A. Gagatsis, M. Shiakalli et A. Panaoura

LA DROITE ARITHMETIQUE COMME MODELE GEOMETRIQUE DE L´ADDITION ET DE LA SOUSTRACTION DES NOMBRES ENTIERS

Abstract. This article presents the results of an experimental study that looks into the use of number line as a geometrical model for addition and subtraction of natural numbers. The study was conducted in Cyprus with 106 7-to 8-year old primary school students. After a short description of various pieces of research, which deal with the role of representation in the learning of mathematics, the use of number line in primary school mathematics teaching is analysed. Student's responses drawn from four questionnaires illustrate their difficulty concerning the use of the number line model. These difficulties can be explained in two ways: (a) by the dual nature of the number line as a geometrical model and (b) by students' different conceptions related to the representation of natural numbers and their operations on a number line.

Résumé. Ce texte présente une étude théorique et expérimentale sur la droite arithmétique comme modèle géométrique pour l'addition et la soustraction des nombres naturels. Après une brève description des recherches sur le rôle des représentations dans l'apprentissage des mathématiques, nous analysons l'utilisation de la droite arithmétique dans l'enseignement de l'école primaire. Notre recherche auprès des élèves grecs de l'école primaire de Chypre, basée sur quatre questionnaires, montre une difficulté en ce qui concerne l'utilisation du modèle de la droite arithmétique pour l'addition et la soustraction des nombres naturels. Ces difficultés pourraient être expliquées par la double nature de la droite arithmétique en tant que modèle géométrique et aussi par les différentes conceptions des élèves liées à la représentation des nombres et à la représentation sur la droite arithmétique des nombres naturels et de leurs opérations.

Mots clés : Droite arithmétique, modèle géométrique, l'addition et la soustraction des nombres naturels, représentations, apprentissage des mathématiques, école primaire, statistique implicative.

---

1. Introduction

Le concept de représentation fait, depuis quelques années, l'objet de nouvelles recherches qui se placent généralement dans les sciences de l'éducation, à la croisée des sciences cognitives, de la psychologie, de la sémiologie, de l'épistémologie et de la didactique. Chez de nombreux chercheurs, il joue un rôle fondamental pour expliquer l'activité intellectuelle. Mais les usages de ce terme sont assez différents d'une discipline à l'autre. Ces recherches peuvent être classées globalement en quatre catégories :

A. *Théories des représentations* (Duval, 1987, 2001 ; Goldin, & Kaput, 1996 ; Hall, 1998 ; Kaput, 1987 ; Roth, & MacGinn, 1998 ; Von Glaserfeld, 1987.)
   Cette première catégorie concerne des travaux qui proposent une théorie

Annales de didactique et de sciences cognitives, volume 8, p. 95 – 112.

cognitive concernant le rôle des représentations dans l'apprentissage des mathématiques. Plusieurs auteurs insistent sur la distinction entre *représentations internes et représentations externes*. Raymond Duval insiste sur le caractère sémiotique des représentations et sur le fait qu'elles permettent des traitements en mathématiques (Duval, 2001.)

B. Représentations et résolution des problèmes en Mathématiques (Goldin, 1987 ; Lesh, Behr, & Post, 1987.)
Cette deuxième catégorie concerne des travaux qui proposent des recherches concernant le rôle des représentations dans la résolution des problèmes en mathématiques.

C. Le rôle des représentations dans la compréhension et l'apprentissage de notions mathématiques :

- Sur la fonction : Duval, 1987 ; Duval,2001 ; Gagatsis, Michaelidou, & Shiakalli, 2001.
- Sur les fractions : Lesh, Behr, & Post, 1987 ; Markou, 2001 in : Gagatsis et all, 2001.
- Sur le cercle et la géométrie en général : Janvier, 1987 ; Mesquita, 1998.
- Sur l'addition et la soustraction des nombres naturels à l'école élémentaire : Ernest, 1985 ; Gagatsis, & Panaoura, 2000 ; Hart, 1981.

