La comparaison des ensembles infinis : un cas de résistance à l'instruction

Guillerma Waldegg

The bijection of an infinite set in one of its parts is proved to be the most difficult didactic obstacle to get over for the comprehension of infinite sets. In order to analyse the nature of this obstacle a research was done with students of 15 to 18 years of age, in scientific sections in Mexico. The questionnaire was preceded by an informative part in which the definitions were given, taking into consideration the conceptions of the students come out from previous questionnaires. This paper presents the results of this research.

L'infini, pris dans ses nombreuses significations, a occupé une place déterminante dans le développement conceptuel des mathématiques. Quand l'infini, sous une de ses facettes, se rend explicite, une série de questions théoriques et métathéoriques surgissent, obligeant à chercher des bases plus solides pour fonder les connaissances.

C'est autour de l'infini que nous trouvons les discussions et les points de rupture les plus violents entre les différentes conceptions mathématico-philosophiques. Même aujourd'hui, le point de vue constructiviste de Brower, engendre une mathématique essentiellement différente de la mathématique standard infinitiste.

L'infini a été présent aux moments du démarrage des théories mathématiques qui, à long terme, se sont révélées comme les plus capables de modeler le monde physique (notamment, le calcul, la théorie des séries, la théorie des ensembles, la géométrie fractale). De plus, l'infini se retrouve à la base des crises de fondements des mathématiques (la dénommée crise des incommensurables des Grecs et "l'arithmétisation" de l'analyse du 19ème siècle).

Annales de Didactique et de Sciences Cognitives
5 (1993) (p.19-36) - IREM de Strasbourg

COMPARAISON DES ENSEMBLES INFINIS

Tout au long de l'histoire, les savants et les penseurs ont consacré une partie considérable de leurs travaux à pénétrer les mystères de l'infini. Beaucoup d'auteurs ont écrit sur ce thème et ses implications ; celles-ci ne sont pas seulement de caractère mathématique et philosophique, mais aussi métaphysique et théologique. Si aujourd'hui, à la fin du 20ème siècle, l'infini est un objet mathématique bien défini avec lequel nous pouvons faire des opérations, c'est grâce à la participation active, et maintes fois violente, des mathématiciens les plus importants de tous les temps.

Certainement l'infini est une construction intellectuelle qui implique un haut degré d'abstraction. Nous ne comptons, dans la réalité physique, sur aucune expérience qui nous permet d'accepter ou de refuser l'existence de l'infini et, étant donné qu'il est une création de la pensée humaine, il est seulement soumis aux méthodes de vérification de la logique : les conséquences de son existence doivent garder une étroite relation avec la totalité de la construction théorique dans laquelle il est inclus.

Il n'y a aucun doute que dans son état actuel, la théorie possède une structure formelle incontestable pour la plupart des mathématiciens et que cette structure-là a été une source d'importants résultats tout au long du 20ème siècle. Mais cela n'implique point que le concept soit devenu plus accessible à l'étudiant. En fait, les structures cognitives des étudiants, construites à partir des expériences finies, ne favorisent pas l'assimilation du concept ; bien plus, ils constituent un obstacle pour l'atteindre. La tension produite chez les jeunes à cause de l'étude de l'analyse est due à l'affrontement avec des nouveaux instruments liés à l'infini.

Quand l'étudiant aborde pour la première fois l'analyse, il trouve qu'une nouvelle opération a été ajoutée à son langage courant de l'algèbre : le passage à la limite. Derrière des nouveaux symboles et des opérations apparemment similaires à celles qu'il a déjà utilisées, un appareil conceptuel différent est caché. L'étudiant doit donc inclure dans son domaine cognitif, l'usage des inégalités et des quantificateurs aussi bien que l'extension des concepts de fonction et de nombre.

Les méthodes de l'analyse offrent une série d'algorithmes basés sur des intuitions élémentaires, lesquelles, moyennant un langage algébrique, permettent de donner un traitement des situations que nous pouvons résoudre au niveau des opérations. Ces situations sont parfois contradictoires et elles ne peuvent être formalisées que localement.

