

SIGNE ET OBJET (I)

TROIS GRANDES ÉTAPES DANS LA PROBLÉMATIQUE DES RAPPORTS ENTRE REPRÉSENTATION ET OBJET

Raymond DUVAL

Sign and object are two key ideas in order to analyse mathematical knowledge acquisition. The idea of sign cannot be considered like that of a simple notation, it is a representation changing according to the semiotic system which is used. The idea of object cannot be considered like that of thing, it is the conscious invariant meaning in relation to changing form and content semiotic representation. These two ideas are closely connected.

In the first paper we examine how the semiotic nature of representation has grown with the development of mathematical knowledge. We distinguish three great historical stages in this evolution of relations between representation and objet. In each stage there is a new way for analysing the content of representation in relation to objects. There is also a new determination of the cognitive process producing representations.

La notion d'objet est une notion que l'on ne peut pas ne pas utiliser dès que l'on s'interroge sur la nature, sur les conditions de validité ou sur la valeur des connaissances. Ainsi parle-t-on plus souvent d'objets mathématiques que de concepts mathématiques, car ce sont des objets que l'on étudie en mathématiques et non pas des concepts. D'ailleurs on insiste inconditionnellement sur la nécessité de ne jamais confondre un objet et sa représentation, même si ce sont des représentations que l'on présente explicitement et même si les représentations présentées peuvent à leur tour être traitées comme des objets ! Mais dès qu'il s'agit d'analyser le développement des connaissances ou les mécanismes de leur acquisition par des élèves, ce n'est plus cette notion qui est retenue, mais celles de «concept», de «conception», de «représentation» (du sujet), ou encore celles d'«opération» ou de «processus»... La notion d'objet semble alors considérée comme une notion seconde par rapport à ces notions, et comme une notion voisine de celle de «chose»¹, voire interchangeable avec elle pour les niveaux les plus élémentaires de la formation, bien qu'elle n'en présente pas les mêmes déterminations. Pourquoi un telle marginalisation lorsqu'il s'agit d'analyser les connaissances dans une perspective d'apprentissage ? Et ne crée-elle pas un handicap pour la compréhension des problèmes d'apprentissage, particulièrement en mathématiques ?

A travers ce contraste entre le caractère fondamental de la notion d'objet et son caractère

¹ Une chose est une partie de la réalité qui présente les trois caractéristiques suivantes : tridimensionnalité (d'où le fait que les solides soient les exemples-types de choses), accessibilité sensorielle multimodale (par la vue et par le toucher ou la préhension et par l'audition...) indépendante des représentations sémiotiques, et séparabilité matérielle des autres parties de la réalité (ainsi les couleurs dont on connaît la difficulté d'en faire faire la discrimination et d'en faire apprendre le langage par les enfants - car elles échappent à toute monstration- ne sont pas des choses bien qu'elles soient immédiatement perceptibles (Aristote, *Métaphysique Z*).

SIGNE ET OBJET (I): L'EVOLUTION DES PROBLEMATIQUES

secondaire en fonction des préoccupations, c'est tout le problème de l'analyse même des connaissances mathématiques et scientifiques qui est posé. L'opposition, récurrente en didactique, entre approche épistémologique et approche psychologique, et le débat sur l'importance de leurs apports respectifs dans l'étude de l'acquisition des savoirs sont symptomatiques de ce contraste (Noirfalise et Perrin-Glorian 1995). Elle oblige à s'interroger sur tous les problèmes théoriques et méthodologiques que soulève l'analyse de l'activité de connaissance, dès que celle-ci se veut commandée par une exigence scientifique qui en détermine le fonctionnement et qui en contrôle les démarches. En particulier les questions suivantes deviennent essentielles pour savoir ce que vaut une analyse des connaissances et quelles peuvent en être les conséquences pertinentes pour des choix d'enseignement ou pour l'organisation de conditions d'apprentissage. Quelles sont les notions absolument nécessaires pour pouvoir mener l'analyse des connaissances mathématiques et scientifiques ? Dans quel cadre théorique ces notions peuvent-elles être précisées, devenir compatibles entre elles et opératoires ? Quels domaines de phénomènes une modélisation de l'activité de connaissance doit elle prendre en compte, si l'on veut comprendre l'acquisition, par des individus, de connaissances mathématiques et scientifiques, c'est-à-dire de connaissances qui résultent d'un travail d'acquisition, historiquement discontinu, et de processus complexes de sédimentation culturelle ? Ce sont ces questions essentielles pour toute analyse de la connaissance que nous allons aborder dans les deux articles qui suivent.

Deux idées directrices vont nous permettre de progresser dans l'élucidation de ces questions vastes et complexes.

Les notions d'objet et de représentation sémiotique, ou plus exactement les relations entre objet et représentation sémiotique, sont les notions centrales pour toute analyse de la connaissance, aussi bien mathématique que scientifique : elles constituent comme deux entrées différentes pour analyser les connaissances. Dans *Sémiosis et pensée humaine* (Duval 1995) nous les avons prises comme des notions primitives et évidentes, alors que leur emploi peut être délicat et que leur extension est difficile à cerner. De récentes publications sur la notion d'objet sont là pour en témoigner (Granger 1994). Et surtout la notion de représentation sémiotique apparaît comme la fusion de deux notions que l'on est habitué à opposer, celle de représentation et celle de signe. Le premier article est donc consacré à ces deux notions : que recouvrent-elles et pourquoi sont-elles centrales dans l'analyse de la connaissance ? Nous allons montrer qu'elles sont devenues centrales avec le développement considérable des connaissances mathématiques et scientifiques survenu ces trois derniers siècles. Non seulement la notion de représentation s'est alors imposée, mais elle s'est radicalement transformée en même temps que les méthodes d'analyse du rapport des représentations aux objets représentés : le caractère fondamentalement sémiotique des représentations est apparu de plus en plus clairement dans la mesure où le développement des systèmes de représentation sémiotique devenait un facteur intrinsèque du progrès des connaissances. Ce sont les principales étapes de cette transformation que nous allons décrire dans le premier article.

L'analyse de l'activité de connaissance peut être faite de trois points de vue différents : un point de vue scientifique, un point de vue cognitif et un point de vue de vue phénoménologique. Ces trois points de vue correspondent chacun à un choix différent de centration sur l'un des aspects de la relation sujet-objet. Chaque point de vue est indépendant des deux autres. Mais si l'on veut comprendre les conditions de l'acquisition des «connaissances» scientifiques et, plus particulièrement, celles des connaissances mathématiques, ces trois points de vue doivent être pris en compte. C'est ce qui rend si

SIGNE ET OBJET (I): L'EVOLUTION DES PROBLEMATIQUES

complexe une analyse de la connaissance, scientifique ou mathématique, conduite dans le but de dégager les conditions de son acquisition par de jeunes élèves : comment ces trois points de vue peuvent-ils s'articuler pour permettre une analyse pertinente des processus d'acquisition des connaissances par les élèves ? L'articulation des trois points de vue ne peut se faire qu'autour de ce qu'on appelle d'une part des «objets» et d'autre part les représentations sémiotiques. En effet, le problème fondamental de l'acquisition des connaissances est celui de l'accessibilité des objets de connaissance : par l'invention de quels moyens, ou par quels processus d'appropriation des moyens inventés, des objets qui étaient inconcevables ou inaccessibles à un moment donné ont-ils pu devenir ensuite accessibles ? C'est la même question aussi bien au plan de l'histoire des sciences et des mathématiques qu'à celui, individuel, des apprentissages. Mais ce ne sont pas les mêmes réponses, car les systèmes de fonctionnement à prendre en compte pour le progrès des sciences et pour l'apprentissage en formation initiale ne sont pas les mêmes. C'est pourquoi les conditions d'accessibilité aux objets et celles de la constitution des moyens de leur accessibilité ne renvoient pas aux mêmes processus et doivent répondre à des critères ou à des exigences spécifiques selon le point de vue que l'on retient. C'est à la distinction et à l'articulation, nécessaires, de ces trois points de vue dans l'analyse de la connaissance que le deuxième article est consacré.

Dans chacun de ces trois points de vue nous retrouverons la notion de représentation sémiotique comme un élément clé de la connaissance, mais y jouant des rôles différents. Nous devons cependant ajouter une troisième notion, peu pertinente d'un strict point de vue scientifique, celle d'«architecture fonctionnelle» de systèmes cognitifs et sémiotiques. Car c'est seulement par rapport à une «architecture fonctionnelle» que la notion d'opération (communément utilisée dans toutes les analyses de la connaissance) peut être utilisée de façon pertinente. On ne peut pas parler d'opération sans la référer au fonctionnement d'un système déterminé: il y a ainsi des opérations cognitives sémiotiques et des opérations cognitives non sémiotiques, les unes n'étant pas subordonnables aux autres.

Pour faciliter la lecture de ces deux articles, nous avons introduit au début de chaque un tableau qui donne une vue synoptique des objets traités, des points de vue sous lesquels ils sont envisagés et des relations que nous explicitons entre ces objets. Le texte peut donc être lu comme un commentaire du tableau.

&&&
&&
&

La première question qui se pose lorsqu'il s'agit de suivre l'évolution des problématiques concernant les rapports entre représentation et objet, est celle de la périodisation. Si l'on prend comme repères les oeuvres qui ont marqué des étapes importantes dans l'analyse de la constitution de connaissances, des *Regulae* de Descartes (1628) jusqu'aux démonstrations des deux théorèmes d'incomplétude de Gödel (1931) et, surtout, la décomposition, par Turing (1936), de tout processus logique en procédures élémentaires exécutables par une machine, trois grandes périodes peuvent être nettement distinguées.

Durant la première période les processus de pensée sont envisagés comme des processus purement mentaux. La première caractéristique de cette approche mentaliste des démarches de pensée est **un lien étroit entre les représentations, qui sont les représentations du sujet, et les objets**. Pour déterminer le caractère scientifique d'une connaissance il devient alors

SIGNE ET OBJET (I): L'EVOLUTION DES PROBLEMATIQUES

essentiel de **rechercher l'origine des représentations** : proviennent-elles du sujet ou de l'objet lui-même ? Pour déterminer dans quelle mesure le sujet et l'objet interviennent comme facteurs dans l'origine des représentations, on recourt alors au principe de causalité. Durant toute cette période **le rapport des représentations aux objets est analysé en termes de causalité**. Nous présenterons la problématique que Descartes a exposé dans la troisième des *Méditations métaphysiques* et celle de Kant. Les thèses de la *Critique de la Raison pure* sont importantes car elles ont servi en quelque sorte de tremplin, au développement de la réflexion mathématique sur les fondements pour tout le XIX^{ème} siècle et elles préfigurent les problématiques cognitives.