D. Le passage d'un type de représentation à un autre : Duval, 1987, 2001 ; Gagatsis, & Mougi, 2000 ; Gagatsis, Michaelidou & Shiakalli, 2000 ; Gagatsis, & Panaoura, 2000 ; Janvier, 1987.

Notre recherche concerne surtout les catégories C et D mais, comme elles ont toutes une base théorique commune, elle prendra en compte les quatre catégories. En particulier cette étude concerne l'utilisation de la représentation de la droite arithmétique pour l'apprentissage de l'addition et la soustraction des nombres naturels à l'école élémentaire.

2. Utilisation de modèles dans la formation en mathématiques

Plusieurs auteurs ont traité du sens et du rôle des modèles dans la formation en mathématiques. On peut établir une distinction générale entre deux catégories de modèles : les "modèles de l´intellect de l´élève" et les "modèles du processus d´apprentissage".

Ces modèles sont utilisés par les chercheurs pour décrire et expliquer les connaissances, les structures et les opérations cognitives des élèves**.** Habituellement, les élèves n´ont pas conscience de leurs propres structures et opérations cognitives – au moins dans la forme où celles-ci sont décrites dans les modèles. Ils ne peuvent donc pas utiliser les modèles de la première catégorie. Par contre, les modèles de la deuxième catégorie reflètent les processus intuitifs liés au contenu mathématique enseigné, et ainsi ils peuvent être utilisés par les élèves à un certain stade du développement de leur pensée ou du processus de résolution d´un problème. Nous nous pencherons ici sur les modèles de cette deuxième catégorie.

E. Fischbein (1972) considère qu´un modèle utilisé dans l´enseignement doit avoir pour principale fonction de générer (de produire) et de représenter une quantité infinie de propriétés à partir d´un nombre limité d´éléments et de règles de combinaisons, de la même manière que la structure de la langue permet à l´enfant de créer une quantité infinie de phrases à partir d´un petit nombre d´éléments et de règles grammaticales. Un modèle est donc un mode de représentation (comme la langue), mais une représentation n´est un modèle que si elle possède le caractère "génératif" en question. En outre, un modèle doit conduire facilement, et indépendamment du système initial qu´il représente, à de nouvelles informations portant sur ce système.

Par exemple, un graphique adéquat peut nous donner des informations sur les diviseurs d´un nombre et leurs relations, tout en nous suggérant de multiples idées, comme par exemple le fait que le système des diviseurs d´un nombre est parfois ordonné de la même manière que l´ensemble des sous-ensembles d´un ensemble donné : ainsi est-on conduit à se demander pour les diviseurs de quels nombres obtient-on une telle situation, etc. On peut donc dire que les présentations graphiques de ce type constituent un modèle pour la divisibilité, comme les diagrammes de Venn (ou de Euler) consituent un modèle pour les différentes opérations et relations dans les théories des ensembles (Gagatsis & Patronis, 1990.)

3. Les modèles géométriques

3.1. Définitions - Exemples

Nombreuses sont les représentations géométriques à avoir été utilisées par les mathématiciens et les professeurs de mathématiques en tant que modèles de formulation ou modèles de validation. R. Thom mathématicien et philosophe ayant étudié le profit que l'on peut tirer de la construction d´un modèle géométrique décrivant une situation, affirme qu´un tel modèle nous offre un point de vue global (holistique), absent de la description verbale en raison de la fragmentation inhérente au discours. Selon Thom, un autre avantage de la construction du modèle géométrique réside dans le fait qu´elle donne à l´individu la possibilité de "maintenir" l´objet de son étude à une certaine distance, en le représentant dans l´espace (Thom, 1979.)

