LE PREMIER PAS DANS L'ESPACE

PRISE DE CONSCIENCE DE LA DIVERSITE DES SOUS-FIGURES PLANES,
ROLE D'UNE MAQUETTE DANS LA COORDINATION PLAN - ESPACE

M.P. ROMMEVAUX

It's an accepted fact that 3D-object model facilitates resolution of space geometry problems. In order to verify this a problem about cube sections was proposed to 15/16 year old pupils. The 3D-object model made with transparent film was chosen to allow drawing, various points of view and so, to facilitate putting in conspicuous position the plane sub-figures required to solve the problem. It appears that, in spite of the model qualities, hexagonal cube-sections were not "seen", vertical sections and horizontal sections not coordinated. Pupils can't conceive, or accept, the different cube-section shapes and don't use the 3D-object model mobility ; the 3D-object is seen as a 2D-figure.

Introduction

Depuis 1985 les programmes en vigueur dans les collèges (élèves de 11 à 15 ans) ont redonné à la géométrie dans l'espace une place très importante. Ce domaine, abordé dans les programmes précédents essentiellement en cinquième (élèves de 12/13 ans), est maintenant étudié durant les quatre années de collège. Sont étudiés les principaux corps solides, du parallélépipède rectangle aux pyramides et cônes de révolution, avec pour objectif : "*d'apprendre à voir dans l'espace , de calculer des longueurs et des volumes, ce qui implique un large usage des représentations en perspective et de la fabrication de patrons*" (B.O.E.N. n°12-1989). Les tâches ainsi fixées sont de diverse nature et demandent à être définies de façon plus précise et tout particulièrement "*apprendre à voir dans l'espace* " .

Comment peut s'effectuer un tel apprentissage?

La plupart des recherches entreprises sur ce sujet sont centrées sur les représentations graphiques de configurations spatiales et privilégient les représentations en perspective parallèle. Qu'elles aient pour objectif, l'exploration des outils mis en œuvre par les élèves en géométrie dans l'espace (F.BONAFE (1985)), l'apprentissage des règles de la perspective cavalière (G.AUDIBERT, F.BONAFE (1987)), ou celui du repérage dans l'espace(I.OSTA (1988)), ces

© Annales de Didactique et de Sciences Cognitives
4 (1991) (p. 85 - 123) - IREM de Strasbourg

expérimentations partent de la constatation que l'une des raisons primordiales de la difficulté de l'accès aux situations spatiales est qu'il *"se fait essentiellement à travers les représentations graphiques"* (I.OSTA), et elles utilisent simultanément de telles représentations et des objets tridimensionnels matériels: des maquettes. Ceux-ci sont utilisés en général pour être observés, décrits, représentés, ou, interviennent comme outils de contrôles: contrôle perceptif ou matériel d'une construction élaborée à partir d'un dessin ou d'une description.

Dans ces études, la fonction spécifique de la maquette n'est guère prise en compte. A.CHEVALIER(1989) souligne cependant son rôle dans la résolution du problème SEC (la maquette n'est dans cette expérimentation qu'un objet accessoire dont la réalisation était volontairement "approximative") : un nombre non négligeable d'élèves l'utilisent pour *"observer, justifier,vérifier"* mais aussi *"résoudre"*. Peut-on préciser pourquoi et comment une maquette remplit cette fonction heuristique ? Pour cela, il nous faut tout d'abord bien distinguer les registres représentatifs qui interagissent dans un problème de géométrie dans l'espace, les traitements qu'ils induisent et pointer l'éventuelle non congruence de ces derniers.[1]

La géométrie dans l'espace centrée sur les objets solides limités (les seuls intervenant au début de l'apprentissage) peut utiliser simultanément trois registres figuratifs:
1 – un objet tridimensionnel,
2 – une représentation en perspective donc complète et de dimension 2,
3 – des représentations de sous-figures planes (dimension 2) extraites de l'objet (partielles) et pertinentes pour la résolution du problème proposé.

Les variables à prendre en compte pour la maquette sont nombreuses: elle peut être pleine, creuse ou squelettique, opaque ou transparente, son matériau de construction, le soin apporté à sa fabrication peuvent autoriser ou non certaines actions matérielles: le découpage, le dessin, les mesures (longueurs, poids, contenances), ou appréhensions perceptives, visuelles ou tactiles, on peut encore comme D.DION, R.PALLASCIO et V.PAPILLON (1987) jouer sur sa taille et sa mobilité.
Les choix faits par l'expérimentateur vont agir sur la congruence entre les actions possibles sur la maquette et les traitements mathématiques visés: une maquette opaque, par exemple, ne peut suggérer la "coplanéité" de quatre points.

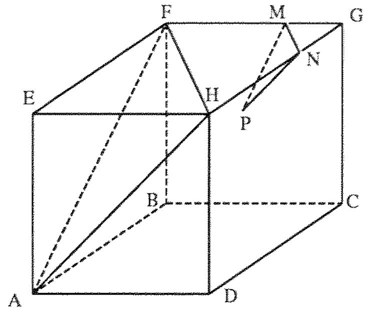
---

[1] *Nous nous appuyons ici sur le "cours-séminaire" 1989/1990 de R.DUVAL (IREM de STRASBOURG) , les articles de F.BRESSON(1987) et J.BERTIN(1973) qui y ont été étudiés.*

En revanche, une maquette transparente autorisant le dessin peut de plus confirmer ou infirmer une telle conjecture. En outre, son éventuelle mobilité peut faciliter la sélection de sous-figures planes pertinentes pour la démonstration.

Une maquette "bien choisie", tout comme peut l'être une figure de géométrie plane, se doit, de permettre cette sélection, les élèves débutants ne pouvant s'appuyer que sur leurs connaissances de géométrie plane, elle doit faciliter les modifications nécessaires (ou utiles) à l'appréhension opératoire de la situation.(R. DUVAL (1988)). La coordination des résultats obtenus ne peut qu'être facilitée par la présence de l'objet tridimensionnel, celle-là se faisant souvent autour d'éléments physiques de celui-ci.

Les interactions entre maquette (objet tridimensionnel) et représentations en perspective (complètes et de dimension 2) sont de toute autre nature.
La mobilité de la maquette autorise divers points de vue, toute représentation en perspective privilégie au contraire une seule direction. Et, dans le cas de la perspective cavalière celle-ci n'est *"liée à aucun point de vue possible (observateur rejeté à l'infini)"*, comme I.OSTA le remarque.
Toutes les caractéristiques de la configuration spatiale étudiée sont virtuellement présentes sur la maquette et peuvent être mises en évidence par des actions pratiques, sur une représentation en perspective, certaines sont absentes ou déformées. Comment alors les utiliser pour résoudre un problème ? Une solution proposée est l'apprentissage du code *"de lecture et d'écriture"* de telles représentations. Ces dernières qui relèvent de la géométrie plane sont souvent traitées comme des figures planes (cf A.CHEVALIER (1989): triangle-dessin), la connaissance de quelques règles de la perspective cavalière, mal maîtrisées, amènent les élèves à des solutions du type suivant :



Dessin de la section du cube ABCDEFGH par un plan parallèle à AFH passant par le point M de l'arête [FG]

figure 1

Nous constatons alors avec I.OSTA que : *"bien qu'il soit nécessaire, ce code ne peut être suffisant pour surmonter les difficultés de coordination de points de vue ou de construction de rapport entre espace graphique et espace physique."*
J.HUBBARD (1990)[1] , nous livre sa solution de mathématicien: *"Nous ne "voyons" des objets sur de telles projections, que quand nous les connaissons déjà: un dessin dans le plan avec sa perspective, ses différents plans, n'est assimilé par l'observateur que s'il a intégré préalablement cette structure dans son cerveau. Pour l'analyser, il doit le voir bouger, ou le regarder avec des lunettes stéréoscopiques."*
Les remarques de I.OSTA et de J.HUBBARD montrent que l'interaction entre la maquette (objet tridimensionnel) et une représentation en perspective présuppose une coordination de points de vue ou une intégration mutuelle qui justement font défaut à l'élève débutant en géométrie dans l'espace.

Pour faciliter cette coordination une autre interaction est à prendre en compte: celle entre la maquette (objet tridimensionnel) et les représentations de sous-figures planes (représentations partielles de dimension 2) pertinentes pour la résolution du problème proposé.
Dans cette interaction, la fonction de la maquette ne serait-elle pas d'aider à discerner les différentes sous-figures planes utiles et à coordonner les résultats obtenus en géométrie plane ? Dans ce cas, la maquette ne doit-elle pas être choisie de façon à faciliter la mise en évidence et la sélection de ces différentes sous-figures planes ?

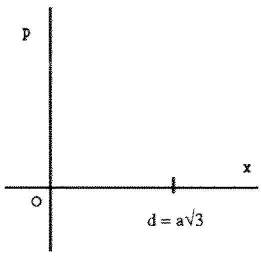
C'est pour examiner ces hypothèses que nous avons entrepris l'expérimentation que nous présentons ici.
Nous avons choisi un problème sur un objet de l'espace et non sur l'une de ses représentations planes, cet objet étant limité et assez familier aux élèves: le cube. Dans ce choix, nous avons cherché à respecter les contraintes suivantes:
- le problème sur cet objet tridimensionnel devait se traiter avec des outils supposés bien connus de géométrie plane,
- les propriétés spécifiques de la géométrie dans l'espace devaient être suggérées perceptivement par la représentation choisie,

[1] *John HUBBARD professeur de mathématiques à l'Université Cornell, professeur invité à l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Entretien réalisé par E.NOEL, retranscrit dans Pour la Science,n°153, juillet 1990, pp.6-8.*

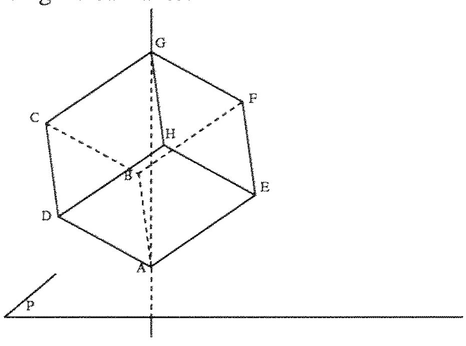
– la solution devait se lire en partie sur l'objet, mais, recéler aussi une certaine incertitude pouvant être levée par une utilisation rationnelle de sous-figures planes,
– notre expérimentation ne portant que sur la phase heuristique les productions demandées ne devaient que traduire la solution trouvée: aucune démonstration n'était exigée.

