RECONNAISSANCE DE CONTRE-EXEMPLES EN ANALYSE : APPROCHE PAR QUESTIONNAIRE EN 1ère ANNEE UNIVERSITAIRE

Amina BENBACHIR, Moncef ZAKI

RESUME

La rencontre et la recherche de contre-exemples ont joué un rôle moteur dans la construction des concepts en analyse. Dans certaines expériences d'enseignement, la réflexion sur des contre-exemples a été mobilisée. Sur ce sujet, une observation a été entreprise auprès d'étudiants en début d'études universitaires scientifiques à la Faculté des Sciences de Fès (Maroc). La recherche a comporté une étude sur questionnaire qui est rapportée ici. Une interrogation était de savoir quelle place la logique et le maniement de la négation peuvent tenir, dans l'identification d'un contre-exemple, en comparaison des acquisitions propres à l'analyse. Les résultats montrent notamment qu'au moment de se prononcer sur une implication proposée, le traitement de la négation joue moins dans la reconnaissance de contre-exemples que la connaissance d'énoncés semblables, permettant une comparaison de l'ordre des éléments présentés. Pour la place de la logique, le questionnaire ne permettrait pas à lui seul de trancher ; une étude plus détaillée, dont seule la conclusion est rapportée ici, a été conduite auprès de binômes.

MOTS CLES : première année d'université - analyse - contre-exemple – logique

---

I. INTRODUCTION

Le plus souvent, un questionnaire se situe au cœur même d'une étude plutôt qu'à sa périphérie. Le questionnaire dont l'analyse est présentée ici a joué dans une recherche sur le contre-exemple en analyse un rôle annexe, ce qui ne veut pas dire sans importance. La recherche visait principalement la construction de contre-exemples lors d'un travail, en binômes, d'étudiants du premier cycle universitaire.

A l'issue d'une expérimentation, F. Hitt (cf. Hitt, 1998) conclut que les constructions de contre-exemples représentent les exercices les plus difficiles. Cette difficulté est, selon lui, due entre autre à l'enseignement des mathématiques qui se limite à enseigner des algorithmes et à un niveau moindre à faire des démonstrations. On peut donc attendre que les essais de construction de contre-exemples par les binômes n'aboutissent pas tous à une réussite.

Des difficultés mathématiques, liées aux traitements à effectuer en analyse, peuvent ressortir des échanges entre les binômes ou des productions mêmes. En revanche d'autres peuvent ne pas être apparentes, comme certaines difficultés de nature logique. De plus, la production d'un contre-exemple présuppose la capacité de le reconnaître en tant que tel. Il

---

Moncef ZAKI, professeur, et Amina BENBACHIR, Professeur assistante, Faculté des Sciences de Fès.

© *Annales de didactique et sciences cognitives*, volume 7 (2001) (p. 117 – 145), IREM Strasbourg

était donc intéressant de disposer en préalable d'informations sur la reconnaissance de contre-exemples. Ce sont ces orientations qui ont déterminé le questionnaire que nous présentons ici.

II. JALONS HISTORIQUES

Le recours systématique au contre-exemple pour réfuter des conjectures n'a débuté que vers la fin du 19ème siècle. Néanmoins, depuis la période antique, les mathématiciens ont construit des contre-exemples. Ainsi, parce qu'elle réfute que « toute aire limitée par des lignes courbes s'exprime par une formule où intervient le nombre π », la construction des « lunules d'Hippocrate » peut être considérée comme un contre-exemple à cette idée préconçue (cf. Glaeser, 1971).

<u>Le contre-exemple considéré comme exception à une règle générale :</u>
Au 18ème siècle, le recours au contre-exemple était occasionnel et son statut même de démonstration de la fausseté d'une conjecture n'était pas reconnu par les mathématiciens. Il convient toutefois de distinguer les conjectures selon qu'elles renvoient à des objets mathématiques parfaitement fixés ou à ces concepts plus flous, par exemple issus de la physique, qui avaient alors pleinement droit de cité en mathématiques.

C'est ainsi qu'Euler a réussi l'exploit de trouver la décomposition en facteurs premiers du nombre $2\wedge(2^5) + 1 = 2^{32} + 1$, réfutant ainsi une conjecture de Fermat (cf. Glaeser, 1971). Dans un tel cas, il y avait bien réfutation. Mais le même Euler connaissait des exemples qui n'étaient pas conformes à sa conception dans d'autres domaines mathématiques et les considéraient comme des exceptions de peu d'importance à la règle générale (cf. Youschkevitch, 1981).

En 1826, Abel écrit dans son célèbre article sur les séries binomiales : « *Il me semble que ce théorème (de Cauchy) admet des exceptions* », et il donne l'exemple de la série :

$$\sin x - \tfrac{1}{2} \sin 2x + 1/3 \sin 3x - \ldots\ldots \text{ etc.} \qquad \text{(cf. Lakatos, 1984)}$$

Dans ce cas la notion de convergence était à affiner. Les deux notions de convergence simple et convergence uniforme n'étaient pas dissociées (Voir plus loin) pour qu'il soit possible d'énoncer un théorème.

Le fait de considérer les contre-exemples comme étant des exceptions à la règle générale n'est il pas encore présent chez Jordan en 1882 ? C'est à cette date en effet qu'il écrivit à propos de son cours d'analyse: « *Nous avons apporté un soin particulier à* *l'établissement des théorèmes fondamentaux. Il n'en est aucun dont la démonstration ne soit subordonnée à certaines restrictions* » (cf. Gispert, 1982).

Le contre-exemple rejeté : quel objet accepter comme fonction ?

Certains mathématiciens du 19ème siècle rejetaient même les contre-exemples qu'on leur fournissait pour mettre en défaut leurs écrits. Darboux a mis plusieurs années pour convaincre Hoüel des erreurs qui se trouvaient dans son cours. Hoüel récusait ces fonctions sous prétexte qu'il n'avait pas ces fonctions en vue, mais il exprimait son inquiétude devant les contre-exemples que lui fournissait Darboux :

> « *Vous me donnez des inquiétudes mortelles sur les points que je croyais les mieux établis » (lettre du 31 janvier 1875)* (cf. Gispert, 1982).

On peut situer Houël à la fin d'une période où *les processus de pensée étaient envisagés comme des processus purement mentaux. La première caractéristique de cette approche mentaliste des démarches de pensée est un lien étroit entre les représentations, qui sont des représentations du sujet, et les objets* (cf.Duval,1998).

Houël n'était pas le seul à éprouver des réticences vis à vis de certains contre-exemples. Ainsi Poincaré (1854-1912) écrivit :

> « *Autrefois, quand on inventait une fonction nouvelle, c'était en vue de quelque but pratique ; aujourd'hui, on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères et on n'en tirera jamais que cela* » (cf.Glaeser, 1995).

Darboux racontait que le mémoire de Riemann (celui de 1875) avait été froidement accueilli par plusieurs de ceux qui habituellement s'intéressaient à ses travaux. Ils l'avaient dissuadé de labourer plus longtemps le champ stérile des fonctions qui n'ont pas de dérivées (cf.Gispert, 1982). Lebesgue écrivit en 1922 :

> « *Les travaux qu'on publiait sur les fonctions de variables réelles avaient le plus souvent pour but de montrer, par des exemples, l'impossibilité d'énoncer sans restriction telle ou telle proposition. On constituait ainsi une sorte de musée de monstruosités plus propre à détourner le mathématicien de ce genre d'étude qu'à l'y intéresser* » (Ibid).