L'apparition de l'infini transforme mathématiquement les problèmes. Néanmoins, le professeur tend à construire une sorte de "solution continue" entre le langage algébrique et les intuitions que l'étudiant possède. Une telle solution ne sert qu'à cacher les différences entre la mathématique finie et les méthodes de l'analyse.

Il faut de plus ajouter les questions concernant la dichotomie actuel-virtuel aux problèmes liés au passage du fini à l'infini. Nous ne pouvons pas dissocier au niveau de l'enseignement l'infini virtuel de l'infini actuel. Le premier se rapporte aux méthodes de l'analyse, et le second rend compte du dernier résultat des processus virtuellement infinis. Ainsi, nous nous intéressons à la tangente à une courbe en l'un de ses points et non à la suite de sécantes qui s'approchent d'elle "aussi près que l'on veut" ; ou bien, l'aire sous une courbe proposée est l'objet recherché et non pas les approximations successives des aires rectangulaires. Dans tous ces cas-là, on trouve une sorte de "mélange" de l'infini virtuel (quand nous considérons les pas du processus) et de l'infini actuel (quand nous parlons du résultat d'un tel processus). En somme, nous ne pouvons pas nous restreindre à une seule facette de l'infini ; l'infini virtuel et l'infini actuel coexistent et cette coexistence-là n'est point pacifique, elle est d'ailleurs une source de nombreuses situations paradoxales.

Au coeur du sujet, on trouve des questions liées aux intuitions trompeuses nées d'une interprétation presque étymologique du mot "infini" comme la négation du fini. Il est contradictoire, aux yeux des étudiants, de parler d'une itération qui ne s'arrête jamais et, en même temps, du produit obtenu à la fin de cette itération. Ainsi, nous parlons indistinctement aux élèves des nombres entiers, dont chacun d'eux est construit en suivant la loi du successeur, et de l'ensemble de tous les entiers ; ou bien, nous leur présentons une suite "interminable" de subdivisions d'un segment qui "terminent" en un point.

Dans la théorie des ensembles infinis les situations paradoxales atteignent leur sommet quand l'étudiant doit établir la bijection d'un ensemble infini sur un de ses sous-ensembles propres et donc, accepter que le tout égale la partie.

C'est sur ce dernier point que nous avons mené une étude en cherchant d'abord le corpus de notions, idées, concepts et, en général, de conceptions que les jeunes étudiants associent à l'infini, après une éducation mathématique scolaire de douze ans environ. Ensuite, nous avons proposé un programme d'instruction destiné à introduire une certaine cohérence dans ce corpus qui soit, en même temps, en harmonie avec la connaissance mathématique courante. Les résultats montrent que les étudiants n'abandonnent pas facilement leurs idées intuitives, même si elles sont contradictoires.

L'infini caché dans les programmes d'étude

L'infini, comme une "façon d'opérer" ou comme un mécanisme d'extension des rapports mathématiques, apparaît très tôt dans le cours historique des idées, ainsi que dans le développement intellectuel de l'individu. Outre l'infini résultant de compter, les petits enfants sont capables de percevoir que les règles des opérations élémentaires sont valables pour "tous les nombres", ou qu'il y a des événements cycliques, comme la rotation de la Terre, qui se répètent éternellement à l'échelle humaine. Les élèves plus âgés atteignent l'idée d'approximation liée à l'opération de mesurer, et, enfin, ils arrivent à la notion de variation continue. C'est l'infini virtuel qui apparaît d'abord, presque sans conflit avec l'intuition.

