LES PROBLEMES DE POURCENTAGE : UNE APPLICATION DES PROBLÈMES DE CONVERSION PROPORTION-QUANTITÉ

Werner L. DAMM

La difficulté importante des problèmes de modélisation porte sur l'analyse et la compréhension de l'énoncé. C'est par rapport à cette difficulté que des représentations non-discursives peuvent être essentielles. Nous avons expérimenté avec des élèves un type de représentation qui peut être utilisé aussi bien pour les problèmes de conversion proportion-quantité, les problèmes de mélange et les problèmes de pourcentage. C'est l'élaboration et le fonctionnement de ce type de représentation que nous décrivons dans cet article.

Les problèmes de pourcentage, comme les problèmes de conversion proportion-quantité et les problèmes de mélange sont des problèmes élémentaires de mathématisation, qui peuvent être résolus par des opérations portant sur les données de l'énoncé. Dans un travail antérieur (Damm, 1991) nous avions établi une classification de ces types de problème en fonction du texte de l'énoncé, de la question posée, et de la présence ou l'absence de l'effectif de référence dans le texte. Ainsi en partant de la distinction classique dans tout énoncé de problème, entre la partie informative proprement dite (toutes les expressions décrivant une situation et fournissant des données), et la question (ce par rapport à quoi des solutions sont attendues), on voit deux sources différentes de variation des énoncés : on peut modifier la partie informative sans changer la question ou conserver la partie informative et changer la question. Les problèmes qui en résultent ne sont pas de difficultés équivalentes comme nous le verrons.

Tout énoncé de problème de conversion proportion-quantité doit, implicitement ou explicitement, faire référence à trois types d'objets constitutifs des termes d'une «proportion» au sens le plus commun du terme : une quantité totale qui constitue l'univers de référence, une ou plusieurs quantités partielles obtenues par partage ou prélèvement sur cette quantité totale et la comparaison entre chaque quantité partielle et la quantité totale. Ces objets renvoient évidemment aux éléments pertinents d'une situation extra-mathématique et ils peuvent être décrits par des valeurs numériques interprétables en termes de grandeurs, mais ils ne doivent pas être confondus avec des nombres. Avec ces objets nous avons comme une interface entre les traitements numériques proprement dits et les traitements sémantiques impliqués dans l'interprétation des situations auxquelles on applique les traitements numériques. Nous appellerons respectivement ces trois types d'objets : quantité de référence, quantité partielle et proportion au sens mathématique. Les problèmes les plus simples de conversion proportion-quantité peuvent alors être représentés par un schéma sémantique élémentaire, **qui n'utilise, pour la liaison entre deux noeuds, que des opérations de multiplication ou de division dans un sens défini.**

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
6 (1998) (p.197- 212) - IREM de Strasbourg

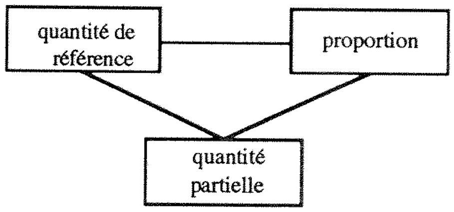


Figure 1 Schéma sémantique élémentaire

Les problèmes plus complexes de conversion proportion-quantité utilisent une combinaison de 2 (ou plus) schémas élémentaires[1]. Les problèmes de conversion proportion-quantité ne requièrent, pour leur résolution, que des opérations de multiplication et division.

Un problème de mélange diffère des problèmes de conversion proportion quantité par le seul fait qu'il requiert la création, par addition, d'une nouvelle quantité de référence à partir de deux autres quantités de référence données, directement ou indirectement, dans l'énoncé. Nous avons montré comment les situations de mélange peuvent être également représentées à partir d'une combinaison de schémas sémantiques élémentaires (Damm, Dupuis, 1992).

Les problèmes de pourcentage peuvent être vus comme une extension des problèmes de conversion proportion-quantité. Pour cela il suffit de considérer un pourcentage comme une proportion ramenée à une quantité de référence standard, 100. Dans cette perspective, les problèmes de pourcentage peuvent facilement être introduits après les problèmes de conversion proportion-quantité, lorsque l'on s'est assuré que les élèves maîtrisent bien ce type de problèmes (et bien sûr les additions !). Ils apparaissent alors comme un lieu de transfert des idées acquises lors de la résolution des problèmes de conversion proportion-quantité. Cela veut dire que les problèmes de pourcentage peuvent être introduits à l'aide de schémas dérivés de ceux que nous avons utilisés pour les problèmes de conversion proportion-quantité.