Nous avons en fonction de ces différentes contraintes retenu l'énoncé suivant:

ABCDEFGH est un cube d'arête a . La diagonale (AG) est verticale, P est un plan perpendiculaire à (AG). On demande de compléter le graphique suivant, donnant l'évolution du périmètre p de la section du cube par P en fonction de la hauteur x repérée à partir de A (x=0) sur l'axe (AG).[1]



Remarquons que le choix des directions verticale et horizontale est motivé par le souci d'utiliser les connaissances acquises très tôt sur l'orthogonalité de la verticale et des plans horizontaux et le parallélisme de ces derniers. Nous allons voir comment le texte et la représentation ont été construits pour satisfaire aux contraintes imposées. Pour faciliter la communication nous utiliserons la figure suivante:



Perspective parallèle sur un plan parallèle à AEGC.
(fuyantes: angle $\frac{\pi}{6}$)

figure 2

1 Une solution rapide est donnée en annexe

La résolution de ce problème comporte quatre phases:

1 - appréhension de la diversité des sections horizontales du cube suspendu,

2 - sélection des sous-figures planes utiles à la résolution du problème: certaines sont des sections horizontales (triangles CHF, DBE par exemple), d'autres des sections verticales, des faces ou parties de faces,

3 - traitement mathématique sur ces sous-figures planes,

4 - retour au problème spatial: coordination des résultats obtenus en géométrie plane .

La représentation choisie pour accompagner le texte doit prendre en compte les directions privilégiées choisies et faciliter la découverte de la solution basée sur la mise en évidence des sous-figures planes utiles, c'est-à-dire permettre aux élèves d'accéder aux quatre phases ci-dessus.

Parmi les représentations planes complètes du cube, celles susceptibles de traduire l'orthogonalité de (AG) et de P sont les suivantes :

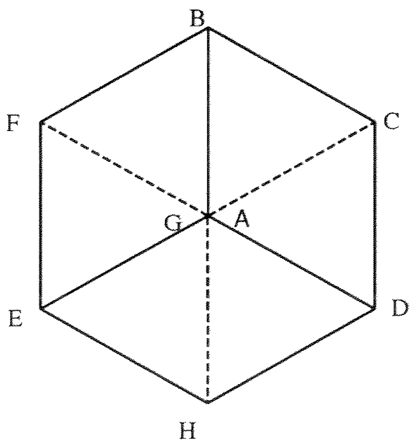


figure 3
(perspective isométrique)

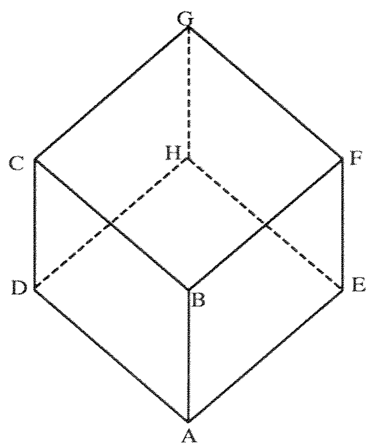


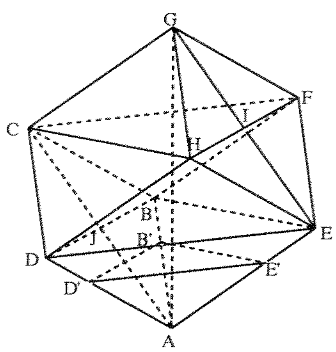
figure 4
(perspective parallèle sur un plan parallèle à ADHE, fuyantes "verticales")

Sur la figure 3, la forme des sections est conservée, mais la diagonale est invisible. Sur la figure 4 [1] , la diagonale est directement accessible, l'orthogonalité apparaît, mais les sections sont réduites à des segments; cette figure recèle un grand nombre d'ambiguïtés! Ces deux figures, pour être lues avec profit, demandent qu'une partie de la solution soit connue. La figure 2 serait pour un lecteur averti des représentations en perspective parallèle la plus suggestive, mais, aucune de ces figures ne paraît suffisamment lisible pour des débutants, seule une maquette, autorisant les différents points de vue qu'elles illustrent peut aider des néophytes à voir, et à sélectionner les sous-figures planes .

La maquette d'un cube suspendue au bout d'une ficelle par l'un de ses sommets met en évidence les directions orthogonales et permet, au contraire, de percevoir immédiatement la diversité des sections, quelle que soit la matière choisie pour la réaliser.

La seconde phase envisagée est la sélection des sous-figures planes utiles. Quelles sont-elles ? Quelle matière peut-on choisir pour faciliter leur mise en évidence et les contrôles indispensables ?

La solution repose sur les triangles CHF et DBE, sections horizontales, et sur le rectangle AEGC, section verticale. Pour pouvoir " voir" l'orthogonalité de (CHF) ou (DBE) et de (AG) il faut que la maquette soit transparente. Une armature de cube suspendue est suffisante pour percevoir cette orthogonalité et peut aussi suggérer le partage de la diagonale, mais le traitement mathématique du problème demande la "matérialisation" de AEGC et tout particulièrement des points I et J. Ceux-ci ne peuvent apparaître que si il est possible de dessiner les diagonales des faces du cube. Le matériau doit être transparent et permettre le dessin .



Les autres sous-figures planes: sections particulières, "triangles-faces" tels D'AE', peuvent alors être dessinées. La transparence permet le contrôle du parallélisme des plans P.

figure 5

[1] *Cette représentation a été faite à partir du dessin réalisé par le binôme C/D (cf p 100)*

Une maquette reproduisant en vraie grandeur, avec le maximum de soins, l'objet étudié autorise la *mesure,* et donc la *découverte* ou le *contrôle* des résultats numériques.

Notre choix s'est porté sur un cube de 5 cm d'arête (les mesures peuvent alors être reportées directement sur une feuille de papier millimétré), réalisé en acétate transparent pour rétroprojecteur, une ficelle collée à l'un de ses sommets. Les stylos-feutres adaptés au support étant fournis aux élèves.

La communication par écrit du texte du problème nous aurait obligée à nommer les sommets et à accompagner celui-ci d'une représentation en perspective, ce que nous voulions éviter. Nous avons donc décidé de présenter le texte oralement, maquette en mains et de le répéter à la demande.

Dans le but d'arrêter les modalités de l'expérience, nous avons procédé à une préexpérimentation avec trois binômes volontaires. Sur la proposition de l'un d'eux la maquette a été modifiée: la ficelle a été tendue de A à G, la diagonale est ainsi matérialisée et la maquette plus facile à manipuler.

L'activité a finalement été proposée sous la forme suivante: après distribution du matériel (maquette, stylos-feutres, graphique préparé, feuilles de brouillon) le texte ci-dessous a été présenté:

" Un cube de 5 cm d'arête dont voici une maquette en vraie grandeur est suspendu par sa diagonale matérialisée par la ficelle. La diagonale est alors verticale. Le cube est coupé par des plans horizontaux perpendiculaires à la diagonale, on obtient des sections qui sont des polygones. On demande de dessiner le graphique donnant le périmètre de la section en fonction de la hauteur à laquelle on coupe, celle-ci étant mesurée sur la diagonale à partir du point le plus bas. Sur la feuille de papier millimétré fournie deux points sont marqués :(0,0) correspondant au point le plus bas et ($5\sqrt{3}$,0) correspondant au point le plus haut."

Le calcul de la diagonale du cube, application classique du théorème de Pythagore en troisième a été rappelé. Remarquons que ce calcul fait intervenir le rectangle AEGC.

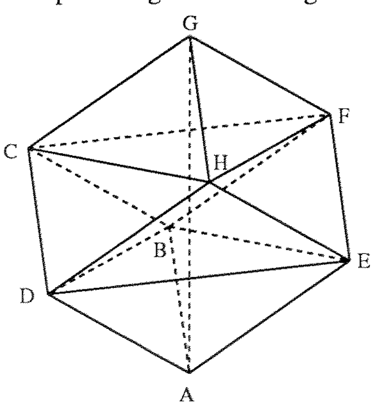
Analyse de la tâche.

Notre analyse est centrée sur les différentes phases que nous avons signalées dans le paragraphe précédent (cf p 90), leur succession, et l'intervention des sous-figures planes révélée par les dessins sur la maquette ou sur les brouillons.

Dans les productions recueillies deux types de démarches apparaissent qui se différencient par les points d'ancrage sur la maquette et par la succession des phases entraînant des traitements mathématiques différents.

1 - DEMARCHE GLOBALISANTE

Cette démarche qui permet à la fois d'appréhender la diversité des sections et le partage en trois parties égales de la diagonale repose sur la mise en évidence des "triangles-limites".



Nous utiliserons le vocabulaire suivant:
CHF et DBE seront appelés triangles-limites,
ADBE et GCHF: tétraèdres coins du cube,
CHFDBE: antiprisme central.

figure 6

Les triangles-limites dessinés sur la maquette réorganisent le cube en trois volumes distincts. Apparaissent alors:

— <u>la diversité des sections</u>: triangulaires sur les tétraèdres coins du cube, non triangulaires sur l'antiprisme central,

— <u>le partage en trois parties égales</u> de la diagonale du cube.

La démonstration de l'orthogonalité des plans de ces sections et de la diagonale (sur laquelle nous ne nous attarderons pas car elle est inaccessible à ces élèves débutants) ainsi que la justification du partage de la diagonale demandent **un déplacement de l'attention, des plans horizontaux vers des plans verticaux, et tout particulièrement vers le plan AEGC, plan de symétrie du cube.** L'énoncé ne se réfère pas à ce plan de symétrie, mais son rôle était discrètement souligné lors du calcul de AG.

Le tracé des diagonales des faces du cube issues de A et G associé à la présence des triangles-limites déjà dessinés permet d'isoler cette sous-figure plane et les points I et J sur lesquels repose la productivité heuristique de la figure.

Le résultat conjecturé peut alors être prouvé en utilisant sur cette sous-figure les théorèmes des milieux ou de Thalès, et de Pythagore, ou encore être vérifié par des mesures sur une figure réalisée en vraie grandeur.

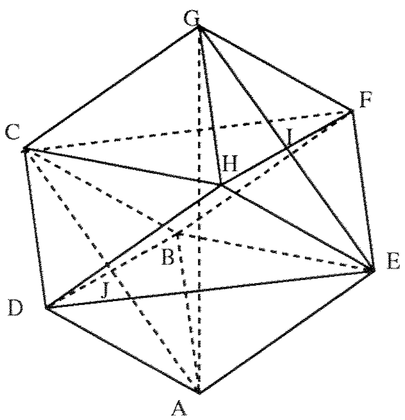


figure 7

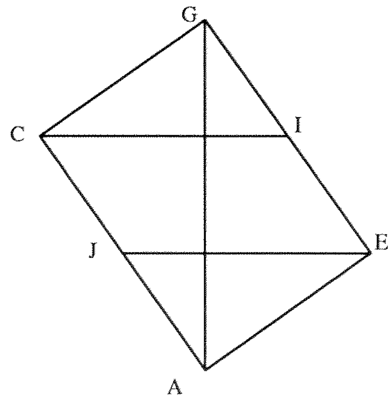


figure 8

Il s'agit maintenant, pour dresser le graphique, de coordonner hauteur et périmètre de la section.

