursprung*, den man beliebig auf einer orientierten Achse eintragen konnte, mußte erst noch vollzogen werden. Symptomatisch für diese Schwierigkeit und ihren Konflikt mit den formalen Rechenregeln ist ein Ausspruch aus den "Gedanken" von Pascal:

> "Ich kenne Leute, die nicht begreifen können, daß Null übrigbleibt, wenn man von Null Vier wegnimmt."

5 Das Verhaftetsein im Stadium der konkreten Operationen. Man versuchte, den Zahlen und ihren Rechenoperationen irgendwie einen konkreten Sinn zu verleihen. Dieses Bestreben äußert sich auch in dem o.g. Zitat von d'Alembert.

6. Die Suche nach einem einheitlichen konkreten Modell, das alle Rechenoperationen zufriedenstellend erklärt. Die Deutungskraft des beliebten Guthaben - Schulden - Modells ist jedoch auf die Addition und Subtraktion beschränkt, und man muß bei der Deutung von Gleichungen wie (-5) - (-7) = +2 bereits zu Idealisierungen oder Kunstgriffen übergehen (vgl. H.-H. 1988). Spätestens jedoch für die Begründung der Minus-minus-Regel der Multiplikation, die besagt, daß das Produkt zweier negativer Zahlen negativ ist, muß man auf formale Argumente zurückgreifen.

Bei diesen Schwierigkeiten handelt es sich zumeist um Facetten eines übergeordneten Hauptproblems: man blieb dem aristotelischen Zahlverständnis treu, wonach der Zahlbegriff dem Größenbegriff untergeordnet ist. Größen sind aber von Natur aus an die Vorstellung von etwas Positivem gebunden (vgl. hierzu Schubring 1986).

Einführung der negativen Zahlen

Erst im 19. Jahrhundert vollzog sich ein grundlegender Sichtwechsel, der das lange Ringen um eine angemessene Deutung der negativen Zahlen beendete. Es entwickelte sich der Begriff *Erweiterung des Zahlensystems* als Leitgedanke für das Verständnis insbesondere der negativen und komplexen Zahlen. Dabei vollzog sich in der Deutung der Zahlen der Übergang vom konkreten zum formalen Standpunkt.

Dieser Sichtwechsel wurde von den Mathematikern Martin Ohm und George Peacock angebahnt und von Hermann Hankel in seinem Werk "Theorie der complexen Zahlensysteme" (1867) zur Vollendung geführt. Wie Hankel im Vorwort programmatisch darlegt, "kann der Begriff der Zahl rein formal und ohne Rücksicht auf den der Größe gefaßt werden; letzterer tritt nur hinzu als anschauliches Substrat jener Formen."

Ausgehend von den positiven ganzen Zahlen, die er auch die absoluten Zahlen nennt, gelangt Hankel durch sukzessive formale Erweiterungsschritte zu immer umfassenderen Zahlensystemen bis hin zu den Quaternionen. Als grundlegendes heuristisches Hilfsmittel dient ihm dabei das Prinzip der Permanenz formaler Gesetze. Seine Vorgehensweise und die Bedeutung des Permanenzprinzips möchte ich anhand der Einführung der negativen Zahlen kurz skizzieren.

Hankel geht aus von den absoluten Zahlen. Ihre Verwendung als Ordinal- bzw. Kardinalzahlen ermöglicht es, die Rechenoperationen und ihre grundlegende Gesetze anschaulich zu begründen. Zu diesen gehören das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz der Addition und Multiplikation, das Distributivgesetz, die Neutralität der 1 bezüglich der Multiplikation sowie die Eindeutigkeit der Umkehroperationen, soweit letztere ausführbar sind.

Dieses System von Gesetzen reicht bereits aus, um aus ihnen alle weiteren Folgerungen über das Rechnen mit positiven ganzen Zahlen formal abzuleiten, ohne daß man dabei auf reale Bedeutungen der Zahlen und ihrer Rechenoperationen explizit zurückgreifen müßte. Umgekehrt ist dieses System daher auch ausreichend, um die Rechenoperationen formal zu definieren und das System der absoluten Zahlen durch iterierte Addition der Einheit zu erzeugen. Die Zahl 0 wird hinzugenommen als Symbol, das stets der Bedingung $a + 0 = a$ genügt.

Einführung der negativen Zahlen

Die Differenz zweier Zahlen c und b definiert Hankel formal so: c - b sei diejenige Zahl, welche der Gleichung

$$(c - b) + b = c$$

genügt. Nun ist für den Fall, daß b größer als c ist, innerhalb der positiven Zahlen die Subtraktion c-b unmöglich.

> "Nichts hindert uns jedoch, daß wir in diesem Falle die Differenz c-b als ein *Zeichen* ansehen, welches die Aufgabe löst und mit welchem genau so zu operieren ist, als wenn es eine numerische Zahl aus der Reihe 1,2,3,... wäre." (Hankel, a.a.O.)

Hankel zeigt, daß es genügt, sich auf Zeichen der Form 0-a oder kurz -a zu beschränken. Auf diese Weise führt er neue negative Zahlen ein. Mit der Zahlenmenge muß nun auch der Zahlbegriff erweitert werden. So stellt Hankel den "actuellen", in der Anschauung konstruierbaren Zahlen die "rein intellectuellen", "mentalen" oder "formalen" Zahlen gegenüber. Letztere sind "Ausdruck gewisser formaler Beziehungen beliebiger Objekte zueinander."

So wird das jahrhundertelang verfolgte Bestreben, das Rechnen mit negativen Zahlen anhand konkreter Modelle zu begründen, aufgegeben:

> "Die Bedingung zur Aufstellung einer allgemeinen Arithmetik ist daher eine von aller Anschauung losgelöste, rein intellectuelle Mathematik, in welcher nicht Quanta oder ihre Bilder ... verknüpft werden, sondern intellectuelle Objekte, Gedankendinge, denen actuelle Objecte oder Relationen entsprechen können aber nicht müssen." (Hankel, a.a.O.)