Durant la seconde période les processus de pensée sont de plus en plus étroitement associés à des manipulations contrôlables de signes. On reconnaît alors **une rupture entre les représentations, le sujet et les objets**. Cette rupture conduit à séparer les représentations mentales du sujet et les représentations sémiotiques, dont le fonctionnement ne dépend pas de l'activité du sujet et qui sont les seules pertinentes pour la connaissances scientifique. **Le rapport des représentations aux objets n'est plus analysé en termes de causalité mais en termes de référence**. Toute cette période est celle du développement conjoint de la logique mathématique et d'une réflexion sur les fondements des mathématiques en tant que celles-ci se constituent par la démonstration. La recherche est alors celle d'une adéquation entre les objets et le discours sur les objets. Elle a conduit à construire des systèmes sémiotiques spécifiques (idéographie, notations logiques d'une langue formelle) autres que celui des langues naturelles. Elle a conduit également à s'interroger sur les rapports entre l'utilisation de la langue naturelle et celle de langues formelles ainsi que sur le rôle des signes dans le fonctionnement de la pensée. Nous présenterons les problématiques de Bolzano et de Frege, les deux grands précurseurs dans cette recherche qui a conduit à l'émergence des axiomatiques de structure et à celle des problèmes de décision (Hilbert 1928).

La troisième période survient avec la **rupture entre les représentations sémiotiques et les objets** : il y a un primat formel des signes et de leurs organisations sur les contenus de connaissance. En effet, l'idée s'impose qu'il n'y a pas de signe en dehors d'un système de signes et surtout qu'un système sémiotique est un système de traitement d'information, et pas seulement un moyen de communication : il permet des créations de sens par delà les vécus phénoménologiques du sujet et par delà l'expérience apparemment directe qu'il peut avoir de certains objets. **Les systèmes sémiotiques deviennent des «systèmes de production» d'information ou de sens. Le rapport des représentations aux objets n'est plus analysé en termes de référence mais en termes d'interprétation** : les objets apparaissent comme des interprétations possibles d'organisations sémiotiques considérées comme des modèles. Dans cette perspective, une catégorie particulière de représentations sémiotiques est mise en avant, celles qui permettent des traitements analysables en termes de «calculabilité». Mais la problématique de cette période est plus large, elle concerne tous les systèmes sémiotiques, que leur fonctionnement ait ou non cette propriété de calculabilité. Elle a surgi de façon indépendante dans des domaines très différents. D'une part le projet d'une machine universelle à manipuler des symboles, de Turing, et l'architecture cognitive fonctionnelle pour une machine, esquissée par von Neumann (1945), ont ouvert la voie à tous les systèmes de traitement pouvant être implémentés sur ordinateur. D'autre part, l'analyse des signes, ou plus exactement des systèmes de signes (dont la langue est le représentant le plus complexe) par Saussure a conduit à développer une approche structurale de toutes les productions culturelles humaines. C'est à la confluence de ces différents domaines que va naître ce qu'on a appelé les «sciences cognitives».

SIGNE ET OBJET (I): L'EVOLUTION DES PROBLEMATIQUES

Problématiques des rapports entre représentation et objet	Analyse des représentations dans leur rapport aux objets représentés	Nature des représentations
<p>De DESCARTES à KANT</p> <p>Du contenu des représentations du sujet aux objets de connaissance scientifique</p>	<p>Le rapport est analysé en termes de causalité :</p> <ul style="list-style-type: none"> - <i>hypothèse d'une correspondance entre le contenu de la représentation et l'objet représenté</i> (Descartes 1641) - <i>recherche de l'organisation interne du sujet requise pour passer du contenu à l'objet</i> (Kant 1772, 1781) 	<p>Les processus de pensée sont des processus purement MENTAUX. Cela implique un lien étroit entre les représentations du sujet et les objets.</p>
<p>De BOLZANO à HILBERT (1904)</p> <p>Rupture du lien sujet-objet: accessibilité de l'objet par invariance de référence de plusieurs représentations sémiotiques</p>	<p>Le rapport est analysé en termes de référence</p> <ul style="list-style-type: none"> - <i>méthode des variations par substitution limitée à la langue</i> (Bolzano 1837: annonce l'analyse structurale) - analyse du <i>mécanisme d'expansion discursive dans les écritures symboliques</i> et généralisation à la langue naturelle (Frege 1892) 	<p>La proposition étant prise comme unité de base de toute discursivité, les représentations SÉMIOTIQUES sont séparées des représentations metnales.</p>
<p>De HILBERT (1922) à TURING et à VON NEUMANN</p> <p>Rupture du lien signe-objet: dualisme des signes et des objets comme domaine d'application.</p> <p>Primat des organisations de signes sur les contenus de connaissance.</p>	<p>Le rapport est analysé en termes d'interprétation</p> <ul style="list-style-type: none"> - <i>substitution de la notion d'ensemble à celle d'intuition a priori</i> de l'espace et du temps (1873-1899) - les <i>arrangements de signes promus au statut d'objets</i> (Hilbert 1922) et la machine de Turing (1937) - machine avec une <i>architecture fonctionnelle</i> différenciant le rôle des représentations (von Neumann 1945) 	<p>Les SYSTÈMES sémiotiques comme des «SYSTÈMES DE PRODUCTION» d'information ou de sens.</p> <p>Privilège aux représentations sémiotiques permettant des traitements analysables en termes de «calculabilité»</p>

1. Du contenu des représentations du sujet aux objets de connaissance scientifique : les conditions d'un passage

Le mot *représentation* est bien compris et employé avec confiance, bien que sa signification ne puisse jamais être explicitée par une définition
Kant *L'unique fondement possible d'une démonstration de l'existence de Dieu*

L'analyse des représentations a commencé dès que l'on s'est interrogé sur les conditions de validité de la connaissance et que l'on a découvert que toute connaissance est inséparable d'une activité de représentation. La troisième des *Meditationes Metaphysicae* de Descartes est le premier texte où la problématique d'une telle analyse se trouve explicitement développée. Elle est toute entière centrée sur le contenu des représentations. Descartes propose que ce contenu soit examiné sous deux aspects à la fois¹ :

- relativement à l'objet représenté, pour décider s'il y a, ou non, correspondance entre le contenu de la représentation et l'objet représenté.

- relativement au sujet, pour savoir si le sujet peut être, ou ne peut pas être, à l'origine du contenu de la représentation.

Ces deux examens sont étroitement liés, car il s'agit de pouvoir établir des preuves d'existence pour les objets dont le sujet a des représentations. La certitude de la vérité des connaissances est à ce prix.

J'ignore même si elles sont véritables ou fausses et seulement apparentes, c'est-à-dire si les idées que je conçois de ces qualités sont en effet les idées de quelques choses réelles, ou bien si elles ne **représentent** que des êtres chimériques, qui ne peuvent exister

Descartes 1967, p.442

La démarche cartésienne d'une preuve d'existence repose alors sur le principe suivant : un objet représenté par une «idée en moi» existe, c'est-à-dire est «hors de moi» (1967, p. 434), si je ne peux pas être la seule cause du contenu de ma représentation : «l'être objectif de l'idée doit avoir une cause réelle» (1967, p.925) Deux traits vont donc caractériser cette problématique cartésienne de l'analyse des représentations.

Tout d'abord **la relation entre une représentation et son objet est analysée comme un rapport de causalité et non pas comme un rapport de référence**. Pour Descartes toute représentation est nécessairement produite soit par le sujet lui-même soit par un objet existant en dehors de lui. Analyser les représentations revient alors à déterminer si le sujet peut être la

¹ Descartes propose très exactement une analyse du contenu des «idées». Pour lui les «idées» relèvent d'une catégorie de pensées qui se distinguent des autres par le fait qu'elles **représentent quelque chose** : «entre mes pensées, quelques unes sont comme les images des choses, et c'est à celles-là seules que convient le nom d'idée : comme lorsque je me représente un homme, ou une chimère, ou le ciel, ou un ange, ou Dieu même...» (Descartes, 1967, p. 433). La notion cartésienne d'«idée», qui est par nature une représentation, doit être rapprochée de la notion husserlienne d'«acte objectivant» introduite pour l'analyse des contenus des vécus intentionnels (Husserl 1972, p. 289-293).

SIGNE ET OBJET (I): L'EVOLUTION DES PROBLEMATIQUES

seule cause de leur contenu ou si, au contraire, il ne peut pas l'être. Dans le premier cas, aucun objet existant ne correspond au contenu de la représentation. Ou, du moins, le sujet ne peut en avoir aucune certitude. Dans le second cas il y a un objet qui non seulement est la cause réelle de la représentation mais qui correspond au contenu de cette représentation. Mais cette correspondance pouvant être plus ou moins grande selon les représentations, Descartes introduit une distinction entre cause formelle et cause éminente (Vuillemin 1962, p. 23-25). Cela lui permet de séparer deux catégories de représentations, celles où la correspondance entre le contenu de la représentation et l'objet représenté est en quelque sorte complète et celles où le contenu de la représentation est déficient par rapport à l'objet représenté :

Tout ce que nous concevons comme étant les objets des idées, tout cela est objectivement, ou par représentation, dans les idées mêmes. Les mêmes choses sont dites être *formellement* dans les objets idées, quand elles sont en eux telles que nous les concevons; et elles sont dites y être *éminemment*, quand elles n'y sont pas à la vérité telles, mais qu'elles sont si grandes, qu'elles peuvent suppléer à ce défaut par leur excellence.

(Descartes 1967, p. 587)

Ainsi le contenu de toute représentation d'un objet que l'on pense infini est déficient par rapport à l'objet représenté et le rapport entre celui-ci et sa représentation est un rapport de causalité éminente. Cependant cette distinction s'est révélée peu puissante puisqu'elle permet uniquement de séparer les représentations relatives à des objets métaphysiques et celles relatives à des objets mathématiques. Toutefois elle témoigne du projet, central dans la démarche cartésienne, de se donner les moyens d'une analyse systématique des représentations qui s'en tienne au seul contenu des représentations. Car le sujet ne dispose que de ce seul contenu s'offrant à sa conscience actuelle pour construire une connaissance vraie. Et cela explique le deuxième trait de cette problématique cartésienne entièrement centrée sur la détermination de l'origine du contenu des représentations.