Qu´est-ce donc qu´un modèle géométrique ? On pourrait dire, en première approximation, qu´il est une représentation géométrique d´un problème, adaptée à une étude ultérieure, c´est-à-dire une représentation géométrique qui possède ce caractère génératif et ce caractère de découverte que Fischbein réclame pour un modèle (1972.)

Gagatsis et Patronis (1990) proposent une définition plus précise, bien que toujours inscrite dans un cadre intuitif plutôt que strictement formel :

"Soit une collection S de points, droites ou autres figures dans un espace euclidien de dimension n, et qui représente un système Σ d´objets, une situation ou un processus. Nous dirons que la collection S est modèle géométrique de Σ si les propriétés géométriques intrinsèques des éléments de S (i.e. les propriétés géométriques que nous observons dans les points, les droites, etc., de la collection S indépendamment de Σ) nous fournissent une certaine information sur Σ, c´est– à-dire correspondent à des propriétés effectives de Σ. Si cette condition est respectée par les seules propriétés topologiques des figures de la collection S, alors nous dirons que S est un modèle géométrique au sens large (ou topologique)".

En d´autres mots, nous pourrions dire que la collection S est modèle géométrique pour Σ (respectivement, modèle géométrique au sens large) s´il existe une application de l´ensemble des propriétés de Σ sur l´ensemble des propriétés géométriques intrinsèques de S (respectivement : des propriétés topologiques de S.)

Exemples :

a) Dans les manuels de mathématiques, les représentations géométriques courantes des identités algébriques sont en ce sens des modèles géométriques, tandis que les représentations graphiques des fonctions sont généralement des modèles géométriques au sens large.
b) Le modèle géométrique décrit ci-après peut être utilisé pour résoudre dans l´ensemble des nombres réels le système paramétrique d'inconnues x et y,

$$x + y = s \quad (1)$$
$$x . y = p \quad (2).$$

Par exemple, soit p>0 ; alors, pour toute valeur de s et p>0 nous avons, dans le plan cartésien, une droite qui représente l´équation (1) et une hyperbole (à deux branches) qui représente l´équation (2). En étudiant le nombre de points d'intersection de la droite et l´hyperbole (deux, un seul ou aucun point commun), on parvient facilement à la condition nécessaire et suffisante pour la résolution de ce système. Ici, le modèle consiste en deux familles de courbes (droites et hyperboles), dont les propriétés géométriques sont toutes en relation avec le problème (comme par exemple la situation limite où la droite (1), déplacée parallèlement à elle-même quand s varie, devient à certain moment donné tangente à la courbe (2)).

3.2. La droite arithmétique comme modèle géométrique

Soit Σ l´anneau des entiers ou le corps des nombres rationnels (ou un corps qui contient Q) avec les opérations suivantes : addition, soustraction, multiplication et division.

Soit S la droite graduée, c´est à dire la droite avec un ensemble discret de points qui correspond aux nombres entiers ou rationnels. Un isomorphisme canonique :

$$\Sigma \rightleftarrows S \quad (1)$$

permet à S d'être un modèle géométrique de Σ.

Ainsi, les opérations sur les nombres de Σ correspondent aux opérations sur les segments orientés ou aux opérations sur les nombres et segments orientés (comme par exemple le produit d´un nombre multiplié par un segment orienté.) L´isomorphisme (1) fonctionne dans deux directions. La droite graduée fonctionne comme modèle géométrique des opérations sur Σ de la manière suivante : Deux nombres étant donnés dans Σ, ils correspondent à deux éléments de S, l´opération est faite dans S et le résultat est “traduit” de nouveau par un nombre de Σ. Cette procédure peut être pour certains élèves plus laborieuse que la simple exécution de l´opération dans Σ à l´aide d´un algorithme.

4. L’utilisation de la représentation de la droite arithmétique pour l’apprentissage de l’addition et de la soustraction des nombres naturels à l’école élémentaire

4.1. Recherches sur l’utilisation de la droite arithmétique

Plusieurs manuels des mathématiques de l’école élémentaire proposent la représentation de la droite arithmétique comme une aide visuelle pour l’apprentissage de l’addition et de la soustraction des nombres naturels à l’école élémentaire.

