SYSTÈMES SÉMIOTIQUES DE REPRÉSENTATION LIÉS AU CONCEPT DE FONCTION

Fernando HITT-ESPINOSA

Understand the concept of function implies coherent articulation of the different semiotic registers (Duval, 1993, p. 41) which come into play during the resolution of a problem related to the concept. Taking into account preliminary experimental studies, 14 questionnaires were designed to understand the difficulties on the learning process of the subjects. This experimental study was carried out with mathematics teachers (secondary school) in Mexico. The results show that according to the task, the teachers have difficulties of different nature than their students. For example, the teachers can identify without problem the graphic representations of some functions like absolute value, the polinomies, the trigonometric functions, but one part of them experience some difficulties because they think some curves are graphic representations of functions (circle, ellipse, ...). On the contrary, a majority of students think that every curve is a graphic representation of a function.

La compréhension du concept de fonction implique l'articulation cohérente des différents registres sémiotiques (Duval, 1993, p. 41) qui entrent en jeu dans la résolution d'un problème lié à ce concept. Prenant pour base quelques études préliminaires expérimentales, 14 questionnaires ont été élaborés pour mesurer les difficultés qu'on peut avoir avec ce concept. Cette étude expérimentale a été faite avec des maîtres de mathématiques (école secondaire) au Mexique. Les résultats montrent que selon la tâche demandée, les maîtres ont des difficultés de nature différente de celles des élèves. Par exemple, les maîtres peuvent reconnaître sans problème les représentations graphiques de fonctions comme la valeur absolue, les fonctions polynômes et les fonctions trigonométriques, mais certains éprouvent des difficultés à voir que quelques-unes des courbes (cercle, ellipse, ...) ne correspondent pas à des graphes de fonctions. Par contre, pour la majorité des élèves, presque toutes les courbes sont des représentations graphiques de fonctions.

INTRODUCTION

L'importance qui a été accordée au concept de fonction dans le curriculum d'enseignement secondaire provient d'influences de documents datant de plusieurs siècles. Par exemple, Leonard Euler a organisé son oeuvre *"Introductio in analysis infinitorum"* (1748, traduction de 1976) autour du concept de fonction. Les mathématiques possèdent une structure où les fonctions jouent un rôle fondamental, raison pour laquelle leur étude soignée est indispensable. Eisenberg (1992, p. 174) signale que : *"Développer chez les étudiants une sensibilité vers les fonctions devrait être un objectif principal du curriculum de l'école secondaire et universitaire"*.

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
6(1998) (p. 7-26) - IREM de Strasbourg

Les problèmes d'apprentissage autour du concept de fonction sont devenus manifestes depuis plusieurs décennies ; ainsi le démontrent par exemple les travaux de recherche Vinner (1983), Markovits (1986), Duval (1988), Vinner y Dreyfus (1989), Eisenberg (1992). Une implication générale de ces travaux est que l'appréhension du concept de fonction n'est pas une tâche facile, outre qu'une grande majorité d'élèves n'accède pas à cette connaissance, mettant en évidence que certains des obstacles d'apprentissage sont de type didactique (pour la manière dont ils sont enseignés) tandis que d'autres sont intrinsèques par la difficulté que montre l'étudiant à mobiliser différentes représentations du concept de fonction de manière cohérente.

La possibilité de connaître de plus près les problèmes d'apprentissage du concept de fonction nous a menés à réaliser une approche du problème depuis la perspective du professeur (Hitt, 1988). Dans cette première incursion, les résultats ont éclairé le fait que certains maîtres de mathématiques d'enseignement secondaire avaient des problèmes pour passer d'un système sémiotique de représentation des fonctions à un autre. Suite à cette étude, et en vue de trouver des réponses au comportement montré par les maîtres de mathématiques autour de ce concept, j'ai entrepris une recherche plus approfondie où, d'un côté, j'ai considéré important de réaliser une analyse historique sur l'émergence du concept de fonction, et de l'autre, une approche desdites difficultés d'apprentissage du concept de la part des maîtres de mathématiques d'enseignement secondaire. Nous présenterons ci-dessous un des moments critiques dans le développement du concept de fonction, nous reportant au XVIIIe Siècle, et, par la suite, nous nous centrerons sur l'étude expérimentale de ce travail.

La notion de fonction chez Euler

Je résumerai brièvement l'idée mathématique de fonction dans le travail de Léonard Euler, dans son **Introduction à l'Analyse Infinitésimale** (traduction du latin au français, 1796) . Cette analyse sera reprise ultérieurement au moment de discuter des stratégies utilisées par des maîtres de mathématiques du secondaire (12 à 17 ans), dans la résolution de problèmes liés au concept de fonction.

Nous remarquerons que la première définition explicite de fonction se trouve dans les travaux de Bernoulli (1718, p. 241).

Définition: On appelle fonction d'une variable une quantité composée de n'importe quelle forme par cette variable et par constantes.(Citée par Youschkevitch, 1976, p. 60).

Un progrès important dans le concept de fonction a été réalisé par Euler (1796, p. 1-2); il a changé le mot *quantité* **dans la définition de Bernoulli par** *expression analytique*, et il a essayé d'éclaircir l'idée de quantité constante et de quantité variable.