Il n'y a **aucune séparation entre les deux «faces», subjective et objective, de la représentation**, comme cela sera le cas à partir de Bolzano et en réaction contre Kant. Cette non-séparation le conduit à prendre **la certitude** et l'évidence comme les critères (subjectifs) du caractère objectif du contenu des représentations, et donc de la vérité de la connaissance : «tout ce que nous apercevons clairement est vrai, et ainsi qu'il existe, ...» (Descartes 1967, p. 925). Notons que cet accent mis sur la certitude, et donc sur la conviction, a retrouvé une certaine actualité dans les propos sur la preuve et sur la démonstration en mathématiques. Mais notons également que cela conduit à privilégier la valeur modale des propositions énoncées et à ne pas se limiter à leur contenu, comme le montre la suite de la citation précédente : «... si nous apercevons qu'il ne puisse pas ne pas exister; ou bien qu'il peut exister, si nous apercevons que son existence soit possible». La **certitude cartésienne** se fonde sur la prise de conscience d'**une nécessité strictement logique**.

Historiquement, c'est le premier trait de la problématique cartésienne qui a d'abord soulevé des difficultés : peut-on véritablement analyser le rapport de la représentation à l'objet comme un rapport de causalité, en attribuant la valeur objective du contenu d'une représentation uniquement à ce qui ne pourrait pas résulter du sujet qui la produit ? C'est Kant qui, dans sa célèbre lettre de 1772 à Marcus Herz, a clairement formulé cette question :

Je me demandais, en effet, sur quel fondement repose le rapport de ce qu'on nomme en nous représentation à l'objet. Si la représentation ne contient que la façon dont le *sujet* est affecté par l'objet, il est facile de voir comment elle lui correspond comme un effet à sa cause... De même si ce qu'on appelle en nous représentation était *actif* vis-à-vis de l'*objet*, c'est-à-dire par là même pouvait être produit... alors la conformité des représentations aux objets serait aussi intelligible... Mais notre entendement n'est pas, par

SIGNE ET OBJET (I): L'ÉVOLUTION DES PROBLÉMATIQUES

ses représentations, la cause de l'objet pas plus que l'objet n'est cause des représentations de l'entendement... Comment donc était possible autrement une représentation qui se rapporte à un objet sans être d'aucune façon affectée par lui, voilà ce que j'avais passé sous silence.

(Kant 1980, p.691-692)

Cette question va conduire Kant à effectuer deux déplacements par rapport à la problématique cartésienne.

Le premier porte sur la manière d'analyser la relation des représentations aux objets. Il ne s'agit plus de regarder le contenu des représentations pour les classer en termes de fiabilité, c'est-à-dire pour déterminer celles pour lesquelles on peut être sûr qu'il y a un objet derrière le contenu qu'elles présentent. Cela doit être exclu puisque la causalité n'est pas toujours la notion adéquate pour analyser cette relation. Il s'agit plutôt de rechercher les conditions qui rendent possibles l'accès aux objets à travers le contenu des représentations :

De ces connaissances scientifiques, puisqu'elles sont réellement données, **il convient de se demander comment elles sont possibles...**

J'appelle *transcendantale* toute connaissance qui s'occupe en général non pas des objets que de notre mode de connaissance des objets **en tant qu'il est possible.**

(Kant 1980, p. 773, 777)

Le deuxième déplacement résulte du précédent et porte sur le sujet. Le sujet n'est plus considéré comme une nature intellectuelle simple¹ (appelée la pensée, la conscience...) source d'opérations transparentes et homogènes, mais comme une totalité complexe de structures très différentes (Kant les désignant comme les «éléments de la raison pure» Kant 1980 p. 780). Chercher les conditions qui rendent possibles l'accès aux objets revient alors à analyser *les structures qui constituent le sujet de manière à ce qu'il soit capable de produire des représentations scientifiquement fiables* dans le domaine des mathématiques et dans celui de la physique (nous sommes encore dans la seconde moitié du XVIIIème). C'est cette analyse qui est exposée dans la *Critique de la Raison pure*, analyse que Kant présente comme une «architectonique» de la subjectivité transcendantale, c'est-à-dire comme un système complexe de fonctionnement du «sujet épistémique», selon l'expression employée par Piaget.

La philosophie transcendantale est l'idée d'une science dont la critique de la raison pure doit tracer le plan tout entier de façon *architectonique*.

J'entends par architectonique l'art des systèmes

(Kant 1980, p.778, 1384)

De ce point de vue, la philosophie transcendantale de Kant peut être considérée comme le

¹ Descartes identifie le sujet à la conscience immédiate de soi en tant que source de l'acte effectué maintenant. Certes, Guerout a montré que le Cogito de Descartes n'est pas l'intuition d'un moi empirique mais l'aperception simple de son être comme nature intellectuelle (Guerout 1954, p.57-67). Cette opposition d'inspiration kantienne est trompeuse. Car le terme «empirique» fait se confondre le point de vue phénoménologique d'une analyse sémantique des vécus de la conscience et le point de vue phénoménal d'une psychologie qui se fonde sur l'observation externe. En réalité toute l'originalité de la problématique cartésienne consiste dans le fait qu'elle est à la fois épistémologique et phénoménologique. Il suffit de relire les *Méditations cartésiennes* de Husserl pour s'en convaincre. C'est seulement avec Kant que la dissociation des deux points de vue va s'opérer, ces deux points de vue se trouvant d'ailleurs déplacés respectivement vers un point de vue cognitif et un point de vue phénoménal. On peut relire Descartes à la lumière des distinctions introduites par Kant, mais cela conduit à méconnaître les déplacements considérables de problématique survenus entre ces deux démarches de pensée.

SIGNE ET OBJET (I): L'EVOLUTION DES PROBLEMATIQUES

premier projet d'une approche cognitive, et non pas épistémologique, de l'acquisition des savoirs. Car elle tente de répondre à la question suivante : quelles sont les sources d'informations nécessaires et quelles sont les structures requises pour qu'un système (ici, le sujet en tant que «raison pure») puisse produire un type de réponse approprié ?

Présenter ainsi la philosophie transcendantale pourra sembler provocateur à un lecteur philosophe comme à un spécialiste d'intelligence artificielle, tellement la *Critique de la Raison pure* est éloignée de toute préoccupation d'élaboration d'un système-expert susceptible de fonctionner sur ordinateur. Mais le projet d'une «architecture de la raison pure» annonce bien «l'architecture de la cognition» : car il s'agit bien de décrire un système capable de produire des connaissances, système qui doit nécessairement être composé de sous-systèmes remplissant chacun une fonction spécifique comme von Neumann l'indiquait en 1945 dans son *First Draft of a report on the EDVAC*. Et c'est par rapport à ce projet, à la fois en continuité et en rupture, que toute la réflexion épistémologique sur la connaissance mathématique et sur la logique s'est développée au XIX^{ème} (Couturat, 1896), réflexion qui a préparé la modélisation, au XX^{ème}, de systèmes capables de traiter formellement des symboles. Pour bien comprendre ce développement ultérieur, rappelons d'abord les deux caractéristiques spécifiques de la problématique kantienne de l'analyse des représentations.

La première est **l'assimilation des structures du sujet à des représentations a priori**. Par exemple, les relations d'extériorité et de succession, en tant que représentations a priori de l'espace et du temps, structurent l'intuition sensible c'est-à-dire la réception de toute information d'ordre phénoménal. Pour Kant, les structures du sujet sont de deux types : celles, que nous venons de prendre comme exemple, relatives à l'organisation nécessairement spatiale et temporelle de toute expérience possible, et celles, catégoriales, relatives au jugement.

La seconde caractéristique est une **subordination de la réalité de l'objet**, de son existence, **au respect du fonctionnement représentatif de ces deux types de structure cognitive**. Ce sont les structures cognitives du sujet qui commandent les possibilités de connaissances scientifiques, même si la reconnaissance effective de la validité des connaissances requiert une autre condition que Kant a tenté de formaliser par sa célèbre distinction entre jugement analytique et jugement synthétique (Kant 1980, p. 765-772, 851-852, 866-870). Ainsi il ne peut y avoir de connaissance possible que par les jugements synthétiques, c'est-à-dire par l'application des concepts catégoriaux soit aux structures intuitives a priori de l'expérience soit aux données a posteriori de l'expérience¹. En d'autres termes, c'est seulement quand il y a coordination entre les systèmes conceptuels et intuitifs de représentation a priori du sujet qu'il peut y avoir un objet de connaissance.

On voit alors toute l'ambiguïté de la problématique kantienne : elle veut apporter une réponse essentiellement cognitive à des problèmes qui sont d'ordre épistémologique. Les oppositions réductrices entre psychologie et logique qui apparaîtront durant la seconde moitié du XIX^{ème} siècle ont leur origine dans cette ambiguïté de la problématique kantienne de l'analyse des représentations. Mais retenons en d'abord la conséquence immédiate et souvent dénoncée pour les mathématiques : la connaissance mathématique ne serait possible, ou ne serait valide, que dans la mesure où elle se fonderait sur l'intuition ou, plus précisément, sur ces représentations

¹ Pour bien comprendre l'importance historique de la distinction entre jugement analytique et jugement synthétique, il faut se rappeler que c'est contre la thèse kantienne (les jugements mathématiques seraient des jugements synthétiques) que les mathématiciens du XIX^{ème} ont cherché à mettre en évidence un fondation purement logique de la géométrie (Gauss, Helmholtz, Russell) et de l'arithmétique (Dedekind, Frege).

SIGNE ET OBJET (I): L'EVOLUTION DES PROBLEMATIQUES

relationnelles a priori de l'extériorité (l'espace !) et de la succession (le temps !) qui constituent le cadre organisateur de la perception des phénomènes. Il s'agit là d'une restriction cognitive des fondements de la connaissance mathématique. Or cette restriction revient à exclure des mathématiques aussi bien l'algèbre que l'analyse, domaines qui, au temps de Kant, étaient déjà en plein essor¹.

¹ C'est dans le domaine de l'analyse que la remise en cause la plus forte du modèle kantien apparaîtra de la façon la plus radicale. Ainsi la nécessité d'une construction des nombres entiers s'est imposée à partir du moment où le continu linéaire et les grandeurs mesurables ne pouvaient plus servir de référence, c'est-à-dire de fondement intuitif, pour rendre compte des nombres réels et où, pour distinguer les nombres rationnels (densité) et les nombres irrationnels (continuité), il a fallu chercher une autre base (Nichanian, p. 59-62).