Dans cet article, nous présentons des énoncés de problème de pourcentage ne comportant qu'une question, mais dont la résolution requiert une, deux ou trois opérations. Nous verrons que la résolution des problèmes de pourcentage à une opération peut être représentée par le même type de schéma élémentaire triangulaire de conversion. La résolution des problèmes de pourcentage à deux ou trois opérations peut aussi être représentée par ce même type de schéma.

Il existe une grande variété de problèmes de pourcentage, mais leurs différences ne se situent pas au niveau des opérations nécessaires à leur résolution. En d'autres termes, on pourrait dire que les différences sont sémantiques et non pas mathématiques.

[1] C'est ce type de problèmes qui a été présenté dans (Damm, 1991).

I. Caractéristisation des problèmes de pourcentage

Dans l'énoncé d'un problème de pourcentage on peut trouver quatre éléments distincts, à savoir :

qi : **quantité initiale**, c'est la valeur de référence ;

qt : **quantité de transformation**, c'est la valeur qui transforme la quantité initiale pour obtenir la quantité finale ;

qf : **quantité finale**, c'est la valeur obtenue par addition (soustraction) de la quantité initiale avec la quantité de transformation ;

p : **pourcentage** : $p = \frac{qt \times 100}{qi}$

On trouve ces éléments directement ou indirectement dans tous les énoncés de problèmes de pourcentage. En prenant pour base ces éléments, nous avons classé les problèmes de pourcentage en neuf catégories, en fonction

- des deux quantités qui sont données dans la partie informative,

- la quantité qui est demandée dans la question[1] .

Ces deux critères sont nécessaires pour caractériser les problèmes de pourcentage et comprendre les résultats obtenus dans différentes enquêtes. Et ils sont suffisants pour classer tous les énoncés de problèmes de pourcentage, comme on peut le voir dans le tableau de la page suivante. Et Cette double dimension de classement nous montre qu'il n'est pas possible d'obtenir une classification hiérarchique.

---

[1] On trouve quelques énoncés, où seule la quantité de transformation est demandée, mais cela ne veut pas dire qu'il s'agisse de la quantité finale.

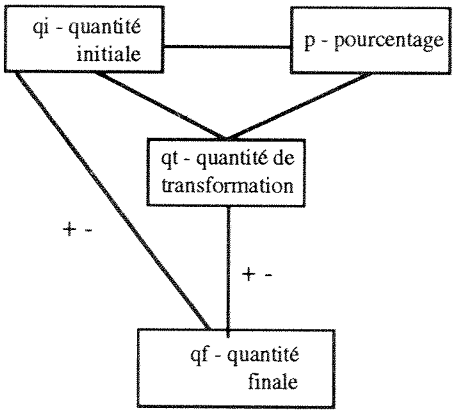
PROBLÈMES DE POURCENTAGE

		1		2		3	
		1 opération		2 opérations		3 opérations	
	données	question	traitement	question	traitement	question	traitement
1	qi p	qt	$\frac{qi \times p}{100} = qt$	q f	$\frac{qi \times p}{100} = qt$ $qi \pm qt = qf$		
2	qi qt	p	$\frac{qt \times 100}{qi} = p$				
3	qt p	qi	$\frac{qt \times 100}{p} = qi$	q f	$\frac{qt \times 100}{p} = qi$ $qi \pm qt = qf$		
4	qi qf			p	$qf - qi = qt$ ou $qi - qf = qt$ $\frac{qt \times 100}{qi} =p$		
5	qf qt			p	$qf \pm qt = qi$ $\frac{qt \times 100}{qi} =p$		
6	qf p			qi	$100 \pm p$ $\frac{qf \times 100}{100 \pm p} = qi$	qt	$100 \pm p$ $\frac{qf \times 100}{100 \pm p} = qi$ $qf - qi = qt$ ou $qi - qf = qt$

Comme on le voit, la résolution d'un problème de pourcentage à une question peut se faire par une, deux ou trois opérations. Dans ce décompte des opérations, nous n'avons pas tenu compte de la conversion de proportion-pourcentage, qui est, pour nous, un changement de registre d'écriture de nombres : $40\% = \frac{40}{100} = 0{,}40$.