Sont associés aux points d'abscisses d/3, et 2d/3, les périmètres des triangles-limites facilement accessibles sur les faces du cube. Le tracé de l'hexagone régulier correspondant au centre du cube, le calcul ou la mesure de son périmètre, suggèrent l'invariance des périmètres des sections de l'antiprisme, le tracé d'autres sections hexagonales permet de la vérifier. Une preuve simple est obtenue par le développement de cette surface centrale.[1]

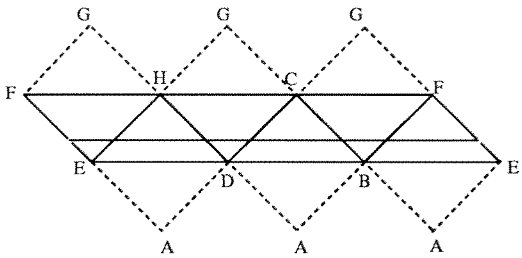


figure 9

Le tracé de la partie du graphique correspondant à x de l'intervalle [0,d/3],peut être extrapolé à partir de quelques hauteurs particulières: d/6, d/12, ou établi en associant, comme le montre la figure ci-contre, un triangle-face au rectangle AEGC.

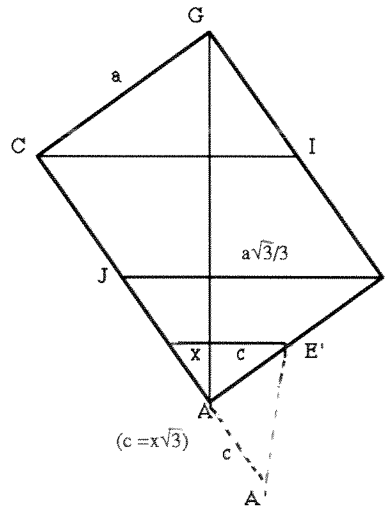


figure 10

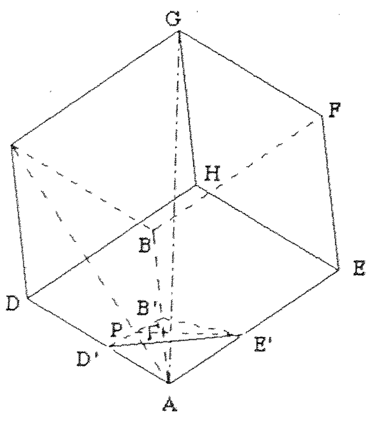
Cette coordination est le seul point délicat, le calcul ne met en œuvre, comme précédemment, que les théorèmes de Thalès et Pythagore.

Cette démarche ancrée sur les sommets du cube et son centre de symétrie prend en compte **la globalité** des éléments de la figure et la **diversité** des sections.

[1] *Un seul binôme observé pendant la préexpérimentation a utilisé cette possibilité.*

Cette démarche que nous n'avions d'ailleurs pas envisagée a priori s'ancre, elle, sur les arêtes ou diagonales des faces issues de A, et privilégie des sous-figures planes différentes amenant alors à des traitements mathématiques également différents. Nous allons en détailler certains aspects.

Les élèves ayant utilisé cette procédure ont été plus sensibles à l'invariance du cube par les rotations d'angle $\pi/3$ ou $2\pi/3$ autour de la diagonale (AG) qu'à l'existence de son centre de symétrie. Une première section triangulaire est dessinée en reportant trois longueurs égales à partir de A, sur les trois arêtes, ou sur les trois diagonales des faces. La diversité des sections peut être découverte par les tracés de sections parallèles à la première section et conduire à une perception globale de la situation, la démarche se poursuivant comme précédemment. Mais la plupart du temps cette première section réorganise le cube en deux volumes: un tétraèdre coin du cube d'arête inférieure à a: AD'B'E' , et le "reste du cube".



La sélection des sous-figures planes se fait alors dans le tétraèdre AD'B'E': les triangles D'B'E' et AE'P sont étudiés. Le point Γ permet la coordination des calculs (ou des mesures) faits dans D'B'E' et dans ΓE'A ou ΓAP (évaluation de PΓ ou ΓE' et du périmètre, puis de ΓA), ce calcul met en œuvre les propriétés du triangle équilatéral et le théorème de Pythagore.

figure 11

A l'aide de cette procédure répétée pour plusieurs sections du tétraèdre ABDE la partie du graphique correspondant à x de l'intervalle [0,d/3] et, éventuellement de [2d/3,d], peut être dessinée.Mais, au-delà de DBE apparaissent les hexagones et, avec eux, la diversité des sections.

Cet événement doit amener à une réorganisation de la figure, et de la démarche qui ne peut se poursuivre que si la globalité des éléments est perçue. D'analytique[1], l'appréhension doit devenir globale, cette remise en cause est très difficile à négocier pour des élèves peu avancés en mathématique, et ayant beaucoup investi dans la recherche précédente. Lorsque ce passage peut être franchi, la résolution s'achève comme dans la première démarche.

Méthodologie

L'activité a été proposée à 37 binômes de deux classes de seconde indifférenciée (15/16 ans) mais manifestant, par leur choix d'options, des goûts plus littéraires que scientifiques.

A chaque binôme ont été distribués: une maquette, les feutres adaptés, une chemise dans laquelle se trouvaient le graphique préparé et des feuilles de brouillon à utiliser pour tout travail écrit.

La préexpérimentation nous ayant montré que les deux heures prévues étaient insuffisantes, l'expérimentation s'est déroulée pendant trois séances de travaux dirigés[2]. Nous avons pu ainsi observer quatre groupes de 9 à 10 binômes.

Le matériel complet a été ramassé après chaque séance et rapidement analysé. Nous avons pu suivre ainsi de façon assez précise la succession des tracés sur la maquette et sur les graphiques. Cela nous a permis d'observer l'apparition éventuelle de représentations planes (sections, vues, représentations en perspective).

Lorsque chaque binôme a été en possession de son matériel, nous avons, après la présentation du problème, donné les consignes suivantes:

"Le but de l'activité est de dessiner le graphique. Les unités ont été choisies de façon qu'il entre entièrement dans la feuille de papier millimétré que vous avez dans la chemise. Sur la maquette vous pouvez dessiner, mesurer, mais vous ne devez pas la découper. Ce n'est qu'une maquette, elle n'est pas "tout à fait juste", vous pouvez aussi calculer, et démontrer...Nous vous demandons simplement de noter tous vos calculs et dessins sur les feuilles de brouillon et si possible d'expliquer comment vous procédez.

[1]*Nous utilisons dans cette analyse les éléments théoriques mis en place par R.DUVAL (1988).*
[2]*Séances hebdomadaires d'une heure pendant lesquelles les élèves sont en demi-classe.*

A la fin de chaque séance, maquettes et feuilles seront ramassées pour être examinées et nous vous demanderons peut-être de préciser ou de justifier certains résultats.
Vous avez trois séances de travaux dirigés pour faire ce travail, c'est à dire dessiner le graphique et le justifier."

Les productions recueillies à la fin de la première séance ont montré que 5 binômes sur 37 n'avaient apparemment pas abordé le problème (quoiqu'ils se soient montrés actifs) : nous n'avions aucun tracé sur la maquette, aucun point sur le graphique, aucun calcul ni dessin sur les feuilles. D'autres productions révélaient une incompréhension du mot section malgré la précision donnée dans le texte sur leur nature polygonale. Nous avons décidé d'être encore plus précise et de donner "un petit coup de pouce" aux binômes en difficulté, en montrant au moment du rappel du texte le montage représenté ci-dessous:

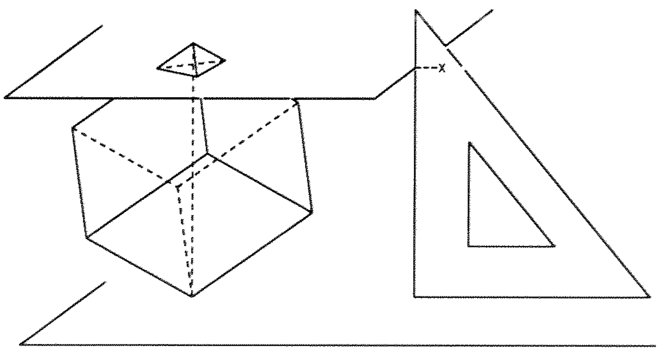


figure 12

Une fiche de bristol matérialise le plan d'abscisse 0, une fiche percée, un plan horizontal à une hauteur x montrée sur l'équerre. Ce "plan" a été dégagé et nous avons montré le triangle section. Ce dispositif a permis à certains binômes de comprendre le problème et a donné à certains autres "des idées" pour mesurer la hauteur.

Remarque: Après les trois séances prévues pour l'expérimentation, nous avons pendant deux autres séances de travaux dirigés donné une correction de l'activité: correction active durant laquelle nous avons essayé de montrer aux élèves comment certaines de leurs démarches pouvaient être poursuivies et conduire au résultat.

Analyse des productions

L'analyse des productions a été fondée sur deux points:

— **la première section dessinée sur la maquette** qui nous paraît déterminer l'appréhension de la situation:

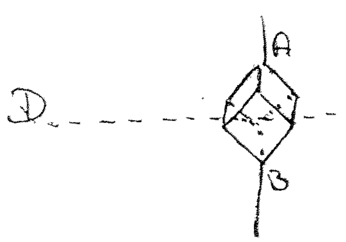
• *appréhension globale* lorsque cette sous-figure est l'hexagone régulier, un ou deux triangles-limites,

• *appréhension analytique* lorsque cette sous-figure est un triangle particulier tracé à partir d'une longueur choisie sur une arête ou une diagonale issues de A.

— **la présence ou l'absence, de chacune des quatre phases,**(celles que nous avons indiquées p 90) révélées par l'évolution des dessins sur la maquette, des figures dessinées sur les feuilles de brouillon dont nous analyserons la nature (sous-figures planes sélectionnées sur l'objet, représentations planes en perspective du cube), et la fonction (en vraie grandeur pour des mesures, schémas pour guider le raisonnement ...)

Nous étudierons les productions de deux binômes qui nous paraissent représentatives des deux types de démarche envisagés, nous les avons choisies pour leur exemplarité mais aussi, pour l'exhaustivité de leur rédaction assez rare dans les productions recueillies.Nous essaierons de regrouper autour de chacune d'elles les productions relevant du même type et d'en analyser les différences en tentant de comprendre l'origine des obstacles que l'absence de certaines phases peut révéler.

Analyse des productions du binôme C/D [1]: une démarche d'appréhension globale.

Nous allons commencer par tracer les périmètres des figures. On peut mesurer le périmètre: — en calculant — en mesurant (règle etc...) — ensuite on peut avoir un graphique	*Les sections sont dessinées directement sur la maquette.*
1° On trace la "moitié" du cube telle que la médiatrice de [AB] sur le dessin  ou alors que le plan D dans l'espace coupe [AB] en son milieu et lui soit donc perpendiculaire.	*Point d'ancrage: centre du cube. Nous remarquons le transfert des propriétés d'orthogonalité du plan à l'espace, et la représentation schématique choisie: le plan est représenté par la droite D, plan et droite portent le même nom.*
Pourquoi ??Comment ?? Description de la manière dont on a tracé ce polygone. C'est un hexagone. On a partagé les arêtes auxquelles A et B n'appartiennent pas en 2. On a relié ces points obtenus et on a eu une surface plane (hexagone régulier).	*La section correspondant au centre du cube est dessinée, les élèves utilisent les mesures et vérifent par transparence pour affirmer:* "On a une surface plane."