Dennoch soll diese "rein intellectuelle Mathematik" nicht einzig der Forderung nach logischer Widerspruchsfreiheit als einer Grundbedingung jeglicher Mathematik genügen und darüberhinaus willkürlich gestaltet werden dürfen. Vielmehr sollen die Operationen der formalen Arithmetik so definiert werden, daß sie die Operationen der gewöhnlichen Arithmetik als Spezialfälle oder Exempla enthalten, genauer: daß "die formalen Operationen, auf actuelle Zahlen angewandt, dieselben Resultate geben, als die anschaulichen

Operationen der gemeinen Arithmetik." Dann müssen aber die Gesetze der formalen Arithmetik mit denen der gemeinen Arithmetik verträglich sein.

Deshalb sollen möglichst viele von den grundlegenden Gesetzen der gemeinen Arithmetik bei formalen Zahlbereichserweiterungen erhalten bleiben; zumindest aber dürfen die Gesetze der formalen Arithmetik denen der gemeinen Arithmetik nicht widersprechen. In diesem Sinne ist die Erweiterung von den komplexen Zahlen zu den Quaternionen, bei der die Kommutativität der Multiplikation aufgegeben werden muß, zulässig; nicht zulässig wäre es dagegen, explizit ein antikommutatives Gesetz

$$a \cdot b = -(b \cdot a)$$

zu fordern, weil eine solche Formel im Bereich der natürlichen Zahlen nicht nur nicht allgemeingültig sondern falsch ist. Die gemeine Arithmetik muß in diesem Sinne in die formale Arithmetik eingebettet sein. Das ist der Kerngedanke des Prinzips der Permanenz formaler Gesetze.

Die methodische Bedeutung dieses Prinzips bedingt seine heuristische Verwendung. Man rechnet mit den neuen Zahlen, als ob bestimmte Rechengesetze weiterhin gültig wären, und erschließt somit notwendige Bedingungen für die Definition der Rechenoperationen im erweiterten Bereich. Hat man beispielsweise zwei negative ganze Zahlen -a und -b, so gelten per definitionem die Gleichungen

$$-a + a = 0$$

$$-b + b = 0$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit b und die zweite mit -a und rechnet, als ob das Kommutativgesetz der Multiplikation, das Distributivgesetz und die Regel $0 \cdot x = 0$ weiterhin gültig wären, so erhält man

$$(-a) \cdot b + a \cdot b = 0$$

$$(-a) \cdot (-b) + (-a) \cdot b = 0$$

Dann muß man aber aufgrund der Definitionsgleichung für negative Zahlen die bekannten Vorzeichenregeln folgern:

$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$$

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

Freudenthal (1983) hat diese Vorgehensweise ausführlich erläutert.

Die Rechenregeln sind hiermit keineswegs bewiesen. Sie sind aufgrund von Annahmen, in deren Auswahl man prinzipiell frei ist, nahegelegt. Es muß anschließend gezeigt werden, daß eine durch diese Regeln definierte Multiplikation ganzer Zahlen tatsächlich die Multiplikation natürlicher Zahlen im oben geforderten Sinne fortsetzt.

Somit haben Hankel und seine Vorkämpfer die fruchtlose Suche nach zwingend erklärenden Modellen aufgegeben und im Rahmen einer formalen Mathematik Zahlbereiche unabhängig von inhaltlichen Fundierungen wie Anzahl oder Größe erweitert. Damit waren die erweiterten Zahlbereiche aber keineswegs von inhaltlichen Bedeutungen abgehoben, im Gegenteil: es eröffnete sich ein breiter Interpretations- und Anwendungsspielraum. War es zuvor nicht gelungen, die relativen Zahlen und ihre Struktur in unstrittiger Weise aus Phänomenen abzulesen, so konnte man sie nun mit um so größerem Erfolg in vielfältige Bereiche hineinlesen:

- Die Einführung des Vektorbegriffes ermöglichte das Rechnen mit gerichteten Strecken, und man erkannte im eindimensionalen Raum der geometrischen Vektoren ein Modell für die rationalen bzw. reellen Zahlen.

- In der Physik wurde es sinnvoll, von negativen Spannungen, Geschwindigkeiten, Kräften ... zu reden. Man erhält hiermit hilfreiche Beschreibungsmittel und vereinfachte rechnerische Zugänge.

Dabei ist es erstaunlich, wie sich Gewohnheiten, die wir aus der Anwendung positiver Zahlen kennen, durchhalten lassen:

- Werden für einen Term, der eine im ersten Quadranten eines Koordinatensystems verlaufende Halbgerade beschreibt, auch negative Einsetzungen zugelassen, so wird damit die Fortsetzung der Halbgeraden zu einer Geraden erfaßt. Weil sich die negativen Zahlen in dieser Weise in der Geometrie bewähren, spricht Freudenthal (1983; 1989) vom geometrisch-algebraischen Permanenzprinzip.

- Der Höhenunterschied zwischen zwei Orten kann bei Einbeziehung negativer Höhenangaben weiterhin durch Subtraktion ermittelt werden.

- Die Mitte eines Intervalls kann überall auf der Zahlengeraden nach dem formalen Verfahren der Mittelbildung berechnet werden.

Man kann sogar Probleme, die nur im Bereich der positiven Zahlen sinnvoll sind und auch nur positive Lösungen haben, unter Einbeziehung negativer Zahlen schneller und effektiver lösen. Ein einfaches Beispiel hierfür liefert die folgende Geometrie-Aufgabe (Kirsch 1987):

> "Ein Quadrat wird durch Anlegen eines 8 cm^2 großen Rechtecks zu einem Rechteck von 6 cm Länge. Welche Seitenlängen hat das Quadrat (und das angelegte Rechteck)?"

Die beiden Lösungen 2 und 4 lassen sich durch Probieren ermitteln. Eine systematische Lösung der quadratischen Gleichung $\mathbf{x^2 - 6x + 8 = 0}$ setzt aber bereits die Multiplikation negativer Zahlen voraus.

Der Aufbau des Zahlensystems nach der Leitlinie des Permanenzprinzips führt also zu einer Vielzahl an Passungen. Deshalb betont M. Wagenschein (1988), daß die Rechenregeln für negative Zahlen zwar Erfindungen sind, aber es sind solche, "die sich anpassen." Und E. Schuberth fügt erläuternd hinzu:

> "Es gibt auch in der Mathematik Freiheitsmomente. Wir können uns für das eine oder das andere entscheiden. Der Hinweis auf das Permanenzprinzip (oder anderes) ist kein l o g i s c h e s Argument. Wir haben die Freiheit, uns zum einen oder anderen zu entscheiden. In den Folgen sind wir aber nicht mehr frei. Wir erzeugen Harmonie, indem wir den einen Fall (daß minus mal minus plus ist) wählen. Zugleich schließen wir uns damit den Entscheidungen anderer Menschen in der Vergangenheit und Gegenwart an."