Cette utilisation est basée sur l’idée répandue parmi quelques chercheurs que la représentation de la droite arithmétique joue en rôle très important dans l’enseignement des opérations des nombres entiers (Ernest, 1985 ; Fueyo, & Bushell, 1998 ; Klein, Beishuizen, & Treffers, 1998.) Cette idée est aussi exprimée par quelques auteurs de livres de méthodologie des mathématiques pour l’enseignement primaire (Billstein, Libeskind, & Lott, 1984 ; Paige, Thiessen, & Wild, 1982.)

En plus, la capacité de faire des additions et des soustractions des nombres entiers est souvent incluse dans la liste des objectifs des programmes scolaires (DfEE, 1999 ; NCTM, 2000 ; Ministère de l’ Education et de la Culture de Chypre,1994.)

Enfin, certains chercheurs utilisent des exercices d’addition et de soustraction à l’aide de la droite arithmétique dans des buts d’évaluation (Reisman, 1982 ; Underhill, Uprichard, & Heddens, 1982 ; Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist, & Reys, 1981 ; Carr, & Katterns, 1984.)

Néanmoins, certains chercheurs expriment des doutes sur l’efficacité de l’utilisation de cette représentation : Ernest (1985) commente les résultats de l'évaluation de NAEP concernant l'addition des nombres entiers par des enfants de 9 et 13 ans (Carpenter et al.,1981 ; Ernest, 1985.) D'après lui, il y a un fait surprenant concernant ces résultats : seulement un quart des enfants de neuf ans et la moitié des enfants de treize ans examinés sont capables de répondre aux exercices d'addition sur la droite arithmétique. Ce fait est en contradiction avec les performances des élèves aux autres items d'addition : au moins la moitié des élèves de neuf ans et le quatre-cinquième des élèves de treize ans peuvent répondre correctement à chacun des autres items. Pourquoi cette disparité des résultats ? Est-elle due au fait que les items d'addition sur la droite arithmétique testent la compréhension de l'addition tandis que les autres ne la testent pas ? Ernest en doute (Ernest, 1985, p.420.) Au contraire il attire l'attention sur la grande différence entre la compréhension des élèves de l'addition des nombres entiers et la compréhension du modèle de la droite arithmétique de cette opération. D'après lui, il y un danger "*à imposer une relation très étroite entre l'évaluation de la compréhension de l'addition par les élèves et celle des tâches sur la droite arithmétique"* (Ernest, 1985, p.421.)

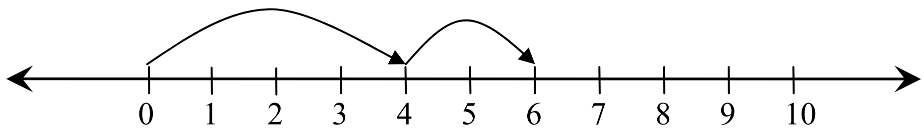
Si on revient à l´esprit des recherches sur les représentations du paragraphe 1 (introduction) on trouve aussi des avis défavorables au modèle de la droite arithmétique. Ainsi Dufour-Janvier, Bednarz et Belanger (1987) soulignent le fait que l'introduction précoce et l'utilisation d´un nouveau système de représentation peut avoir des effets négatifs sur l'apprentissage, ou conduire à des conceptions erronées qui pourraient fonctionner comme obstacles pour des stades suivants de l'apprentissage. Comme exemple d´une représentation "problématique", ils donnent le modèle de la droite arithmétique. En dehors des difficultés d'utilisation de la droite arithmétique comme moyen de représentation des opérations, les chercheurs mettent à jour des interprétations erronées qui pourraient être présentes chez quelques élèves à cause du contexte dans lequel elle est utilisée. Par exemple, quelques enfants voient les nombres qui sont situés sur la droite arithmétique comme des panneaux qui sont placés le long d'une route, sans comprendre la nécessité de leur placement à distance égale. Un pourcentage non négligeable d'élèves développe l'idée que la droite arithmétique présente une série de pierres, sur lesquelles on peut marcher, séparées par des vides. Une telle conception est très éloignée de celle de densité des nombres réels qui apparaît sur la droite arithmétique.