Auparavant, en 1895, Meray exclue les fonctions continues sans dérivée car elles ne correspondent pas à un phénomène naturel. Il écrit :

> « *Les fonctions continues, sans dérivée, non intégrables, etc.., ne se rencontrent que dans les dissertations métaphysiques ; il est donc bien inutile de s'inquiéter d'elles* » (cf. Pont, 1995).

Jordan, en 1882, tout en affirmant l'existence « *de fonctions continues dont la drivée est toujours indéterminée* » n'en donne aucun exemple et les qualifie de « *fonctions anormales* » et qui « *ne seront pas abordées dans ce cours* ». Il affirme alors :

> « *Nous nous bornerons à étudier les fonctions continues qui satisfont au postulatum ci-dessus. Elles offrent déjà un champ fort vaste, car, parmi les fonctions en nombre infini qu'elles embrassent, se trouvent, ainsi que nous allons le voir, toutes celles qui sont connues par les éléments des mathématiques* » (cf.Gispert, 1982).

Un retour sur l'objet fonction :

Hermann Hankel, l'un des animateurs de la crise des années 1870, critique ces points de vue et parle de fonctions ne satisfaisant aucune loi simple ou composée qu'il qualifie de purement nominales et sans contenu réel. Il rajoute :

> « *la légitimité d'une fonction n'étant pas dictée par une mystérieuse nécessité de fer, qui se trouverait dans la nature des choses, comme on le croit souvent, mais qu'elle est une limitation conventionnelle et adéquate que nous imposons et dont les limites ne nous sont pas claires* » (cf. Pont, 1995).

Les erreurs mises à jour par les contre-exemples :

Notons à cette occasion que l'usage du contre-exemple n'était pas encore entré dans les mœurs. Plusieurs auteurs de traités font des développements au sujet des fonctions discontinues, mais sans donner aucun contre-exemple pour attirer l'attention des étudiants sur la délicatesse de certaines propriétés considérées comme évidentes [1].

Péano ainsi que Darboux, furent les principaux promoteurs du recours au contre-exemple. Avant eux, on semble ignorer l'usage systématique du contre-exemple et son avènement est révélateur d'un changement de paradigme. Ils relevèrent plusieurs erreurs commises dans les ouvrages de leur époque [2]. Ainsi, Péano releva l'erreur commise par Serret et Jordan, de la monotonie locale de toute fonction continue en exhibant un contre-exemple [3]. Mais Serret ne corrige pas son erreur dans la troisième édition de son cours (1886). Mittag

[1] Notons par exemple la réciproque du théorème des valeurs intermédiaires.

[2] Péano utilisa le contre-exemple $x^2\sin 1/x$ pour montrer qu'une fonction dérivable n'a pas nécessairement une dérivée continue. Le même contre-exemple a été utilisé auparavant par Darboux dans les lettres adressées à Houël du 24 et 31 Janvier 1875.

[3] Il s'agit de la fonction $x \sin 1/x$.

Leffler, dans une lettre du 14 octobre 1881, adressée à Charles Hermite dénonce cet état de fait :

> *« C'est vrai que les erreurs ont profité à la Science mais alors on a été naïf et on croyait à l'erreur. Mais comment voulez-vous enseigner une erreur quand vous savez que c'est une erreur. Comment voulez-vous démontrer par exemple que chaque fonction continue a une dérivée quand vous savez que c'est fautif ? Monsieur Serret dans la nouvelle édition de son calcul intégral a tout un système de démonstrations qui sont toutes fautives. Et il n'en dit pas un mot. Mais ce n'est pas plus difficile de donner des démonstrations correctes. Je ne crois pas non plus qu'il soit juste de regarder le système de Weierstrass comme compliqué. C'est au contraire simple et naturel en même temps que rigoureux, mais c'est vrai qu'il faut beaucoup de temps pour le développer »* (cf.Gispert, 1982).

La contribution du contre-exemple à la naissance de nouveaux concepts :

Mais le rôle du contre-exemple ne se limite pas à des réfutations. Il peut être à l'origine de la naissance d'un concept. On citera comme exemple le concept de convergence uniforme. Seidel l'a mis en évidence à partir de l'examen de la « démonstration » de Cauchy du « théorème » qui affirme la continuité de la limite d'une série convergente de fonctions continues. Cet examen a été fait suite à l'interprétation de la série produite par Fourier comme étant un contre-exemple au « théorème » de Cauchy (cf. Lakatos,1976).

Les contre-exemples monstres se retrouvent dans la nature :

Le développement du statut du contre-exemple à la fin du 19ème siècle est fortement lié au développement du concept de fonction. Le point de vue de certains mathématiciens du 19ème siècle et même du début du 20ème siècle, tels Poincaré et Lebesgue qui voyaient les contre-exemples comme étant des « monstres » s'avère aujourd'hui dépassé. *Les mathématiciens qui créèrent ces monstres les considéraient comme importants parce qu'ils démontraient que le monde des mathématiques pures inclut une richesse de possibilités allant bien au delà des structures simples qu'ils voyaient dans la nature. Les mathématiques du 20ème siècle fleurirent dans la croyance qu'elles étaient allées complètement au-delà des limitations que leur avait imposées leur origine dans les sciences de la nature* (cf, Mandelbrot, 1982). On est près du mot de Pascal : *« L'imagination se lassera plutôt de concevoir que la nature de fournir ».* En considérant la courbe de Péano qui remplit le carré, certaines de ses approximantes fournissent un modèle géométrique de réseau fluvial. Les monstres de

Lebesgue-Osgood sont la substance même de notre chair, comme le dit encore Mandelbrot. Les travaux de Poincaré sur la géométrie non euclidienne se sont révélés *les outils rêvés pour la théorie de la relativité* (ibid). Des contre-exemples qui n'avaient pas droit de cité à une certaine époque se sont révélés à la base même de certaines théories mathématiques. Ainsi les fonctions étagées s'introduisent naturellement dans la théorie de l'intégration et la fonction de Dirichlet se voit à la base de la théorie des distributions.

Le contre-exemple dans l'enseignement :

Dans une classe de mathématique le contre-exemple n'a pas le même statut que dans la communauté des mathématiciens. Il est généralement utilisé par l'enseignant pour invalider une réponse fausse de l'étudiant. Il représente ainsi une fin en soi, et conduit l'étudiant à abandonner toute sa recherche et à changer de voie. On remarque alors une priorité de l'action sur la réflexion. En outre, le contre-exemple en tant qu'outil utilisé par l'étudiant pour invalider un énoncé qu'il produit semble être assez rare. D'autre part, dans la situation classique d'enseignement, *la vérité en classe est institutionnelle, ce sont le maître et le livre qui l'incarnent* (cf. Legrand, 1988a). De ce fait, la gestion complète du vrai et du faux n'est pas à la charge de l'élève. La phase de conclusion est alors une *phase d'évaluation où la validité du travail de l'élève est évaluée par le maître sous la forme d'un jugement sans appel... Ce jugement n'appelle pas de réflexion de la part de l'élève au sujet de la validité de sa procédure ; il sait tout de suite si elle a abouti ou non. Il n'a plus rien à faire concernant la validité* (cf. Margolinas, 1993).