1.2. Empirische Befunde

Neuere empirische Untersuchungen bestätigen, daß Schüler/innen beim Umgang mit negativen Zahlen ähnliche geistige Hürden überwinden müssen, wie sie in der Geschichte der negativen Zahlen aufgetreten sind. D. Coquin-Viennot (1985) und G. Malle (1987, 1989) haben jeweils eine Reihe von aufeinanderfolgenden Stadien bei der Aneignung der negativen Zahlen nachgewiesen. Trotz unterschiedlicher Nuancierungen dieser beiden Untersuchungen zeigt sich die folgende gemeinsame Grundlinie.

Die negativen Zahlen werden zunächst wie positive Zahlen behandelt und erscheinen als positive Zahlen in bestimmten Interpretationen, nicht aber als eigenständige Denkobjekte. Sie werden verwendet, um Gegensätze auszudrücken, z.B. Guthaben-Schulden, über Null - unter Null. Solche Deutungen orientieren sich an Größenvorstellungen und können durch Schreibweisen wie +5, -5 ausgedrückt werden. Entsprechend diesem Verständnis werden die negativen Zahlen spiegelbildlich zu den positiven angeordnet. Vermeintlich gilt die Beziehung $-5 < -7$, weil 5 DM Schulden weniger sind als 7 DM Schulden.

Deshalb müssen Vorstellungen ausgebildet werden, die die positiven und negativen Zahlen in einer linear geordneten Mengen von "relativen Zahlen" vereinigt. Erst dann kann in elementar zugänglichen Aufgaben wie -10°C + 5°C = -5°C oder -10 DM - 5 DM = -15 DM die Addition oder Subtraktion einheitlich als Vermehren bzw. Vermindern gedeutet werden; in der Spiegelbildanordnung dagegen erscheinen diese Beispiele als Verminderung der Unter-Null-Temperatur bzw. als Erhöhung der Schulden.

Erst im letzten Stadium, das nicht von allen Schüler/innen erreicht wird, bildet sich ein theoretisches Verständnis der negativen Zahlen heraus. Hier bekommen im Alltagsverständnis kaum verwendete Schreibweisen wie $2 - (-5) = 7$ einen Sinn, hier wird auch Einsicht in den definitorischen Charakter der Rechenoperationen gewonnen.

In diesem Lernprozeß verflechten sich ständig unterschiedliche schulische, gesellschaftliche und allgemein menschliche Erfahrungsbereiche. Alte und neue Regeln mischen sich mit Vorwissen und konkreten Vorstellungen, inhaltliche Bedeutungen mit formalen Umformungsprozeduren. Somit bietet das Thema eine verwirrende Vielfalt von Aspekten.

Dabei wählen nur erfolgreiche Schüler/innen instinktiv passend aus, weniger erfolgreiche greifen daneben. (Andelfinger 1985)

1.3 Grundfragen einer Didaktik der negativen Zahlen

Bei der Einführung der negativen Zahlen stellt sich zum ersten Mal im Arithmetikunterricht unumgänglich die Notwendigkeit des Übergangs vom konkreten zum formalen Standpunkt.

In der Grundschule steht die Arithmetik in enger Verbindung zu inhaltlichen Vorstellungen. Zahlen und Rechenoperationen werden durch Abstraktion aus Handlungen an konkreten Gegenständen gewonnen, das Rechnen wird aus Handlungswissen entwickelt und durch dieses Wissen inhaltlich gestützt.

Zahlen haben mit Anzahlen, Ordnungen, Größen zu tun. Addieren stellt sich das als Weiterzählen, Hinzufügen, Vermehren; Subtraktion erscheint dementsprechend als Zurückzählen, Wegnehmen, Vermindern und wird schließlich auch im Sinne des Ergänzens bzw. der Unterschiedsbestimmung gedeutet. Multiplikation ist Mehrfach-Nehmen, Division Einteilen und Messen. Auch bei der Bruchrechnung verwendet man noch ein Angebot an inhaltlichen Interpretationen, die Anhalt an der realen Umwelt haben und durch Alltagswissen gestützt werden (vgl. H.-H. 1988 und 1989b). Jedoch stehen hier bereits Uminterpretationen gegenüber dem Vorwissen an: die Multiplikation mit einem Bruch muß als Anteil-Bildung gedeutet werden und kann eine Verkleinerung bewirken, dementsprechend kann man mit Hilfe der Division entgegen aller ganzzahligen Gewohnheit beliebige Vergrößerungen erzielen.

Vom Standpunkt des konkreten, auf inhaltliche Sinngebungen gerichteten Denkens scheint sich bei negativen Zahlen die Welt endgültig auf den Kopf zu stellen: hier kann die betragsgrößere Zahl plötzlich die kleinere sein, hier kann Addition Verringerung und Subtraktion Vermehrung bedeuten, von den Regeln der Multiplikation relativer Zahlen ganz zu schweigen. Dennoch sind die Regelungen sinnvoll (vgl. hierzu 1.1.), und die bisherigen Vorstellungen über die Rechenoperationen mit positiven Zahlen können als Spezialfälle fortbestehen (vgl. Winter 1989).

Dann stellt sich aber grundsätzlich die Frage, ob sich die relativen Zahlen überhaupt von anschaulich-inhaltlichen Sinngebungen her erschließen lassen, getreu den didaktischen Grundsätzen "von der Anschauung zum Begriff" und "vom Konkreten zum Allgemeinen". Die Geschichte der Mathematik hat dies nicht vermocht. Nun wäre es aber denkbar, daß nach dem Sichtwechsel, der durch Hankel und seine Vorgänger vollzogen wurde, wirksamere didaktische Aufbereitungen möglich werden, weil nun die Struktur der relativen Zahlen geeignet in konkrete Situationen hineingelesen werden kann. Dies ist das Problem der didaktischen Modelle, dem ich nachfolgend einen eigenen Abschnitt widmen möchte.