2. Rupture du lien sujet-objet : émergence de la nature sémiotique des représentations et détermination de l'objet comme l'invariance de référence de plusieurs représentations sémiotiques

Il est bien certain que nous avons besoin des signes sensibles pour penser...
Que personne ne méprise les signes, tant dépend de leur choix pertinent ! Et leur valeur n'est pas amoindrie si après un long usage il n'est plus nécessaire de produire effectivement le signe...On n'en pense pas moins dans les mots et, sinon dans les mots, dans des signes mathématiques, ou d'autres encore...
Frege *Que la science justifie le recours à une idéographie*

C'est en raison de la restriction kantienne concernant les fondements de la connaissance mathématique que Bolzano a été conduit à postuler **une opposition, et même une rupture, entre la pensée en tant qu'activité du sujet et l'objet** (Sébestik 1992, p.26, 29, 128). Car, pour Bolzano, ce qui est en question dans l'approche cognitive du système du sujet faite par Kant, c'est l'indépendance de l'objet et donc la **vérité** : la vérité ne dépend pas des lois de fonctionnement de la pensée humaine mais de la science, laquelle ne peut être que «démonstration, c'est-à-dire logique» (Sébestik 1992, p.27, 293). Ainsi, à une architectonique de la raison pure, Bolzano va opposer une théorie de la science (*Wissenschaftslehre* 1837) centrée sur les enchaînements objectifs de vérités et sur l'élucidation du fondement des objets, à commencer par celui des objets logiques, les «propositions *en soi* » et les «représentations *en soi*» (Sébestik 1992, p. 21, 115, 287, 478). *La théorie de la science* de Bolzano marque le point de départ d'une réflexion sur les fondements des mathématiques. L'émergence des axiomatiques formelles avec Dedekind, Hilbert et Zermelo, s'inscrit dans ce mouvement dont Bolzano a été l'initiateur¹.

a. La notion bolzanienne d'objet et l'analyse des représentations par la méthode des variations par substitution

Toute l'analyse que Bolzano fait des représentations est commandée par le principe de l'indépendance de l'objet au regard de l'activité par laquelle le sujet en acquiert la connaissance². Or comment reconnaître qu'un objet existe indépendamment de la représentation qui y fait accéder sans recourir au principe de causalité, comme Descartes le faisait, et donc sans se donner la possibilité implicite de caractériser l'existence des objets de la même manière que la réalité des choses physiques ? Pour résoudre ce problème, **Bolzano inverse en quelque sorte la relation sémiotique entre la notion objet et celle d'existence,**

¹ Au plan de l'histoire factuelle, signalons que Bolzano et Gauss ont suivi les cours de Kästner et, surtout, que Dedekind a utilisé les travaux de Bolzano (Sébestik 1992, p.34, 126, 451-452)

² Sur la séparation entre représentation et objet (ou objectualité) voir Brentano 1993 §13.

SIGNE ET OBJET (I): L'EVOLUTION DES PROBLEMATIQUES

en faisant de la première une notion plus générale que la seconde. Et cela le conduit à deux des idées directrices de sa *Théorie de la science* (Sebestik 1992, p.131-133):

— la notion d'objet s'oppose à celle de «rien», c'est-à-dire à la négation de «quelque chose».

— il y a deux modes d'existence : la «réalité» (*Wirklichkeit*) et la «subsistance sans prétention à la réalité». Le mode d'existence des choses réelles se caractérise par la possibilité d'agir (*wirken*) : c'est «l'insertion d'un être dans un réseau de relations causales» qui constitue la réalité de quelque chose. La subsistance non réelle, au contraire, se caractérise par le seul fait que l'on puisse référer à quelque chose dans une opération discursive de quantification. Pour la désigner, Bolzano emploie l'expression *es gibt*, «il y a», laquelle correspond au quantificateur existentiel, « \exists ».

On voit donc que la notion d'objet implique nécessairement l'un de ces deux modes d'existence. A ce titre ce serait une tautologie de considérer l'existence comme un prédicat que l'on pourrait attribuer à un objet. Cependant, le progrès de la connaissance repose sur le fait que l'on peut dire d'un objet s'il existe vraiment ou non. Bolzano en est parfaitement conscient mais pour lui cette formulation est imprécise. **Car, dans ce cas, l'existence n'est pas prédiquée d'un objet mais d'une représentation.** Cela veut dire que l'on affirme qu'un objet (donc par définition quelque chose ayant une existence réelle ou une existence de simple subsistance) correspond au contenu d'une représentation objective ou encore qu'une représentation n'est pas vide, selon la terminologie bolzaniennne que nous allons expliquer :

Un concept (une représentation) est objectif (*gegenständlich*) s'il représente, s'il dénote un objet, c'est-à-dire s'il y a un objet qui tombe ou qui est subsumé sous ce concept; sinon le concept est sans objet, vide. Un jugement d'existence est donc en réalité une proposition qui énonce l'*objectualité d'un concept*.

Sebestik 1992, p.132.

Cela conduit à introduire deux dichotomies dans l'analyse des représentations.

La première est une **séparation nette entre les représentations subjectives et les représentations en soi (ou objectives)**. Pour bien comprendre cette séparation il nous faut considérer la distinction entre proposition en soi (*Satz an sich*), jugement et énoncé. Le **jugement** est l'acte mental du sujet. L'**énoncé** est l'expression linguistique affirmant quelque chose et, à ce titre, susceptible d'être vraie ou fausse. La **proposition en soi**, notion introduite par Bolzano, n'est ni le jugement ni l'énoncé mais est d'une certaine façon le sens de l'énoncé qui peut être saisi par plusieurs personnes ou rester totalement ignoré (Sebestik p.117-119, 123). Ce sont là trois objets, le jugement et l'énoncé ayant un mode réel d'existence, une proposition en soi n'ayant qu'un mode de simple subsistance. Il y a évidemment des relations entre ces trois objets : le jugement est la saisie d'une proposition en soi, et l'énoncé est l'expression d'une proposition en soi que l'on suppose en accord avec le jugement. Mais ces relations sont secondaires par rapport à la différence ontologique qui sépare les jugements et les énoncés d'une part, et les propositions en soi d'autre part. D'un côté il y a les liens réels entre les idées, lesquels relèvent des mécanismes d'ordre causal dans le fonctionnement de la pensée et de l'autre il y a la connexion objective entre les propositions qui relève uniquement des phénomènes de vérité et de sens. La différence des modes d'existence exclut non seulement qu'on puisse les confondre mais également qu'on puisse les subordonner les uns aux autres. Les représentations en soi, ou représentations objectives, sont les parties constituantes des propositions en soi, et les représentations subjectives, ou représentations mentales selon la terminologie couramment utilisée maintenant, sont les représentations qui «existent réellement dans l'esprit d'un être» (Sebestik 1992, p.134, 136, 146). L'oubli de la séparation radicale entre

SIGNE ET OBJET (I): L'EVOLUTION DES PROBLEMATIQUES

les représentations mentales et les représentations objectives ne peut conduire qu'à de graves confusions.

Reste alors la question essentielle, celle du rapport entre une représentation en soi et l'objet mathématique représenté par elle ou subsumé par elle. **La grande originalité de Bolzano est d'avoir utilisé, pour analyser les représentations en soi et les propositions, la méthode des variations qu'il venait d'employer pour définir les fonctions** (Sebestik 1992, p. 27, 195). De même que l'on peut étudier une fonction en substituant successivement les valeurs de sa (ou de ses) variable(s) indépendante(s), de même on peut étudier une représentation en soi ou une proposition en considérant certains de leurs constituants comme des variables pour lesquels on substitue différentes représentations déterminées. Par exemple:

Déclarer le constituant «homme» comme variable dans la représentation «un homme sage» revient donc à considérer toutes les représentations formées à partir de celle-ci par substitution à «homme»: «un philosophe sage», «un élève sage», «un animal sage» etc.

(Sebestik 1992, p. 189 (Wissenschaftlehre I §69))

Cependant cette méthode des variations est soumise à une condition stricte qui nous renvoie à la seconde dichotomie: ne pas transformer une représentation objectuelle, c'est-à-dire dénotant un objet, en une «**représentation vide**» c'est -à-dire une représentation «sans objet» (Sebestik 1992, p. 205). Ce qui serait le cas si à «homme», dans la représentation «un homme sage», on substituait «table», on aurait la représentation «une table sage» qui est une représentation vide au même titre que «une vertu verte». Il faut en d'autres termes que les représentations obtenues par substitution restent des expressions acceptables en respectant au moins les contraintes sémantiques de la langue. **On aura reconnu dans cette application de la méthode des variations par substitution celle même qui, à la suite de Saussure, sera mise en oeuvre dans l'analyse structurale de la langue tant au plan phonétique qu'au plan sémantique.** Mais ce n'est pas dans cette direction de l'analyse des systèmes de représentation que Bolzano oriente l'application de sa méthode des variations. Il propose qu'ensuite on «examine la valeur de vérité des propositions ainsi obtenues à partir de la forme propositionnelle initiale» (Sebestik 1992, p.204). Pour Bolzano la vérité et, par suite, les conditions de vérifiabilité, restent les seuls critères acceptables du sens. On aura remarqué que le seul fait d'utiliser cette méthode des variations par substitution implique qu'il y ait entre les représentations en soi et les énoncés une liaison intrinsèque alors que la liaison entre les énoncés et les jugements est extrinsèque, car elle peut changer selon les individus

Ce que Bolzano appelle les «représentations vides» mérite une attention toute particulière. Il ne s'agit pas d'un phénomène accidentel qui concernerait les représentations subjectives, c'est-à-dire les représentations mentales d'un individu. Il s'agit d'un **phénomène essentiel qui tient à la nature sémiotique des représentations objectives**. Pour le comprendre il suffit de se rappeler la méthode des variations par substitution: elle permet de générer tout aussi bien des représentations objectuelles que des représentations vides par le seul fait qu'elle repose sur les possibilités de combinaisons syntaxiques et sémantiques qu'offre un système sémiotique. Cela veut dire, pour reprendre une distinction de Brentano, que les représentations vides ne sont pas liées aux jugements mais aux énoncés et à la possibilité d'une discordance entre jugement et énoncé. On peut ainsi avoir des représentations vides aussi bien dans une langue naturelle (expressions contradictoires «carré rond», termes indéterminés «rien», «qui»...) que dans le développement de notations symboliques (les représentations «0» et de « $\sqrt{-1}$ » parce qu'*«il ne saurait y avoir de grandeur représentée par 0 ou par $\sqrt{-1}$ »*). Même si, comme Sebestik le remarque: «les représentations «0» et « $\sqrt{-1}$ » ne sont pas vides

SIGNE ET OBJET (I): L'EVOLUTION DES PROBLEMATIQUES

pour nous; ces deux représentations désignent des objets abstraits, mais parfaitement déterminés et uniques» (p. 184), l'analyse bolzanienne de ces symboles pointe le rôle fondamental et prioritaire que les signes jouent, par rapport aux «concepts», dans le développement des connaissances mathématiques. Mais citons ici Bolzano lui-même dans l'un de ses derniers textes, qui est aussi l'un de ses rares textes traduits en français :

Il est indiscutable que le concept associé par tous les mathématiciens au symbole 0 est tel qu'il vérifie les deux équations :

$$A - A = 0 \quad A \pm 0 = A$$

où A est une expression de grandeur quelconque, qui peut correspondre à une grandeur réelle ou être absolument sans objet.