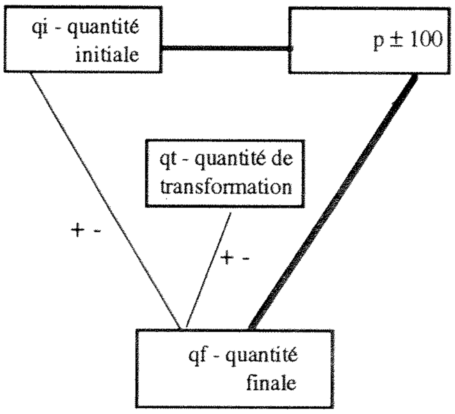
Il y a d'autres traitements, qui donnent le même résultat, pour la résolution des problèmes de pourcentage (par exemple, les tableaux de proportionnalité).

Les problèmes classés dans les cinq premières lignes du tableau constituent le champ classique des problèmes de pourcentage. Ils peuvent être représentés par le schéma sémantique ci-dessous. on l'obteint en modifiant le schéma sémantique élémentaire des problèmes de conversion proportion-quantité (figure 1) pour y faire apparaître l'opération d'addition.



Si la quantité finale n'est pas demandée (problèmes à une seule opération), une partie du schéma (+ -) est inutile.

La ligne 6 du tableau constitue en fait un autre champ de problèmes de pourcentage, non classique, où les données sont le pourcentage et la quantité finale. Le schéma doit être modifié pour faire apparaître la liaison directe entre la quantité finale et le pourcentage p ¶ 100. Suivant les cas, la quantité de transformation peut être présente (problèmes à trois opérations) ou absente (problèmes à deux opérations).



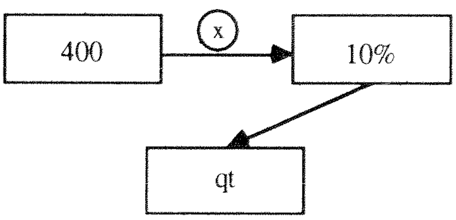
II.Exemples de problèmes de pourcentage classés par type.

Problème de type 1.1.

Un objet qui valait 400 francs a subi une augmentation de 10%. De combien le prix a-t-il augmenté ?

	donnée numérique	type des données numériques
données de l'énoncé	400	qi = quantité initiale
	10	p = pourcentage
question	?	qt = quantité de transformation

Chemin sur le schéma :

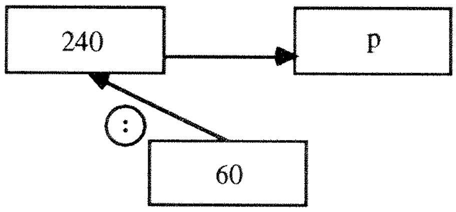


Problème de type 2.1.

Jean achète un radioréveil. Le prix affiché est 240 francs. Le commerçant lui fait une remise de 60 francs. Exprime cette remise en pourcentage.

	donnée numérique	type des données numériques
données de	240	qi = quantité initiale
l'énoncé	60	qt = quantité de transformation
question	?	p = pourcentage

Chemin sur le schéma :

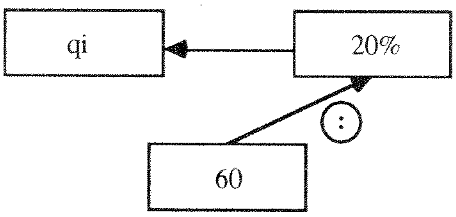


Problèmes de type 3.1.

20% du prix d'un pull est 60 francs. Quel est la valeur du pull ?

	donnée numérique	type des données numériques
données de	20	p = pourcentage
l'énoncé	60	qt = quantité de transformation
question	?	qi = quantité initiale

Chemin sur le schéma :



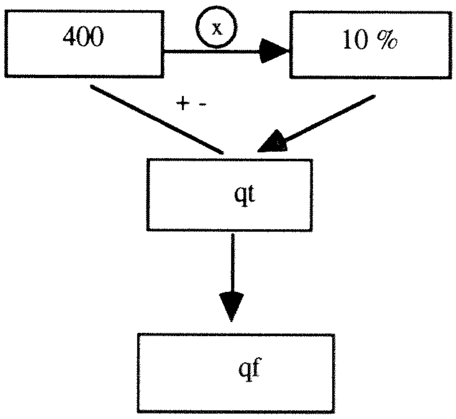
Remarquons que dans ces problèmes à une opération, on n'utilise jamais la quantité finale.

Problème de type 1.2.