En se référant aux pratiques de la communauté des mathématiciens, Lakatos (cf. Lakatos, 1984) remarque qu'un contre-exemple peut avoir plusieurs conséquences, selon qu'il rejaillit sur la conjecture, sur la preuve ou sur les connaissances ou leurs fondements rationnels. Il peut aussi avoir comme conséquence la critique et le rejet du contre-exemple lui-même. Prenant pour base, dans une expérimentation, l'analyse proposée par Lakatos, Balacheff a identifié différents types de comportements d'élèves face à un contre-exemple. Ce sont l'abandon de la conjecture, la modification de la conjecture, la modification ad hoc de la conjecture, l'introduction d'une condition, la notification d'une exception, la reprise de la définition et le rejet du contre-exemple (cf. Balacheff,1988).

Dans cette étude nous nous intéressons, non pas aux conséquences du contre-exemple, mais aux éléments qui entrent en jeu dans la reconnaissance ou la production de contre-exemples.

III. APPROCHE ADOPTEE

III.1. Présentation du questionnaire

En classe, il convient de distinguer les deux cas où l'étudiant est confronté à des contre-exemples: la reconnaissance et la construction de contre-exemples. Le but du questionnaire est bien de relever des compétences individuelles qui sont nécessaires pour les deux types de tâches.

Lorsqu'un étudiant doit reconnaître un contre-exemple, il faut tout d'abord qu'il puisse comprendre l'assertion qui est rejetée. Et plusieurs formulations équivalentes d'une même assertion n'ont pas la même signification pour les étudiants. Un énoncé mathématique commençant par « Soit f **une** fonction ... » ou « Etant donné **une** fonction .... » sera souvent équivalent à l'énoncé « **Pour toute** fonction... ». Le quantificateur universel, présent dans une formulation d'un énoncé mathématique, peut rester implicite dans d'autres formulations **(Voir Questionnaire, Partie C).**

La négation de la proposition considérée est nécessaire, sinon à la compréhension de l'énoncé, du moins à la reconnaissance du contre-exemple. C'est pourquoi, une partie du questionnaire est consacrée à la formulation de négations **(Voir A2 ; A4 ; A5).** Notons qu'il y a plusieurs formes de négation : la négation lexicale (..ne ...pas...), l'antinomie (noir - blanc), l'opposition (pair - impair, croissant - décroissant) et l'exclusion. Ces différentes formes de négation peuvent certaines fois, avoir le même statut pour les étudiants, ce qui les amène à faire des erreurs.

Pour la reconnaissance d'un éventuel contre-exemple, il faut aussi une prise de conscience de la contradiction **(Voir D1 et D2).** La contradiction n'est pas obligatoirement reconnue par l'étudiant. En effet, la contradiction n'existe pas en soi, mais par rapport à un système cognitif ; une contradiction peut être reconnue par l'enseignant et ne pas être reconnue par l'étudiant, tandis qu'une contradiction peut être relevée par l'étudiant alors qu'elle n'apparaît pas pour l'enseignant (Balacheff, 1988).

Des erreurs dans la reconnaissance de la contradiction peuvent avoir deux origines :

- soit une origine liée à des difficultés en logique, telles que le traitement d'énoncés implicatifs (Voir B1 à B6). La formulation de la négation (Voir A2, A4, A5) et la compréhension des quantificateurs universels et existentiels surtout lorsqu'ils coexistent ensemble (Voir B7 à B10).

- soit une origine liée aux connaissances mobilisées par l'étudiant ; entre autres le type de définition (Voir A1 et A3). En effet, s'il s'agit de reconnaître que la proposition « si f' est positive alors f est croissante » est fausse et si la caractérisation mobilisée par l'étudiant d'une fonction croissante est « f est croissante si et seulement si f' est positive » alors la contradiction ne peut être reconnue par l'étudiant.

Le deuxième type de situations, celles où l'étudiant doit produire un contre-exemple, outre la compréhension de l'énoncé et la formulation de la négation, demande une construction (Voir D3) qui nécessite un certain degré de maîtrise du domaine mathématique mis en jeu.

III.2. Déroulement de l'expérimentation

L'échantillon choisi est formé de 115 étudiants en MP1 qui vont se spécialiser en Mathématiques. Ils seront donc plus tard amenés à manipuler les contre-exemples dans toute situation de problème ouvert.

La passation du questionnaire qui a duré environ une heure, s'est déroulée au 2ème semestre d'un enseignement de 1ère année de DEUG. Ce choix de date a été fait pour que les étudiants concernés puissent être en mesure de traiter toutes les questions. Commençons donner un bref aperçu sur l'enseignement de l'analyse dispensé au 1er semestre de la 1ère année universitaire de Mathématique et Physique.

Cet enseignement commence par la construction du corps des réels, avec en parallèle quelques notions de topologie. Le 2ème chapitre concerne l'étude des fonctions : Continuité- Dérivabilité- Théorème de Rolle et des accroissements finis - Formules de Taylor- Développements limités.

Nous avons choisi le début de l'analyse en première année de Mathématique et Physique, parce que d'une part l'étude épistémologique qui précède a montré le lien étroit entre l'évolution du statut du contre-exemple et le développement du concept de fonction. D'autre part, dans cette partie la plupart des propositions sont des implications et ne sont pas des équivalences. Ce sont les contre-exemples qui montrent que les réciproques sont fausses. Nous citons dans cette classe à titre d'exemple, le théorème des valeurs intermédiaires. En outre, certaines propositions vues dans le cours comportent plusieurs hypothèses et c'est le contre-exemple qui montre que toutes les hypothèses sont nécessaires. Le théorème de Rolle est un exemple qui fait partie de cette classe. La confusion entre une implication et sa réciproque (cf.Durrand-Guerrier,1995) et l'oubli de certaines hypothèses d'une proposition donnée, sont la source de plusieurs erreurs d'étudiants.

QUESTIONNAIRE, CODAGE ET RELEVE DES REPONSES

A1) On dit qu'une fonction f réelle d'une variable réelle x est dérivable en 0 si ....

Cette question a été codée en réussite- échec car les trois types d'échecs relevés n'étaient pas significatifs. En effet, il y avait en tout 8 réponses fausses dont une non-réponse, 3 réponses consistaient à donner la définition de la continuité, 3 autres considèrent que la valeur de la dérivée est nulle et la dernière donne la définition de la continuité de la dérivée au lieu de la définition de la dérivabilité.

A2) Une fonction réelle f définie sur une partie D de R n'est pas croissante si et seulement si ....

	Fréquence %	Cumul%
1.Réponse correcte*	29	29
2.Réponse donnant la bonne inégalité mais elle est large	15	44
3.Utilisation de la dérivée	27	71
4.Réponse donnant la bonne inégalité mais utilise le quantificateur universel	7	78
9.Autres échecs	22	100

*la réponse correcte étant: Il existe x dans D, y dans D tels que $x < y$ et $f(x) > f(y)$

A3) On dit qu'une fonction réelle f définie sur une partie D de R est décroissante sur D si ....