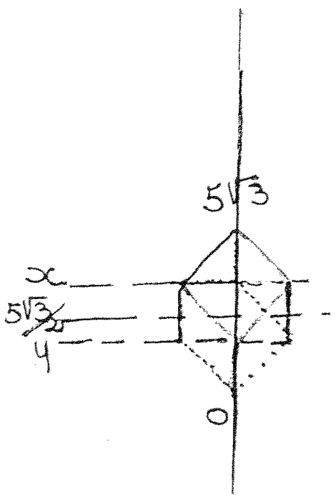
[1] *Avant les propos reproduits, le binôme prévoit la forme du graphique:* "Je pense que le graphique aura une forme parabolique car on "part" d'une ordonnée nulle et on "arrive" à une ordonnée nulle. Comme entre 0 et $5\sqrt{3}$ il y a un solide, ce ne sera pas une droite (...)"

Pourquoi s'y est-on pris ainsi ?
Je ne peux pas démontrer, mais, en observant le cube, cette solution m'a paru évidente (intuition ? tâtonnement ?). Je pense qu'il faudrait le démontrer. Après, on va tracer des lignes parallèles aux segments obtenus (côtés de l'hexagone).[1]

La maquette, le point d'ancrage choisi, suscitent le premier tracé qui prend en compte la globalité de l'objet.

Les sections obtenues sont:
— des triangles équilatéraux
— des hexagones réguliers.
On va donc mesurer *(les périmètres)* sur le cube. Cette mesure est plus ou moins précise. On essayera ensuite de trouver une solution plus précise par le calcul.

*La diversité des sections est découverte. Les périmètres sont mesurés pour "avoir une idée" de la solution. Remarquons que pour ce binôme tous les hexagones sont réguliers: seul, **l'**hexagone régulier est en effet dessiné sur l'objet. Les élèves ne conçoivent pas de sections non-régulières.*



– entre 0 et y, la figure est un triangle équilatéral
– entre x et y, la figure est un hexagone régulier
– entre x et $5\sqrt{3}$ la figure est un triangle équilatéral.
$\frac{5\sqrt{3}}{2}$ qui détermine le plan qui coupe le cube en deux parties identiques est entre x et y.

La prise de conscience de la diversité des sections amène à l'étude du partage de la diagonale. Le point d'ancrage est toujours le centre du cube.

Comment déterminer la position de x et y ?
x et y sont au niveau des premiers sommets rencontrés à partir de 0 et $5\sqrt{3}$.

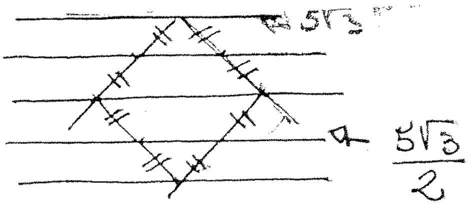
Les triangles-limites ont été dessinés sur la maquette, l'attention se porte vers les sommets.

---

[1]*Ce binôme est le seul ayant pris la peine de signaler cette construction. Pour tous les autres, les plans horizontaux étant parallèles, il semble "aller de soi" que les traces des sections le soient aussi.*

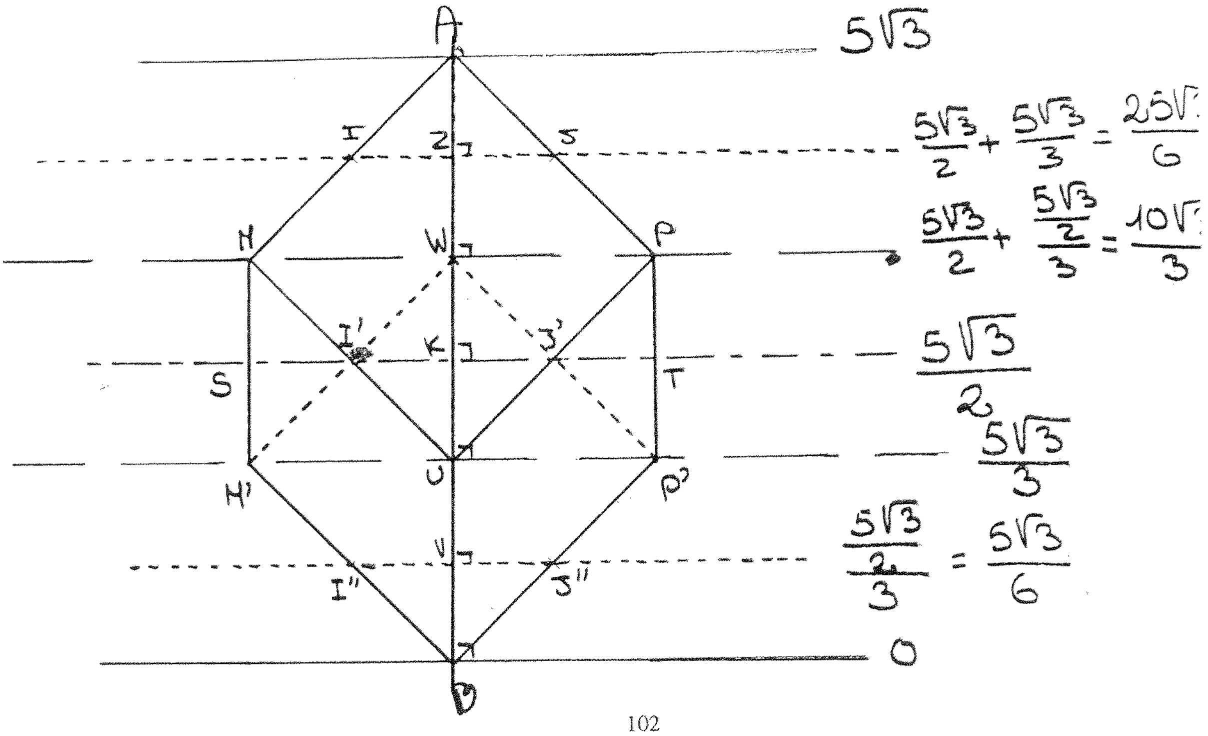
<u>Ces plans déterminés par ces sommets sont-ils horizontaux ?</u>

Dessin d'une face du cube coupée par 5 plans horizontaux:



Nous soulignons cette phrase qui va conditionner la suite de cette production. Les élèves vont essayer de mettre en place les éléments permettant de démontrer ce résultat **lu** *sur la maquette.*

Un triangle équilatéral passant par les milieux des trois arêtes issues de A est dessiné sur la maquette. Sur celle-ci nous trouvons les sections tracées sur un "demi-cube" seulement. Comme nous le verrons par la suite, la symétrie du cube est l'un des moteurs du travail de ce binôme, mais, est-elle vraiment perçue en tant que telle? Le plan dont (ST) (cf dessin suivant) est la projection n'est-il pas vu comme un plan de symétrie du cube ?



Diagonale [MP]: $5\sqrt{2} \approx 7{,}1$ (d'après la diagonale d'un carré de côté a: $a\sqrt{2}$)
Si on applique le théorème de Thalès au triangle AMP et que I milieu de [AM] et J de [AP] alors (IJ) // (MP) <u>(donc les plans seront parallèles)</u> et $IJ = \frac{1}{2} MP$.
Si $MP \approx 7{,}1$ alors $IJ \approx 3{,}55$.
Pour calculer le périmètre du triangle de côté 7,1cm situé au niveau $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ de AB on multiplie la distance du côté MP de ce triangle équilatéral par 3.
$p = 7{,}1 \times 3 = 21{,}3$cm
On a calculé IJ, côté d'un des triangles résultant de la coupe du cube et ceci au niveau $\frac{25\sqrt{3}}{6}$ de AB.

On voit sur le schéma que (ST) est l'axe de symétrie de la figure.
AA = 0 = BB
IJ = I'J' = I''J''
MP = M'P'
(……)

Le partage de la diagonale dont le dessin ci-dessus rend compte n'est pas expliqué. Nous avons demandé aux élèves comment elles l'avaient découvert. Réponse: "En regardant la maquette." *Le dessin est venu ensuite. Nous pouvons en décrire les phases de construction que nous avons observées: tracé de la diagonale, partage en trois, construction des faces carrées à partir de ce partage en tenant compte des alignements notés en regardant la maquette.* "Regarde, ça marche!" *a été la conclusion. Le dessin géométrique réussi, a prouvé le résultat acquis par l'observation. Tout le traitement mathématique va se faire sur celui-ci, il ne concernera pas le partage de [AG] déjà "prouvé".*
Les élèves utilisent la symétrie de leur dessin et les égalités ci-contre pour calculer les périmètres de l'hexagone régulier et des triangles dessinés sur la maquette.

(ST) est l'axe de symétrie et
(ST) médiatrice de [AB] en K
.... de [ZV] en K
.... de [WU] en K
La droite (AB) est perpendiculaire aux plans :
P_1 délimité par I, J, Z situé au niveau $\frac{25\sqrt{3}}{6}$ sur [AB]
P_2 délimité par M,W, P situé au niveau $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ sur [AB]
(......) *(suivent P_3, P_4, P_5, plans des sections étudiées)*

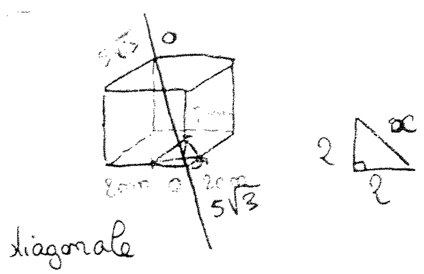
Après ces calculs destinés à la confection du graphique (le ***seul*** *exact que nous ayons recueilli), les élèves reviennent au problème spatial dont nous suivons la progression en reprenant les phases soulignées: le plan orthogonal à (AB) passant par O est pris manifestement pour un plan de symétrie du cube, un regard sur une section verticale aurait infirmé cette proposition, mais aucune section verticale n'a été vue par ce binôme.*

Les quatre phases envisagées sont présentes, mais la justification du partage de la diagonale ne se fait pas comme nous l'attendions dans le rectangle AEGC: la construction de la représentation plane en perspective du cube, basée sur les particularités observées sur l'objet tridimensionnel en tient lieu. Le problème spatial se transforme en un problème plan: les élèves tiennent compte des propriétés de la maquette perçues avant ce passage: longueur réelle de la diagonale, forme des sections, mais ce passage étant fait elles ne parviennent plus à se détacher de leur dessin pour revenir à la maquette : leur "démonstration" de l'orthogonalité nous paraît significative à ce sujet. *Le passage "réussi" de l'espace au plan n'assure malheureusement pas une semblable réussite du plan à l'espace.*

Comme nous l'avons déjà remarqué cette représentation recèle le maximum d'ambiguïtés, nous allons en voir les effets pernicieux pour les binômes suivants.