Und weiter: Läßt sich überhaupt in irgendeiner Weise der formale Standpunkt kontinuierlich aus dem konkreten entwickelten (Coquin-Viennot 1985 bestreitet das) oder ist zwangsläufig eine Unstetigkeitsstelle im Lernprozeß zu überspringen? Wie will man dann den Anstoß zu diesem Sprung geben, wenn eine formale Erweiterungskonstruktion im Sinne der Hochschulmathematik für die angegebene Schulstufe zu anspruchsvoll ist ?

1.4. Das Dilemma der didaktischen Modelle

Didaktische Modelle sind "in sich logisch-schlüssige Denkgebäude, die ein bestimmtes Lehrplan-Thema methodisch geschickt aufbereiten." (Andelfinger 1985).

Zur Einführung der negativen Zahlen sind zahlreiche solche Modelle entwickelt worden. Deren Verwendung birgt ein Dilemma, das mit der in 1.2. formulierten Grundsatzfrage zusammenhängt. Ich möchte dieses an zwei Modellen für die additive Struktur der relativen Zahlen, nämlich dem Guthaben-Schulden-Modell und dem sogenannten Pfeilmodell erläutern.

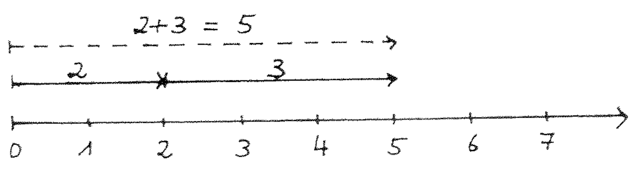
Das Guthaben-Schulden-Modell liefert wirksame Stützen zum Verständnis von Aufgaben des Typs $-5 + 7 = 2$ oder $8 - 12 = -4$. Es handelt sich hierbei um die Addition/Subtraktion einer positiven Zahl von/zu einer beliebigen ganzen bzw. rationalen Zahl. Jedoch sind bereits zur Erklärung von Gleichungen wie $(-5) - (-7) = 2$ Kunstgriffe erforderlich, denn normalerweise wird durch das Erlassen von Schulden kein Guthaben geschaffen. Der kommerzielle Erfahrungsbereich muß also bereits mit theoretischen Augen betrachtet und passend zur algebraischen Struktur interpretiert werden, obwohl er eigentlich die Ausbildung eines theoretischen Standpunktes erst motivieren soll. Anders formuliert:

> "Die zugerichtete Erfahrung muß zur Erklärung des neuen Begriffes herhalten. Als Deformation ihrerseits erklärungsbedürftig muß sie als Erklärung dienen, - ein klassischer Zirkel. ... Ich kann die algebraische Struktur ... hineinsehen, aber ich kann sie nicht zwingend daraus *ableiten*. Die Voraussetzung für das So-sehen ist eine Definition, eine theoretische Grundlage; ich brauche eine Theorie, *um so sehen* zu können." (Bauersfeld 1983)

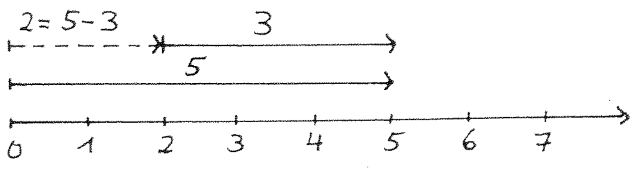
Das Pfeilmodell bewegt sich ganz im mathematischen Kontext und macht Gebrauch von der Tatsache, daß der Körper der rationalen (bzw. reellen) Zahlen isomorph zu einem eindimensionalen geometrischen Vektorraum ist. Deshalb lassen sich Zahlen als Vektoren darstellen; der Betrag bestimmt die Länge, das Vorzeichnen die Richtung.

Die Addition und Subtraktion positiver Zahlen läßt sich im Pfeilmodell mit Hilfe der "Fuß-an-Spitze-Regel" bzw. der "Spitze-an-Spitze-Regel" darstellen. Diese Regeln bauen auf der Vorstellung des Aneinanderlegens bzw. Abschneidens von Strecken auf. Für ihre Verwendung zwei Beispiele:

(1) $2 + 3 = 5$:

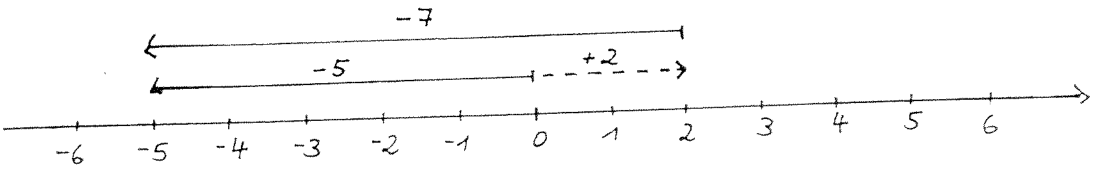


(2) $5 - 3 = 2$:



Der Hinzunahme negativer Zahlen entspricht die Hinzunahme linksgerichteter Pfeile. Die Erarbeitung der additiven Struktur des erweiterten Zahlbereichs setzt nun in der Modellebene an. Dort trifft man die Entscheidung, die Verknüpfungsregeln für Rechtspfeile auf die gesamte Pfeilmenge zu übertragen; an dieser Stelle ist das definitorische Moment versteckt. Daraufhin erhält man Darstellungen wie die folgende:

(-5) - (-7) = + 2:



Die am geometrischen Modell gewonnenen Beobachtungen werden nun innerarithmetisch betrachtet und zu Verknüpfungsregeln für Zahlen zusammengefaßt.

Auch hier besteht die Notwendigkeit, die Problemebene und die Modellebene und die Isomorphie zwischen beiden gleichzeitig zu erarbeiten. Zu dieser ohnehin komplexen Anforderung stellt sich wiederum die Frage: Zwar kann ich, wenn ich den theoretischen Standpunkt bereits besitze, die algebraische Struktur in das Modell hineinsehen; kann ich sie aber umgekehrt auch zwingend aus dem Modell ablesen? Meine Erfahrungen mit dem Modell zeigen überdies, daß die geometrische Einkleidung der Gleichung (-5) -(-7) = 2 deren Fremdheit nicht mindert. Einer elementaren, auf allgemein menschlichen Erfahrungen beruhenden Sinnerwartung zufolge müßten die drei Minuszeichen auf der linken Seite ein "besonders negatives" Ergebnis bewirken.