	Fréquence %	Cumul%
1.Réponse correcte*	36	36
2.Réponse donnant la bonne inégalité mais elle est stricte	21	57
3.Utilisation de la dérivée	30	87
9.Autres échecs	13	100

*La réponse correcte étant: Pour tout x dans D, tout y dans D $x < y$ entraîne $f(x) \geq f(y)$

A4) Soit D une partie de R. Voici une affirmation A:

" Si une fonction numérique définie sur D est continue alors elle est bornée"

Enoncer la négation de l'affirmation A: ....

	Fréquence %	Cumul%
1.Réponse correcte*	6	6
2.Utilisation de f continue et non bornée sans quantificateur existentiel	9	15
3.Utilisation de la contraposée	30	45
4.f non continue $\Rightarrow$ f non bornée	21	66
9.Autres échecs	34	100

*La réponse correcte étant: Il existe une fonction numérique continue et non bornée.

A5) Voici une affirmation B:

" Toute fonction bornée admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$"

Enoncer la négation de l'affirmation B: ....

	Fréquence %	Cumul%
1.Réponse correcte*	20	20
2.Utilisation du quantificateur existentiel avec erreur dans la négation	25	45
3.Utilisation de la contraposée	12	57
5.f non bornée$\Rightarrow$f n'admet pas de limite.(ou admet une limite infinie)	18	75
9.Autres échecs	25	100

*La réponse correcte étant: il existe une fonction bornée qui n'admet pas de limite finie lorsque x tend vers l'infini.

Dans la partie B, il y a 3 réponses possibles : soit la réponse est juste ; soit elle est fausse ; soit il y a non-réponse. Le nombre d'étudiants ayant fait des non-réponses étant très faible (3 sur 115) nous n'avons pas tenu compte de cette 3éme possibilité. Dans la partie C, le codage est relatif à chaque proposition d'énoncé équivalent. Pour chacune d'elles, il n'y a que 2 réponses possibles : soit la réponse est juste ; soit elle est fausse. Ainsi le codage des ces parties se réduit à la double modalités réussite-échec.

B) Vrai ou faux?

Cocher la case convenable

		Vrai	Faux		Réponse et Réuss %
B1	$\forall x \in R \quad x>5 \Rightarrow x^2>15$				Vrai................92
B2	$\forall x \in R \quad x>5 \Rightarrow x^2>35$				Faux...............90
B3	$\forall x \in N \quad x>5 \Rightarrow x^2>35$				Vrai................90
B4	$\forall x \in R \quad x^2>15 \Rightarrow x>5$				Faux...............94
B5	$\forall x \in R \quad x^2>35 \Rightarrow x>5$				Faux...............73
B6	$\forall x \in N \quad x^2>35 \Rightarrow x>5$				Vrai................92

B7	$\forall x \in R \ \exists y \in R \ / \ x + y = 0$				Vrai............97
B8	$\forall x \in R \ \exists y \in R \ / \ x \, . \, y = 0$				Vrai............86
B9	$\exists x \in R \ \forall y \in R \quad x + y = 0$				Faux...........88
B10	$\exists x \in R \ \forall y \in R \quad x \, . \, y = 0$				Vrai............65

C) Cocher ...

Voici un énoncé E:

"Soit f une fonction croissante, alors l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable"

Parmi les énoncés suivants, cochez la case de ceux qui sont équivalents à l'énoncé E.

Réussite %

□ C1) Si f est une fonction croissante alors l'ensemble des points de discontinuité est dénombrable.......................................55

□ C2) Soit f la fonction définie par: $f(x) = e^x$.
f est croissante et l'ensemble des points de discontinuité est dénombrable...72

□ C3) Pour toute fonction f croissante, l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.................................58

□ C4) Pour toute fonction f, si f est croissante alors l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.............................62

□ C5) Soit F l'ensemble des fonctions.
$\forall f \in F$ f est croissante $\Rightarrow$ l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable...72

□ C6) $\exists f \in F$ / f est croissante et l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable...80

□ C7) Etant donné une fonction croissante l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.................................72

□ C8) Toute fonction dont l'ensemble des points de discontinuité est dénombrable est croissante.................................90

□ C9) L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction croissante est dénombrable..................................71

D) Répondre:

Soit la proposition P:

"Si f est dérivable sur un voisinage de 0 et si f'(0) = l alors $\lim_{x\to 0} f'(x) = l$".

Cette proposition est fausse.

Pour rejeter cette proposition, les étudiants Omar, Ali, Rachid, Driss et Anass ont répondu comme suit :

Omar: On considère la fonction f définie par:

$$f(x) = x^{1/x} \quad \text{si } x \neq 0$$

$$f(0) = 0$$

On a $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$.

Ali: On considère la fonction g définie par:

$$g(x) = \log(1+x^{3/2}).\cos 1/x \quad \text{si } x \neq 0$$

$$g(0) = 0$$

On a $\lim_{x\to 0} g'(x)$ n'existe pas.

Rachid: On considère la fonction h définie par:

$$h(x) = x^2 \sin 1/x \quad \text{si } x \neq 0$$

$$h(0) = 0$$

On a $\lim_{x\to 0} h'(x)$ n'existe pas.

Driss: On considère la fonction k définie par:

$$k(x) = \frac{\mathrm{Log}(1+x^{3/2})}{x} \quad \text{si } x \neq 0$$

$$k(0) = 0$$

On a $\lim_{x\to 0} k'(x) = +\infty$.

Anass: **f' n'est pas obligatoirement continue en 0.**

D1) Parmi ces réponses y-en-a-t-elles qui rejettent P la proposition? Si oui, lesquelles ?...

	Fréquence %	Cumul%
1.Réponse correcte.(Ali, Rachid et Anass)	24	24
2.Si la seule réponse donnée est celle d'Anass	20	44
3.Si parmi les réponses citées figurent la réponse de Driss ou d'Omar	41	85
9.Autres échecs	15	100

D2) Parmi celles qui rejettent la proposition, quelle est la plus convaincante à votre avis ? Donner les raisons de votre choix ....

	Fréquence %	Cumul%
1.Réponse correcte.(Ali ou Rachid)	25	25
2.Si la seule réponse donnée est celle d'Anass	38	63
3.Si parmi les réponses citées figurent la réponse de Driss ou d'Omar	16	79
9.Autres échecs	21	100

D3) Donner d'autres réponses qui rejettent la proposition P.

- Codage de QD3 :

  Cette variable a été codée selon deux modalités réussite-échec. Dans la question relative à cette variable, il est demandé de produire un contre-exemple. La production est donc soit juste, soit fausse.

IV. ANALYSE DES RESULTATS :

IV.1. PREMIERE ANALYSE D'APRES LE RELEVE DES REPONSES

En comparant les réponses fournies par les étudiants interrogés aux deux questionsA2 et A3 qui relèvent toutes les deux de la même notion à traiter (croissance - décroissance d'une fonction) on remarque que le taux de réussite à la question A2 est plus faible que celui de la question A3. Ceci vient essentiellement du fait que dans A2, on demande à produire une négation, ce qui n'est pas le cas de A3. On remarque aussi que le taux de la deuxième modalité d'échec est en revanche plus faible concernant la question A2. On peut expliquer ceci par le fait qu'une négation demande plus de précision et que dans ce cas l'attention est portée à préciser si l'inégalité est large ou stricte.