Nous avons analysé ces idées. Dans presque toutes les références à la notion de fonction d'Euler, on se borne à citer sa définition de fonction et non pas ce qui concerne son idée de variable. Or dans les travaux d'Euler (1796, p. 1-2), nous pouvons trouver les définitions suivantes (1 à 4) ainsi que la remarque 5 :

1. *Une quantité constante est une quantité déterminée, qui conserve toujours la même valeur.*
2. *Une quantité variable est une quantité indéterminée, ou, si l'on veut, une quantité universelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées.*
3. *Une quantité variable devient déterminée, lorsqu'on lui attribue une valeur déterminée quelconque.*
4. *Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes.*
5. *Une fonction de variable est donc aussi une quantité variable.*

Dans la première définition d'Euler, il y a un élément qui peut nous aider à comprendre ses idées sur le sujet : l'idée du temps « physique » est au moins implicite dans la définition *(« qui conserve toujours »)*. La présence du temps chez Euler va jouer un rôle important parce que derrière cette notion, on va trouver la continuité. Le continu restera dans un domaine physique puisque la droite réelle n'existe pas sous forme numérique dans ces travaux (la droite numérique achevée est du XIXe siècle).

D'un point de vue didactique, il est important d'analyser les exemples de définitions fournis par Euler, ainsi que ses exemples *de 'fonctions apparentes qui ne sont pas des fonctions'*. Euler écrit :

Ainsi, toute expression analytique, soit de la variable z et contenant des quantités constantes, est une fonction de z. Par exemple: $a+3z$; $az-4zz$; $az+b\sqrt{aa-zz}$; cz ; *& c, sont des fonctions de z.*

Au reste, il n'est pas rare de rencontrer des expressions qui ne sont que des fonctions apparentes; car, quelque valeur qu'on donne à la variable, elles conservent toujours la *même valeur, comme z°; 1^{z}; $\frac{aa - az}{a - z}$. Ces expressions, sous la forme apparente de fonctions de variables, sont réellement des quantités constantes.* (p. 3)

Les exemples de fonctions fournis par Euler font partie de notre spectre actuel de fonctions, lequel contient également les exemples signalés par Euler comme les trois expressions qui ne sont pas des fonctions. Mais la remarque 5 d'Euler avait pour conséquence l'exclusion des fonctions constantes.

L'élimination des fonctions constantes est une nécessité pour Euler, puisque, dans le chapitre suivant, il va travailler sur la composition des fonctions. C'est véritablement pour cette composition qu'il est nécessaire que les valeurs prises par une fonction f soient quelconques. Cette condition n'est réalisée que si l'on se place à priori dans les complexes pour résoudre en z l'équation $y = f(z)$. Les fonctions considérées par Euler sont donc des fonctions de variable complexe, dont on peut évidemment restreindre l'étude aux réels.

En résumé, on peut dire qu'une fonction au sens d'Euler est **une fonction de variable complexe, non constante, définie par une expression analytique (donc continue dans son ensemble de définition).**

Description de l'expérimentation

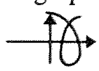
Les registres de représentation ont une très grande importance dans l'acquisition des concepts mathématiques. Les concepts mathématiques se construisent à partir de l'articulation des différents registres et des images mentales associées à leurs représentations.

Ainsi, les activités proposées aux élèves déterminent d'une certaine façon leur acquisition du concept mathématique qui est en jeu. Duval (1993) a écrit: *les différentes représentations sémiotiques d'un objet mathématique sont absolument nécessaires. En effet, les objets mathématiques ne sont pas directement accessibles pour la perception, ou pour une expérience intuitive inmédiate comme le sont les objets communément appelés 'réels' ou 'physiques'.*

Dans ce contexte sur l'importance des différentes représentations sémiotiques par rapport au concept de fonction, nous analysons le concept de fonction, plus précisément les difficultés d'articulation entre les différents registres; ceci sur une population de maîtres de mathématiques de l'enseignement secondaire au Mexique.

La population testée était constituée de 30 maîtres de mathématiques de l'enseignement secondaire. Nous avons élaboré 14 questionnaires dans cet objectif avec les caractéristiques suivantes:

(Q1) L'identification de représentations graphiques de fonctions (26 questions)

Exemple: Le graphe de la courbe  est-il la représentation graphique d'une fonction? Justifiez votre réponse.

(Q2) Sous-concepts du concept de fonction (identification du domaine de définition, de l'ensemble image et de couples de points sur la courbe, 9 questions)

Exemple: Vu le graphe d'une fonction et de points sur le Domaine, Contre-domaine et sur la courbe, identifier les points appartenant au Domaine, Contre-domaine et sur la courbe.

(Q3) La tabulation et la représentation graphique (6 questions)

Exemple: Vu un tableau, dessiner un graphe.

(Q4) Définition de fonction et énoncés de fonctions en langage verbal (10 questions)

Exemple: Quelle est la définition de fonction ?

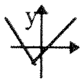
(Q5) Fonctions à évaluer sur certaines valeurs numériques ou symboliques (10 questions)

Exemple: Vu $f(x) = x + 7$, pour tout x réel, calculer f(-7), f(0), $f(a+b)$.

(Q6) Représentations algébriques de fonctions (passage algébrique/graphique, 13 questions)

Exemple: Dessiner le graphe de la fonction f: {nombres naturels} $\rightarrow$ {nombres naturels}, de telle sorte que $f(x) = 3$.

(Q7) Représentations graphiques de fonctions (passage graphique/algé-brique, 11 questions)

Exemple: Vu le graphe 

x Quelle est la représentation algébrique de cette fonction?

Q8) Construction de fonctions avec certaines propriétés (21 questions)
Exemple: Construire trois fonctions f_1, f_2, f_3 d'une variable réelle, telle que $|f_1(x)| = |f_2(x)| = |f_3(x)| = 2$.

(Q9) Identification de fonctions égales (5 questions)
Exemple: Soit $f(x) = x^2$ pour tout x réel, et $g(x) = u^2$ pour tout u réel, la fonction f est-elle égale à la fonction g?