D´autres chercheurs contestent le « grand pouvoir » de la représentation de la droite arithmétique :

- -"…le modèle de la droite arithmétique doit être abandonné" (Hart, 1981. p.87),
- -"Une droite arithmétique n'est pas une aide visuelle utile pour les jeunes enfants, pour l'addition et la soustraction des nombres entiers." (Liebeck, 1984, p.194.)

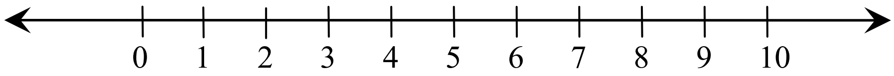
4.2. La droite arithmétique dans l'enseignement de l'école primaire de Chypre

A Chypre, sous l'influence des manuels des mathématiques d'autres pays, la représentation de la droite arithmétique est utilisée systématiquement et sur un long terme dans l'enseignement de l'addition et de la soustraction des nombres naturels. Ainsi, après l'introduction de cette représentation et son application sur des additions simples, on propose aux élèves la figure suivante et quelques exercices :

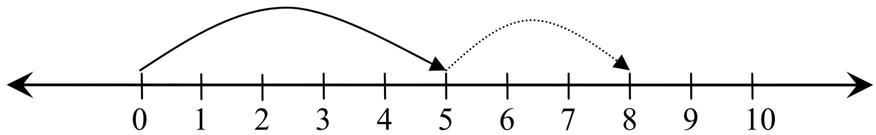


4 + 2 = 6

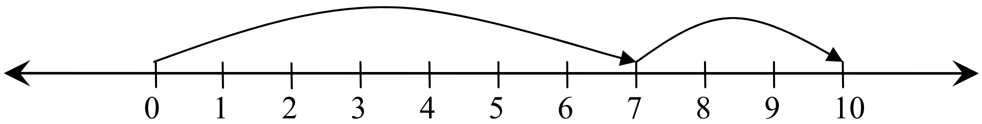
Compléter



5 + 3 = 8



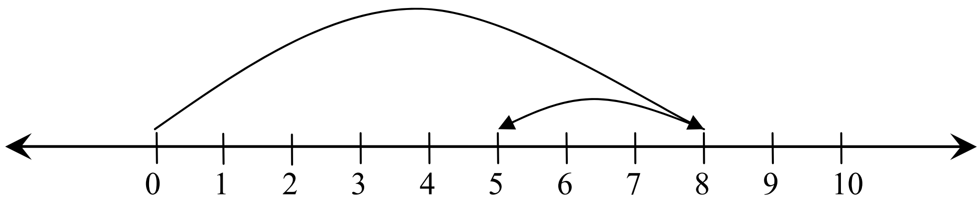
5 + $\boxed{}$ = 8



7 + 3 =

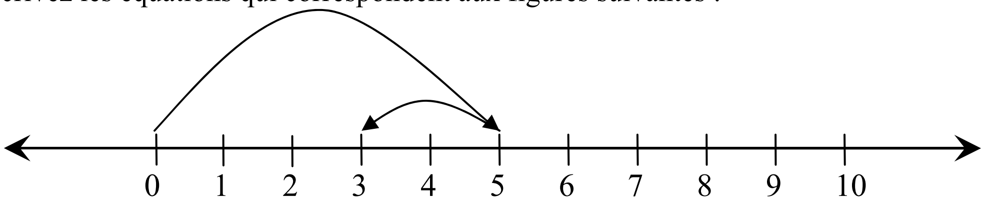
(Manuel de mathématiques de première année de l'école primaire de Chypre, page 40.)