On concédera qu'une telle définition n'est viable que si le symbole 0 n'est pas considéré comme une grandeur réelle, mais comme une simple absence de grandeur... De toute évidence, il existe en mathématique d'autres symboles usuels de grandeur qui sont **des symboles vides**. Ainsi en Analyse, le symbole $\sqrt{-1}$ devenu si extraordinairement important. *Ce n'est cependant pas là une raison suffisante pour considérer et traiter tous ces symboles comme équivalent à 0*

Bolzano 1993 § 34

b. De Bolzano à Frege : la recherche d'une représentation sémiotique non linguistique des opérations discursives constituant la démonstration

C'est avec Frege que la problématique d'une théorie de la science centrée sur les enchaînements objectifs de vérités va conduire à une analyse systématique des énoncés, en tant qu'ils sont intrinsèquement liés aux représentations et aux propositions en soi, de façon à **contrôler méthodiquement les conditions du passage de l'un à l'autre et la continuité de ce passage** :

Das ideal einer streng wissenschaftlichen Methode der Mathematik, das ich hier zu verwirklichen gestrebt habe, und das wohl nach Euclid benannt werden könnte, möchte ich so schildern. Dass Alles bewiesen werde, kann zwar nicht verlangt werden, weil es unmöglich ist; aber **man kan fordern, dass alle Sätze, die man braucht, ohne sie zu beweisen, ausdrücklich als solche ausgesprochen werden**, damit man deutlich erkenne, worauf der ganze Bau beruhe. Es muss danach gestrebt werden, die Anzahl dieser Urgesetze möglichst zu verringern, indem man Alles beweist, was beweisbar ist. **Ferner, und darin gehe ich über Euklid hinaus, verlange ich, dass alle Schluss- und Folgerungsweisen, die zur Anwendung komme, vorher aufgeführt werden**. Sonst ist die Erfüllung jener ersten Forderung nicht sicher zu stellen...

Durch die Lückenlosigkeit der Schlussketten wird erreicht, dass jedes Axiom, jede Voraussetzung, oder wie man es sonst nennen will, auf denen ein Beweis beruht, ans Licht gezogen wird; und so gewinnt man eine Grundlage für der erkenntnisstheoretischen Natur der bewiesenen Gesetzes..

Frege 1893, p. VI-VII.

Cet idéal d'une démarche de connaissance scientifique **qui ne soit que démonstration**, Frege a tenté de le réaliser en cherchant à établir l'arithmétique **sur des bases exclusivement logiques** sans aucun recours à l'intuition, fût-ce celle de succession :

In meine *Grundlagen der Arithmetik* habe ich wahrscheinlich zu machen gesucht, dass die Arithmetik ein Zweig der Logik sei und weder der Erfahrung noch der Anschauung irgendeinen *Beweisgrund* zu entnehmen brauche. In diesem Buche soll dies nun dadurch bewährt werden, dass **allein mit logischen Mitteln die einfachsten Gesetze der Anzahlen abgeleitet werden**. Damit dies aber überzeuge, müssen erheblich höhere Ansprüche *an die Beweisführung* gestellt werden, als in der Arithmetik üblich ist. Ein Kreis von wenigen Schluss und Folgerungsweisen muss vorher abgegrenzt werden, und **kein Schritt** darf

SIGNE ET OBJET (I): L'EVOLUTION DES PROBLEMATIQUES

geschehen, der nicht einer von diesen gemäss wäre. Man darf sich also *beim Uebergange zu einem neuen Urtheil* nicht daran genügen lassen, wie es die Mathematiker bis jetzt wohl fast immer thun, dass er als richtig einleuchte, **sondern man muss ihn in die eindachen logischen Schritte zerlegen**, aus denen er besteht, und das sind oft gar nicht wenige.

Frege 1893 p. 1

Et, pour réaliser cet idéal, Frege a franchi **le pas que Bolzano s'était finalement refusé à faire : ne pas se limiter à ce registre de représentation qu'est la langue naturelle.**

Malgré l'effort de séparer la forme linguistique des propositions et de représentations de leur sens, Bolzano ne met pas en question la fonction catégorielle du langage, le découpage du réel que chaque langue opère à sa manière... Pour Bolzano le langage est un système quasi-transparent d'expression et de communication qui reproduit la composition des représentations et leur enchaînement dans les propositions, le langage ne fait que révéler les structures significatives qui constituent un domaine théorique absolu..

Sebestik 1992, p.168-169

Au contraire, avec sa *Begriffsschrift*, Frege a tenté de créer **un registre de représentation différent de celui des langues naturelles**. Et cela dans le but de pouvoir effectuer, de façon totalement transparente et totalement contrôlable, **par la seule appréhension visuelle**, les opérations discursives nécessaires à la démonstration¹:

Die Beweise selbst enthalten keine Worte, sondern sind allein mit meinen Zeichen geführt. Sie stellen sich dem Auge dar als eine Reihe von Formeln, die durch ausgezogene oder unterbrochene Striche oder andere Zeichen getrennt sind. Jede dieser Formeln ist ein vollständiger Satz mit allen Bedingungen, die zu seiner Gültigkeit nothwendig sind. Dieser Vollständigkeit, welche stillschweigend hinzuzudenkende Voraussetzungen nicht duldet, scheint mir für die Strenge der Beweisführung unentbehrlich zu sein.

Frege 1893 p. V-VI

c. la distinction frégréenne ou la dualité sens/objet constitutive des représentations sémiotiques

Si l'entreprise frégréenne pour fonder l'arithmétique sur des bases exclusivement logiques a échoué, elle a cependant ouvert la voie à une approche à la fois logique et cognitive du fonctionnement discursif de la démonstration. Elle a permis en particulier de dégager des principes communs pour ce fonctionnement discursif, que celui-ci se fasse dans le registre de la langue naturelle ou dans celui des écritures symboliques. Ces principes expliquent à la fois la fécondité et la rigueur de ce qu'on désigne génériquement sous le terme de «raisonnement» et qui recouvre aussi bien des démarches de type calcul que de type déduction ou de type argumentation. La célèbre distinction entre *Sinn* et *Bedeutung* permet de formuler l'un de ces principes. Elle a donné lieu à de nombreux débats de nature sémantique sur la référence, qui en ont fait oublier l'intérêt au profit de problèmes techniques particuliers (Russell 1905, Quine 1972, Strawson 1971, Ducrot 1972). Aussi est-il important de rappeler la question qui a conduit Frege à introduire cette distinction : comment rendre compte de la fécondité d'égalités du type $a = b$ par rapport à $a = a$? Citons le début de l'article qui n'a été connu qu'à partir de la critique que Russell en fit (1905) !

¹ Même si le système d'écriture conceptuelle de Frege ne s'est pas imposé, il a contribué de façon décisive à l'instauration des langues formelles qui s'est réalisée avec Peano et Russell.

SIGNE ET OBJET (I): L'EVOLUTION DES PROBLEMATIQUES

La notion d'égalité propose à la réflexion quelques questions irrémédiables auxquelles il n'est pas aisé de répondre. Est-ce une relation ? Une relation entre des objets, ou entre des noms ou signes d'objets ? Cette dernière hypothèse fut la mienne dans la *Begriffsschrift*. Diverses raisons semblent parler en ce sens : $a = a$ et $a = b$ sont des propositions qui n'ont pas, la chose est évidente, même valeur de connaissance : $a = a$ est *a priori* et, selon Kant, analytique, tandis que les propositions de la forme $a = b$ ont bien souvent un contenu fort précieux pour le progrès de la connaissance, et elles n'ont pas toujours un fondement *a priori*. La découverte que chaque matin se lève le même soleil, et non pas un nouveau soleil, a bien été une découverte les plus fécondes de l'astronomie. Aujourd'hui encore, l'identité d'une petite planète ou d'une comète ne va pas toujours de soi. Or si l'on voulait voir dans l'égalité une relation entre ce que dénotent respectivement les noms «a» et «b», $a = b$ ne pourrait pas, semble-t-il, différer de $a = a$, à supposer que la proposition $a = b$ soit vraie.

Frege 1971, p.102

Il s'agit donc là d'un problème cognitif et épistémologique avant d'être une simple question de logique. C'est déjà le problème que Kant avait tenté de résoudre en distinguant les jugements analytiques et les jugements synthétiques. Et c'est ce même problème que, par exemple, Piaget considère comme «la question cruciale de toute théorie de l'intelligence» (1968, p. 364) et qu'il cherche à résoudre par un mécanisme d'équilibration entre les deux fonctions adaptatives de tout organisme, celle d'assimilation et celle d'accommodation. Or, pour résoudre ce problème, Frege se réfère à la fois au domaine des mathématiques (en prenant comme situation typique les égalités de la forme $a = b$) et à un domaine non mathématique (en prenant comme exemple l'identification d'un même objet astronomique dans les observations de deux phénomènes différents...). On voit donc que Frege considère comme **un progrès de la connaissance, aussi bien mathématique que non mathématique, le fait de reconnaître deux représentations différentes comme deux représentations d'un même objet**. Précisons la portée de la réponse fregeenne. Toute représentation peut se référer à un objet, du moins pour le sujet qui la produit. Mais si le sujet ne dispose que de cette seule représentation, l'objet qu'il pense identifier à travers elle ne peut pas être dissocié de cette représentation : l'objet se confond avec la représentation que l'on en a et il y a alors autant d'objets qu'il y a de représentations. La connaissance, scientifique ou non, ne commence que lorsque que le sujet devient capable d'identifier un même objet sous des représentations différentes, c'est-à-dire lorsqu'il dispose de plusieurs représentations possibles pour un même objet. Et cela se traduit par le fait que le sujet peut passer d'une représentation à l'autre, selon les besoins d'un traitement à effectuer. Et on pourrait donner d'autres exemples en s'en tenant aux mathématiques.

Qu'est-ce qui permet de «voir» dans une droite dessinée dans un système d'axes de coordonnées et dans une relation $y = ax + b$ deux représentations d'un même objet, si ce n'est que je sais déjà que ces objets, la droite dessinée et la relation algébrique, peuvent être des représentations d'un même objet. Autrement dit l'objet commun aux deux «représentations» n'est pas un donné... mais une construction historiquement datée (l'invention de la géométrie analytique par Descartes et Fermat)...

R. Bkouche *Lettre*

La célèbre distinction entre *Sinn* et *Bedeutung* n'est que la formulation de cette réponse de Frege au problème cognitif et épistémologique qui, depuis Kant, n'a cessé d'être abordé dans des cadres théoriques différents, celui de la nature et des conditions du progrès ou du développement des connaissances :

Si l'on admet que le signe «a» se distingue du signe «b» en tant qu'objet seulement (ici, par sa seule forme) et non en tant que signe, en tant qu'il désigne quelque chose, alors la valeur de connaissance de $a = a$ serait essentiellement identique à celle de $a = b$, à supposer que la proposition $a = b$ soit vraie. On ne saurait les distinguer que si la différence des signes correspond à une différence dans la manière dont l'objet désigné est donné...