(Q10) Représentations graphiques de fonctions (passage d'un graphique au dessin d'une bouteille montrant la variation entre hauteur et volume, 5 questions)

Exemple: Vu le graphe  , dessiner un récipient contenant un liquide, où h serait la hauteur du liquide et $v(h)$ son volume.

(Q11) Dessin d'une bouteille (passage d'un dessin à un graphique, 6 questions)

Exemple: Vu le dessin d'un récipient,  , dessiner le graphique hauteur contre volume.

(Q12) Opérations avec les fonctions exprimées de façon algébrique (+, -, *, °, 9 questions)
Exemple: Vu $f(x) = 1 + \frac{2}{x+1}$ et $g(x) = 2 + \frac{3}{x+1}$ .Calculer $(f°g)(x) =$

(Q13) Enoncés mathématiques (démonstration ou recherche de contre-exemples, 3 questions).

Exemple: Soit f une fonction réelle de variable réelle, si $(f°f)(x) = f(f(x) = 0$ pour tout x réel, ceci implique-t-il que $f(x) = 0$ pour tout x réel ?

(Q14) Définitions de fonction (identification des 4 définitions usuelles dans les manuels scolaires, 4 questions)

Exemple d'un item : Une fonction est un ensemble de couples ordonnés pour lesquels il n'en existe pas deux possédant le même premier élément.

Analyse des résultats

Commentaires sur les réponses au questionnaire Q1

La tâche demandée aux maîtres était de reconnaître si la représentation graphique d'une courbe correspondait au graphe d'une fonction.

La justification la plus fréquente, donnée par les maîtres, pour les courbes qui n'étaient pas des représentations graphiques de fonctions, était un argument géométrique : la parallèle à l'axe vertical doit couper la courbe en un seul point.

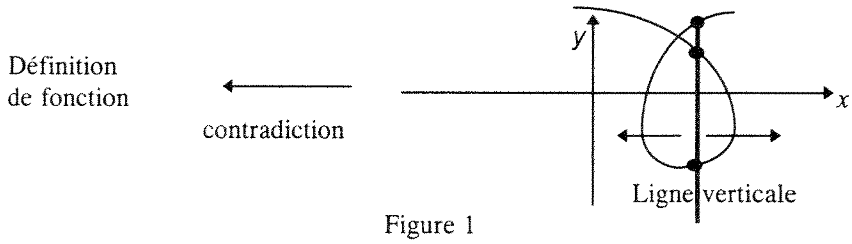


Figure 1

Parmi les 26 courbes qui ont été soumises aux maîtres, se trouvaient des courbes telles que (voir Fig. 2).

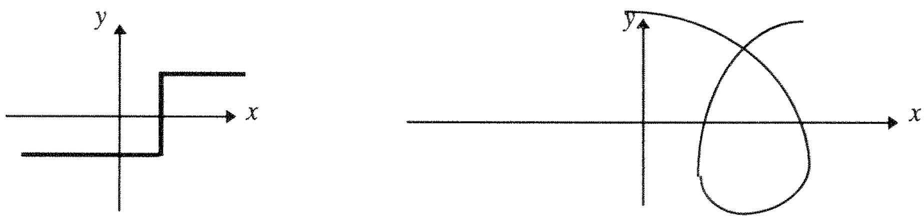


Figure 2

Les maîtres, en général, ont bien réussi ces questions (par exemple, pour la dernière courbe il y a eu 29 réussites sur 30).

On pouvait croire que leur argument géométrique était bien assimilé, mais parmi les 26 courbes, nous avions mis 5 coniques et il y a eu environ un tiers de la population qui a échoué (voir figure 3).

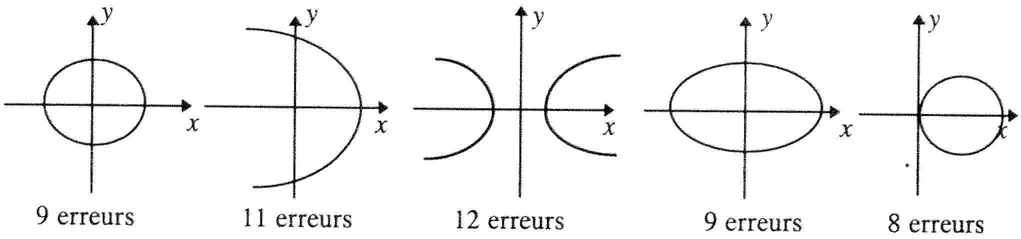


Figure 3

Comment peut-on expliquer le phénomène suivant: **Pour un tiers de la population, l'existence d'une expression algébrique associée à une courbe remplace la vérification géométrique (ligne verticale) et la définition de fonction.**

Le problème épistémologique sous-jacent est le suivant : dans la pratique, souvent, nous utilisons les fonctions exprimées de façon algébrique (une expression analytique) et on étudie des fonctions continues ; intuitivement, on suit l'idée d'Euler sur le sujet ; Euler (1796, p. 2) a écrit: *Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes.*

Alors, on commence à avoir l'idée intuitive, comme chez Euler du fait que les fonctions sont des expressions analytiques exprimées par une seule formule et sont continues dans leur domaine de définition.