Aus diesen Überlegungen resultiert die zusammenfassende These: Didaktische Aufbereitungen, die einen Erfahrungsbereich von einer theoretischen Perspektive her strukturieren, führen die Schüler/innen nicht zwangsläufig zu dieser Perspektive hin.

2. Ein Unterrichtsversuch zur Einführung der negativen Zahlen

Nach einer Reihe von Vorerfahrungen, deren Aufarbeitung zu den Überlegungen in 1. führten, habe ich im Herbst 1988 das Unterrichtsthema "negative Zahlen" erneut in einer siebten Gymnasialklasse unterrichtet. Darüber möchte ich in diesem Abschnitt berichten.[1)]

2.1 Vorentscheidungen

Die Analysen in 1. und weitere didaktische Überlegungen geben Anlaß zu Hypothesen, die die Vorentscheidungen für die Planung folgendermaßen bestimmt haben:

(1) Aufbereitung der bisherigen Lerngeschichte

Da die negativen Zahlen einen Sichtwechsel in der arithmetischen Lerngeschichte eines Schülers/ einer Schülerin erforderlich machen, sollte man diesen Sichtwechsel auch explizit thematisieren. Dazu könnte es nützlich sein, die bisherige Lerngeschichte in Form einer Wiederholung über Zahlen aufzuarbeiten.

(2) Das Zählen als einführende Grundtechnik

Die Grundschuldidaktik besinnt sich wieder zunehmend auf die Bedeutung des Zählens als grundlegende Handlung für den Zahlerwerb (vgl. Padberg 1986). Das Vorwärts- und Rückwärtszählen könnte auch eine nützliche einführende Übung zur Orientierung in der linear geordneten Menge der relativen Zahlen sein. Diese Aktivität knüpft vermutlich an elementare Bewegungs- und Richtungsschemata an.

G. Malle (1987, 1989) vermutet aufgrund empirischer Studien, daß die betreffende Jahrgangsstufe solche Schemata mitbringt und zur Lösung einfacher Aufgaben wie $-7 + 12 = 5$ einsetzt.

(3) Zum Verhältnis zwischen Arithmetik und Anwendungssituationen

Sowohl die Begriffsgeschichte der negativen Zahlen wie auch die Anlaysen zu den didaktischen Modellen scheinen dafür zu sprechen, die negativen Zahlen zunächst im arithmetischen Kontext zu erarbeiten und erst dann ihre Verwendung in Anwendungssituationen zu thematisieren. Kurz: anschließende Interpretation statt versuchter hinführender Ableitung.

---

1) *Der Unterrichtsversuch wurde durch eine Sachbeihilfe der Deutschen Forschungsgesellschaft unterstützt.*

(4) Zur Erarbeitung der Rechenoperationen

Seit Hankel erfolgt die kanonische Erarbeitung der Rechenregeln für ganze bzw. rationale Zahlen im arithmetischen Kontext nach dem Permanenzprinzip. Eine exakte Herleitung im Sinne dieser Zahlbereichserweiterungsidee ist jedoch sehr anspruchsvoll. Sie ist aufgrund des heuristisch-hypothetischen Charakters logisch schwierig und strapaziert zudem die Geduld der Schüler/innen, die häufig zunächst einmal nur wissen wollen, wie "es geht". Deshalb kann es im Zweifelsfall ehrlicher sein, im Unterricht zunächst die Rechenregeln zu verraten und dann zu untersuchen, warum diese sich bewähren. Am Ende sollte die Einsicht stehen, die Wagenschein sinngemäß so formuliert hat: Es handelt sich um Setzungen, aber um solche, die sich anpassen.

(5) Zur Rolle des Permanenzprinzips

Gemäß (4) wird darum das Permanenzprinzip nicht nur zu heurististischen Zwecken eingesetzt. Ebensogut können auch Permanenzphänomene und "Passungen" (s.1.1) zur nachträglichen Rechtfertigung der Rechenoperationen studiert werden.

2.2 Erfahrungen

Abschließend soll über den Verlauf des Unterrichtsversuches und dabei gewonnene Erfahrungen zusammenfassend berichtet werden. Detaillierte Erkenntnisse über den Verlauf der Interaktion und der Lernprozesse soll eine interpretative Mikroanalyse der Unterrichtstranskripte erbringen. Diese ist jedoch noch nicht abgeschlossen.

a) Vorbereitende Wiederholung über Zahlen und ihre Bedeutung (2 Stunden)

Gemäß der Vorentscheidung (1) wird die Einführung der negativen Zahlen durch Reflexion der bisherigen Zahlenwelt vorbereitet. Dies geschieht unter der Zielvorgabe: "Wir stellen uns vor, wir müßten ein Rechenbuch für das erste Schuljahr planen. Welche Zahlen sollen wir behandeln und was sollen wir über diese Zahlen sagen?" Durch diese Rollendistanzierung möchte ich eine freiere Atmospäre schaffen und den Eindruck einer Prüfungssituation vermeiden.

Einführung der negativen Zahlen

Anhand von Beispielen erarbeiten wir Verwendungsarten von natürlichen Zahlen (z.B. als Anzahlen, Ordnungszahlen oder Maßzahlen) sowie Bedeutungen der Anordnung und der Grundrechenarten, Zusammenhänge zwischen den Grundrechenarten, Rechengesetze. Zur Unterstützung der Reflexion teile ich in der ersten Stunde ein Grundschullehrbuch, in der zweiten ein Arbeitsblatt mit bildlichen Darstellungen zur Multiplikation und Division aus.

Die Schüler/innen argumentieren auffallend oft mit Äpfeln. Das Zählen von Äpfeln scheint für sie ein primärer Bereich der Bedeutung von Zahlen und des Rechnens zu sein. Zum Beispiel heiß es:

$5 < 8$ bedeutet : 5 Äpfel sind weniger als 8 Äpfel

$4 + 2 = 6$ bedeutet : 4 Äpfel und 2 Äpfel zusammenzählen.