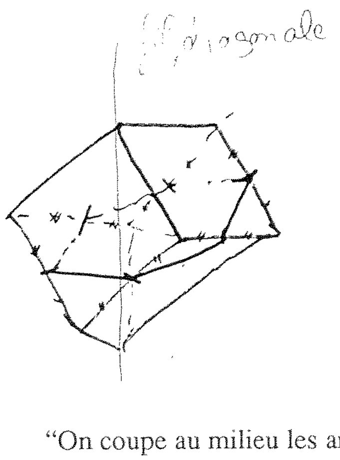
Dans la démarche d'appréhension globale, la diversité des sections est liée immédiatement au partage de la diagonale du cube. Ceci est bien saisi par les cinq binômes[1] ayant comme C/D dessiné tout d'abord l'hexagone régulier. N/W souligne cette particularité, analysons une partie de ses productions:

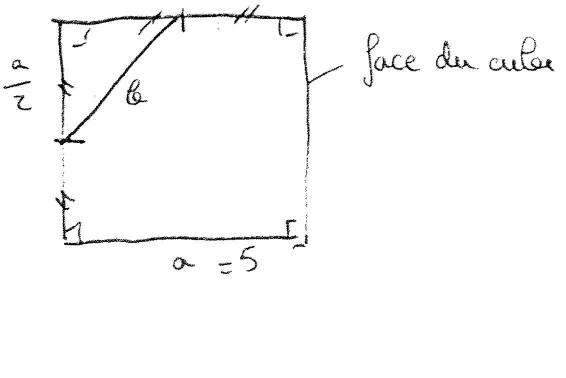
[1] *Un tableau récapitulatif des résultats est donné en annexe*



Après le calcul du périmètre (petit triangle dessiné: triangle-face), nous lisons: "Il faut trouver la hauteur de la diagonale correspondante, l'endroit où la diagonale est sectionnée. (approximativement 7,55 en mesurant).

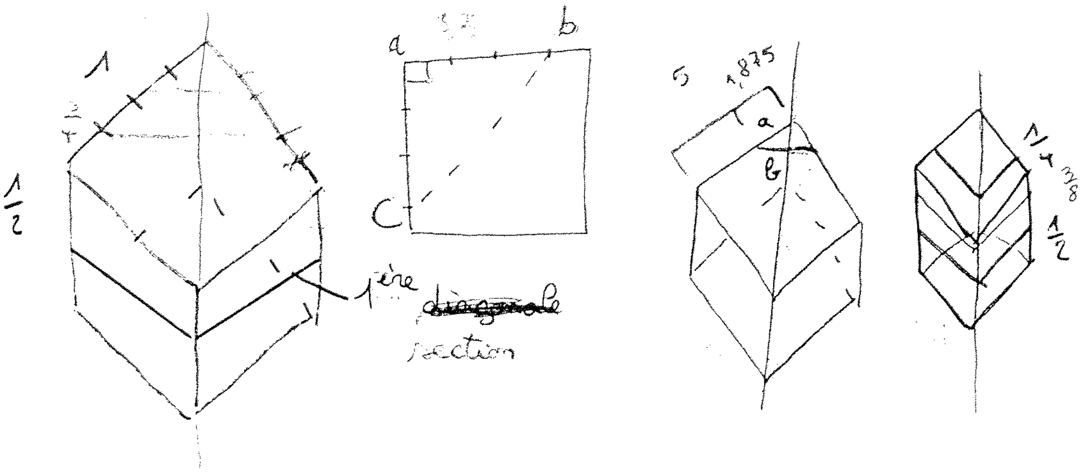
On change de technique:





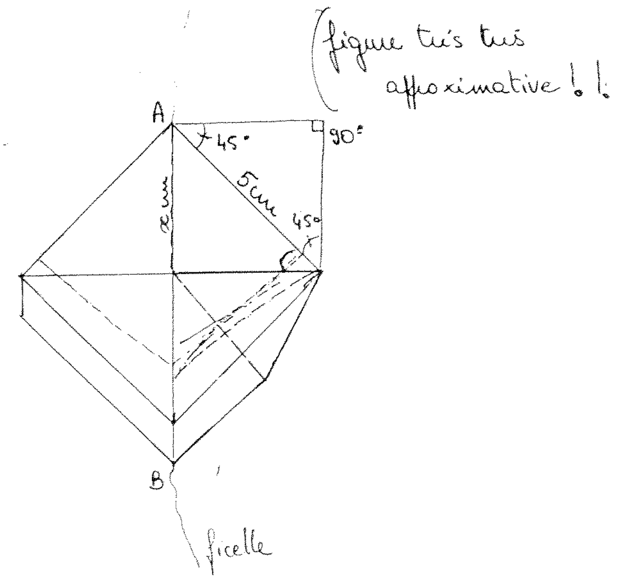
"On coupe au milieu les arêtes qui ne touchent pas la diagonale et on les relie. C'est ce qui semble être la section de la diagonale au milieu. Ainsi on va pouvoir calculer à la fois le périmètre et avoir la hauteur de la diagonale. Le périmètre est un hexagone régulier convexe. On va calculer un de ses côtés et ensuite multiplier par 6 pour avoir le périmètre total."

Comment avoir <u>à la fois</u> périmètre et hauteur ? Les dessins suivants donnent la solution:



Nous remarquons dans le premier dessin l'alignement des sommets sur lequel le binôme s'appuie sans en avoir pris réellement conscience. Ayant placé l'hexagone *"au milieu"* de la diagonale il procède ensuite par *"moitié des moitiés"*: la moitié de la moitié de la diagonale correspond au $\frac{3}{4}$ de l'arête, cette constatation est faite sur le schéma plan et non sur une sous-figure verticale, la section est dessinée sur le cube, son périmètre calculé et le point marqué sur le graphique. Même procédure pour $\frac{3}{4}$ puis $\frac{3}{8}$ de la diagonale . Le binôme dessine ainsi quatre sections sur la maquette: l'hexagone régulier, un hexagone non régulier, et deux triangles. Les triangles-limites n'ont pas été dessinés et, même si le travail n'avait pas été interrompu par la fin des trois séances, ils avaient peu de chance d'être ainsi construits, le raisonnement se fait sur le schéma du cube "aplati", sur lequel les sommets ne se détachent pas.(La forme des sections est remarquable !)

Les binômes C/D et N/W tenaient compte de la "vraie" mesure de la diagonale, il n'en est plus de même pour E/S qui évalue la hauteur sur le dessin suivant (réduit) :



La figure est certes "approximative" mais, elle est en vraie grandeur et la partie "utile" est soigneusement dessinée à la règle. Elle est de toutes façons suffisante pour que soit consommé l'aplatissement du cube sur le plan. Ce binôme ayant rapidement compris le problème et dessiné un graphique correct dans sa forme générale, nous avons insisté pour que le partage soit repris. Les élèves voulaient en fait calculer x dans une section verticale du cube comme elles nous l'ont montré en "mimant" avec leurs mains cette opération, mais elles n'ont pas réussi à la représenter ni à l'imaginer sur la maquette.

La coordination: diversité des sections – partage de la diagonale est également perçue par les trois autres binômes dessinant tout de suite l'hexagone régulier et un (ou deux)triangle-limite. Mais aucun n'a essayé de justifier ou de vérifier le partage d/4, 3d/4 donné. Aucune diagonale n'est dessinée sur la maquette, aucun dessin n'est fait sur les brouillons. En l'absence de besoin, il n'y avait aucune raison pour que les sections verticales utiles apparaissent.
Les calculs faits sont basés sur ce partage et la proportionnalité, en général les "moitiés des moitiés", et s'appliquent aux sections triangulaires. L'invariance des périmètres des hexagones n'est pas perçue, est ignorée (constatée par C/T après des mesures sur la maquette, elle est accompagnée d'un grand point d'interrogation et le point "fautif" ne figure pas sur le graphique), ou

bloque définitivement le travail (L/S n'arrive pas à rendre cohérent son graphique car le périmètre d'un hexagone non-régulier dessiné sur la maquette est calculé en multipliant par 6 l'**un** des côtés mesuré).

Les sections non-triangulaires ou hexagonales non-régulières perturbent trop les représentations que les élèves ont du cube, nous allons voir que peu d'entre eux réussissent à les intégrer dans leur travail.

Deux binômes ont dessiné les deux triangles-limites, l'un d'eux a aussitôt associé à ces tracés le partage correct de la diagonale du cube, l'autre n'a pas su en tirer parti. Tous deux se sont repliés sur les tétraèdres coin du cube et ils ne manifestent pas leur perception de la diversité des sections.

L'analyse des productions des binômes ayant dessiné un seul triangle-limite met en lumière les différences entre les deux types de démarche:

— à ce tracé est associé un partage de la diagonale du cube et le traitement mathématique s'appuie sur la proportionnalité, non pas comme nous le pensions dans le rectangle AEGC, mais sur un dessin, réel ou non, du cube "aplati" sur un plan vertical, parallèle à une face du cube, aucune section verticale n'apparaît,

— ou ce tracé attire les élèves vers le tétraèdre coin du cube et ils essaient dans celui-ci d'évaluer la hauteur: la mobilité de la maquette joue dans la coordination section horizontale-section verticale.

Six binômes ont ainsi commencé leur travail. Deux d'entre eux n'ont pas réussi à évaluer les hauteurs correspondantes : D/M qui après ce premier tracé dessine des sections sur tout le cube en se repérant sur les arêtes et a donc mis en évidence les diverses sections, et E/R qui a compris très tardivement le problème.

Deux autres associent à ce tracé la hauteur d/2, la diversité des sections n'est pas immédiatement perçue. Ca/Du n'arrive pas à évaluer les hauteurs correspondant à deux triangles dessinés. Le cas de L/L mérite que nous nous y attardions un peu. Après le seul tracé du triangle-limite les élèves affirment que les sections sont des triangles équilatéraux et calculent leurs périmètres en faisant appel à la proportionnalité et en ignorant la maquette. Le graphique est dessiné à la fin de la première séance. Nous leur demandons, à la séance suivante, de vérifier leurs résultats en dessinant les sections correspondant à leurs calculs. Un nouveau calcul leur permet de repérer les sections en s'appuyant sur les arêtes et elles dessinent sur la maquette les sections que nous reproduisons ci-dessous (figure 13), avec leurs conclusions:

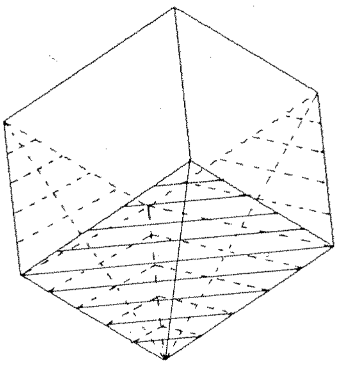


figure 13

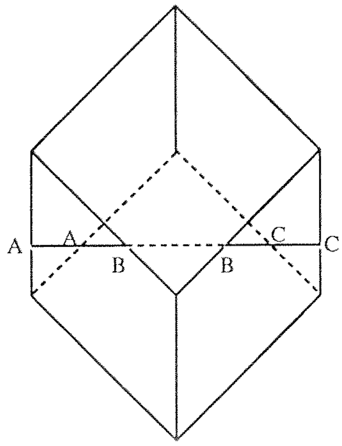


figure 14

"On peut vérifier les données du graphique grâce au dessin en mesurant les traits que nous avons tracés *(mesure des périmètres sur la maquette)* (...). On obtient une différence allant jusqu'à 2 à 3cm, peut-être due à l'imprécision des calculs ou des tracés, car il est difficile de faire des mesures précises avec le cube et le crayon."