Un autre problème s'ajoute au précédent; lorsqu'on étudie les fonctions, on passe régulièrement d'une fonction à son équation. On peut, inconsciemment, arriver à croire qu'**il n'y a pas de différence entre une fonction et l'équation qu'on lui associe.**

Nous allons analyser le schéma proposé par Duval (1993, p. 51-53) à propos du fonctionnement cognitif de la pensée. Il écrit : « *La coordination de plusieurs registres (Hypothèse 2 et Fig. 5) est donc une condition absolument nécessaire pour que le schéma dyadique de la représentation habituellement admis (fig. 4 et hypothèse 1) corresponde à un fonctionnement cognitif effectif chez un sujet, et pour que, en surface, le recours à un seul registre de représentation apparaisse suffisant. Or, de nombreuses observations, aux différents niveaux de la scolarité, montrent qu'elle ne s'effectue pas spontanément chez la plupart des sujets et qu'on ne peut espérer en favoriser la mise en place par un enseignement qui méconnaît la liaison forte existant entre noésis et sémiosis.* »

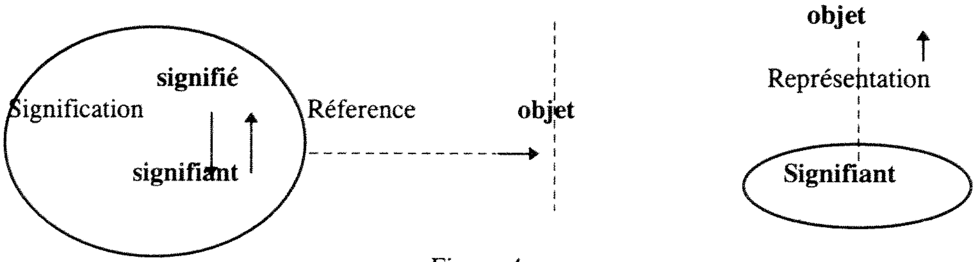


Figure 4.

Hypothèse 1: si le registre de représentation est bien choisi, les représentations de ce registre sont suffisantes pour permettre la compréhension du contenu conceptuel représenté.

Duval est ainsi amené à considérer comme insuffisante l'hypothèse 1 (illustrée par le schéma de la figure 4), implicitement mise en oeuvre dans beaucoup de séquences d'enseignement. Il lui préfère, pour des sujets en cours d'apprentissage, une deuxième hypothèse illustrée par le schéma de la figure 5.

Hypothèse 2: La compréhension (intégrative) d'un contenu conceptuel repose sur la coordination d'au moins deux registres de répresentation, et cette coordination se manifeste par la rapidité et la spontanéité de l'activité cognitive de conversion.

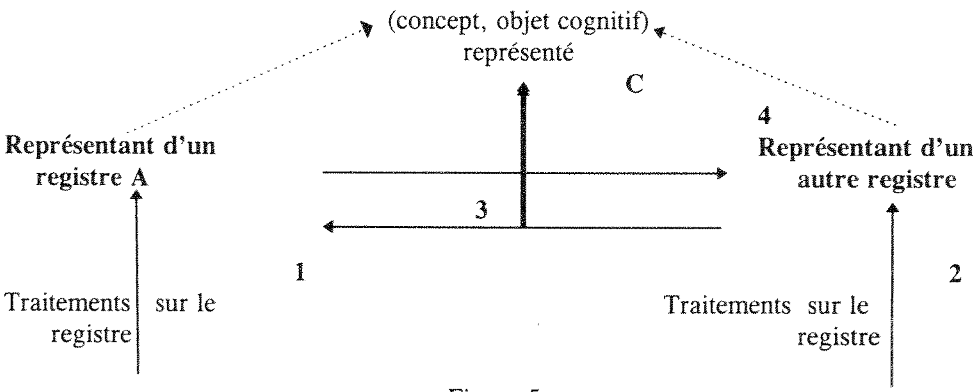


Figure 5

Le schéma de la figure 5 ne rend pas compte de certaines difficultés, comme nous le montre l'analyse de cas particuliers. Par exemple, dans le registre algébrique, si on a une expression du type $y = f(x)$, la condition de fonctionnalité est d'emblée prise en compte.

Elle n'a donc pas à être vérifiée (on est alors placé dans une situation où il n'y. a aucune vérification de conditions à tester). Au contraire, dans le registre graphique devant une courbe on fait un balayage visuel, qui n'est pas véritablement un traitement dans ce registre (voir, par exemple, figure 1) puisqu'on ne change en rien la courbe envisagée. Par opposition, en revenant aux écritures algébriques, le cas des fonctions implicites ($h(x,y)=0$), conduit pour sa part à des traitements sur le registre (*peut-on expliciter y `en fonction' de x, c'est-à-dire isoler y* ?).

En examinant les erreurs des maîtres, on peut être dans une situation différente. Il faut bien choisir les registres adaptés au concept de fonction, c'est-à-dire qu'il faut prendre un sous-registre du registre symbolique, celui des expressions algébriques des fonctions. Sinon, la conversion entre registre et autre peut fonctionner correctement, mais en conduisant à un obstacle cognitif si on ne pense pas à la vérification de certaines conditions. Le schéma suivant est un essai pour montrer globalement le problème que nous avons voulu expliciter.

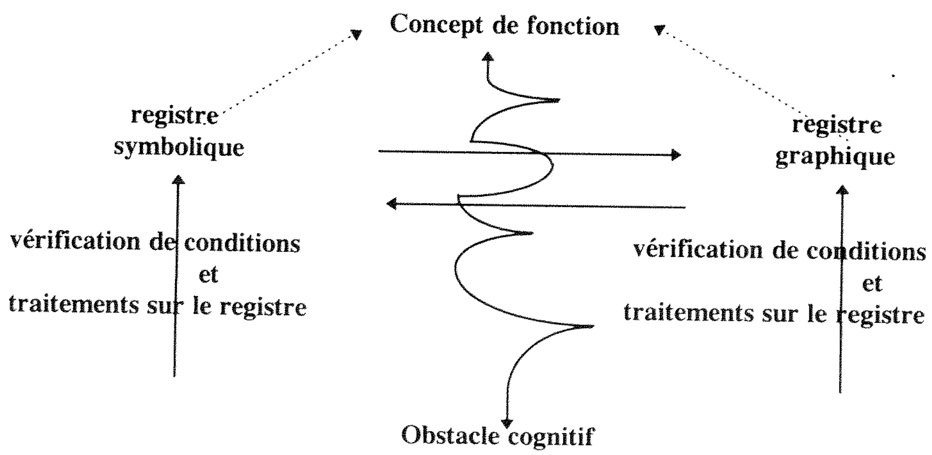


Figure 6. Problèmes mathématiques et épistémologiques

Commentaires sur les réponses au questionnaire 2 (Q2)