SIGNE ET OBJET (I): L'EVOLUTION DES PROBLEMATIQUES

Or il est naturel d'associer à un signe (nom, groupe de mots, caractères) outre ce qu'il désigne et qu'on pourrait appeler sa dénotation, ce que je voudrais appeler le sens du signe, **où est contenu le mode de donation de l'objet.**

Frege 1971 p.103

Comme on le voit, Frege distingue soigneusement deux plans concernant l'objet.

— le plan de l'objet en soi, lequel est indépendant des multiples désignations que l'on peut en faire, des multiples représentations que l'on peut en donner ...

— le plan des désignations, des représentations ou des manifestations multiples de l'objet, chacune pouvant se faire en fonction de caractéristiques ou de propriétés différentes de l'objet et n'ayant donc pas le même contenu que les autres. (Rappelons, au risque d'être fastidieux, qu'il ne faut pas confondre l'objet et le contenu d'une représentation. Deux représentations d'un même objet peuvent avoir des contenus très différents...)

Or ce qui est essentiel est le fait qu'**un seul de ces deux plans est accessible** : celui des désignations, des représentations ou des manifestations multiples. L'objet en soi n'est pas accessible indépendamment de représentations ou de désignations multiples qui permettent d'y référer, ou de manifestations qui le rendent «présent» (*prae sensibus*). *Si nous avions la possibilité d'un accès direct à l'objet indépendamment du plan des représentations ou des manifestations multiples, il n'y aurait pas réellement d'acquisition et de progrès dans la connaissance.* Car, dès la première représentation, l'objet serait d'emblée distingué du contenu particulier de sa représentation et il serait alors instantanément reconnu dans une autre représentation. Découvrir que deux représentations différentes renvoient au même objet ne constituerait pas une découverte. Autrement dit «la découverte que chaque matin se lève le même soleil, et non pas un nouveau soleil» n'aurait pas été «une découverte les plus fécondes de l'astronomie». Dès le premier jour de leur existence les premiers hommes auraient su que c'est bien la même chose qui, s'étant levée à l'orient et disparaissant dans la direction opposée, va réapparaître le lendemain, et non pas un autre semblable comme, au printemps, ces feuilles nouvelles qui viennent reformer les frondaisons disparues à l'automne. Et de même, il n'aurait pas fallu attendre Descartes et Fermat pour reconnaître dans deux types de représentation déjà bien connues, les formes des sections coniques et celles d'équations du second degré, deux types de représentations des mêmes objets !

On voit alors apparaître la grande nouveauté de l'analyse frégréenne de la connaissance, à travers sa distinction entre sens et référence (dénotation) : **elle relie de façon nécessaire et étroite les signes et les objets dans le processus de la connaissance.** Car celle-ci consiste dans l'interaction entre le plan des objets eux-mêmes et la plan des modes de leur présentation ou de leur donation. Et précisons que pour Frege, ce que nous avons appelé «représentations multiples de l'objet» concerne les descriptions différentes que l'on peut en avoir à travers une langue, un système graphique ou même des instruments. Et cela ne doit pas être du tout confondu avec les représentations subjectives des sujets, c'est-à-dire leurs croyances, leurs associations, leurs impressions, qui elles sont propres à chacun et sont strictement incommunicables (Frege 1971, p. 105-107, 181-183). De ce point de vue Frege reste bolzanien : il sépare radicalement les jugements -subjectifs- de l'individu et les énoncés -objectifs- liés aux possibilités et aux règles constitutives d'un système sémiotique.

d. Interprétations et méprises concernant la distinction frégréenne

SIGNE ET OBJET (I): L'EVOLUTION DES PROBLEMATIQUES

Pour bien comprendre que la distinction frégréenne permet une approche nouvelle de la notion d'objet, il nous faut d'abord nous arrêter sur l'interprétation classique qui en est faite. Deux hypothèses la commandent :

- (a) la distinction sens/ référence serait entièrement subordonnée à la possibilité d'effectuer l'opération de substitution de façon valide,
- (b) la pertinence de la relation de référence se détermine au niveau **intra**-propositionnel et non pas au niveau **inter**-propositionnel

C'est sur la base de ces deux hypothèses que les débats autour de la distinction frégréenne se sont développés. On les retrouve explicitement dans l'article de Russell (1905) qui, critiquant cette distinction, a paradoxalement contribué à la faire connaître (1892)¹. Il faut d'ailleurs reconnaître que ces hypothèses sont en grande partie induites par la présentation que Frege a lui-même fait de cette distinction et par l'exemple à partir duquel il l'a illustrée : une égalité dans le registre d'une écriture formelle. Or ce sont là deux hypothèses restrictives et superfétatoires qui occultent la portée réelle de la distinction de Frege pour la définition de la notion d'objet.

Question concernant la première hypothèse : la distinction sens/référence est-elle entièrement subordonnée à la possibilité d'effectuer l'opération de substitution seulement de façon valide , ou peut-elle être faite aussi sur des critères de pertinence ?

C'est sur cette subordination que Russell s'est appuyé pour rejeter la distinction de Frege en transposant la distinction frégréenne du registre d'une écriture symbolique à celui de la langue naturelle. Cette transposition permet, en effet, de soulever immédiatement une première difficulté due à ce qu'on a appelé depuis Quine (1971) «l'opacité de la référence» :

A logical theory may be tested by its capacity for dealing puzzles... I shall therefore state three puzzles which a theory as to denoting ought to be able to solve; and I shall show later that my theory solves them.

¹ Le filtre russellien dans la lecture de Frege apparaît clairement à travers ce jugement de Brunschvicg dans son ouvrage de 1911 sur *les Étapes de la pensée mathématique* : «Nous n'aurons pas à suivre, chez M. Frege lui-même, les conséquences qu'entraînent cette réforme de la logique et ce rapprochement avec les mathématiques. **Nous les retrouverons, pour ce qu'elles ont d'essentiel, chez M. Russell** qui a été amené, d'une façon indépendante, à des conclusions du même ordre. Seulement au lieu de créer sur de nouveaux frais un algorithme original qui court le risque de n'être manié que par son inventeur, M. Russell s'est donné cet avantage de prendre pour base les résultats atteints par les mathématiciens et les logiciens. Il y a aurait certes injustice à ne pas marquer **la place de M. Frege dans l'histoire; mais il faut ajouter que son oeuvre est à certains égards l'oeuvre d'un précurseur.** La philosophie mathématique qui doit être ici l'objet de notre étude est celle qui a été exposée dans le premier volume de ses *Principles of Mathematics*. Cette philosophie enveloppe et l'*Algèbre de la logique*, au point où l'avait portée l'ouvrage magistral de Schröder, et la mise en forme symbolique des mathématiques, que Peano avait constituée; elle y joint enfin, pour les rapprocher et les dominer, la *Théorie des ensembles* de M. Georg Cantor» (Brunschvicg 1972, p. 382-383). On peut alors se demander pourquoi Brunschvicg, après un tel jugement sur les analyses de Frege, n'hésite pas à les utiliser, et plus particulièrement celles de l'article de 1892 pour justement critiquer les positions de Russell : « comme le dit excellemment M. Frege, «la découverte que c'était un même soleil...»». Brunschvicg voit dans un cet exemple une illustration parfaite de ce qu'est l'activité intellectuelle à l'oeuvre dans le développement de la connaissance. Mais il n'analyse pas ce que ce processus implique épistémologiquement et cognitivement (1972, p. 404).

SIGNE ET OBJET (I): L'EVOLUTION DES PROBLEMATIQUES

If *a* is identified with *b*, whatever is true of the one is true of the other in any proposition without altering the truth or the falsehood of that proposition. Now George IV. wished to know whether Scott was the author of *Waverley*; and in fact Scott was the author of *Waverley*. Hence we may substitute *Scott for the author of "Waverley,"* and thereby prove that George IV. wished to know whether Scott was Scott. Yet an interest in the law of identity can hardly be attributed to the first gentleman of Europe.

Russell 1905, p.485

L'opacité de la référence est une des difficultés qui surgit avec l'emploi des langues naturelles et plus précisément avec les possibilités qu'elles offrent de remplir une fonction de «réflexivité discursive» (Duval 1995, p. 132), c'est-à-dire aux possibilités d'exprimer le degré d'engagement de l'énonciateur dans ce qu'il énonce. Très concrètement l'opacité référentielle surgit dans tous les énoncés construits avec des attitudes propositionnelles: «x croit que...». Et on sait que cette opacité constitue l'une des difficultés majeures pour établir un calcul propositionnel en logique modale. Mais l'opacité de la référence constitue-t-elle réellement une objection à l'intérêt et à la portée de la distinction frégréenne ?

L'opération de substitution *salva veritate*, envisagée par Frege et par ses commentateurs, est un traitement qui n'est véritablement possible au sens strict que dans un registre d'écriture symbolique ou formel. Cette opération est en effet la seule forme d'expansion discursive dans ces types de registre, puisque c'est cette opération qui permet d'effectuer ce qu'on appelle un «calcul». Dans la langue naturelle, cette opération de substitution n'est plus la seule opération, ni même l'opération fondamentale pour l'expansion discursive (Duval 1995, p. 122-132). **Or Russell, aussi bien que Frege, passent d'un registre d'écriture symbolique au registre de la langue naturelle, en oubliant que les traitements effectuables dans un registre ne sont pas directement transposables dans l'autre registre.** D'ailleurs la non pertinence de cette transposition directe a été souvent soulignée (Ducrot 1972, p. 222-224). Est-ce à dire que dans le discours en langue naturelle la distinction sens/référence et plus précisément la référence à des objets ne serait plus des notions fondamentales ou même pertinentes ? Le simple fait que Frege, pour bien convaincre de la nécessité et de l'intérêt de sa distinction, et Russell, pour la rejeter, aient cherché leurs exemples dans le discours en langue naturelle suffirait à rejeter cette hypothèse¹. Il est essentiel au discours en langue naturelle de parler d'objets dans la mesure où il est essentiel de parler de quelque chose qui appartienne au monde réel, à un monde subjectif ou à un monde possible (Benveniste 1976, p. 126-131). Seulement comme J.B. Grize l'a souligné, il n'est pas nécessaire que l'objet reste strictement et formellement identique à lui-même au fil du discours (Grize 1983, p. 102, 107, 109-111). Et si l'on revient à la problématique cognitive générale évoquée par Frege dans les premières lignes de son article, on voit que la substitution ne renvoie pas nécessairement à un traitement de type calcul ou à une autre forme de raisonnement, mais à la **possibilité d'une conversion** : passer, par exemple, des équations du second degré aux courbes correspondantes en utilisant un système d'axes de coordonnées. Même si cela a été historiquement long, cette identification d'un même objet sous des représentations aussi différentes par leur forme et leur contenu qu'une écriture algébrique et un graphe est une parfaite illustration du processus permettant le progrès des connaissances pour Frege. Il reste cependant que les conditions pour apprendre à reconnaître la conservation d'un objet à travers des changements d'écriture, des changements de désignation,

¹ Rappelons à ce propos la théorie médiévale de la supposition, dont on a souligné les analogies avec la distinction frégréenne (Ducrot 1989, pp.13-65). Cette théorie a été développée dans le registre de la langue naturelle pour contrôler un discours portant sur des objets inaccessibles (les objets de la foi). Cependant la différence entre la théorie médiévale et la distinction frégréenne tient à ce que celle-ci a été élaborée en référence à deux registres (celui d'une écriture symbolique et celui de la langue naturelle) tandis que celle-là est restée liée au seul registre de la langue naturelle.