Cette conception de l'infini, comme un synonyme de l'indéterminé ou de l'indéfini, reste longtemps sans évoluer. Il n'y a pas d'expériences scolaires élémentaires qui favorisent le changement vers une nouvelle conception. Il n'y a pas non plus, apparemment, des besoins qui le demandent. Néanmoins, comme l'affirme Koyré :

... l'infini virtuel n'est possible, logiquement, que sur la base de l'infini actuel. C'est dans l'infini (actuel) seulement qu'une grandeur, une variable, peuvent s'accroître et varier à l'infini... c'est l'acte qui est le fondement de la puissance, et non pas à l'inverse. Si l'on peut désigner, sur une droite, un nombre infini de points, c'est bien parce qu'ils y sont. Si l'on peut compter jusqu'à l'infini, c'est parce que le nombre des nombres finis est infini ... (2)

Autrement dit, nous ne pouvons pas ignorer l'existence de l'infini actuel puisqu'il est à la base de l'infini virtuel et donc, il est incontournable dès le début de l'apprentissage des mathématiques. La paire actuel-virtuel, de ce point de vue, ne se présente plus comme une vraie dichotomie, mais comme une dualité, semblable à la dualité particule-onde que l'on trouve dans la théorie physique. Les physiciens acceptent la théorie de la dualité non pas sur les bases de l'expérience empirique, mais dans le corps des structures théoriques, bien que cela frappe aussi l'intuition.

Depuis l'école élémentaire jusqu'à la fin des études secondaires il n'existe dans les programmes scolaires (tout au moins au Mexique) aucun chapitre consacré à un traitement de l'infini préparant l'unification des idées et des opérations intuitives et formelles. Des situations qui peuvent suggérer comme actuel le non-achevé, comme accomplie une opération qui progresse à l'infini, sont aussi évitées. En somme, il n'existe pas une préparation pour intérioriser l'infini actuel.

Des circonstances scolaires médiocres, ajoutées aux intuitions trompeuses, transforment la question de l'infini en un des obstacles les plus difficiles à franchir dans l'enseignement des mathématiques, surtout de l'analyse, comme nous le montrons plus loin.

Le sondage initial

Les conflits liés à l'infini ont été antérieurement remarqués, notamment par Duval (3) et Fishbein (4), et nous les avons constatés dans un sondage initial réalisé au Mexique en 1988. Comme première approche du problème, nous avons posé à trois groupes différents, des questions concernant des situations liées à l'infini :

a) Subdivision infinie d'un segment

b) Développement décimal infini

c) Continuité arithmétique

d) Rapports entre les éléments de deux ensembles infinis

Les groupes étaient formés de la façon suivante :

I. 13 étudiants de l'école secondaire (15-17 ans)

II. 14 étudiants de la faculté d'ingenierie (19-23 ans)

III. 20 professeurs de l'école élémentaire (22-31 ans)

Bien que le but de cet article ne soit pas la description détaillée de notre première étude, il est important de souligner certains résultats. Nous avons d'abord classé les réponses des étudiants en "finitistes" et "infinitistes". Nous appelons réponses finitistes, celles dont les arguments nient toute possibilité de suivre une opération indéfiniment, ou bien qui n'acceptent que des considérations sur des ensembles finis. Sur une totalité de 400 réponses effectives, nous en avons trouvées 273 (63%) de type finitistes. 71% des réponses du groupe I, 49% des réponses du groupe II et 65% des réponses du groupe III donnent des raisonnements qui peuvent être considérés finitistes, sur une échelle plus ou moins grande. Il faut remarquer que :

- plus de la moitié des étudiants n'acceptent pas l'infini, et cette situation ne change pas avec l'âge

- il y a une petite variation rapportée au genre et au niveau des études, mais les études plus spécialisées (le génie) provoquent apparemment de l'insécurité dans les étudiants (nous avons trouvé un tiers de réponses en blanc dans le groupe II et aucune dans les autres groupes).

Il devient évident d'après les raisonnements, que :

- les arguments "infinitistes" sont utilisés aussi bien pour affirmer que pour nier une même proposition, ce qui les rend logiquement ambigus. Par exemple, face à la question "Est-ce qu'un point sur un segment peut être atteint par une suite indéfinie de bipartitions ?", on trouve les réponses : "oui, parce que l'opération est infinie" ou "non, parce que l'opération est infinie".