Le questionnaire Q2 comportait des questions sur les sous-concepts du concept de fonction. On demandait aux maîtres d'identifier les éléments du domaine de définition d'une fonction, les images et couples de points ordonnés sur la courbe. Dans le Tableau 1, nous montrons une question du questionnaire 2. De même que les élèves de l'école secondaire (Markovits et al, 1986, p. 21), les maîtres ont confondu le sous-concept du concept de fonction.

(Question dans le questionnaire 2)

Etant donnée une fonction, f:{nombres réels}$\longrightarrow$ {nombres réels}, définie par f(x) = 4.

a) Lesquels, des nombres suivants: 2; -5,5; 9,07; 0 sont des éléments du domaine de définition de la fonction f?

b) Lesquels, des nombres suivants: 12; 0; 4; 3,3 sont des images par f?

c) Lesquels, des couples de points ordonnés suivants: (2;8), (0;4), (0;0) et (19,4) sont des éléments du graphe de f?

a)		b)	c)
Corrects 20	Corrects 18	Corrects 18	Trois items corrects 15
Incorrects 6	Incorrects 6	Incorrects 6	Au moins un item incorrect 13
Abstention 4	Abstention 6	Abstention 6	Abstentions aux 3 items 2

Tableau 1

Commentaires sur les réponses au questionnaire Q3

Les maîtres ont montré un comportement de réussite aux questions de ce questionnaire, le passage d'un tableau à son correspondant graphique n'a représenté aucun problème. Il s'agit-là d'une des activités d'enseignement qui est fréquemment réalisée.

Commentaires sur les réponses aux questionnaires Q4 et Q14

La question 1 du questionnaire 4, demandait aux maîtres d'écrire la définition de fonction, et en Q14, prenant en compte la classification donnée par Nicholas (1966), on présentait aux maîtres quatre définitions de la notion de fonction (extraites de manuels scolaires usuels) en termes de règle de correspondance, ensemble de couples ordonnés, relation entre variables, entrée-sortie. Les maîtres devaient décider si la définition était vraie ou fausse; ensuite, pour celles qui étaient considérées comme correctes, ils devaient les classifier par ordre de préférence pour l'enseignement.

Dans le questionnaire Q4 les définitions en termes de relation entre variables et en termes d'entrée-sortie ne furent jamais données par les maîtres. Quant aux choix, pour l'enseignement, dans le questionnaire 14, nous avons les résultats suivants: règle de correspondance (14 maîtres sur 30), ensemble de couples ordonnés (13 maîtres), définition en termes de relation entre variables (3 maîtres).

Nicholas (1966, p. 767) a suggéré que la définition la plus appropriée pour l'enseignement pré-universitaire, était celle qui se trouvait en termes de relation entre variables. Cependant, les résultats de notre étude montrent qu'une telle définition n'est pas la préférée des maîtres.

Définition de fonction	C4	Changement de Définition.	C14
Règle de correspondance	14	5	9 + 2
Régle de correspondance et 1-1	3	0	3
Régle de correspondance et 1-1 et sur	1	1	
Règle de correspondance (erronée)	1	1	
Ensemble de paires ordonnées	10	2	8 + 5
Abstention	1	1	
Relation entre variables	0	0	0 + 3
Entrée - sortie	0	0	0

Commentaires sur les réponses au questionnaire Q5

Les questions du questionnaire Q5 sur l'évaluation de fonctions n'ont présenté aucun problème majeur pour les maîtres. De nouveau comme pour le questionnaire 3, ils ont fait preuve d'un comportement efficace. Ils n'ont rencontré des difficultés que pour une question du questionnaire, il s'est agi de la question 5b.

Pour la fonction g :{nombres réels} → {nombres réels}, tel que g(x) = -7

a) Calculer ce qui suit :

g(-4) = g(A) = g(-7) =

g(-1) = g(0) = g(3.5) =

Réponses correctes 25 Abstention au sujet g(A) 5

b) Existe-t-il un quelconque nombre x, tel que g(x) = 3? Combien en existe-t-il?

Réponses correctes 14 Réponses incorrectes 14 Abstentions 2

c) Existe-t-il un quelconque nombre x, tel que g(x) = -7? Combien en existe-t-il ?

Réponses correctes 23 Réponses incorrectes 4 Abstentions 3

Commentaires sur les réponses au questionnaire Q6

Le comportement des maîtres, pour ce questionnaire, a été positif en ce qui concerne les fonctions continues. Cette capacité du passage de la représentation algébrique d'une fonction vers sa représentation graphique est présente également chez les élèves d'enseignement secondaire. Il est notoire que, dans l'enseignement, on insiste à développer cette habilité chez les élèves.

Les problèmes auxquels ont dû faire face les maîtres se sont présentés quand les fonctions étaient définies dans un ensemble discret, par exemple dans les nombres naturels.