SIGNE ET OBJET (I): L'EVOLUTION DES PROBLEMATIQUES

des changements modaux (sensoriels —visuels ou tactiles, pour les formes par exemple—) ou des changements de registre ne sont pas les mêmes selon la nature du registre dans lequel ils sont effectués, ou selon le fait que l'on change de registre. C'est cet aspect qui a été méconnu et par Frege et par ses commentateurs.

Question concernant la seconde hypothèse : la pertinence de la relation de référence se détermine-t-elle au niveau intra-propositionnel ou au niveau inter-propositionnel ?

Il y a un fait très révélateur dans la présentation de Frege, comme dans la discussion que Russell développe : la distinction sens/référence et la possibilité de substitution qu'elle permet *salva veritate* sont exclusivement envisagées dans le domaine de propositions, ou dans celui de phrases, prises isolément. Ainsi Russell pour mettre les analyses frégréennes en difficulté compare deux énoncés : «le roi d'Angleterre est chauve» et «le roi de France est chauve» (Russell 1905, p. 483-484). Or si on s'en tient à l'examen de propositions prises isolément, on est automatiquement conduit à subordonner la possibilité de la relation de référence à la **reconnaissance de l'existence préalable de l'objet auquel une représentation** ou une expression réfère¹. On est donc très loin des raisons qui ont conduit à introduire cette notion de référence : expliquer l'importance, pour le progrès des connaissances, de l'identification d'un **même objet à travers deux expressions, deux désignations différentes**, ou si l'on veut l'identification en un objet des contenus de deux représentations différentes, contenus considérés dans un premier temps comme deux objets différents. Ou encore, pour s'en tenir au seul plan du discours, expliquer que plusieurs expressions et propositions puissent s'articuler dans l'unité et la progression d'un calcul ou d'un raisonnement. En d'autres termes, le problème que pose tout discours n'est pas seulement celui de la vérité de chacune des propositions que son expansion conduit à énoncer, c'est celui de **la cohérence c'est-à-dire de la continuité¹ entre toutes les propositions**, ou encore celui de l'unité de la totalité théorique, démonstrative, descriptive ou explicative qu'elles forment. Naturellement les conditions permettant la continuité ou l'unité de l'expansion discursive ne seront pas les mêmes selon que l'on est dans un registre d'écriture symbolique ou de langue formelle ou de langue naturelle. Parce que les opérations fondamentales d'expansion discursive ne seront pas les mêmes (Duval 1995, p. 129-132). Mais il n'en reste pas moins que la relation de référence au plan de l'expansion discursive ne peut être déterminée *salva veritate* mais *salva cohaerentia*.

S'en tenir à des propositions isolées revient donc à méconnaître le sens de la distinction frégréenne en oubliant les problèmes pour lesquels elle est pertinente. Que devient la notion d'objet dans une telle réduction, c'est-à-dire quand on s'en tient au seul niveau intra-propositionnel ? La réponse se trouve déjà dans les textes de Frege (1972, p.84-85, 166-167): l'objet est seulement ce qui prend le statut d'argument d'une fonction, c'est-à-dire une valeur dont l'attribution transforme une fonction propositionnelle en proposition. L'objet n'est donc plus que ce qui permet de «compléter» la forme d'une expression indéterminée ou non saturée! Cette réduction est souvent renforcée par l'hypothèse suivante venant s'ajouter aux deux

¹ N'étant pas anglais, j'ai dû consulter des encyclopédies pour savoir que Russell parlait d'Edouard VII lequel régna de 1901 à 1910 ! Russell qui, dans le même article souligne la relativité des énoncés temporels du point de vue de leur validité oublie leur relativité du point de vue de leur compréhension, laquelle implique référence à des objets.

¹ La cohérence d'un discours implique deux aspects, l'un relatif à la non-contradiction et l'autre relatif à la conservation référentielle des objets au cours de l'expansion discursive. Ce sont les problèmes soulevés par ce second aspect que la réflexion de Frege a permis de poser de façon précise.

SIGNE ET OBJET (I): L'EVOLUTION DES PROBLEMATIQUES

hypothèses (a) et (b) :

(c) il y aurait toujours un accès possible aux objets indépendamment du recours à des signes ou à des représentations sémiotiques

Et pour justifier cette hypothèse on met souvent en avant la constatation suivante : s'il n'y a pas d'accès aux objets sans les signes, et donc pas de pensée sans mobilisation d'un registre de représentation, en revanche il n'y a pas de signe déterminé qui s'impose pour désigner ou représenter objet (hormis les contraintes résultants de choix antérieurs) et la liberté demeure donc quant au registre mobilisable (hormis les possibilités et les coûts de traitement propres à chaque registre). Or le plus souvent on ne retient que cette seconde condition pour oublier ou nier la première.

La distinction frégéenne entre sens et référence doit être interprétée **en rejetant les hypothèses (a), (b) et (c)**, sur lesquelles pourtant beaucoup d'analyses des processus de connaissances mathématiques continuent de s'appuyer implicitement ou explicitement. Le rejet de ces hypothèse ouvre la voie à une autre approche de la notion d'objet et conduit à une autre approche dans l'analyse des processus d'acquisition des connaissances mathématiques comme nous le verrons plus loin.

3. Rupture du lien signe-objet : l'autonomie de systèmes de fonctionnement purement sémiotiques

Pour que le raisonnement logique soit sûr, des objets extra-logiques discrets doivent être donnés en tant que vécu immédiat pour toute pensée... leur présentation, leur différenciation, leur consécution devant être accessibles dans une intuition immédiate... Lorsque j'adopte ce point de vue, *les objets de la théorie des nombres sont les signes eux-mêmes dont la configuration peut être reconnue par nous de façon générale et certaine...* Là-dessus repose la position philosophique solide que je tiens pour indispensable à la fondation de la mathématique pure, aussi bien qu'à toute pensée, compréhension et communication scientifiques : au commencement est le signe
Hilbert 1922 *Neubegründung der mathematik*

Les problématiques de cette troisième période se sont développées à la fois en continuité et en rupture avec celles développées durant la seconde période. En continuité, parce les trois «axiomatisations décisives» (Nichanian 1979, p.58), celle de Dedekind pour l'arithmétique (1881), celle de Hilbert pour la géométrie (1899) et celle de Zermelo pour la théorie des ensembles (1907) se situent dans la perspective des projets de fondation purement logiques dont Bolzano et Frege furent les premiers pionniers (Nichanian, 1979). En rupture, parce que ce projet de refondation logique des mathématiques, malgré son échec, s'est révélé extrêmement fécond. Il a ouvert la voie à l'idée que les systèmes sémiotiques sont des systèmes de traitements cognitifs, indépendants des interprétations diverses que l'on peut en donner selon les domaines d'objets auxquels on rapporte les suites de signes produites. Et cela a conduit à l'idée d'une machine universelle ne travaillant qu'avec et sur des symboles (Turing 1936), et d'une machine organisée selon les différentes fonctions qui sont nécessaires à l'accomplissement d'un acte de connaissance (von Neumann 1945). Les notions de simulation et de modélisation deviennent alors essentielles dans la description de ce qu'est l'activité de connaissance. Et la notion de représentation, avec cette autonomie productrice des systèmes sémiotiques, devient complètement indépendante non seulement de tout lien avec un sujet mais également de toute référence prioritaire à des objets. Et pour mieux se rendre compte de la transformation, apparemment légère mais radicalement révolutionnaire, qui s'est ainsi accomplie en un demi-siècle, il suffit de relire les déclarations de Dedekind **en remplaçant simplement l'expression philosophiquement et subjectivement surdéterminée de «pensée pure» par celle de «système de signes» :**

lorsque je dis que l'arithmétique (algèbre, analyse) n'est qu'une partie de la logique, j'exprime le fait que je tiens le concept de nombre pour tout à fait indépendant des représentations ou des intuitions de l'espace et du temps, et comme un développement immédiat des règles pures de la pensée

Dedekind 1881 cité par Nichanian p. 62

Toutefois se fixer sur la réalisation qui a entraîné les changements les plus spectaculaires dans le domaine des outils de connaissance serait une erreur. Cette autonomie de fonctionnement des signes, en tant que justement les signes ne sont pas réduits à leurs manifestations sensibles mais sont envisagés relativement à un système qui les rend «signifiants», c'est-à-dire à ce qui leur donne la propriété de «signifiante» est une idée neuve qui surgit explicitement avec

SIGNE ET OBJET (I): L'EVOLUTION DES PROBLEMATIQUES

Saussure (1915) et qui contribuera à analyser autrement ce qu'on appelle le «sens» dans le domaine des discours et plus largement dans le domaine des sciences humaines. Ce serait donc dans des champs disciplinaires très différents qu'il faudrait suivre cette rupture du lien entre signe et objet, le glissement de la notion de signe à celle de système sémiotique et la prise de conscience que les représentations produites dépendent des systèmes sémiotiques mobilisés. Nous nous limiterons ici au domaine des mathématiques et aux transformations de la notion d'objet survenues dans ce moment de transition qu'a constitué l'élaboration des trois axiomatiques décisives que Hilbert (1934) a appelées des «axiomatiques formelles» par opposition aux «axiomatiques de contenu» (*inhaltliche Axiomatik*) telle celle d'Euclide.