- il y a des inconsistances dans les arguments infinitistes. Par exemple, on dit qu'un segment ne peut pas s'épuiser par bipartitions ou tripartitions, cependant, on affirme que le processus finit plus rapidement dans le cas des tripartitions

- il n'y a aucune différence entre la droite réelle et la droite rationnelle. Il n'y a pas non plus, une claire identification point-nombre dans la droite

- les nombres irrationnels ne sont pas conçus comme une réalité dans l'univers numérique des étudiants

- l'établissement de la bijection n'est pas accepté comme un critère valable pour comparer deux ensembles.

Les ensembles infinis

La théorie des ensembles fait partie de l'enseignement des mathématiques, à tous les niveaux, depuis les années soixante. Bien qu'elle soit inclue dans tous les programmes scolaires, ses bénéfices sont encore discutés, tant par les élèves que par les professeurs. En fait, le rôle que la théorie des ensembles joue dans les mathématiques pour synthétiser le savoir, n'est pas du tout éclairci quand il s'agit de la connaissance élémentaire.

Du point de vue conceptuel, nous serions forcés de détacher les questions rapportées aux notions d'appartenance et d'inclusion de celles de cardinalité et d'infini. C'est dans ces deux dernières notions que se trouve la force de la théorie.

Les notions d'appartenance et d'inclusion existent dans les mathématiques depuis longtemps (5). Ce sont des notions intuitives qui n'ont pas suscité de controverses. A partir d'elles, il a été possible de développer une théorie des syllogismes et des méthodes axiomatiques (rappelons que "le tout est supérieur à la partie" est une notion commune des Éléments d'Euclide). Mais l'idée de cardinalité suppose l'acceptation de l'infini actuel, ce qui, dès le début, a trouvé de fortes oppositions.

COMPARAISON DES ENSEMBLES INFINIS

Quand l'étudiant affronte pour la première fois les ensembles infinis (il faut remarquer qu'un ensemble infini, d'après la même définition d'ensemble, ne peut être qu'actuellement infini) il doit accepter que le tout égale la partie, ce qui est à ses yeux, une vraie contradiction. Les racines du conflit se trouvent dans le fait que les schémas intellectuels sont construits à partir d'expériences pratiques où il est évident que le tout est toujours plus grand que la partie. Ces schémas sont simplement étendus et adaptés aux situations liées à l'infini. L'extrapolation aux ensembles infinis des propriétés des ensembles finis, dont la tangibilité permet une représentation mentale immédiate, conduit à des contradictions difficilement surmontables.

Le problème avait déjà été décelé dès la première partie de notre recherche, en mettant en évidence la tension que provoque chez l'étudiant la comparaison des ensembles infinis quand ils existent en même temps, les rapports d'inclusion et de bijection entre eux. Ce problème est devenu le centre de nos études postérieures vue l'ampleur de ses effets sur l'enseignement de l'analyse et la compréhension de l'infini en général.

Nous avons déjà rapporté les résultats de l'étude sur les critères et les conceptions que les étudiants du premier semestre d'université possèdent sur les ensembles infinis (6), elle a révélé que d'après les étudiants :

- on ne peut pas décider si un ensemble est infini par la seule existence des rapports d'inclusion et de bijection.

- si la mise en rapport des éléments d'un ensemble (ou d'une partie d'eux) avec les entiers naturels est possible, alors l'ensemble est infini.

- l'établissement de l'inclusion ou de la bijection (ou des deux) entre deux ensembles infinis, ne représente aucun conflit. Les problèmes surgissent quand ces rapports doivent être confrontés afin de décider sur l'égalité ou l'inégalité des ensembles.

- il n'y a aucun avantage à choisir le critère de la bijection pour comparer des ensembles infinis. Le critère de l'inclusion est plus naturel, plus intuitif. Autrement dit, il n'y a aucune expérience didactique élémentaire qui montre les bénéfices du critère de la bijection.

Certains étudiants pensent que les ensembles infinis sont tous "égaux" (7) (ou bien qu'ils ne le sont jamais). Dans ce cas-là, il n'y a pas de contradiction à propos de l'existence simultanée de l'inclusion et de la bijection.