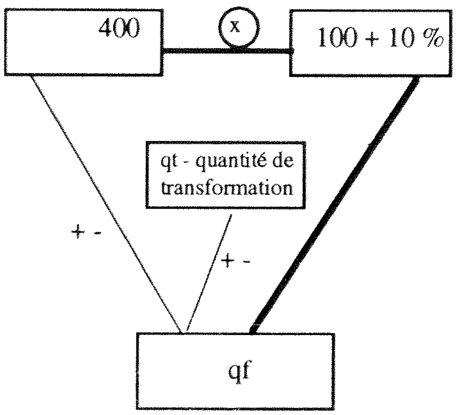
Un objet qui valait 400 francs a subi une augmentation de 10%. Quel est le nouveau prix de cet objet après l'augmentation ?

	donnée numérique	type des données numériques
données de	400	qi = quantité initiale
l'énoncé	10	p = pourcentage
question	?	qf = quantité finale

Chemin sur le schéma :



Chemin sur le schéma :



Remarquons que cette représentation peut être faite avec ou sans la présence de la quantité de transformation, laquelle n'est ni donnée ni explicitement demandée.

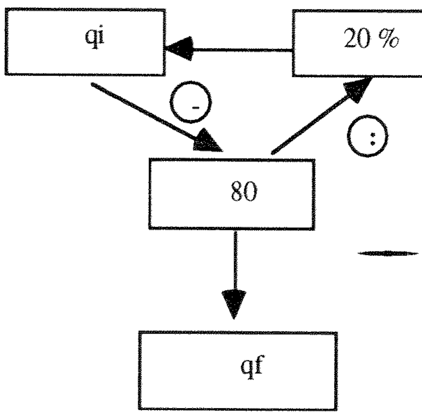
Mais pour pouvoir traiter ce problème de cette façon, il faut déjà avoir la maîtrise du champ non classique des problèmes de pourcentage (ligne 6 du tableau).

Problème de type 3.2.

Paul a obtenu une remise de 80 francs pour l'achat d'une radio. Cette remise correspond à 20% du prix total de la radio. Combien a-t-il payé pour cet appareil ?

	donnée numérique	type des données numériques
données de l'énoncé	80	qt = quantité de transformation
	20	p = pourcentage
question	?	qf = quantité finale

Chemin sur le schéma :

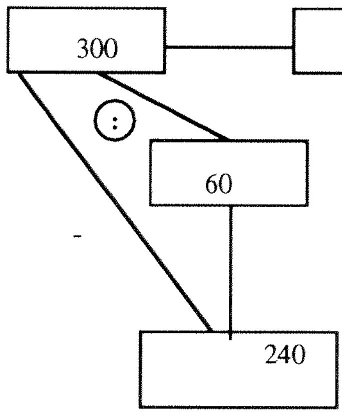


Problème de type 4.2.

Un pull valant 300 francs est soldé à 240 francs. Quel est le pourcentage de réduction ?

	donnée numérique	type des données numériques
données de	300	qi = quantité initiale
l'énoncé	240	qf = quantité finale
question	?	p = pourcentage

Chemin sur le schéma :

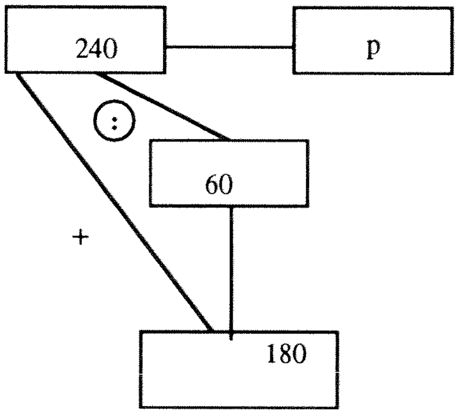


Problème de type 5.2.

Jean a acheté un radioréveil pour 180 francs. En sachant que le commerçant lui a fait une remise de 60 francs, exprime cette remise en pourcentage.

	donnée numérique	type des données numériques
données de	180	qf = quantité finale
l'énoncé	60	qt = quantité de transformation
question	?	p = pourcentage

Chemin sur le schéma :



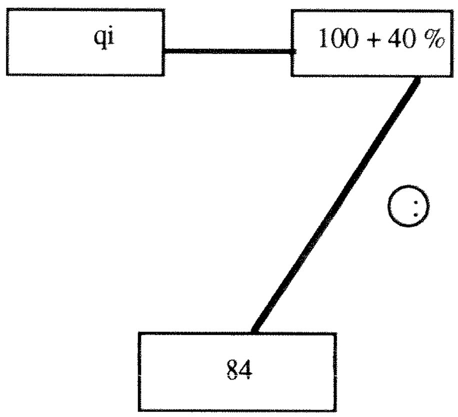
Problème de type 6.2.