Andere Deutungen der Rechenarten, die mir im Blick auf die weitere Unterrichtsplanung wichtig sind, muß ich durch Impulse hervorrufen, z.B. die Addition als Weiterzählen, die Subtraktion als Zurückzählen.

Die Bruchzahlen werden in dieser Phase nur kurz gestreift. Die Reaktionen auf meinen Versuch, die Rechentechniken zu hinterfragen, lassen schwankenden Boden ahnen.

b) Einstieg: Zurückzählen unter Null: Vorwärts- und Rückwärtszählen an der Zahlengeraden (2 Stunden)

Diese Phase wird durch Vorentscheidung (2) bestimmt. Die Schüler/innen wissen längst, daß es negative Zahlen gibt. Sie kennzeichnen sie als "Zahlen unter Null". Wir brauchen nur vorhandenes Wissen zusammenzutragen und unter Hinzunahme einiger Fachbegriffe zu strukturieren und zu festigen.

Wir zählen zunächst in Einerschritten unter Null zurück und bezeichnen die entstehenden Zahlen als negative ganze Zahlen. Wir ordnen die ganzen Zahlen auf einer Zahlengeraden an. Diese zeichnen wir gleich in zwei Ausfertigungen: horizontal und vertikal. In die "Lücken" tragen wir auch Bruchzahlen ein. Wir besprechen die Symmetrie der Zahlengerade und machen an der "Aufwärtsrichtung" die Kleinerrelation fest. Dabei thematisieren wir auch, daß im Bereich der negativen Zahlen die festgesetzte Anordnung entgegengesetzt zur Anordnung der Beträge verläuft.

Die anschließende Übungsphase ist dem Vorwärts- und Rückwärtszählen auf der Zahlengeraden gewidmet. Aufgaben wie

von -8 um 22 aufwärtszählen

von +10 um 15 aufwärtszählen

notieren wir anfangs in der Schreibweise

$-8 \xrightarrow{+22}$, $+10 \xrightarrow{-15}$

Diesen Aufgabentyp variieren wir, indem wir die Leerstelle auch bei der Ausgangszahl oder der Schrittzahl ansetzen. Solange es sich um überschaubare ganze Zahlen handelt, tauchen keine Schwierigkeiten auf, und es besteht kein Bedürfnis nach Regelformulierung.

Schließlich vereinfachen wir die Schreibweisen zu - 8 +22 bzw. +10 -15. Das paßt zu der Gewohnheit, das Vorwärts- und Rückwärtszählen als Addition bzw. Subtraktion aufzufassen. Diese Prozedur muß ich ausdrücklich veranlassen. Die Schüler/innen wären zum Teil lieber bei der einleuchtenden Pfeilschreibweise geblieben.

Die Hinzunahme von Dezimalbrüchen und, noch schwieriger, gewöhnlichen Brüchen, erfordert dann aber Zusatzüberlegungen. Zur Lösung der Aufgabe +27,64 -32,97 biete ich Hilfsfragen an. Wie weit ist es bis zur Null und wieviel fehlt dann noch? Nicola formuliert es plastischer: "Man muß ausrechnen, wieviel das Minus mehr ist als das Plus."

c) Positive und negative Zahlen in Verwendungssituationen (2 Stunden)

In dieser Stunde reflektieren wird anhand eines Arbeitsblattes die Verwendung negativer Zahlen in Sachsituationen (Thermometer, geographische Höhen, Bilanzen einer Firma, eine Graphik zur Bevölkerungsbewegung). Wir deuten die Anordnung sachbezogen und erörtern Sprechweisen wie:

- Der Mehrverbrauch von Heizöl betrug -12,6%.
- Die Bevölkerungsbewegung in Mittelfranken ergab ein Saldo von -2297.

Abschließend machen wir Rechenübungen, z.B.:

- Ein Bankkonto weist 82,-- DM Guthaben aus, 100,-- DM werden bar abgehoben. Später trifft eine Gutschrift über 43,-- DM ein.

Inzwischen verfügen wir über Additions- bzw. Subtraktionsaufgaben, bei denen das erste Glied und das "Ergebnis" beliebige rationale Zahlen sind, das zweite Glied aber eine positive Zahl ist. Ich werde diese Aufgaben künftig *einfache Additions- und Subtraktionsaufgaben* nennen.

> "Von einer *Addition* oder *Subtraktion negativer Zahlen* ist hierbei - wie in den genannten Anwendungssituationen - noch nicht die Rede. Erst mit *ihrer* Einführung wird die naive, allein mit dem gesunden Menschenverstand zu bewältigende Stufe des Umgangs mit den negativen Zahlen verlassen." (Kirsch 1973)

Zwei Schüler initiieren selbst das Verlassen der naiven Stufe, indem sie nach der Lösung von Aufgaben der Art 3 - (-14) fragen. Man scheint allgemein überzeugt zu sein, daß solche Rechnungen möglich sind. Mike gibt dafür eine interessante Begründung: "Denn sonst bringen die Zahlen ja nichts." Vielleicht empfindet er, daß die negativen Zahlen bisher im Sinne von G. Malle hauptsächlich als positive Zahlen in bestimmten Interpretationen verwendet wurden und wartet nun auf das eigentliche Neue.

d) <u>Addition und Subtraktion rationaler Zahlen (7 Stunden)</u>

Diese Phase des Unterrichtes beansprucht besonders viel Zeit und ist im Nachhinein gesehen die Schwierigste. Denn hier muß insbesondere eine erste Gewöhnung an formale Sichtweisen erfolgen. Ich verfahre im Sinne der Vorentscheidungen (3) und (4). Insbesondere initiiere ich keine konkretisierenden Argumente (etwa über Guthaben und Schulden), lasse solche aber zu, wenn sie von den Schülerinnen und Schülern selbst kommen.

In den ersten beiden Stunden erarbeiten wir die Rechenregeln zur Addition und Subtraktion. Dazu lege ich je ein Aufgabenblatt mit einer Aufgabenserie vor. Aus Symmetriegründen sind hier auch positive Zahlen konsequent mit Vorzeichen geschrieben, z.B.

(+3) + (-7). Es muß offen bleiben, ob damit formale Übersichtlichkeit oder zusätzliche Verwirrung geschaffen wird.