Soutien statistique des observations

A partir des résultats obtenus dans les deux études antérieures, nous avons réalisé une autre recherche, afin de mesurer la cohérence des réponses des étudiants face aux situations liées aux ensembles infinis. Nous avons mené une enquête en tenant compte des conceptions propres aux étudiants.

Le questionnaire a été élaboré d'après les considérations suivantes :

- une partie était consacrée à l'instruction présentant des définitions et des exemples

- cette partie là a été conçue en suivant les idées des élèves. Par exemple, nous avons donné la définition : "Un ensemble est infini si l'on doit utiliser tous les entiers naturels pour compter ses éléments ou une partie d'eux"

- les questions étaient groupées d'après le contexte, les situations particulières et les situations générales

- le questionnaire était structuré en quatorze blocs (34 questions en tout). Chaque bloc présentait une situation déterminée et posait plusieurs questions à cet égard

- toutes les questions présentaient des options "OUI", "NON" et "ON NE PEUT PAS DIRE". Il y avait des réponses correctes des trois genres.

Le questionnaire a été testé sur un échantillon de 95 lycéens de sections scientifiques (âgés entre 15 et 18 ans), de niveaux socio-économiques semblables.

Le Tableau 1 décrit le contenu du questionnaire ainsi qu'une première approche des résultats en termes de pourcentages. On peut y apprécier les faits suivants :

- Nous avons d'abord supposé que, pour les élèves, pouvoir compter les éléments d'un ensemble (en utilisant la suite complète des nombres naturels) était une condition nécessaire pour affirmer que l'ensemble est infini. Néanmoins, cette condition n'est pas suffisante. Il faut, en plus, que les ensembles possèdent une structure "à la file" afin que les étudiants puissent compter sur une place illimitée pour mettre les éléments de l'ensemble. Ainsi, il n'est pas difficile d'affirmer qu'un ensemble avec un ordre linéaire est infini, puisque cette configuration peut se prolonger indéfiniment. Les questions rapportées aux ensembles ainsi caractérisés (les naturels, les pairs, les entiers, les puissances de dix ou la droite), ont obtenu les pourcentages de réussites les plus élevés

- par contre, les pourcentages de réussites pour les ensembles bornés baissent d'une façon notoire.

Tableau 1 (page suivante)

Bloc	ENSEMBLES (Points ou Nombres)	DIFFICULTE	QUESTIONS (sur les ensembles)	% Réussite
I	points d'un sergment	continu/borné	1. est-il infini ?	64
II	naturels et pairs	structure "à la file"	2. y a-t-il une bijection ? 3. quelle bijection ? 4. sont-ils "égaux" ?	48 39 32
III	naturels et entiers pairs	il n'y a pas de 1er élément	5. sont-ils infinis ? 6. y a-t-il une bijection 7. quelle bijection ? 8. sont-ils "égaux" ?	95 33 4 32
IV				
V	naturels et puissances de dix	structure "à la file"	13. y a-t-il une bijection ? 14. quelle bijection ? 15. sont-ils "égaux" ?	96 56 30
VI	naturels et naturels sans zéro	un seul élément "en trop"	16. sont-ils "égaux" ?	47
VII	A et B abstraits	A sous-ensemble propre de B	17. finis et "égaux" ? 18. infinis et "égaux" ?	72 41
VIII	D et C abstraits	D sous-ensemble infini de C	19. C-D peut être finie ?	19
IX	points sur deux segments	continu/borné	20. AB est infini ? 21. CD est infini ? 22. y a-t-il une bijection ? 23. sont-ils "égaux" ?	47 45 65 43
X	carré et demi-droite	continu, borné/non-borné dimensions différentes	24. points du carré infinis ? 25. points droite infinis ? 26. sont-ils "égaux" ?	58 84 11
XI	droite et demi-circonférence	continu, borné/non-borné	27. y a-t-il une bijection ? 28. sont-ils "égaux" 29. égalité demi-circon/segment 30. égalité segment/droite	72 23 27 13
XII	(0,1) et (0,2)	continu/borné	31. y a-t-il une bijection ? 32. sont-ils "égaux" ?	69 47
XIII	cercle et cercle plus circonférence	continu/borné	33. sont-ils "égaux" ?	32
XIV	surface et droite	continu, borné/non-borné	34. sont-ils "égaux" ?	56

- les questions sur l'établissement de la bijection varient dans une marge considérable de réussites (entre 33 % et 72 %). Les pourcentages sont plus importants si la bijection est explicitée dans la question.