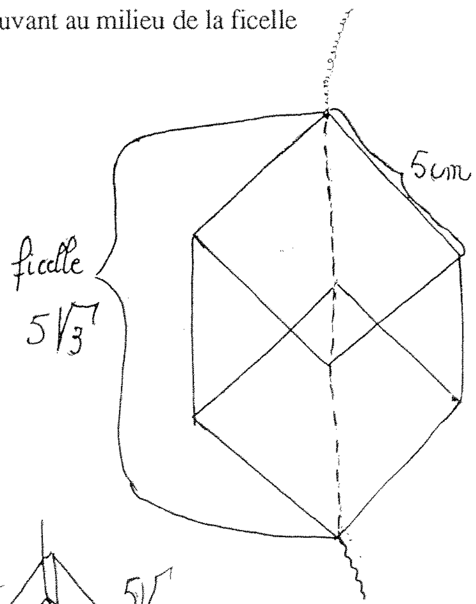
Comment les mesures ont-elles été faites pour les "triangles éclatés" ?
Une vision du cube comme celle que nous avons représentée ci-dessus peut-elle expliquer "l'insistance "de ce binôme à ne pas voir la troisième dimension ?
Force nous est de constater que dans ce cas, la mobilité de la maquette est inopérante.

Même association triangle-limite – hauteur d/2 pour trois autres binômes: Ca/Du qui ne peut aller plus loin, B/N dont nous allons analyser en détail les productions et F/S qui ne l'applique pas directement au cube donné, mais d'abord pour quatre petits cubes d'arête 1cm, 2cm, etc...et, a "oublié" l'hexagone qu'il avait dessiné sur la suggestion de E/S.

L'approche des deux binômes B/N et L/O est très différente, nous avons choisi d'analyser les productions de B/N car, comme N/W, il change de démarche en cours de recherche.

Analyse des productions du binôme B/N: une démarche centrée sur les sections planes.

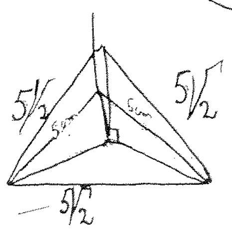
On veut calculer le périmètre de la figure se trouvant au milieu de la ficelle



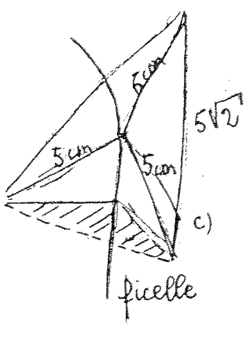
L'appréhension est ici globale: au triangle-limite est associée immédiatement la hauteur d/2.

Les dessins que nous reproduisons montrent comment en cherchant à représenter cette section, les élèves ont basculé d'une vision à l'autre.

Le premier dessin est du même type que ceux de C/D.



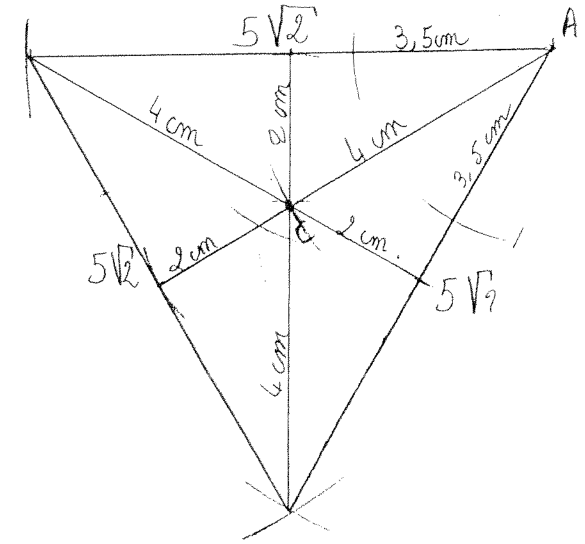
La légende de celui-ci est: "vue en coupe d'une partie du cube qui forme une pyramide et dont les côtés mesurent tous $5\sqrt{2}$ ".



Pour le dernier:"la vue de la pyramide (schématiquement) avec une pyramide de moins".

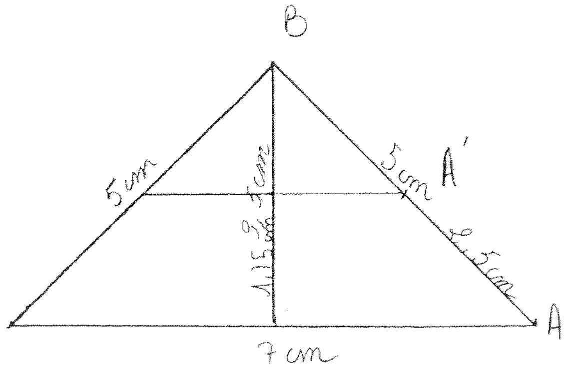
Nous voyons apparaître ici des sections verticales.

Croquis effectué avec les mêmes mesures que le cube et je mesure:
légende: • ficelle *(point C)*
Vue du dessus



Dessin de la section plane représentant le triangle-limite, en vraie grandeur pour mesurer.
Remarquons la représentation de la ficelle au centre de gravité du triangle équilatéral .
A ce plan horizontal va être coordonné un plan vertical, celui du rectangle AEGC.

Vue de côté



Le triangle "vue de côté" est un triangle-face et non le triangle vertical attendu. Le point C n'est pas représenté car il est caché par la hauteur du triangle. (Sur la maquette cette hauteur est dessinée) .
Le calcul qui suit ne se fait pas sur cette figure, mais dans le triangle "ABC" *vertical.*

Je calcule la hauteur à laquelle je coupe la ficelle.

B est le sommet le plus bas du cube, C et A sont définis sur le dessin de la section.

Grâce à Pythagore:

$AB^2 = BC^2 + CA^2$

$5^2 = BC^2 + 4^2$

$25 = BC^2 + 16$

$25 - 16 = BC^2$

$\sqrt{9} = BC$

$BC = 3$

Maintenant, nous allons calculer le P2 en prenant la moitié de la moitié du cube et on mesure:

La section correspondante est dessinée sur la maquette.

3,5 + 3,5 + 3,5 = 10,5cm

le périmètre nº 2 = 10,5cm

$A'B^2 = BC'^2 + C'A'^2$

$2{,}5^2 = BC'^2 + 2^2$

$6{,}25 = BC'^2 + 4$

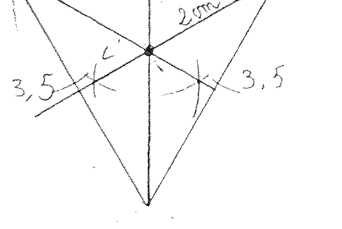
$6{,}25 - 4 = BC'^2$

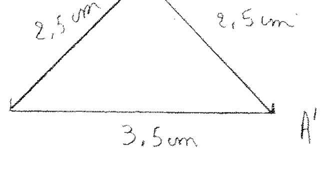
$\sqrt{2{,}25} = BC'$

$BC' = 1{,}5$

Croquis pour le point 2

- ficelle *(point C')*





Maintenant, nous allons calculer le P3, en prenant la moitié de la moitié de la moitié, le 1/6

1,75 + 1,75 + 1,75 = 5,25cm

Pour essayer d'avoir un maximum de points, nous décidons de ne plus redessiner les dessins que nous avons utilisés pour les points 1 et 2, tout en sachant que nous divisons à chaque fois les mesures précédentes par 2.

$A"B^2 = BC"^2 + C"A"^2$

$1{,}25^2 = BC"^2 + 1^2$

$1{,}56 - 1 = BC"^2$

$0{,}56 = BC"^2$

$\sqrt{0{,}56} = BC"$

$0{,}75 = BC"$

Maintenant, nous allons calculer le P4: 1/8 du cube.

(Suit le même calcul, complet.)

(......)

BC''' = 0,375

On a un problème pour calculer la deuxième partie du cube, sachant, qu'en coupant à la moitié du cube, on ne coupe pas à la moitié de la ficelle.

Le résultat: $(1/2)^3 = 1/6$, n'empêche pas le binôme de placer correctement le point sur le graphique, puisqu'il ne s'agit que du milieu d'un segment déjà présent.

La section correspondante est dessinée sur la maquette, les périmètres sont mesurés.

Les élèves utilisent bien la division par deux pour les mesures, mais, ils ne pensent pas à faire de même pour les résultats.

Toujours la même confusion entre puissance et produit!

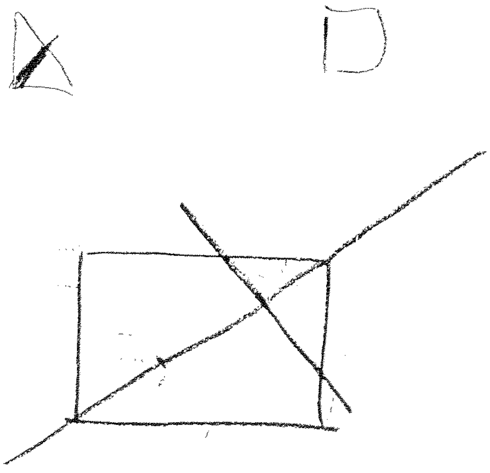
Les élèves, arrivés presque à zéro, vont porter leur attention vers la première section étudiée.

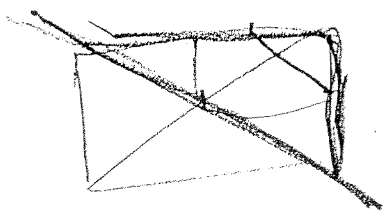
Les points précédemment calculés sont placés sur le graphique, la droite tracée dépasse un peu le point $(d/3, 3a\sqrt{2})$, elle a été en partie effacée, le point correspondant à la moitié serait, sur cette droite, hors de la feuille!