Voici ci-dessous, comme exemple, la question qui leur a été posée :

> Dessiner la représentation graphique de la fonction f : {nombres naturels} $\rightarrow$ {nombres naturels}; définie par $f(x) = 3$.
> correctes 7 incorrectes 22 abstention 1

Les réponses incorrectes sont dues au fait que les maîtres ont déssiné une droite continue au lieu d'un graphe de points discrets. Nous avons utilisé la notation {nombres naturels} au lieu de **N** afin d'éviter toute confusion ou que soit passé inaperçu l'ensemble de départ et celui d'arrivée de la fonction. Ceci est un des cas où l'on remarque une grande tendance à dessiner des courbes continues, c'est-à-dire qu'il existe une idée intuitive très enracinée chez les maîtres, leur concept de fonction est similaire au concept de fonction-continuité à la manière d'Euler.

Commentaires sur les réponses au questionnaire Q7

Les maîtres n'ont pas eu de difficultés à répondre à ce questionnaire. Par contre, on sait que les élèves d'enseignement secondaire ne bénéficient pas de cette capacité (Duval, 1988, Ruthven, 1990). Nous pouvons en déduire que les maîtres ont développé une habilité sur la reconnaissance des formes, à condition que la relation soit celle d'un graphe associé à une expression algébrique. Quand le graphe de la fonction est associé à deux expressions algébriques ou plus, des problèmes surgissent pour les maîtres.

Commentaires sur les réponses aux questionnaires Q8 et Q9

Le questionnaire Q9 devait permettre d'observer si les maîtres savaient identifier différentes écritures algébriques d'une même fonction. En général, les réponses des maîtres furent satisfaisantes. Ainsi, par exemple, à la question 2, on demandait si $f(x) = 2$ était égal à $g(x) = \sqrt{4}$, x étant réel. Il y eut 26 réponses correctes.

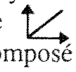
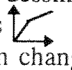
Analysons la question 12 du questionnaire 8 sur la construction de fonctions; la question demandait la construction de trois fonctions f_1, f_2, f_3 d'une variable réelle, telle que $|f_1(x)| = |f_2(x)| = |f_3(x)| = 2$.

Seulement 6 maîtres ont construit correctement trois fonctions, 10 maîtres ont construit les deux premières ($f_1(x) = 2$ et $f_2(x) = -2$) et ils ont donné une forme algébrique équivalente pour la troisième ($f_3(x) = \sqrt{4}$ ou $f_3(x) = \sqrt[3]{8}$ ...).

Il est important de signaler, d'un côté, que le comportement du succès des maîtres face au questionnaire 9 (identification de fonctions égales), se transforme au moment de mettre à l'épreuve une telle capacité, c'est-à-dire, comme on l'a signalé auparavant dans les commentaires au questionnaire Q6 et dans une autre étude (Hitt, 1994), **les idées intuitives émergeant durant le processus de résolution se convertissent en obstacles, dans ce cas en un obstacle épistémologique. Les maîtres ont tendance à construire des fonctions continues, définies au moyen d'une seule expression algébrique comme ce fut le cas d'Euler.**

Commentaires sur les réponses aux questionnaires Q10 et Q11

Les questions du questionnaire 10 traitent du passage entre une représentation graphique et le dessin d'une bouteille (pour montrer la variation hauteur-volume). On montrait aux maîtres des graphiques dont la variable (indépendante) représentait la hauteur d'un liquide durant le remplissage d'un récipient inconnu, pour certaines questions la surface du liquide était en fonction de la variable hauteur, pour d'autres, le volume du liquide était fonction de la variable.

On analysera deux graphiques. Dans le cas du graphique d'une fonction linéaire hauteur-volume  ; les maîtres ont dessiné 24 récipients corrects. Mais quand le graphique était composé de deux segments  on a seulement obtenu 11 réponses correctes. Les maîtres savaient qu'il y avait un changement de forme du récipient, mais ils n'ont pas isolé l'étude de la variable (independante) pour la transformer dans le contexte du dessin.

Le questionnaire 11 portait sur le processus inverse. Etant donné le dessin d'un récipient, il fallait esquisser un graphique où la hauteur d'un liquide serait la variable, et où la surface du liquide et le volume devaient être fonction de la hauteur.

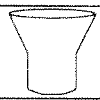
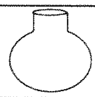
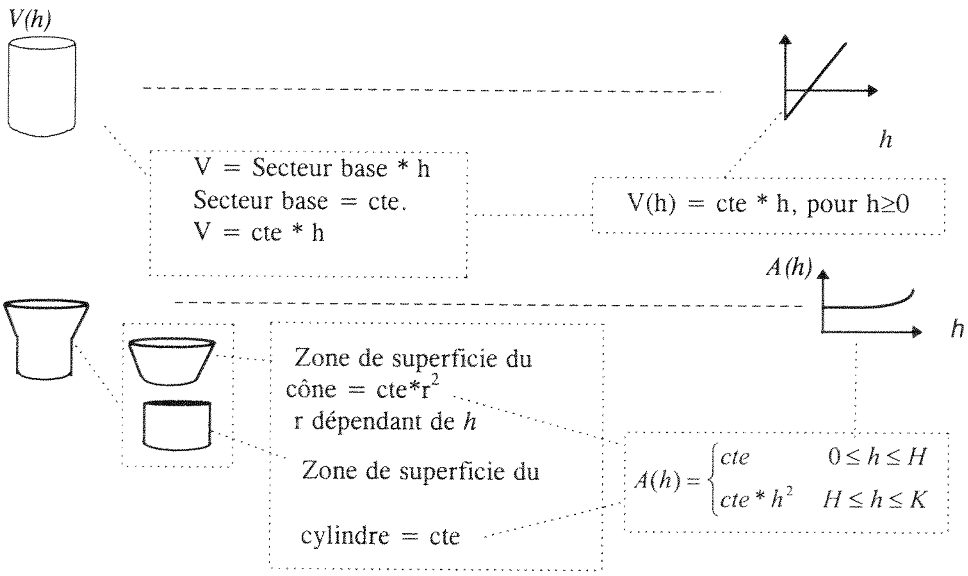
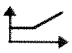
Dessin ↓ graphique			
Correctes	28	5	2
Incorrectes	2	25	28
abstentions	0	0	0

Tableau 2

Analysons trois questions. Dans le cas où on avait montré un cylindre il y avait eu 28 graphiques corrects (hauteur-volume). Mais, lorsqu'on avait changé la forme (voir Tableau 2) il y avait eu 5 et 2 graphiques corrects. Dans la Figure 7 nous pouvons voir la décomposition de la tâche.