Les pourcentages de réussites à propos de l'équipotence sont les plus faibles (entre 11 et 56 %) sauf pour la question théorique 34, le reste est inférieur à 50 %. En fait, la moyenne de réussites de ces questions ne dépasse pas le 32 %. Autrement dit, moins d'un tiers des étudiants acceptent l'équipotence des ensembles comparés.

L'analyse statistique

Après avoir dégagé les caractéristiques des données obtenues à partir du questionnaire nous avons choisi, pour les étudier, la méthode de l'analyse factorielle de correspondances, afin de déterminer les rapports possibles entre les variables impliquées. Pour l'application de cette méthode, nous avons utilisé le logiciel STAT-ITCF.

La méthode de l'analyse factorielle de correspondances est employée afin d'obtenir une représentation géométrique d'un tableau de données, ce qui permet d'apprécier les groupements des éléments du tableau (8).

Le but de notre questionnaire était les deux points suivants :

a) Décider si un ensemble est infini

b) Décider si deux ensembles sont équipotents.

Dans un premier temps nous n'avons pris que les questions concernant ces deux points, en les considérant nos variables principales. Les questions d'un seul bloc qui portaient sur l'établissement de la bijection et l'acceptation du critère de comparaison, ont été groupées dans une seule variable, dont la réponse a été considérée correcte lorsque les deux questions étaient justes.

La première remarque importante qui émerge du traitement de l'information est la dispersion très grande du nuage de données. Cette dispersion peut être attribuée à l'absence de l'apprentissage qui aurait dû être acquis grâce à l'information contenue dans le questionnaire. Nous pouvons donc dire que celle-ci n'a pas eu les effets qui auraient pu être attendus sur l'échantillon. Ainsi, les traitements des différentes situations liées à l'infini, n'obéissent qu'aux notions intuitives qui conforment les structures cognitives de chaque étudiant.

Malgré la remarque précédente, les regroupements des questions autour des axes principaux du nuage concordent avec les caractéristiques mathématiques communes des dites questions. Ainsi, les situations mathématiquement semblables se retrouvent dans l'analyse des données ce qui indique que les étudiants les traitent de façon similaire.

Vue la dispersion du nuage de données, nous avons défini à nouveau des variables principales afin de trouver d'autres rapports. Nous avons mené deux analyses différentes supplémentaires, qui démontrent les résultats suivants :

- il y a des groupes bien séparés de questions rapportées en elles-mêmes. Ces questions possèdent des caractéristiques mathématiques communes et sont donc traitées de la même façon

- les groupes des questions sont stables dans les différentes analyses

- il y a des étudiants réunis en tant que variables autour de certaines questions et qui se dispersent pour d'autres, cela veut dire que les étudiants ne partagent pas les même intuitions locales de l'infini

- la dispersion du nuage ne disparaît pas avec la modification de l'analyse

Quelques remarques extraites de l'analyse statistique

A partir de l'étude statistique, nous pouvons dire qu'il y a des facteurs qui ont une plus forte influence sur la compréhension des ensembles infinis :

Un ensemble borné, surtout s'il est encadré dans un contexte géométrique, est difficilement conçu comme possédant un nombre infini d'éléments. En fait, la configuration et les dimensions des régions géométriques sont un obstacle pour la conception des ensembles de points contenus dans celles-ci.

La comparaison entre deux ensembles infinis devient plus difficile si un ensemble est borné et l'autre ne l'est pas. Dans ce cas-là, l'infini virtuel est un obstacle pour comparer les deux ensembles puisqu'il est évident dans l'ensemble non-borné mais reste caché dans l'ensemble borné.