L/O fait les mêmes calculs, dessine aussi les sections planes en vraie grandeur pour mesurer, mais ne représente pas les "vues de côté"qui sont effectivement inutiles. Le triangle vertical est "visible" sur la maquette, deux de ses côtés y sont matérialisés: par la ficelle et par la diagonale dessinée d'une face du cube. Après trois calculs le binôme avoue: *"On arrive pas à tracer des points au-delà du triangle ABC* (triangle-limite)". Même procédure pour B/K, mais appliquée à un triangle-section "quelconque", construit en mesurant, à partir du sommet le plus bas du cube, 3cm sur chacune des diagonales des faces issues de ce sommet. Le binôme note que ces trois points forment *"un plan perpendiculaire à la ficelle"*, et nous explique que les faces du cube *"étant superposables"* les trois côtés de la section auront même longueur. Nous voyons ici que les "symétries de rotation" du cube motivent ces tracés ancrés sur les faces issues de A, leurs arêtes, et leur diagonale. Comme dans les productions de L/O le triangle vertical utile n'est pas dessiné. Le binôme B/K ne va pas au-delà, ce calcul l'a occupé pendant les trois séances.

Aucun de ces binômes n'a découvert les hexagones : aucun tracé ne figure sur l'antiprisme. Ces élèves (comme beaucoup d'autres) n'imaginent pas de sections non-triangulaires et la contradiction qui apparaît entre leurs résultats et leur prévision les arrête définitivement Le dessin du rectangle AEGC dont ils n'étudient qu'une partie aurait-il pu les aider ? Les trois binômes qui l'associent à la première section triangulaire ne peuvent nous suggérer de réponse, aucun d'entre eux ne réussit à coordonner les observations faites sur la maquette et le dessin plan. Ils ne découvrent pas les différentes sections et ne dessinent aucun point sur le graphique. Examinons leurs dessins:

Binôme F/K

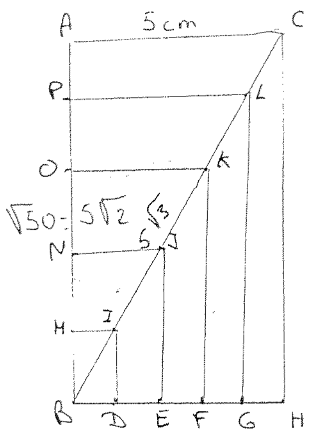




$5\sqrt{3} - \frac{1}{3}\, 5\sqrt{3}$

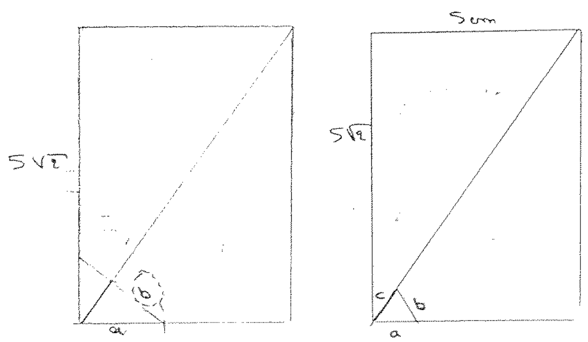
Le binôme, malgré la découverte du partage correct, semble bloqué par le désir d'avoir des traces parallèles à l'autre diagonale du rectangle. Les dessins sur la maquette sont peu cohérents: triangles, polygones inachevés (mais pas de triangles éclatés), les élèves accrochées par leur calcul ont peu exploré la maquette.

Binôme L/N



Si, à ce dessin nous associons une maquette, les cinq triangles construits doivent "remplir" le cube!
Sur la maquette figurent ces cinq triangles, l'anomalie constatée explique-t-elle le blocage ?

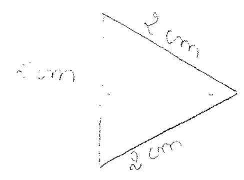
Les productions de B/P sont plus faciles à interpréter:



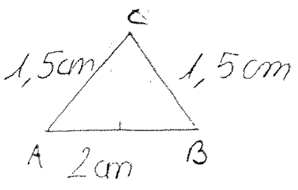
La longueur b, mesurée sur la maquette et qui, hauteur du triangle-face aurait dû trouver sa place sur le côté "5√2" est obstinément placée à l'intérieur du cube.

La maquette est bien utilisée pour mettre en évidence certaines sous-figures planes, tout particulièrement sections triangulaires horizontales et rectangle vertical, mais les binômes ne parviennent pas à coordonner les représentations planes de ces sous-figures et les dessins sur la maquette.

Les dix-huit autres binômes utilisent le même type de démarche ancrée sur les faces du cube, si bien ancrée que, quatre d'entre eux, confondent triangle-section et triangle-face. Si B/W marque quelque hésitation:



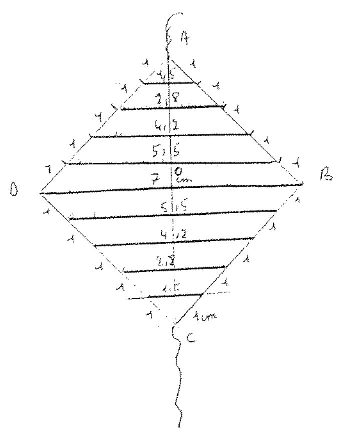
"Si on coupait vraiment le cube on obtiendrait cette ouverture."



"Par contre, si on regarde une face du cube le triangle est comme ceci."

Cette dernière solution plus facile à coordonner à une hauteur, celle du triangle dessiné, a finalement triomphé.

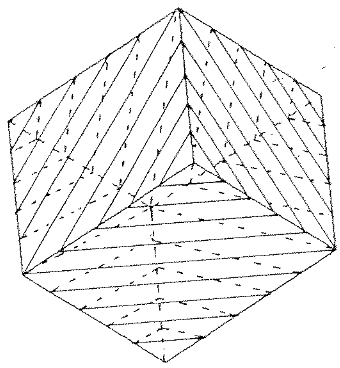
S, lui, a entièrement traité le problème sur la figure suivante (cette figure a été dessinée par d'autres élèves, mais coordonnée aux tracés sur la maquette)



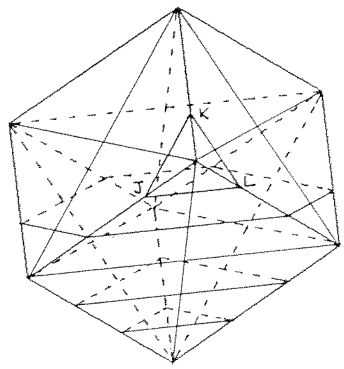
Le cube est assimilé à l'une de ses faces. S est le seul binôme n'ayant rien dessiné sur la maquette et ceci malgré nos demandes fréquentes de vérifications.

Cet ancrage sur les faces peut aussi amener les élèves à une exploration systématique des sections horizontales, les dessins s'appuient alors sur un partage régulier des arêtes ou des diagonales. P/S fait apparaître ainsi dix triangles et cinq hexagones, mettant en évidence la diversité attendue.

Mais deux autres binômes tout en procédant de la même manière nous rendent de très "jolies" maquettes (figure 15)



Binômes A/S et D/F
figure 15



Binôme Bo/Ka
figure 16

Peut-on voir dans ces constructions un procédé algorithmique: on continue à joindre les points comme on a commencé ou, une inquiétude devant des formes non prévues, celle exprimée très clairement par Bo/Ka ?
"J'ai barré ce qui a été écrit précédemment car je pensais qu'en effectuant le dessin nous obtiendrions un triangle, mais ce n'est pas un triangle. On ne connaît pas la figure donnée. Son périmètre est inconnu" Après notre intervention:"Etes-vous sûres de n'avoir jamais rencontré de tels polygones ?", le mot "inconnu "a été rayé, et nous lisons: *"C'est un polygone, plus précisément un hexagone."* Mais, *"On s'aperçoit qu'il est possible de reconstruire un triangle à 1cm de cette figure* (cf figure 16). *Ce triangle JKL a un côté qui mesure 2 cm"* (...)*"Conclusion générale: on constate qu'en prenant le cube dans n'importe quelle position, on peut toujours construire de nombreux triangles, uniquement sur la longueur de la diagonale. Le périmètre de chaque triangle successif est proportionnel à la longueur du fil coupé tous les centimètres."* L'hexagone intrus est éliminé de la conclusion, même si il figure sur le graphique avec une mention spéciale. L'examen du graphique nous éclaire également sur la "diagonale" qui n'est pas celle du cube mais celle d'une face. Avant de revenir à cette évaluation de la hauteur, remarquons que deux autres binômes A/M et F/K dessinent des sections sur la partie centrale du cube, mais ce sont des "triangles éclatés", dont la présence, contrairement à L/L, les a arrêtés définitivement :

nous constatons encore ici la difficulté qu'ont les élèves à concevoir les sections non-triangulaires.

Après cette exploration, les élèves portent leur attention vers la diagonale verticale du cube et non vers un plan vertical comme l'exigeait une justification. Quatre binômes se sont inspirés du dispositif que nous avions montré à la deuxième séance et ont mesuré la hauteur avec une règle et une équerre. Les autres ont trouvé un moyen "très pratique" d'évaluer l'écartement des plans: toutes les directions verticales du plan de visée sont "aplaties" sur la diagonale du cube, il y a donc égalité des mesures, égalité étayée par le " raisonnement" suivant que nous devons à S/T: *"On a tracé la médiatrice de la perpendiculaire à la ficelle* (hauteur d'un triangle-face) *et qui par conséquent est confondue avec la ficelle, car lorsqu'on regarde la médiatrice, on s'aperçoit qu'elle cache une partie de la ficelle."* Phrase qui devant notre demande réitérée de justification a été réécrite intégralement pour chaque section!...L'un des élèves a oralement appuyé son argumentation par la constatation: *"Même lorsqu'on tourne c'est pareil."*
La hauteur est alors celle du triangle-face pour les binômes ayant dessiné les diagonales des faces ou un côté de ce triangle mesuré sur l'arête pour ceux qui se sont repérés sur celle-ci. Malgré la présence de quatorze sections correctes, P/S arrête son graphique à 5cm; sur quelle arête en effet peut-on s'appuyer au-delà du triangle-limite ? Aucun de ces binômes ne perçoit de sections verticales.