Ich lasse jeweils über mögliche Aufgabenlösungen diskutieren. Dabei kommen vielfältige Vorstellungen zutage:

- Matthias zeigt ansatzweise ein Gefühl für die Permanenz arithmetischer Grundregeln, wenn er die Zahlensätze (-3) + 0 = -3 und 0 + (-22) = -22 so begründet: "Wenn man von Null was draufzählt oder Null dazuzählt, dann bleibt es gleich."
- Nico kämpft indessen mit dem vierten von Glaeser nachgewiesenen Hindernis (s. 1.1). Er plädiert nämlich dafür, daß (+3) + (-3) = +3 gilt, "weil wenn man (+3) + 0 macht, dann kommt ja auch +3 heraus, und -3 ist ja noch weniger als Null." Ich signalisiere Nico, daß viele Menschen ähnlich gedacht haben wie er.
- Insgesamt zeigt sich, wie verwirrend dieses *doppelgesichtige Rechnen* (Andelfinger 1985) ist. Zum Beispiel veranschlagt Matthias für (-3) + (-7) das Ergebnis +4, weil "-7 von -3 abgezogen wird." Hier werden die Bedeutungen von Vorzeichen und Rechenzeichen vermischt, obwohl wir sie ausführlich thematisiert haben.

Diese Diskussionsphase schneide ich jeweils nach einiger Zeit ab, und verrate, welcher Rechenweg sich unter Fachleuten durchgesetzt hat. Diesen gebe ich vor, indem ich den Schüler/innen zeige, wie man eine "doppelgesichtige Aufgabe" in eine einfache Aufgabe umformt:

$$(+5) + (-7) = +5 - 7 = -2$$

$$(-7) - (-3) = -7 + 3 = -4$$

Bei der Addition wird die Umformungsanweisung schnell akzeptiert, zumal Jens sie engagiert mit dem Schuldenmodell erläutert, bei der Subtraktion erzeugt sie zunächst Irritationen. Nicola formuliert schließlich eine aus ihrer Sicht völlig berechtigte Sinnfrage. Wozu betrachtet man denn diese aufwendigen Schreibweisen, wenn man sie am Ende doch auf die einfacheren zurückführt? Hier zeigt Jens, der auch die Frage nach der Lösung von 3 - (-14) gestellt hatte, wiederum Ansätze zu einem fortgeschrittenen Standpunkt. Er weiß, daß man die doppelgesichtige Schreibweise benötigt, um arithmetische Ausgangsprobleme zu formulieren.

Während der anschließenden Rechenübungen erkennen wir auch Regeln über das Umwandeln von Plus- in Minusaufgaben und umgekehrt. Irgendwann stellt ein Schüler die naheliegende Frage: Wozu braucht man das alles?

Darauf reagiere ich mit zwei verschiedenen Maßnahmen. Zunächst stellen wir ganzzahlige Additions- und Subtraktionsaufgaben im Plättchenmodell dar (dieses wird in der didaktischen Literatur auch zuweilen durch das Stichwort "Killermethode" charakterisiert). Wir verwenden schwarze und rote Spielsteine zur Darstellung von Plus- und Minuspunkten, und es wird vereinbart, daß je ein Pluspunkt und ein Minuspunkt zusammen den Wert Null haben. In diesem Modell kann man das ursprüngliche Verständnis der Addition und Subtraktion als Hinzufügen und Wegnehmen beibehalten, wenn man den Kunstgriff der geeigneten Ergänzung nullwertiger Punktepaare einbezieht.

Schließlich bearbeiten wir ein Aufgabenblatt mit folgenden Aufgabentypen:

(1) Permanenzreihen, also Aufgabenserien wie die folgenden,
$(+3) - (+2) =$; $(+3) - (+1) =$; $(+3) - 0 =$; $(+3) - (-1) =$... Dazu formulieren wir die Beobachtung: Regelmäßig gebaute Aufgabenreihen haben regelmäßige Ergebnisse.

(2) Aufgabenserien, die exemplarisch belegen, daß das Kommutativgesetz weiterhin gilt und daß die Subtraktion Probe zur Addition bleibt.

(3) Die Rechtecksaufgabe aus 1.1 (dort am Schluß).

Die ersten beiden Aufgabentypen zeigen den Schüler/innen offenbar in einleuchtender Weise, daß sich die neuen Rechenregeln besser an arithmetische Gewohnheiten anpassen, als es ursprünglich den Anschein hatte. Das verläuft im Sinne von Vorentscheidung (5). Zu Aufgabe (3) ermitteln wir die beiden Lösungen 2 und 4 durch Probieren. Es ist der Klasse leicht einsichtig zu machen, daß solche probierenden Verfahren bei komplizierteren Zahlen aussichtslos werden. Als Ausblick teile ich mit, daß der erweiterte Zahlbereich es ermöglicht, solche Aufgaben durch ein einfaches systematisches Rechenverfahren zu lösen. Auf Wunsch führe ich die Lösung der Aufgabe vor.

e) Multiplikation und Division rationaler Zahlen (2 Stunden)

Inzwischen sind einige Schüler/innen neugierig geworden, ob für die Multiplikation und Division analoge Umformungsregeln von doppelgesichtigen in einfache Aufgaben existieren. Die letzten beiden Grundrechenarten machen keine Mühe mehr. Die Anstrengung um die additive Struktur scheint einen Trainingseffekt hinterlassen zu haben.

Die Multiplikation erarbeiten wir anhand einer Tabelle :

·	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5
+5	-25	-20	-15	-10	-5	0	+5	+10	+15	+20	+25
+4	-20	-16	-12	-8	-4	0	+4	+8	+12	+16	+20
+3	-15	-12	-9	-6	-3	0	+3	+6	+9	+12	+15
+2	-10	-8	-6	-4	-2	0	+2	+4	+6	+8	+10
+1	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	+5	+4	+3	+2	+1	0	-1	-2	-3	-4	-5
-2	+10	+8	+6	+4	+2	0	-2	-4	-6	-8	-10
-3	+15	+12	+9	+6	+3	0	-3	-6	-9	-12	-15
-4	+20	+16	+12	+8	+4	0	-4	-8	-12	-16	-20
-5	+25	+20	+15	+10	+5	0	-5	-10	-15	-20	-25

Zu Beginn sind nur die Zahlen am linken und oberen Rand eingetragen; das innere Feld ist leer. Der Deutlichkeit halber werden die positiven Zahlen schwarz, die negativen rot geschrieben. In der Überzeugung, daß die Null ihre bekannte Rolle bei der Multiplikation behält, tragen wir zunächst das "Nullerkreuz" ein. Dann füllen wir das rechte obere Feld mit schwarzen Zahlen. Dabei brauchen wir nur das kleine Einmaleins anzuwenden.