Il n'y a pas de recours au critère de la bijection pour comparer un ensemble avec un de ses sous-ensembles propres, bien que ce critère ait été exolicitment présenté.

Quant au comportement des étudiants nous pouvons conclure que :

- l'étudiant possède une suite d'intuitions locales à l'égard de l'infini qu'il applique suivant la situation

- les intuitions sont localement cohérentes mais globalement, elles se contredisent

- les notions intuitives sont un obstacle pour accepter les concepts formels

- tous les étudiants ne partagent pas les mêmes intuitions locales. Certains répondent vraisemblablement devant une situation proposée, mais, en changeant la situation, ils ne réagissent plus de façon similaire.

Les remarques de notre étude confirment apparemment certains résultats théoriques déjà établis.

Premièrement, il y a sans doute l'obstacle du dédoublement des objets mathématiques discuté par Duval (9). D'après cet auteur, l'obstacle du dédoublement apparaît quand l'étudiant doit

"... séparer des propriétés ou des caractéristiques jusque là fortement associées à un même objet, ou attribuer des dénominations et des représentations différentes à un objet que l'on pense être le même" (10)

Dans notre sujet, chaque élément d'un ensemble joue un double rôle : il appartient simultanément à deux ensembles dont les caractéristiques ont été établies antérieurement. Ainsi, une puissance de dix possède des propriétés dues à son appartenance à l'ensemble des entiers et, en même temps, à son appartenance à l'ensemble des puissances de dix. 10^n doit être dédoublé et considéré comme deux objets différents afin d'établir la bijection entre les entiers et les puissances de dix.

D'autre part, nous trouvons la stabilité de la pensée intuitive remarquée par Pozo et Carretero (11). La pensée intuitive, dont la cohérence n'est que locale, présente des caractéristiques de résistance aux changements et aux nouvelles articulations nées de nouvelles connaissances. La cause principale de cette stabilité réside dans le fait que la cohérence locale permet aux étudiants de se débrouiller convenablement dans de nombreuses situations qui n'ont apparemment aucune liaison.

Ainsi, des propriétés et des opérations rapportées aux ensembles finis qui s'étendent aux ensembles infinis, permettent d'établir des réponses locales correctes du point de vue du sens commun. Tandis qu'une autre approche, comme celle que propose l'analyse mathématique, n'offre que des résultats absurdes.

Or l'obstacle du dédoublement tout comme celui de la stabilité de la pensée intuitive doivent être rapportés aux contextes mathématiques dans lesquels ils se situent. Prenons, par exemple, la remarque que nous avons faite à propos des ensembles qui possèdent une structure "à la file" face aux ensembles bornés.

Dans le premier cas, il y a une correspondance directe entre la série temporelle ordonnée des événements (compter les naturels, les pairs, les puissances de dix) et sa projection spatiale linéaire. Cette correspondance reflète un ordre dans un autre ordre, c'est-à-dire, elle respecte la structure d'ordre. La pensée intuitive, résultat de la construction d'une telle correspondance chez l'enfant, ne contrevient pas les exigences de la théorie mathématique et peut bien évoluer vers les notions formelles.

Mais, par contre, l'obstacle du dédoublement s'avère difficile à franchir car il faut attacher deux ordres différents à un même élément (l'ordre "naturel" et l'ordre dû à son appartenance à un autre ensemble).

Dans le cas des ensembles bornés, il faut établir une correspondance inverse entre la série temporelle des événements (compter les points par exemple) et sa projection spatiale non nécessairement linéaire. De cette façon, les valeurs des nombres augmentent temporellement dans la série numérique et la représentation spatiale correspond à des points de plus en plus proches.

Le dédoublement ne semble pas jouer un rôle décisif dans ce cas-là, alors que les intuitions locales, dont nous avons parlé précédemment, constituent l'obstacle le plus important.