Conclusion

La maquette a été utilisée par 36 binômes, seul S l'a à peine regardée! Outre sa mobilité, les possibilités de dessin qu'elle offrait et sa transparence ont permis aux élèves, d'explorer le problème et de trouver quelques éléments de solution.
Dix binômes ont découvert des hexagones, grâce aux dessins sur la maquette. Les réticences de Bo/Ka, la présence de polygones inachevés, les blocages de nombreux groupes, nous incitent à penser qu'en son absence cette découverte aurait été encore plus rare.
Les dessins faits sur l'objet tridimensionnel guident la démarche. La mise en correspondance des 32 graphiques produits[1] et des maquettes nous a permis de constater que pour 30 d'entre

[1]*Cinq binômes n'ont placé aucun point sur leur graphique: L/N, B/P, F/K, E/R, dans l'impossibilité d'évaluer une hauteur, D/G qui avait tous les éléments en mains, mais qui a manqué de temps . Un fait que nous n'avons pas eu l'occasion de souligner est le temps considérable qu'il a fallu à tous les élèves pour comprendre le problème et commencer à l'aborder.*

eux (soit **94%**), nous trouvions sur l'objet les traces matérielles des éléments entrant dans les calculs ou les mesures, quelle que soit leur pertinence. Les élèves ont besoin, comme G.AUDIBERT (1985) le constatait, de beaucoup de dessins pour résoudre les problèmes de géométrie dans l'espace. Les dessins sur la maquette ont remplacé pour 32% des binômes les représentations planes et sont venus pour les autres les compléter, leur présence paraît indispensable à la conduite d'un raisonnement. Certes, tous les dessins ne sont pas correctement exploités, mais, en leur absence les raisonnements ne peuvent se développer : les binômes n'ayant pas dessiné les diagonales des faces du cube ne peuvent sélectionner les sous-figures planes utiles pour résoudre le problème, ils donnent un partage a priori ou se repèrent sur une arête.
La transparence de l'objet sert à vérifier l'orthogonalité des sections dessinées et de la diagonale: les expressions *" plan ou droite perpendiculaires à la ficelle"* révèlent cette utilisation, les partages de la diagonale donnés a priori sont basés sur des coïncidences observées . Le partage d/3, 2d/3 est aussi visible sur toutes les représentations planes du cube en perspective parallèle mais, à condition que le rectangle AEGC et les points I et J soient dessinés et que l'orthogonalité soit "vue" ou imaginée.

Il apparaît que dans les conditions précises que nous avons données dans l'introduction, le rôle de la maquette dans la phase heuristique est très important, mais, il apparaît avec autant de clarté que **toutes les possibilités que donne l'objet tridimensionnel ne sont pas exploitées.**

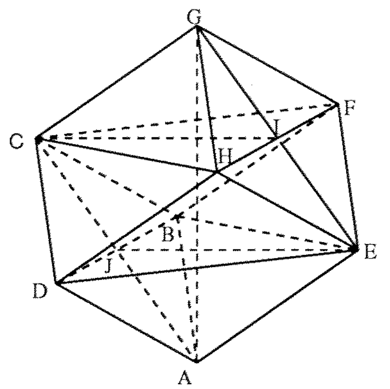
Certains binômes ne peuvent même pas concevoir les sous-figures planes sections horizontales de l'objet, la plupart d'entre eux n'imagine pas de sections non-triangulaires ou non-régulières. Les sections verticales ne sont détectées que par six binômes et, trois seulement arrivent à coordonner quelques résultats obtenus pour des sections horizontales et verticales.

On pense généralement qu'en présence de la maquette de telles difficultés ne peuvent surgir, celles-ci en réalité ne se situent pas au niveau de la "vision", mais en amont : **les élèves ne conçoivent pas la diversité des sous-figures planes extraites du cube** et ne peuvent mettre en évidence sur l'objet, ou représenter, des figures dont la présence n'est même pas soupçonnée. Ils s'en tiennent alors à la vision du cube aplati sur l'une de ses faces, ou neutralisent tous les points de vue possibles en réduisant tout plan vertical à la diagonale. Ils ne peuvent dans ces conditions utiliser la mobilité et les différents points de vue qu'autorise l'objet proposé.

Le premier pas pour accéder à la géométrie dans l'espace ne consisterait-il pas à faire découvrir cette diversité sur les objets étudiés ? Cet apprentissage ne serait-il pas utile pour fournir aux élèves un "système symbolique" adapté à de nombreuses tâches de résolution de problèmes et qui pourrait intervenir dans la manipulation symbolique qu'évoque J. CARON-PARGUE (1981) :*"Une manipulation matérielle, portant directement sur l'objet (...) occasionne un afflux d'informations, qui entraîne une destruction des représentations et augmente la mobilité; mais elle ne donne pas elle-même, les moyens d'une réorganisation. Une manipulation symbolique, portant sur un substitut de l'objet(...) opère un filtrage des informations et les organise selon la structure du système symbolique mis en jeu, mais cette sélection et cette organisation ne sont pas forcément pertinentes par rapport à la tâche.*
Les systèmes symboliques dont dispose le sujet jouent ainsi un rôle essentiel dans l'exécution des tâches cognitives ; mais l'issue de la tâche dépend de la possibilité de les articuler entre eux."
J.CARON–PARGUE s'intéresse, s'adressant à des enfants de 3 à 11 ans, aux codages des faces des solides. Après cette découverte et avant l'entrée dans la géométrie dans l'espace, il semble nécessaire de parfaire la connaissance de ces objets en faisant découvrir la diversité de toutes les sous-figures planes qui peuvent en être extraites.

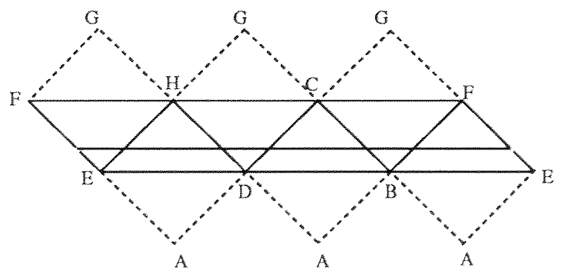
Dans une telle optique, les représentations planes en perspective ne devraient intervenir qu'en tout dernier lieu lorsque les élèves sont capables, pour un problème donné de sélectionner et de coordonner sur une maquette les sections utiles, c'est à dire, lorsque le point de vue pertinent pour la résolution du problème a été découvert. Il nous semble qu'après cette étape l'apprentissage des règles d'écriture et de lecture des représentations en perspective serait moins difficile.

Une solution rapide



Les traces de P sur le plan AEGC montrent que les sections sont de deux types:
— triangles équilatéraux pour x élément des intervalles]0,d/3] ou [2d/3,d[.
— hexagones pour x élément de l'intervalle]d/3,2d/3[.
Les sections sont symétriques par rapport au centre O du cube, le graphique admet donc un axe de symétrie x=d/2.
Pour x de l'intervalle]O,d/3], les triangles équilatéraux sont homothétiques dans une homothétie de centre A, l'évolution de leur périmètre est donc linéaire.

Pour x de l'intervalle]d/3,2d/3[le développement du cube montre que le périmètre est constant.



Nous obtenons le graphique ci-dessous.

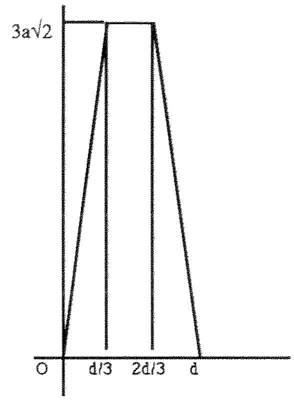


Tableau récapitulatif des productions

Evolution des sections/ 1ere figure	1 triangle	1 coin du cube	2 coins	Antiprisme central avec polygone inachevé	Antiprisme central avec hexagone régulier seul	Antiprisme central avec hexagone non régulier
Hexagone régulier					C/D(1/3,2/3) D/P(1/4,3/4) E/S(htf)	C/T(1/4,3/4) L/S(1/4,3/4) N/W
Les deux triangles-limites			D/G(1/3,2/3) P/T(ha)			
Un seul triangle-limite		B/N(hT) Ca/Du(tl1/2) E/R(blocage) L/O(hT)		L/L (tl1/2)		D/M(blocage)
Un triangle sans diagonale		C/Z(dessin) G/R(tf,htf)			F/S(tl1/2)	P/S(ha)
Un triangle avec diagonale	B/K(hT) B/P(blocage)	B/W(tf,htf) Bu/Pi(vol.) D/K(htf) F/W(hv) G/M(hv) J/N(hv) L/N(blocage) M/Y(?) S/T(htf)	B/D(blocage)	A/M(hv) F/K(blocage)		Bo/Ka(htf)
Non classés	A/S D/F Do/Pi S(tf,htf ;aucun dessin sur maquette) (sections non orthogonales à (AG))					

légendes

(1/3,2/3) ou (1/4,3/4) : partage de AG par triangles-limites
(ha) : hauteur mesurée sur arête
(hv) : hauteur visée avec règle ou équerre graduée
(hT) : hauteur "mesurée-calculée" dans un tétraèdre
(htf) : hauteur du triangle-face
(tf,htf) : section triangle-face et hauteur du triangle-face
(tl 1/2) : triangle-limite au milieu de la diagonale
(blocage) : hauteur non évaluée
Bu/Pi (vol.) : le seul binôme ayant persisté à considérer comme section le tétraèdre résultant de la coupe.

REFERENCES

AUDIBERT G., 1985 - *Représentation de l'espace et empirisme dans le problème FIL.* Edition IREM-USTL, place E.Bataillon Montpellier (79 pages).

AUDIBERT G.,BONAFE F.,1987 - Apprentissage de la perspective cavalière. Dans Rabardel P.,Weill-Fassina A. *Le dessin technique. Apprentissage, utilisation, évolution.* Paris-Londres-Lausanne, Hermés,pp 139 à 147.

BERTIN J., 1973 - Graphique (représentation). Dans *Encyclopædia Universalis,* vol. 7, pp 955 à 964.

BONAFE F., 1985 - *La genèse du problème SEC.* Edition IREM-USTL, place E.Bataillon Montpellier (39 pages).

BRESSON F., 1987 - Les fonctions de représentation et de communication. Dans *Psychologie,* Encyclopédie de la Pléïade, ed Gallimard Paris pp 933 à 982.

CARON-PARGUE J. , 1981 - Quelques aspects de la manipulation matérielle et manipulation symbolique. Dans *Recherches en Didactique des Mathématiques* (éditions La Pensée Sauvage), vol. 2 1, pp 5 à 36.

CARON-PARGUE J. , 1987 - Une approche de la genèse de la production graphique. Le dessin du parallélépipède. Dans Rabardel P.,Weill-Fassina A. *Le dessin technique. Apprentissage, utilisation, évolution..* Paris-Londres-Lausanne, Hermés,pp 35 à 42 .

CHEVALIER A., 1989 - *Analyse du problème SEC.Dessin en perspective cavalière et vision de l'espace.* Edition IREM-USTL, place E.Bataillon Montpellier (59 pages).

DION D., PALLASCIO R., PAPILLON V. , 1987 - Perception spatiale des polyèdres. Dans *Bulletin des régionales APMEP de Poitiers, Limoges, Orléans-Tours. (P.L.O.T)* n° 39, pp 23 à 30.

DUVAL R., 1988 - Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. Dans *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, U.L.P. Strasbourg, vol.1, pp 57 à 74.

OSTA I., 1988 - *L'ordinateur comme outil d'aide à l'enseignement. Une séquence didactique pour l'enseignement du repérage dans l'espace à l'aide de logiciels graphiques.* Thèse d'université.Université Joseph Fourier, Grenoble 1.