Après l'introduction de la soustraction des nombres naturels, la représentation de la droite arithmétique est utilisée pour la visualisation de cette opération. A la page 71 du même livre, on propose aux élèves la figure suivante et quelques exercices :

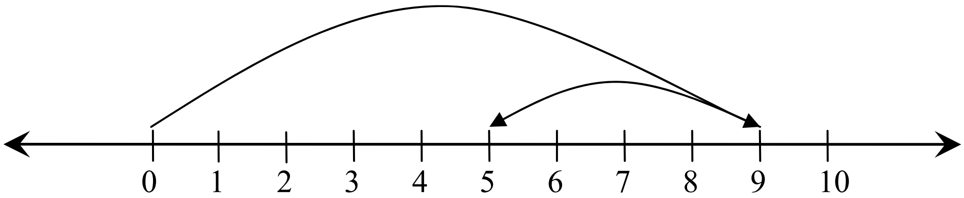


8 – 3 = 5

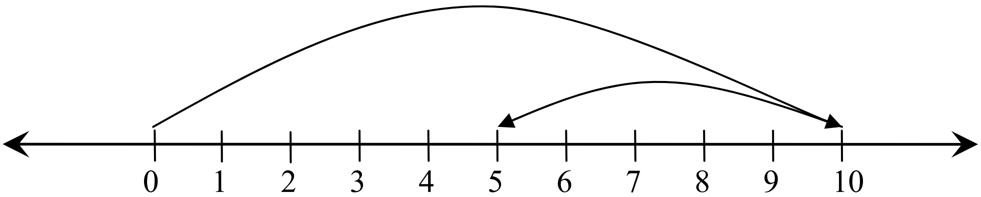
Ecrivez les équations qui correspondent aux figures suivantes :



_ =



_ =



_ =

(Manuel de mathématiques de première année de l'école primaire de Chypre, page 71.)

On peut donc supposer que les élèves grecs de Chypre connaissent la règle du jeu et qu'ils ont une bonne expérience de la représentation de la droite arithmétique pour l'exécution des additions et des soustractions des nombres naturels.

5. Notre recherche

L'objectif principal de notre recherche concerne l'efficacité de la représentation de la droite arithmétique pour l'exécution des additions et des soustractions. *La droite numérique améliore-t-elle la connaissance des opérations numériques ?*

Pour cela nous avons proposé à 106 élèves de 7-8 ans de Chypre les quatre questionnaires suivants (tous les élèves ont répondu aux quatre questionnaires) :

Questionnaire A

Huit opérations (additions ou soustractions) sont proposées :
$14 + 3 = \square$, $8 + 7 = \square$, $13 + \square = 16$, $9 + \square = 15$, $19 - 4 = \square$, $12 - 5 = \square$, $18 - \square = 16$, $13 - \square = 9$.

Questionnaire B

Huit opérations du même type avec l'utilisation possible (mais pas obligatoire) de la représentation de la droite arithmétique.

Questionnaire C

Huit opérations du même type avec l'utilisation obligatoire (par contrat) de la représentation de la droite arithmétique.

Questionnaire D

Quatre opérations du type inverse de celui du questionnaire C : On propose sur la représentation de la droite arithmétique une addition ou une soustraction et on demande l´opération et son résultat. Les quatre opérations qui sont dessinées sur la droite correspondent à : 13+4=17, 7+5=12, 16-4=12, 11-5=6.

Les exercices des questionnaires C et D correspondent, en général, aux exercices des pages 40 et 71 du manuel grec présentées au paragraphe 5.2 (et aussi de plusieurs autres pages de ce même livre.)

6. Résultats

6.1. Pourcentages de réussite

Les tableaux 1 et 2 qui suivent, donnent les réussites des élèves aux questions A et B.