Wir folgen einem Schülervotum und nehmen uns als nächstes das linke obere Feld vor. Die Ergebnisse scheinen klar zu sein: $5 \cdot (-3) = -15$. Eine von allen akzeptierte Begründung lautet: Wenn man fünfmal drei Minuspunkte bekommt, so hat man 15 Minuspunkte. Hierbei scheint das Plättchenmodell nachzuwirken. Für das rechte untere Feld wird wie selbstverständlich das Kommutativgesetz beansprucht. Ein naives Verständnis für das Permanenzprinzip deutet sich darin an.

Die Regelmäßigkeiten der Tabelle, unterstützt durch die Farbengebung, sind nun so prägnant, daß für das linke untere Feld kein Zweifel mehr besteht. Wir füllen es einfach nach den angelegten formalen Gesetzmäßigkeiten aus und gestehen uns ein, daß uns keine inhaltlichen Vorstellungen zur Begründung einfallen.

Die Rechenregeln sind einfach zu formulieren. Die Klasse scheint nun überzeugt zu sein, daß für die Division analoge Regeln gelten müssen. Deshalb erarbeiten wir die Division sozusagen im Handstreich. Die mühsame Prozedur um die Addition/Subtraktion hat offenbar das Verständnis für die formale Seite der Arithmetik gestärkt.

f) Rechenübungen zur Festigung (2 Stunden)

In dem vereinbarten Zeitrahmen verbleiben nur noch zwei Stunden, um den Kalkül zu festigen. Eine interessante Episode soll aus dieser Phase noch festgehalten werden.

Eine Aufgabe aus dem Lehrbuch sieht vor, daß der Termwert von $(x-1)^2$ für die ganzen Zahlen von -5 bis +5 berechnet wird. Einige Schüler/innen bezweifeln die Richtigkeit der Ergebnisse, weil sie keine "regelmäßige" Reihe (sprich: keine arithmetische Progression) bilden. Die im Kontext von d) formulierte Charakterisierung der Permanenzreihen hat sich als erfreulich einprägsam erwiesen, jedoch zugleich eine nicht beabsichtigte (wenngleich verständliche) Bedeutungseinengung erfahren.

2.3 Schluß

Der vorgesehene zeitliche Rahmen ist damit ausgeschöpft. Es bestätigt sich erneut die Erfahrung vieler Lehrer/innen, daß die von den Lehrplänen veranschlagte Zeit nicht ausreicht, um die negativen Zahlen erschöpfend zu behandeln. Gern hätte ich noch einige Passungen thematisiert, um zu zeigen, in welchem Sinne unsere Zahlenwelt die beste aller möglichen ist. Insbesondere hätte ich gern die Bewährung der negativen Zahlen in der Geometrie besprochen. Doch das muß ein Langzeitprogramm bleiben.

Literatur:

Alembert, Jean (d'): Artikel Négatif der *Enzyklopädie*

Andelfinger, B. (1985): Didaktischer Informationsdienst Mathematik. Thema: Arithmetik, Algebra und Funktionen. Soest: Landesinstitut für Schule und Weiterbildung

Bauersfeld, H. (1983): Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In: Bauersfeld, H. u.a.: *Lernen und Lehren von Mathematik. Analysen zum Unterrichtshandeln* II. Köln: Aulis (IDM-Band 6).

Coquin-Viennot, D. (1985): Complexité mathématique et ordre d'acquistition: une hiérarchie de conceptions à propos des relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 6, n° 2-3, 133-192.

Freudenthal, H. (1983): *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht.

Freudenthal, H. (1989): Einführung der negativen Zahlen nach dem geometrisch-algebraischen Permanenzprinzip. *mathmatiklehren* 35, 26-37.

Glaeser, G. (1981): Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol 2, No 3, 303-346.

Hankel, H. (1867): *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen.* Leipzig.

Hefendehl-Hebeker, L. (1988): "... das muß man doch auch noch anders erklären können!" Protokoll über einen didaktischen Lernprozeß. *MU* 34, H.2, 4-18.

Hefendehl-Hebeker, L. (1989a): Die negativen Zahlen zwischen anschaulicher Deutung und gedanklicher Konstruktion. Geistige Hindernisse in ihrer Geschichte. mathematiklehren 35, 6-12.

Hefendehl-Hebeker, L. (1989b): Erfahrungen mit den negativen Zahlen im Gymnasium. mathematiklehren 35, 48-58.

Kirsch, A. (1973): Die Einführung der negativen Zahlen mittels additiver Operatoren. *MU* 19 (1973), H.1, 5-39.

Kirsch, A. (1987): *Mathematik wirklich verstehen. Eine Einführung in ihre Grundbegriffe und Denkweisen. Köln*: 1987.

Malle, G. (1988): Die Entstehung neuer Denkgegenstände - untersucht am Beispiel der negativen Zahlen. In: Dörfler, W. und Fischer, R. (Hrsg.): *Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung*. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Bd. 16, Wien 1988, 259-319.

Malle, G. (1989): Die Entstehung negativer Zahlen als eigene Denkgegenstände. *mathematiklehren* 35, 14-17.

Padberg, F. (1986): *Didaktik der Arithmetik*. Zürich.

Schubring, G. (1986): Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs. *"petit x"*, No 12, 5-32.

Tropfke, J. (1980): Geschichte der Elementarmathematik 4th Ed., Vol. 1: *Arithmetik und Algebra*. Berlin-New York.

Wagenschein, M./Schuberth, E./Buck, P. (1988) : Minus mal minus. *Forum Pädagogik* 2/1988, 56-61.

Winter, H. (1989): Da ist weniger mehr - die verdrehte Welt der negativen Zahlen. *mathematiklehren* 35, 22-25.