Dans la partie A, on peut comparer aussi les résultats des questions A2, A4 et A5 où il s'agit de produire des négations. On remarque que A2 représente le meilleur taux de réussite. On peut expliquer ceci par le fait que dans A2, il est demandé la négation d'une fonction croissante. La définition d'une fonction croissante est généralement écrite sous forme symbolique ($\forall x \in E \ \forall y \in E \quad x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$) . La négation est alors un automatisme : le $\forall$ devient $\exists$, le $\geq$ devient $<$ ...etc. Concernant la question A4, elle est entièrement en langage naturel avec un implicite important : le quantificateur universel. Notons que la question A5 a été mieux réussi que la question A4, quoique ayant la même forme, parce que le quantificateur universel dans A5 est explicite (50 ont fait apparaître le quantificateur existentiel dans la formulation de la négation de A5, alors que seulement 17 l'ont fait apparaître dans la formulation de la négation de A4).

Quant à la partie B, elle est globalement mieux réussie que la partie A. Ceci pouvait être prévu parce que le traitement des questions de la partie B sont assez faciles et le type de réponses demandés dans la partie B est plus facile que celui demandé dans la partie A. En effet, dans la partie A, on demande de produire des réponses, alors que la partie B est du type Vrai-Faux. On peut néanmoins remarquer que le taux d'échec de la question B10 représente le plus grand taux d'échec de la partie B. Cette question présente une forme difficile puisqu'elle est liée à la coexistence des quantificateurs existentiels et universels. Une autre difficulté peut être due à une comparaison avec les autres énoncés proposés, notamment B8 et B9. Elle est liée soit à un glissement du traitement de la question B9 à celui de B10 (Les deux questions ont des formes similaires, mais la question B9 représente une proposition vraie et B10 représente une proposition fausse) ; soit à un point de vue selon lequel si on change l'ordre des quantificateurs existentiels et universels, la proposition change de statut (et puisque la proposition correspondante à B8 est vraie, alors celle correspondante à B10 sera fausse). On peut remarquer par ailleurs que le taux d'échec relatif à la question B9 est supérieur à celui de B7. De même le taux d'échec relatif à la question B10 est supérieur à celui de B8. Rappelons que la différence entre les questions B9 et B7 (resp.B10 et B8) est la position du quantificateur universel par rapport à celle du quantificateur existentiel. Dans les questions B9 et B10 c'est le quantificateur existentiel qui est en premier. En revanche, dans les questions B7 et B8, c'est le quantificateur universel qui est en premier. On peut affirmer que lorsqu'il y a une coexistence des quantificateurs existentiels et universels, le traitement dans le cas où le quantificateur universel est en premier est plus facile que dans le cas inverse. Dans ce dernier cas, il y a d'ailleurs plus de conditions à vérifier.

La partie C est, elle aussi, globalement mieux réussie que la partie A. Ceci peut être dû, entre autres, aux types de réponses demandées. On a déjà signalé que dans la partie A, on demande de produire des réponses alors que la partie C est du type Vrai - Faux.

En revanche la partie D est moins bien réussie que les parties B et C et la taux d'échec de la question D3 où il s'agit de construire un contre-exemple est plus élevé que le taux d'échec aux questions D1 et D2 où il s'agit de reconnaître un contre-exemple. Cette construction nécessite d'autres compétences que ne nécessitent la reconnaissance. Par ailleurs, la justification de la fausseté de la proposition paraît plus convaincante que le contre-exemple.

IV.2. ANALYSE FACTORIELLE DE CORRESPONDANCES MULTIPLES EN REUSSITE-ECHEC.

Pour analyser les copies des étudiants représentant les réponses au questionnaire, on a choisi une méthode factorielle, en raison de deux qualités que rassemblent ces méthodes. La première est de *dégager des grandes tendances, des lignes de force d'un ensemble de données a priori foisonnant et d'une organisation peu apparente*. La deuxième est de *fournir une localisation précise d'individus ou de variables, qui permet de pointer des particularités, des singularités* (cf. Pluvinage,1993). Notre but est d'avoir une vue d'ensemble ainsi que des précisions locales, choses que permettent d'atteindre les techniques d'analyse factorielle.

Par ailleurs, nous avons choisi une analyse en bimodalité réussite - échec et nous avons considéré les différentes modalités d'échec des parties A et D comme variables supplémentaires.

Notons que dans notre analyse, on n'a pas tenu compte de la question B7, car le taux d'échec a été très faible (égal à 3), et on sait qu'une analyse factorielle est justifiée si les effectifs de chaque modalité sont supérieurs à 5.

IV.2.1. Analyse du 1er axe : Axe de réussite-échec

L'analyse conduit à un premier axe associé à une valeur propre qui correspond à 29.41 % de la trace. Ce pourcentage est nettement plus grand que celui du 2^{éme} axe. Ce premier axe est l'axe réussite-échec puisque toutes les modalités de réussite ont une coordonnée positive sur cet axe, par opposition aux modalités d'échec, qui ont toutes une coordonnée négative. Ceci montre une bonne formulation du questionnaire, ainsi qu'une cohérence globale dans la conception des énoncés proposés. Cette cohérence existe malgré la présence d'exercices de natures différentes: Les parties A et D nécessitent une production de réponses, par contre les parties B et C ne nécessitent aucune production. La réponse à chaque exercice de ces deux parties est du type Vrai-Faux.

Par ailleurs, la contribution de la modalité d'échec est plus grande que la contribution de la modalité de réussite dans les parties B et C. Par contre, dans les parties A et D ce sont les modalités de réussite qui ont une plus grande contribution.

Le premier axe montre aussi que les parties B et C sont généralement faciles et c'est l'échec qui va être significatif ; et que les parties A et D sont généralement plus difficiles et c'est la réussite qui va être significative. Si l'on se réfère aux composantes des modalités selon l'axe 1, on constate en effet que les composantes des modalités d'échec des parties B et C sont en valeur absolue plus grandes que les composantes des modalités de réussite correspondantes. En revanche, ce sont les composantes des modalités de réussite des parties A et D qui sont en valeur absolue plus grande que les composantes des modalités d'échec correspondantes. On pourrait s'attendre a priori à la facilité des parties B et C et la difficulté des parties A et D puisque dans les parties B et C, l'étudiant a seulement un choix à faire, alors que dans les parties A et D, il a à produire une réponse.

En se référant au poids des modalités d'échec de la partie B, on constate qu'il est généralement faible (moins de 16 échecs sur 115 individus) sauf pour les questions B5 et B10 où l'échec est relativement plus élevé (resp. 31 et 40). La modalité QB5E (qui représente l'échec à la question B5) n'a pas une forte contribution au 1er axe, par opposition à la modalité B10E (qui représente l'échec à la question B10). On a déjà relevé auparavant les difficultés liées au traitement de la question B10 qui sont soit dues à la coexistence des quantificateurs existentiels et universels, soit à un glissement du traitement de la question B9 à celui de B10.