Les erreurs les plus fréquentes se sont présentées en associant le récipient avec le graphique :  correspondant à la fonction :

$$A(h) = \begin{cases} cte & 0 \leq h \leq H \\ cte * h & H \leq h \leq K \end{cases}$$

Fig. 7 La difficulté des maîtres se rencontre dans le passage de la représentation analogique en deux dimensions (dessin) à une représentation non analogique intermédiaire (algébrique) qui lui sert pour dessiner le graphique correspondant.

En résumé, nous pouvons classifier les erreurs comme suit :

- **La forme du graphique et non l'étude analytique de l'information donnée par le graphique, a determiné, chez certains maîtres, le type de récipient.**
- **La forme du récipient et non l'étude du phénomène dans un contexte analytique, a determiné les erreurs de la majorité des maîtres.**

Commentaires sur les réponses au questionnaire Q12

Les maîtres peuvent résoudre correctement les questions qui ont à voir avec l'opération de fonctions en relation avec une seule expression algébrique. Cependant, pour des questions comme celle qui suit :

Vu les fonctions $f(x) = \begin{cases} x+1 & pour\ x \geq 2 \\ -x^3+3 & pour\ x < 2 \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} x^3 - x & pour\ x > 2 \\ 5x & pour\ x \leq 2 \end{cases}$ Calculer f(x) + g(x) =

La plupart donnait comme réponse $f(x) + g(x) = \begin{cases} x^3+1 & pour\ x \geq 2 \\ -x^3+5x+3 & pour\ x < 2 \end{cases}$

sans porter plus d'attention (sauf un professeur) au point pour lequel x = 2.

Commentaires sur les réponses au questionnaireQ13

Le questionnaire 13 fut l'un des plus difficiles. Il a été conçu sur trois questions (ce questionnaire a été présenté à une autre population de maîtres de mathématiques et se trouve enregistré depuis un autre point de vue dans Hitt, 1989). La première question demandait la démonstration d'un énoncé mathématique et pour les deux autres, il était nécessaire de construire un contre-exemple. Nous avons perçu, en général, que l'enseignement des mathématiques se limitait à enseigner des algorythmes et à un niveau moindre, à faire des démonstrations. L'histoire des mathématiques nous a montré que l'activité mathématique se réalisait au travers de la construction de démonstrations et de contre-exemples. Les mathématiciens, quand ils se trouvent en face d'un énoncé sans savoir s'il est vrai ou non, hésitent entre la recherche d'une démonstration ou d'un contre-exemple.

Les questions posées aux maîtres furent les suivantes : il leur a été demandé de réaliser une démonstration s'ils considéraient que le résultat était correct ou qu'il construisent un contre-exemple.

1) Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. En supposant que $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 0$, pour tout x en $\mathbb{R}$. Ceci implique-t-il que $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$ pour tout x en $\mathbb{R}$?
Réponses correctes 15 Arguments incorrects 11 Abstentions 4

2) Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$. En supposant que $(f(x))(g(x)) = 0$ pour chaque x en $\mathbb{R}$. Ceci implique-t-il qu'une des deux fonctions est la fonction zéro? C'est-à-dire, ceci implique-t-il que $f(x) = 0$ pour tout x en $\mathbb{R}$, ou que $g(x) = 0$ pour tout x en $\mathbb{R}$?
Réponses Correctes 3 Arguments incorrects 20 Abstentions 7

3) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Si $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 0$ pour tout x en $\mathbb{R}$. Ceci implique-t-il que $f(x) = 0$ pour tout x en $\mathbb{R}$?
Réponses correctes 0
Argumentation sans arriver à la construction d'un contre-exemple 3
Argumentations incorrectes 13
Abstentions 14

Ces résultats nous démontrent que les maîtres ne sont pas habitués à construire des contre-exemples. Une analyse des exercices des manuels usuels au Mexique, confirme que les capacités de construction de contre-exemples ne sont pas développées. En général, tout énoncé apparaissant dans ces manuels est présenté comme vrai et il est établi que doit être réalisé, soit un algorythme soit une démonstration. La difficulté dans la construction des deux contre-exemples pour les énoncés 2) et 3), avait rapport direct avec la "rupture de l'expression algébrique associée à la fonction", c'est-à-dire se détachant de l'idée intuitive de fonction à la manière d'Euler et, proposant comme exemple, pour l'énoncé 2), le contre-exemple, $f(x) = 0$ si $x \in \mathbf{Q}$ et $f(x) = 1$ si $x \notin \mathbf{Q}$ y $g(x) = 1$ si $x \in \mathbf{Q}$ et $g(x) = 0$ si $x \notin \mathbf{Q}$. Le troisième énoncé est également faux, et il peut être donné un contre-exemple comme suit : $f(x) = -x + 1$ si $x \leq 0$ et $f(x) = 1$ si $x > 0$.