La ligne 6 du tableau constitue le champ non classique des problèmes de pourcentage.

Après une augmentation de 40%, un objet vaut 84 francs. Combien valait-il avant cette augmentation?

	donnée numérique	type des données numériques
données de l'énoncé	40 84	p = pourcentage qf = quantité finale
question	?	qi = quantité initiale

Chemin sur le schéma :

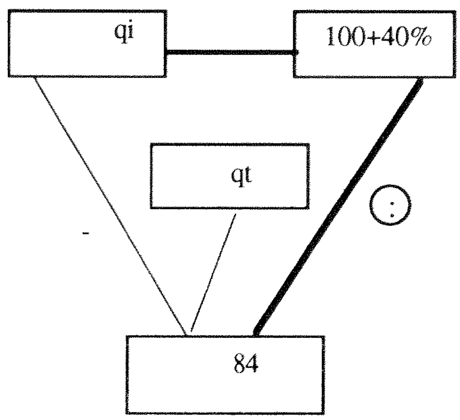


Problème de type 6.3.

Après une augmentation de 40%, un objet vaut 84 francs. De combien de francs, cet objet a-t-il augmenté ?

	donnée numérique	type des données numériques
données de l'énoncé	40	p = pourcentage
	84	qf = quantité finale
question	?	qt = quantité de transformation

Chemin sur le schéma :



III. Quelques résultats d'enquêtes

Des questionnaires comportant quelques problèmes de pourcentage ont été passés en 1987 (Évaluation du programme de mathématique - fin de sixième) et en 1988 (Évaluation du programme de mathématique - fin de cinquième) en France. Dans ces enquêtes on trouve cinq des neuf types de problèmes que nous avons classés. Les pourcentages de réussite observés sont les suivants :

	type 1.1.	type 1.2.			type 2.1.		type 4.2.	type 6.2.
	EXB19	EXA29	EXC27	APPA7	A2	D17	D18	M14
6ème	50%	36%	37%	38%				
5ème		54%			43%	29%	21%	6%

Note : EXA29 (6ème) est appelé B27 en 5ème.

Les résultats obtenus, montrent que le calcul d'une quantité de transformation, à partir de la quantité initiale et le pourcentage, est le type de problème le plus facile (type 1.1).

Les problèmes où la quantité finale est demandée et où la quantité initiale et le pourcentage sont donnés (deux opérations, type 1.2) sont plus faciles que les problèmes où le pourcentage est demandé, à partir de la quantité initiale et la quantité de transformation (une opération, type 2.1).

La création de la quantité de transformation par soustraction est une difficulté supplémentaire (type 4.2. - D18), mais la plus grande difficulté reste l'opération $100 \pm p$ (type 6.2. - M14).

Le questionnaire (version A [2]) figurant dans la brochure I.R.E.M.de Strasbourg (1979) est le suivant :

> 1) On a placé 1000 francs à la Caisse d'Epargne ; cet argent rapporte 6,5% d'intérêt par an. Calculer les intérêts obtenus au bout d'un an. Combien aura-t-on en tout ?
>
> 2) Un objet coûte 30 francs. On fait une remise de 20%. Combien le payera-t-on ?
>
> 3) Un objet coûte 200 francs. Si les prix augmentent de 10% par an, combien le payera-t-on dans deux ans ?
>
> 4) Dans une classe de 25 élèves, il y a 3 élèves nés en 1963, 8 nés en 1964, 12 nés en 1965, 2 nés en 1966. Calculer les pourcentages suivants : élèves nés en 1963, élèves nés en 1964, élèves nés en 1965, élèves nés en 1966.

[2] Deux versions du questionnaire avaient été faites, qui ne différaient que par les valeurs numériques.

5) 4000 élèves se présentent à un examen. 1000 le réussissent. Quel est le pourcentage de réussite ?

6) Le prix du litre de super est 2,75 francs. Sur cette somme, il y a 1,87 F de taxes. Quel est le pourcentage de taxes sur le prix du super ?