Finalement il faut ajouter les questions concernant le passage de l'étape intra-objectale à l'étape interobjectale que nous avons rapporté dans notre étude antérieure (12). Ainsi les étudiants de la population visée par notre enquête seraient en quelque sorte ancrés à un niveau de conceptualisation dans lequel ils ne peuvent pas faire l'abstraction de l'individualité et des règles de génération des éléments d'un ensemble. Ils ne peuvent pas concevoir l'ensemble comme "un tout" et donc, le considérer comme un "objet d'étude". Bien entendu ceci empêche de concentrer l'attention vers les opérations et les transformations entre les ensembles et alors, d'établir la conservation de quantité qui est nécessaire pour accéder à l'étape inter objectale. Nos résultats mettent en évidence la difficulté de surmonter ce niveau de conceptualisation par la seule présence de l'instruction.

Quelques remarques pour l'enseignement

La théorie des ensembles infinis occupe sans doute une place privilégiée dans l'univers mathématique actuel. L'étude des circonstances qui ont rendu possible sa connaissance, ainsi que des mécanismes d'appropriation de nouveaux concepts, doit conduire à une meilleure compréhension des obstacles et difficultés qui sont présents dans l'apprentissage de ce domaine cognifif. Notre étude nous permet de faire quelques réflexions sur ce sujet.

Les racines de la théorie des ensembles infinis sont bien localisées dans l'étude des domaines des fonctions, c'est-à-dire, il y a un sujet identifié qui crée la nécessité de développer des outils propres. A cet égard, l'étude de la théorie des ensembles infinis est significative tant qu'elle est associée à un problème donné. Les ensembles sont très importants si on les considère comme sustentation des structures mathématiques (espaces métriques, corps, catégories) ou comme un outil linguistique qui facilite une notation algébrique adéquate, ou bien dans les contextes topologiques ou dans la théorie de la mesure. Cependant, les ensembles comme l'objet d'étude *per se* n'ont de sens que dans les recherches approfondies des théories axiomatiques. Bien qu'il doive y avoir une préparation élémentaire dans ce domaine, il est difficile de croire que les approches que nous trouvons à l'école primaire fournissent les bases pour l'utilisation postérieure de la théorie.

D'un autre côté l'idée de l'infini actuel est consubstantielle au concept d'ensemble abstrait, donc ces concepts-là ne peuvent pas être dissociés et être traités de façon indépendante. L'origine de la théorie provient des ensembles infinis. Si Cantor incorpore les ensembles finis dans sa théorie, ce n'est que pour jeter un pont entre ses nouveaux nombres et la connaissance mathématique existante, afin de les embrasser dans une seule théorie. L'étude des ensembles finis à l'école élémentaire n'a donc aucun sens.

Les modèles concrets et la recherche du reflet de la réalité physique dans les objets mathématiques ne sont pas toujours une aide efficace pour l'apprentissage. En fait, dans le cas de l'infini, ceux-ci constituent de véritables obstacles. L'expérience doit se trouver, non pas dans le monde physique, mais dans les mathématiques, de telle sorte que les nouveaux concepts surgissent à partir d'un domaine cognitif déjà structuré autour des concepts abstraits.

NOTES

1 MORENO, L., WALDEGG, G. : The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity, *Educational Studies in Mathematics*, Vol 22, pages 211-231, 1991.

2 KOYRE, Alexandre : *Etudes d'histoire de la pensée philosophique* , Gallimard, 1971 pp 25-26

3 DUVAL, Raymond : L'obstacle du dédoublement des objets mathématiques, *Educational Studies in Mathematics* , No. 14, pp 358-414, 1983

4 FISCHBEIN, E., TIROSH, D., HESS, P. : The Intuition of Infinity, *Educational Studies in Mathematics* , No. 10 pp 3-40, 1979

5 Cfr. BOURBAKI, *Eléments de l'histoire des mathématiques*

6 MORENO, L., WALDEGG, G. : Op. Cit.

7 Dans tout cet article, nous parlerons d'ensembles "égaux" pour désigner des ensembles ayant même cardinal (même nombre d'éléments)

8 Voir BENZECRI, J.P. : *Pratique de l'analyse de données* , Paris, Dunod.

9 DUVAL, Op. cit.

10 Ibid. page 410