Quant à la partie C, elle présente une facilité du point de vue de la forme des réponses demandées (Vrai-Faux) ; mais la difficulté réside dans la compréhension des différentes formulations susceptibles d'être équivalentes à un même énoncé. Les modalités d'échec de la partie C qui ont le plus contribué à la formation du 1er axe sont QC3E, QC4E et QC5E. Ces modalités sont relatives aux énoncés C3, C4 et C5. Ce sont les seuls énoncés ou le quantificateur universel est explicite. Remarquons que toutes les modalités d'échec relatives à la partie C –hormis QC8E- ont assez fortement contribué à la formation du 1er axe. L'énoncé C8 est le seul qui représente la réciproque de l'énoncé et de ce point de vue il constitue une rupture par rapport aux autres énoncés. En outre, l'effectif des échecs à cette question est le plus faible dans cette partie.

En résumé, les modalités d'échec qui ont le plus contribué à la formation du 1er axe sont QC3E, QC4E, QC5E et B10E. Ces modalités sont toutes relatives à des questions liées aux quantificateurs. Ces derniers représentent la première source d'échec à ces questions.

Les modalités de réussite de la partie A qui ont le plus contribué à la formation du 1er axe sont QA2R et QA4R. Ces modalités ont des composantes en valeur absolue beaucoup plus grande que les composantes des modalités d'échec relatives aux mêmes questions. De ce fait la réussite est significative. Les modalités QA2R et QA4R représentent la réussite aux questions où il est demandé de formuler la négation d'une proposition. Les deux questions A2 et A4, quoiqu'elles demandent toutes les deux une négation ne sont pas de la même nature, comme on l'a signalé auparavant.

En outre, parmi les modalités de la partie D qui ont le plus contribué à la formation du 1er axe on trouve QD1R et QD3R qui représentent la réussite à la reconnaissance et à la production de contre-exemples. Notons que dans la partie D, l'énoncé proposé est écrit en langage naturel avec le quantificateur universel implicite, mais les réponses qui suivent l'énoncé représentent presque toutes des fonctions susceptibles d'être des contre-exemples à l'énoncé proposé. Ainsi, la difficulté de relever la négation du quantificateur universel n'apparaît pas ici.

Nous nous sommes posés la question de savoir si un bon traitement de la négation est associé à une bonne réussite dans la reconnaissance et la production de contre-exemples et inversement. Par conséquent nous avons croisé les variables correspondants au traitement de la négation (QA2 et QA4), et les variables correspondants au traitement du contre-exemple (QD1 et QD3). Le résultat est représenté par les tableaux qui suivent :

	QD1R	QD1E
QA2R	12	22
QA2E	16	65

Tableau 1 : Croisement des variables QA2 et QD1

(Tableau observé)

	QD1R	QD1E
QA2R	8	26
QA2E	20	61

Tableau théorique estimé

(même marges que le tableau observé)

$\chi^2 = 3.67$

	QD3R	QD3E
QA2R	6	28
QA2E	8	73

Tableau 2 : Croisement des variables QA2 et QD3

F = 0.195

	QD1R	QD1E
QA4R	3	4
QA4E	25	83

Tableau 3 : Croisement des variables QA4 et QD1

F =0.184

	QD3R	QD3E
QA4R	3	4
QA4E	11	97

Tableau 4 : Croisement des variables QA4 et QD3

F = 0.038

Sous l'hypothèse H_0 d'indépendance des variables QA2 et QD1 (Tableau 1), nous avons utilisé le test d'indépendance du χ^2. La condition nécessaire de la validité du test est réalisée, puisque les effectifs théoriques estimés sont tous supérieurs ou égaux à 5. On obtient un χ^2 égal à 3.67, alors que la valeur critique au seuil habituel de 5% est égale à 3.84. Ce test, ne nous mène donc pas à rejeter l'hypothèse d'indépendance.

Par ailleurs, sous l'hypothèse H_0 que la réussite dans la négation favorise la réussite dans la reconnaissance ou la construction de contre-exemples le calcul des effectifs théoriques des Tableaux 2, 3 et 4, a donné lieu dans chacun de ces tableaux à un effectif inférieur à 5, ce qui nous a conduit à utiliser le test exact de Fisher. Pour le tableau 2, nous avons obtenu $F = 0.195$. Pour le tableau 3, nous avons obtenu $F = 0.184$ et pour le tableau 4, nous avons obtenu $F = 0.038$. Au vu de ce questionnaire le traitement de contre-exemple n'apparaît en définitive que peu conditionné par celui de la négation. Ce n'est qu'au niveau du dernier tableau que la probabilité est très faible. On peut donc affirmer au seuil habituel de 5% que la réussite dans la construction du contre-exemple n'est pas favorisée par une réussite dans la négation.

L'interprétation du 1^er^ axe en axe de réussite-échec, conduit à un échec lié aux quantificateurs et une réussite liée à la négation et aux contre-exemples.

IV.2.2. Analyse du 2ème axe : Différentes formes d'exploitation du discours

Le pourcentage de l'axe 2 par rapport à la trace est de 12.10 % ; la projection des réponses sur le plan principal permet de distinguer l'opposition entre deux groupes de modalités d'échecs : d'une part QB1E, QB2E, QB4E, QB6E, QB9E, QC8E et QD2R et d'autre part QC4E et QA5R. Dans le tableau suivant on représente les contributions à l'axe, la qualité et le poids de ces modalités.

	CTR2	QLT3	POND
QB1E	10.62	52.64	9
QB2E	13.02	56.39	11
QB4E	7.12	39.15	7
QB6E	7.02	43.78	9
QB9E	7.13	42.46	14
QC8E	5.75	47.26	11
QD2R	5.13	70.31	29
QC4E	4.67	77.85	44
QA4R	3.03	42.76	7
QA5R	5.07	37.61	23

A priori on peut dire que cet axe traduit les différentes formes d'exploitation du discours liées au repérage des éléments présents dans le discours.

En effet, d'un côté il y a des éléments du discours qui ne sont pas repérés (QB1E, QB2E, QB4E, QB6E, QB9E et QC8E). Ces éléments sont liés à l'organisation du discours et plus précisément à l'ordre de présentation. L'inversion de l'ordre peut être vue sous plusieurs angles :

- L'inversion de l'ordre peut être relative à une implication, comme c'est le cas des questions B1, B2, B4 et B6. La proposition B1 représente la réciproque de la proposition B4 et la proposition B2 représente une « pseudo-réciproque » de la proposition B6 si on ne tient pas compte de l'ensemble de référence. Pour toutes ces questions l'ensemble de référence ne joue pas un rôle dans la réponse finale, bien qu'il entre en compte dans leur bon traitement (et c'est la réponse finale qui est demandée, le traitement n'est pas demandé ici). Ainsi, on peut croire que ces questions ont pu être traitées de la manière suivante :

$x > 5 \Rightarrow x^2 > 25 \Rightarrow x^2 > 15$. D'où la proposition B1 est vraie.

$x > 5 \Rightarrow x^2 > 25$ ce qui n'entraîne pas que $x^2 > 35$. D'où la proposition B2 est fausse.