On constate que seulement deux types de problèmes différents sont utilisés, les types 1.2 et 2.1. Les pourcentages de réussite observés figurent dans le tableau ci-dessous.

	type 1.2.			type 2.1.		
	q 1	q 2	q 3	q 4	q 5	q 6
6ème	42%	42%	13%	21%	27%	16%
5ème	40%	40%	3%	27%	27%	4%
4ème	40%	50%	8%	26%	32%	6%
3ème	65%	73%	21%	57%	54%	30%

Dans cette enquête, on peut voir que le calcul d'une quantité finale, à partir de la quantité initiale et du pourcentage est plus facile (même avec deux opérations, type 1.2) que le calcul d'un pourcentage à partir de la quantité initiale et de la quantité de transformation (une opération, type 2.1).

La chute très significative du pourcentage de réussite de la question q3, qui est de type 1.2., à notre avis, tient à ce que la question q3 est une question cumulative, c'est à dire, le pourcentage demandé n'est pas sur un an, ce qui est naturel, mais sur deux ans.

Le grande chute du pourcentage de réussite pour la question q6 tient à sa place dans le questionnaire et à son contexte fiscal peu familier pour de jeunes élèves.

Observation :

Les élèves de 6ème et 5ème, qui ont répondu aux questions posées dans “Les pourcentages dans le 1° cycle : 34% de réussite” ont étudié en classe la notion de pourcentage ; par contre, les élèves de 4ème et 3ème dans la même enquête n'ont jamais entendu parler de pourcentage en classe. Ceci est dû au fait que l'enquête a été faite en 1978 à un moment où les programmes de mathématiques de 6ème et 5ème venaient de changer.

Conclusion

Nous avons introduit les schémas sémantiques élémentaires pour résoudre des problèmes de proportion quantité et des problèmes de mélange dans des classes de troisième et de seconde au Brésil. Au termes de séquences d'activité d'environ quatre à cinq heures sur ces problèmes de conversion et de mélange, nous avons rapidement expliqué comment les schémas sémantiques élémentaires pouvaient être utilisés pour analyser les problèmes de pourcentage. Dans notre projet d'expérimentation, la résolution des problèmes de pourcentage devait permettre d'évaluer le transfert et donc l'acquisition du travail d'apprentissage fait sur les problèmes de conversion et de mélange. Nous avons obtenu des résultats spectaculaires que nous présenterons, en même temps que les séquences didactiques, dans un prochain article.

Références

DAMM W. (1991) : "Le choix de la donnée de référence dans un énoncé de problème", *Activités mathématiques* N° 13

DAMM W., DUPUIS C. (1992) "Les problèmes de mélange" , *Activités Mathématiques*, N° 18, pp 1 - 12.

IREM DE STRASBOURG (1979) *Les pourcentages dans le premier cycle : 34%de réussites*, Brochure de l'Irem de Strasbourg

ANNEXE

PROBLÈMES DE POURCENTAGE.

On trouvera ci-dessous un exemple de problème de chacun des 9 types.

1) M. Paul place 5000F dans une banque qui lui propose un taux d'intérêt de 5% (intérêt annuel).

Calculer les intérêts que lui rapportera cette somme au bout d'un an.

2) Lors d'un sondage effectué sur un échantillon de 2345 personnes, 938 personnes ont répondu "OUI".

Quel est le pourcentage de personnes qui ont répondu "OUI" ?

3) Dans une ville, 1200 personnes boivent de café chaque jour, ce qui correspond à 30% des habitants de cette ville.

Combien y a-t-il d'habitants dans cette ville ?

4) M. Michel place 3500F dans une banque qui lui propose un taux d'intérêt de 4,5% (intérêt annuel). De quelle somme disposera-t-il au bout d'un an ?

5) Francis achète une voiture. Le commerçant lui fait une remise de 5%, qui correspond à 1200F.

Quel est la valeur de la voiture ?

6) Dans un championnat de foot, chaque club a fait 32 matchs. Le club champion a gagné 24 fois.

Quel est le pourcentage de matchs que le club champion n'a pas gagné ?

7) Lundi, dans mon collège, il y avait 741 élèves. On sait que lundi 30 élèves ont manqué les cours.

Quel est le pourcentage des élèves qui ont manqué les cours lundi ?

8) Le prix d'un modèle de voiture, à cause des nombreux accessoires ajoutés, a subi une augmentation de 20%. Le prix de la voiture, avec tous les accessoires, est 54000F.

Quel était le prix de cette voiture sans les accessoires ?

9) Le prix d'un modèle de voiture, à cause des nombreux accessoires ajoutés, a subi une augmentation de 20%. Le prix de la voiture, avec tous les accessoires, est 54000F.

Quel est le prix des accessoires ?