La transformation essentielle qui survient concernant la notion d'objet, en mathématiques à partir des années 1880, est la substitution de la notion d'ensemble à celle d'intuition a priori de l'espace et du temps, comme domaine primitif de référence pour déterminer les objets mathématiques. Avec ce déplacement d'ancrage, d'une part les objets mathématiques perdent tout appui, au moins direct, sur un donné perceptible de formes ou de choses, et d'autre part les énoncés par lesquels on les définit perdent toute fonction de description de quelque chose qui serait préalablement accessible avant même l'énonciation des propositions qui les posent. Cette transformation présente deux aspects que le projet de refondation logique tendait, alors, à faire fusionner mais qui, ensuite, se sont avérés à la fois intimement liés, du moins en mathématiques, et cependant irréductibles l'un à l'autre : **les objets et les propositions. Leur liaison conduit à une notion d'objet qui est celle d'un «objet-structure»** (Nichanian., p.71,75,92). Mais leur irréductibilité a conduit à des problèmes de nature radicalement différente.

Pour définir un objet-structure «on considère sur *un ensemble* une **relation** qui vérifie les axiomes d'une structure, celle de groupe par exemple». Ainsi Dedekind considère la relation (fonction) de successeur (Nichanian p 64-65, 75, 92). Hilbert considère les diverses relations (prédicats) «se trouver sur», «se trouver entre», «être congruent» (pour des segments). Zermelo considère la relation «appartenir à...». La définition d'un objet-structure est donc centrée sur une ou plusieurs relations entre des termes-objets dont on a «effacé» en quelque sorte toute propriété qui permettrait de les identifier. Car «ce sont des relations fondamentales qui sont déterminées, et non les objets du domaine sur lesquels portent ces relations» et il n'y a aucune détermination conceptuelle de la nature de ces termes-objets. On peut donc décider de les appeler comme on voudra ainsi que Hilbert l'avait souligné. D'ailleurs, pour désigner ces objets effacés, Dedekind se contentait de parler d'un «système de choses ou d'éléments» (Nichanian p. 63) et Zermelo d'un «domaine d'individus» (Nichanian. p.93; note 111 de la p.112). Préciser la nature de ces objets effacés ne signifie plus fonder ou justifier l'objet-structure dans la réalité mais, au contraire, l'appliquer comme modèle à un domaine d'objets déjà identifiés par d'autres procédures, c'est-à-dire en donner une interprétation possible. On voit donc apparaître une certaine dénivellation à l'intérieur même de la définition d'un objet-structure. **Il y a, d'une part, le niveau de l'objet constitué et il y a, d'autre part, celui des objets effacés. Pourquoi ces objets effacés sont-ils nécessaires à la définition d'un objet-structure ?** Parce qu'il n'y a pas de relation sans référence aux termes de la relation. Il ne s'agit en fait que d'une «référence pure pour l'énoncé» (Nichanian p.19.75) : «la détermination axiomatique d'un objet suppose la notion d'«ensemble» comme référence pure» (N. p.11). On voit alors la difficulté qui est au centre de toute définition d'un objet-structure : elle concerne le statut, le mode de donation et la détermination de cette référence pure (Nichanian. p.67). Dans la pratique on fait comme si la détermination conceptuelle était suffisante pour assurer la constitution originare des objets mathématiques en tant qu'objets-structures (Nichanian.

SIGNE ET OBJET (I): L'EVOLUTION DES PROBLEMATIQUES

p.140, 17). Mais en fait **cette référence pure consacre le primat de signes dont le sens se trouve dissocié de toute désignation d'objet**. Le signe ne viendrait-il pas nécessairement avant l'objet ? C'est Zermelo qui a attiré l'attention sur cette conséquence paradoxale de la transformation de la notion d'objet, résultant de ce déplacement d'ancrage des objets mathématiques, de l'intuition a priori à la notion d'ensemble. Se donner une référence pure de toute dénomination d'objet pose la question de la signification des signes dans les énoncés axiomatiques (Nichanian p.22-24). Zermelo l'a explicitement exposée à propos de la détermination conceptuelle de ce qu'est un «ensemble»¹ :

les lettres d'individus dans les énoncés axiomatiques («si a et b sont deux points, ou deux ensembles, alors il existe c tel que... ») doivent alors avoir une dénotation; d'où reçoivent-ils cette dénotation, sinon du système d'axiomes lui-même? Seulement à moins d'en rester au caractère conditionnel de ces énoncés, une telle dénotation n'est pas encore là au moment où les propositions axiomatiques s'énoncent. Il faut donc fournir à ces lettres d'individus une dénotation au préalable, et on n'échappe pas à cela. C'est la seule fonction de ce que Zermelo appelle ici un "domaine d'individus". Il confond évidemment cette fonction avec celle que nous avons signalée en premier lieu: celle de fournir un domaine d'application, formé d'objets déjà déterminés, au si-alors apophantique.

...

Que désignent en effet les lettres a , b , dans les premiers axiomes hilbertiens («Si a et b sont des points, il existe une droite e telle que a et b se trouvent sur e » etc)? Ont-elles **une signification, prête avant l'énoncé** des axiomes, s'il est vrai que les axiomes doivent eux-mêmes déterminer les objets? Peut-on dire qu'elles reçoivent **une signification après-coup, dans** le système d'axiomes ?

Nichanian 1979, p.93-94, 200

Il y a là un paradoxe bien mis en évidence par Skolem (1922) et un paradoxe qui ne cesse d'être présent dans l'enseignement des mathématiques dès les premières années. Mais n'anticipons pas. La formalisation va ouvrir une issue à ces difficultés en permettant de traiter la question de la compatibilité des axiomes.

Ce caractère paradoxal de la relation entre signe et objet tient à l'importance nouvelle que les propositions ou, plus exactement, que l'organisation théorique d'un ensemble de propositions prend dans la constitution des objets mathématiques. Avec le projet d'une refondation logique, ce sont les exigences concernant la valeur épistémologique des axiomes et, également, celles concernant les critères d'acceptabilité d'une proposition comme définition qui changent. En effet, pour définir un objet-structure, il n'est plus possible de se limiter à une seule proposition pour comprendre, mais il faut prendre en compte un ensemble de propositions, cet ensemble devant satisfaire à la fois des exigences du point de vue de sa capacité de production déductive de nouvelles propositions et du point de vue de la compatibilité logique de ce qu'il permet de produire. En d'autres termes, les propositions primitives d'une théorie ne peuvent plus être considérées séparément les unes des autres, comme dans les axiomatiques matérielles, mais par rapport au système qu'elles forment. Et l'intérêt de ce système est dans l'ensemble de propositions nouvelles qu'il permettra de produire. C'est cette notion de système de propositions primitives, envisagé du point de vue à la fois de sa capacité à fonctionner de façon autonome et de sa puissance de déduction, indépendamment des objets (objets-structures ou autres) dont il traite, qui va ouvrir la voie à l'autonomie de systèmes purement sémiotiques.

La nécessité de prendre en compte un ensemble de propositions, et non plus seulement chaque proposition pour elle-même, n'est pas apparue immédiatement. Il a fallu la prise de conscience

¹ Frege avait déjà soulevé cette question dans ses lettres à Hilbert en 1899-1900 et dans les articles "Über die Grundlagen der Geometrie" de 1903 et 1906 (N. p.17-18, note 35, 199-207)

SIGNE ET OBJET (I): L'EVOLUTION DES PROBLEMATIQUES

de l'importance de la compatibilité des axiomes entre eux. Dans son ouvrage de 1899, Hilbert ne s'était préoccupé de montrer la compatibilité des axiomes que de façon très relative, en supposant le caractère non-contradictoire de l'arithmétique. C'est seulement à partir de 1904, que ce problème est apparu comme le problème central, lorsque la question de la non contradiction des axiomes de l'arithmétique s'est trouvée explicitement posée (Hilbert 1904; Nichanian p.81-82, 100-101). Et cela d'autant plus que pour Hilbert, «l'existence équivaut à la non-contradiction d'un système d'axiomes» (Nichanian. p.110, 80). Cette prise de conscience de la priorité du système des propositions sur chaque proposition considérée isolément va avoir deux conséquences.

Tout d'abord, l'attention portée à l'importance de la compatibilité des axiomes a entraîné une exigence de formalisation qui a conduit directement à la métamathématique (Hilbert 1922, *Neubegründung der mathematik* (Nichanian, p. 113, 148). En effet, pour se donner les moyens d'une telle démonstration, **les signes, ou plus exactement leurs arrangements, ont été promus au statut d'objet** (Nichanian, p.157, 116, 21, 101-102). C'est dans un tel changement de statut que les signes peuvent être dits «sans signification». Tout le problème a alors consisté à «savoir quelles seront les mathématiques qui seront utilisées dans la métalangue, puisqu'il en faut. Ces mathématiques devront être les plus élémentaires possibles, et en particulier ne faire intervenir aucun procédé qui dépasse le point de vue intuitionniste; Hilbert appelle ces procédés "finitistes".» (Nichanian, p.112). Nous sommes alors au seuil de la conception de cette machine universelle de traitement des symboles évoquée plus haut.

Ensuite, cette prise de conscience a conduit à une différenciation plus marquée dans les critères d'acceptabilité d'une proposition comme définition. Les définitions ne fonctionnent plus seulement selon un critère de comparabilité, comme les définitions classiquement utilisées dans les sciences naturelles et dans toutes les disciplines qui accordent une place essentielle à l'observation : là c'est la prise en compte des ressemblances et des différences qui constitue la base de toute définition et cela en vue de pouvoir classer un ensemble très diversifié de données. Elles fonctionnent, au contraire, selon un critère d'antériorité : ce sont les conditions minimale de détermination qui deviennent la base des définitions et cela en vue d'une capacité maximale de productivité déductive (Duval 1995, p.296-301). En effet, la détermination du sens d'une proposition ne se faisant plus seulement au niveau du contenu de cette proposition considérée pour elle-même mais à celui d'un système auquel on la rattache, c'est par rapport aux possibilités de dérivabilité déductive que la valeur épistémologique d'une définition se retrouve retenue. Durant cette troisième période un clivage très net s'instaure donc entre les définitions qui fonctionnent sur *des critères de comparabilité et d'exhaustivité*, comme dans tous les domaines où c'est l'observation¹ qui joue le rôle fondateur dans la constitution de la science, et celles qui fonctionnent selon *des critères d'antériorité et de compatibilité*, comme dans ce domaine où c'est la *déduction* qui joue le rôle fondateur dans la constitution de la science. Ces deux types de définition non seulement renvoient à des modes différents de fonctionnement cognitif mais ils conduisent à poser la question du rapport des objets aux représentations en des termes totalement différents, comme nous le verrons dans la seconde partie de cet article.

¹ Nous prenons ici le terme «observation» dans une acception très large, en incluant l'expérimentation, pour signifier le recours à une source de données non construites par l'esprit humain, recours dépendant de la «médiation instrumentale externe». L'opposition entre observation et déduction correspond à deux paradigmes différents de la science (cfr. signe et objet IIème partie).