$x^2 > 15 \Rightarrow x > \sqrt{15}$ ce qui n'entraîne pas que $x > 5$. D'où la proposition B4 est fausse.
(ici l'ensemble de référence est R, et donc même en ne tenant pas compte de cet ensemble- x est soit positif, soit négatif- la réponse peut être bonne)

$x^2 > 35 \Rightarrow x > \sqrt{35} \Rightarrow x > 5$. D'où la proposition B6 est vraie.
(ici l'ensemble de référence est N, et donc même en ne tenant pas compte de cet ensemble- x est toujours positif, la réponse peut être bonne)

L'erreur est donc due à une inversion dans le traitement de l'implication. Ainsi, en cas d'échec, nous croyons que le traitement des questions B1, B2, B4 et B6 a pu être comme suit :
" On propose $x > 5 \Rightarrow x^2 > 15$. Mais $x^2 > 15$ n'entraîne pas $x^2 > 25$, qui est le carré de 5. Je coche donc Faux."
" On propose $x > 5 \Rightarrow x^2 > 35$. Si $x^2 > 35$, alors $x^2 > 25$. Je coche donc Vrai."

" On propose $x^2 > 15 \Rightarrow x > 5$. Si $x > 5$ alors $x > \sqrt{15}$. Je coche donc Vrai."

" On propose $x^2 > 35 \Rightarrow x > 5$. Mais $x > 5$ n'entraîne pas $x > \sqrt{35}$. Je coche donc Faux."

- L'inversion de l'ordre peut être relative à une inversion des quantificateurs existentiels et universels. C'est le cas de la proposition B9 qui est fausse, contrairement à la proposition B7 qui est vraie. Rappelons que la différence entre les propositions B7 et B9 est l'inversion de l'ordre des quantificateurs existentiels et universels.

- L'inversion de l'ordre peut être relative à la structure de l'énoncé où il y a une confusion entre une hypothèse et sa conclusion (QC8E).C'est le cas de l'énoncé C8 qui représente la réciproque de l'énoncé proposé. Notons que c'est le seul énoncé qui a ce statut.

Notons que la réussite dans la reconnaissance d'un contre-exemple peut avoir lieu même sans avoir repérer tous les éléments, puisque là il y a un choix à faire et on n'a pas la possibilité de voir si tous les éléments ont été repérés. En revanche les modalités de réussite où il s'agit de produire et qui nécessitent un repérage de tous les éléments présents du discours sont toutes de l'autre côté de l'axe (tels que QA4R, QA5R, QD3R, QA3R et QA2R). Ceci explique la présence de la modalité de réussite QD2R du même côté que les modalités d'échec QB1E, QB2E, QB4E, QB6E, QB9E et QC8E.

La projection des différentes modalités d'échec, considérées comme variables supplémentaires, sur le plan des axes 1 et 2 nous montre la présence des modalités QA42, QA59, QD19 et QA22 du même côté que les modalités QB1E, QB2E, QB4E, QB6E, QB9E, QC8E et QD2R. Cette présence de ces modalités renforce notre interprétation de l'axe puisque QA42 représente l'écriture de la négation mais sans quantificateur existentiel. Il n'y a donc pas eu un repérage du quantificateur universel. C'est ce repérage qui aurait permis, en passant à la négation, l'écriture quantificateur existentiel. Par ailleurs, concernant les modalités QA59 et QD19, elles représentent généralement soit des non- réponses, soit des réponses hors- sujet; ce qui montre là aussi un non repérage des éléments présents dans le discours. Concernant la modalité QA22, elle représente l'écriture de la négation, mais en donnant une inégalité large alors qu'elle doit être stricte. Là aussi cet élément n'a pas été repéré.

De l'autre côté la priorité est principalement donnée à repérer les éléments présents dans le discours. C'est le cas de la question C4 où l'échec a une forte contribution à l'axe 2. Rappelons que la question C4 représente un énoncé qui a la même forme que celui donné au début mais avec une explicitation du quantificateur universel. L'attention portée sur l'organisation du discours peut être excessive si elle conduit à affirmer d'emblée la différence d'énoncés organisés différemment.

D'autre part, une grande attention portée à repérer les éléments présents dans le discours peut être un élément favorable à une réussite. Ainsi, formuler la négation d'un énoncé quelque peu complexe, une implication par exemple, exige d'être vigilant par rapport à l'organisation. C'est la tâche que demandent A4 et A5, et il n'est donc pas étonnant que les réussites QA4R et QA5R aient des coordonnées importantes sur l'axe 2 et une contribution assez grande dans la formation de cet axe.

La projection des différentes modalités d'échec, considérées comme variables supplémentaires, sur le plan des axes 1 et 2 nous montre la présence des modalités QD22, QD12 et QD23 du même côté que les modalités QC4E, QA4R et QA5R. Les modalités QD22 et QD12 représentent la réponse par la justification de la fausseté de la proposition et non par un contre-exemple. La modalité QD23 représente un choix d'un faux contre-exemple. Pour ces trois modalités les éléments présents dans le discours sont repérés, mais l'erreur provient d'autres considérations.

L'axe 2 traduit donc, une opposition entre deux formes d'exploitation du discours : Dans la première certains éléments du discours ne sont pas pris en compte, ce qui conduit à des échecs. Dans la seconde il y a au contraire une grande attention portée à repérer les éléments présents dans le discours, ce qui peut conduire à des réussites comme à des échecs.

IV.2.3. Analyse du 3ème axe : Différentes réactions par rapport à la forme

Le pourcentage de l'axe 3 par rapport à la trace est de 9.34 %. Cet axe fait apparaître une opposition entre deux groupes de modalités. Le premier groupe est constitué de QB3E; QB5E et le 2ème groupe est constitué de QC5E, QC8E, QD1R et QD2R. Dans le tableau suivant on représente les contributions à cet axe; la qualité et le poids de ces modalités.

	CTR3	QLT3	POND
QB3E	12.28	48.67	12
QB5E	7.27	41.65	31
QC5E	6.93	78.09	32
QC8E	6.05	47.26	11
QD1R	7.50	63.14	28
QD2R	7.71	70.31	29

Remarquons d'abord que C5 représente le seul énoncé équivalent à l'énoncé E, dont la forme s'éloigne de celle de E. Dans C5, il y a l'introduction du quantificateur universel et de l'implication sous forme symbolique, alors que l'énoncé E est écrit en langage naturel. Au contraire, C8 représente le seul énoncé qui n'est pas équivalent à l'énoncé E, dont la forme est proche de celle de E. L'échec à ces deux questions peut être traduit par une réaction excessive par rapport aux sensibilités de forme. Cette attitude a pu contribuer dans la réussite à la reconnaissance des contre-exemples. En effet, les réponses proposées dans la partie D comportent quatre réponses ayant la même forme (Ce sont les réponses d'Omar, Ali, Rachid et Driss), et une ayant une forme différente (C'est la réponse d'Anass). La comparaison de formes a pu amener à rejeter cette dernière qui ne représentait pas un contre-exemple.

La projection des différentes modalités d'échec, considérées comme variables supplémentaires, sur le plan des axes 1 et 3 nous montre la présence de la modalité QA53, du même côté que les modalités QC5E, QC8E, QD1R et QD2R. La modalité QA53 représente l'écriture de la contraposée de la proposition énoncée au lieu de la négation de la proposition. Dans la contraposée il y a des négations, mais elle garde la même forme que la proposition donnée (la proposition est de la forme $P \Rightarrow Q$ et la contraposée représente $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$). Donc, là aussi il y a une réaction excessive par rapport aux sensibilités de forme.