Discussion

L'activité des maîtres est en général efficace pour le passage d'un registre à un autre pour lequel il est demandé un devoir de caractère algorythmique, elle ne l'est plus quand le devoir à réaliser n'est pas du même style, où est recherchée l'articulation de plusieurs registres. Ceci entre certainement en rapport avec les activités que propose régulièrement le professeur dans la classe, lesquelles sont principalement de caractère algorythmique, sans prendre en compte la promotion de l'articulation de différents registres. Ainsi, on peut articuler des registres ou réaliser des procédures à l'intérieur d'un registre dans des cas comme ceux décrits ci-après : expressions algébriques à graphes et vice-versa (questionnaires Q6 y Q7), tables de graphes (Q3), évaluation de fonctions (Q5); ils peuvent réaliser des opérations avec des fonctions exprimées par une seule expression algébrique (Q12), identifier des fonctions (Q9), et fournir une définition de fonction usuelle d'un manuel scolaire (Q4 y Q14). Le pourcentage élevé de réponses justes des maîtres aux questionnaires mentionnés, nous permet de connaître le niveau de leurs connaissances, en opposition avec celui de leurs élèves. Par exemple, les maîtres au questions de Q12 ont bien réussi dans la reconnaissance des représentations graphiques de fonctions (passage de la représentation graphique à l'algébrique) ce qui n'a pas été le cas avec des élèves du secondaire (résultats obtenus par Ruthven, 1990).

Les maîtres de mathématiques ont une définition de fonction isolée des différentes représentations. Ils n'ont pas utilisé la définition en termes de relation entre variables comme celle qu'a fournie Euler. Les définitions de fonction les plus fréquentes chez les maîtres ont été celles reliées à la "règle de correspondance" et à "l'ensemble de couples ordonnés". La tâche d'identification des fonctions ne représente pas un problème pour les maîtres; cependant, dans une activité plus complexe de construction de fonctions, le blocage (obstacle épistémologique) que forment les fonctions continues définies par une seule expression algébrique, ne leur permet pas (pour une grande majorité d'entre eux) de construire des fonctions différentes.

Chez un tiers de la population, en regardant le graphique de quelques coniques, l'existence d'une expression algébrique (équation) a été plus forte que l'argument géométrique (ligne verticale) pour vérifier si une courbe était ou non le graphe d'une fonction. Aussi, la lecture des graphiques pour identifier le domaine de définition d'une fonction et les images (sous-concepts du concept de fonction) a été difficile pour les maîtres.

Comme une conséquence de cette étude, nous croyons que l'enseignement de la définition de fonction en termes de relation entre variable, paraît adapté à effet d'enseignement de niveau pré-universitaire. Il est important d'y inclure les sous-concepts du concept de fonction (Domaine, Image, Contre-Domaine, Graphe), avec différents registres.

Le niveau de connaissance des maîtres est évidemment plus élevé que celui des élèves. Cependant, le fait qu'ils commettent des erreurs et qu'ils ne se rendent pas compte qu'ils sont quelquefois face à des situations contradictoires, représente un problème important. Le professeur dispose des éléments pour résoudre un problème, par exemple dans l'exercice de passer du dessin d'une bouteille à un graphique et vice-versa. Le problème n'est pas que le maîtres ne puisse effectuer un développement algébrique lui permettant d'arriver au résultat, sinon qu'en s'appuyant sur une intuition, il s'estime satisfait sans considérer nécessaire de réaliser un développement algébrique lui permettant de comparer son appréciation globale avec son résultat algébrique. Pour cela, les maîtres n'ont pas identifié et isolé la variable en jeu dans le but de la contextualiser dans une représentation soit d'un dessin soit d'un graphique (Fig. 7).

L'erreur commise par les maîtres, ainsi que nous l'avons mentionné, est qu'ils ont eu une vision rapide et globale de la situation ; ils ont développé un processus mental en décomposant la figure en deux parties, et cependant, avec la dernière figure, ils sont restés sur une vision synthétique opposée à une pensée analytique (en suivant l'idée de Fischbein, 1987, p. 53). Leur idée intuitive de la situation a été plus forte qu'une pensée analytique qui aurait pu les mener au résultat correct.

Si une connaissance liée à un concept est stable chez un individu, il devrait articuler les différentes représentations du concept sans contradiction. Les maîtres ont montré que leur connaissance sur les fonctions était faible.

Références

Duval R. (1988) Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, p. 57-74.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, pp. 37-65.

Eisenberg T. (1992) On the development of a Sense for Functions. *In the Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy,* Edited by Guershon Harel & De Dubinsky. MAA, Series, USA.

Euler L. (1796) *Introduction à l'Analyse Infinitésimale par Leonard Euler*. Traduction de J. B. Laby. Editorial Chez Bachelier, 1987, Paris, France.

Fischbein E. (1987) *Intuition in Science and Mathematics : An Educational Approach*. Editorial : D. Reidel Publishing Company.

Hitt F. (1989) Obstacles Related to the Concept of Function. *British Society for Research into Learning Mathematics*. England.

Hitt F. (1989) Construction of function contradiction and proof. *Proceedings International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Paris, Vol. 2, p. 107-114.

Hitt F. (1994) Teachers' difficulties with the construction of continuous and discontinuous functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, Vol. 16, Number 4, pag. 10-20.

Markovits Z. , Eylon B., Bruckheimer M. (1986) Functions today and yesterday. *For the Learning of Mathematiques*, 6, 2, june, pp. 18-28.

Nicholas, C. P. (1966) A dilemma in definition. *The American Mathematical Montly*,Vol. 73, pp. 762-768.

Ruthven K. (1990) The influence of graphic calculator use on traslation from graphic to symbolic forms. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 21, pp. 431-450.

Vinner S. (1983) Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14, pp. 293-305.

Vinner S. et Dreyfus T. (1989) Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (4), pp. 356-366.

Youschkevitch A. (1976) The concept of function up to the middle of 19th century. *Archive of Exact Sciences*, 16, pp. 36-85