Par ailleurs, les échecs à B3 et B5 pouvaient être évités grâce à une comparaison avec une implication ayant une forme assez proche (Ce sont les implications relatives à B2 et B6). En effet B3 représente la proposition : $\forall x \in N \quad x>5 \Rightarrow x^2>35$ et B2 représente la proposition : $\forall x \in R \quad x>5 \Rightarrow x^2>35$. La différence entre ces deux propositions est l'ensemble de référence, et nous pensons que l'erreur dans le traitement de B3 vient du fait de ne pas tenir compte de l'ensemble de référence ($x \in N$ et $x > 5$ entraîne $x \geq 6$. D'où $x^2 \geq 36$ et par conséquent $x^2 > 35$) De même, B5 représente la proposition : $\forall x \in R \; x^2 > 35 \Rightarrow x > 5$ et B6 représente la proposition : $\forall x \in N \; x^2 > 35 \Rightarrow x > 5$. Là aussi la différence entre ces deux propositions est l'ensemble de référence, et nous pensons que l'erreur dans le traitement de B5 vient du fait de ne pas tenir compte de l'ensemble de référence ($x \in R$, x est donc soit positif soit négatif donc on n'a pas $x > 5$).

La projection des différentes modalités d'échec, considérées comme variables supplémentaires, sur le plan des axes 1 et 3 nous montre la présence des modalités QD29, QA24 et QD12 du même côté que les modalités QB3E et QB5E. La modalité QD29 représente soit une non- réponse, soit une réponse hors sujet. La comparaison des réponses fournies n'a pas eu lieu. On a donc là une réaction insuffisante par rapport aux sensibilités de forme. Quant à la modalité QA24, elle représente l'écriture de la négation mais avec le quantificateur universel au lieu du quantificateur existentiel. Une comparaison avec les questions A4 et A5, qui demandent elles aussi l'écriture d'une négation aurait pu faire éviter cette erreur. Enfin la modalité QD12 représente le choix de la justification de la fausseté de la proposition et cette réponse est la seule qui n'a pas la même forme que les autres réponses. On a déjà signalé qu'une grande sensibilité à la forme aurait conduit à ne pas considérer cette réponse. En revanche une réaction insuffisante par rapport à la forme conduirait à envisager cette réponse.

Ainsi, on peut dire que de ce côté on a une réaction insuffisante par rapport aux sensibilités de forme.

L'axe 3 donne donc, des informations sur les différentes réactions par rapport à la forme.

CONCLUSION DE L'ANALYSE FACM

L'analyse factorielle des correspondances multiples montre le caractère facile des parties B et C et de ce fait ce sont les échecs qui vont être significatifs des difficultés des étudiants. Par contre l'analyse montre le caractère plus difficile des parties A et D et de ce fait ce sont les réussites qui vont être significatives.

Le 1er axe met en avant la compréhension de différentes formes d'un énoncé mathématique; surtout les énoncés où le quantificateur universel est écrit d'une manière explicite (voir C3, C4, C5). Il met aussi en avant les questions liées à la négation et au contre-exemples.

Les principales causes d'échec, qui apparaissent aux 2ème et 3ème axes, sont liées d'une part à l'ordre, d'autre part à la forme.

L'ordre ici est vu sous plusieurs angles :

- l'ordre dans l'implication qui nécessite une non confusion entre une implication et sa réciproque.
- L'ordre dans la position du quantificateur universel par rapport au quantificateur existentiel.
- L'ordre dans la structure d'un énoncé que nécessite la distinction entre ce qui est hypothèse et ce qui est conclusion.

La forme est vue dans la comparaison des divers énoncés. Ainsi apparaissent différentes sensibilités à la forme.

Dans un environnement mettant en avant le contre-exemple, deux éléments apparaissent ayant une importance dans le traitement de l'implication et la compréhension d'un énoncé mathématique : ce sont l'ordre des éléments présents dans une implication ou l'énoncé et la comparaison avec d'autres énoncés ayant des formes similaires. Cette comparaison peut être favorable à la reconnaissance d'un contre-exemple.

D'autre part, il apparaît que le traitement de la négation (Voir les questions A2 et A4) n'est pas très lié à la reconnaissance de contre-exemples (Voir la question D1). On peut expliquer ceci par le fait qu'un contre-exemple à une proposition de la forme $P \Rightarrow Q$ est vu comme un objet vérifiant P et ne vérifiant pas Q sans avoir un recours explicite à la négation.

Si le traitement de la négation paraît peu lié à la reconnaissance de contre-exemple, la place de la logique dans la construction de contre-exemple est-elle de même limitée ? Les résultats au questionnaire ne permettent pas d'aborder de tels problèmes. Pour y répondre, nous avons choisi de faire travailler des étudiants en binômes. Il est apparu que les questions proprement logiques ne conditionnent les difficultés que dans la mesure où elles s'ajoutent aux difficultés propres à l'analyse (cf. Benbachir, 2000).

Références bibliographiques :

Balacheff, N., 1988, *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège*, Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble, p. 84, 155, 156.

Benbachir, A. et Zaki, M., 2000, *Etude de cas en première année d'université, le contre-exemple en analyse* (article proposé à la revue Educational Studies in Mathematics).

Durrand-Guerrier, V.,1995, Différents types de savoirs et leur articulation, *Place de la logique formelle comme outil d'analyse des connaissances mises en œuvre dans le raisonnement mathématique dans une perspective didactique*, 205-233. Ed. la pensée Sauvage, Grenoble.

Duval, R., 1998, *Signe et objet, Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et Objet*, Annales de didactique et de sciences cognitives 6, 139-163. IREM de Strasbourg.

Gispert, H., 1982, *Camille Jordan et les fondements de l'analyse*, Thèse. Publications mathématiques d'Orsay, Orsay, p. 82.

Glaeser, G., 1971, *Mathématiques pour l'élève-professeur*, formation des enseignants, Paris, Hermann, p.108.

Glaeser, G., 1995, Encyclopédie Universalis, *Péano,G.*, Vol. 17, pp. 703-705.

Hitt , H., 1998, *Systèmes sémiotiques de représentation liés au concept de fonction*, Annales de didactique et de sciences cognitives 6, 7-26. IREM de Strasbourg.

Lakatos, I. (traduction française) 1984, Preuves et réfutations. Ed. Herman, p. 167, 171.

Legrand, M., 1988a, Actes du premier colloque Franco-Allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique, Genèse et étude sommaire d'une situation codidactique, le débat scientifique en situation d'enseignement, , 53-66.Grenoble, La Pensée Sauvage.

Mandelbrot, B., 1982, Penser les mathématiques, 226-251. Ed. du Seuil.

Margolinas, C., 1993, De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématique. Ed. La Pensée Sauvage, p. 30,31.

Pluvinage, F., 1993, 'Grilles et taxinomies', Annales de didactique et de sciences cognitives 5, 5-17. IREM de Strasbourg.

Pont, J.C., 1995, Aux sources du conventionnalisme, Les savants et l'épistémologie vers la fin du XIX^{ème} siècle, 109-144. Ed. Albert Blanchard, Paris.

Youschkevitch, A.P., 1981 (Traduction française), Le concept de fonction jusqu'au milieu du 19ème siècle. Fragments d'histoire des mathématiques, brochure APMEP n° 41.