Tableau 1
Pourcentage de réussite aux questions A1 – A8

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
97,2%	86,8%	81,1%	73,6%	79,2%	67,9%	75,5%	63,2%

Tableau 2
Pourcentage de réussite aux questions B1 – B8

B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8
91,5%	87,7%	87,7%	83,0%	85,8%	82,0%	84,0%	74,5%

Dans les deux tableaux précédents, on voit que la réussite est généralement meilleure pour les questions B1 – B8, où les élèves avaient à leur disposition la représentation de la droite arithmétique. En particulier, le pourcentage de réussite passe de 73,6% à 83% pour les questions A4 – B4 et de 67,9% à 82% pour les questions A6 – B6. Une augmentation analogue est observée pour les questions A7 – B7 et A8 – B8. Une exception apparaît pour les questions A1 – B1.

Les tableaux qui suivent donnent les réussites des élèves aux questions C et D.

Tableau 3
Pourcentage de réussite aux questions C1 – C8

C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
68,9%	71,7%	64,2%	64,2%	51,9%	53,8%	52,8%	47,2%

Tableau 4
Pourcentages de réussite aux questions D1 – D4

D1	D2	D3	D4
67,0%	67,9%	55,7%	54,7%

Les réussites aux questions C et D apparaissent peu différentes. Des différences statistiques significatives sont présentes seulement à l'intérieur de chacun des questionnaires C et D, distinguant les questions portant sur l'addition et celles portant sur la soustraction.

Pour leur part, les réussites aux questions A et C présentent des écarts importants. Dans la représentation graphique qui suit, nous observons la grande différence entre les réussites aux questionnaires A et C.

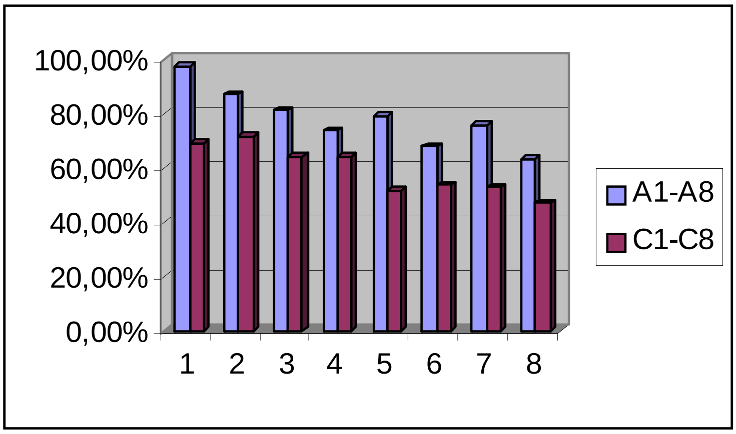


Figure 1 : Questions A et C

6.2. La méthode d'analyse implicative de Régis Gras

On observe pour les élèves de Chypre, des implications entre les huit exercices du questionnaire C et entre les quatre exercices du questionnaire D et une faible liaison entre les questions du C et du D.

On observe aussi une compartimentalisation des questionnaires C et D par rapport aux questionnaires A et B comme c'est évident sur l'arbre de similarité qui suit:

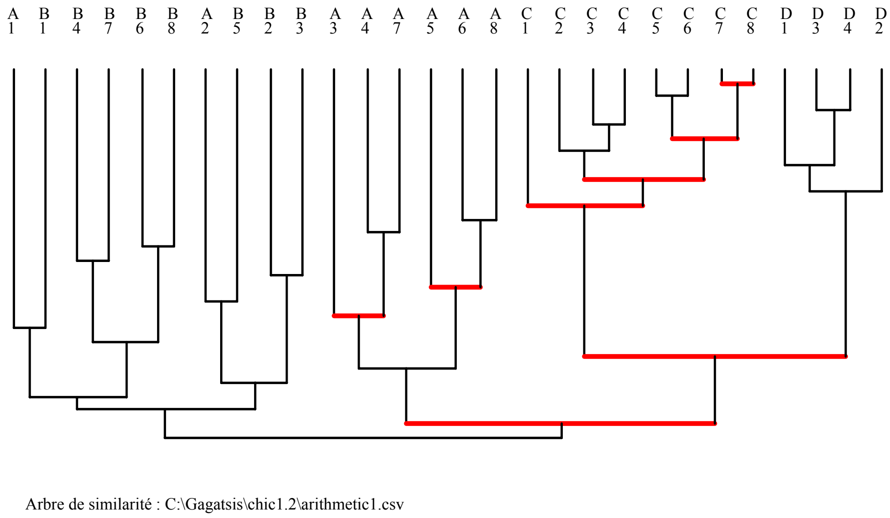


Figure 2 : Arbre de similarité

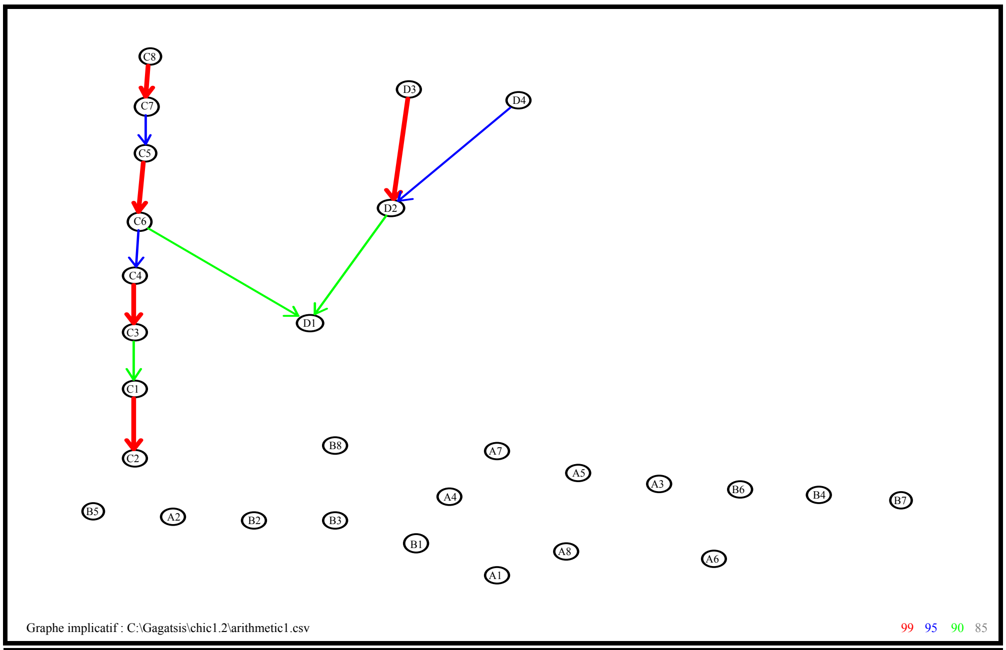


Figure 3 : Graphe implicatif

L'analyse implicative et l'arbre de similarité montrent clairement une cohésion forte des questions des questionnaires C et D et, à l'inverse, presque aucune relation entre les questions des questionnaires A et B. De plus, les questionnaires C et D s'avèrent plus difficiles que les questionnaires A et B. Ces résultats montrent que l'utilisation de la représentation de la droite arithmétique pour l'apprentissage de l'addition et la soustraction des nombres naturels à l'école élémentaire peut créer des problèmes à un grand nombre d'élèves.

7. Discussion

7.1. Conceptions reliées à la représentation de la droite arithmétique

L'approche globale statistique adoptée dans ce texte ne permet pas de cerner les conceptions spécifiques liées à la droite arithmétique. En effet, il existe une différence fondamentale entre trois référents (conceptuels) lorsque la droite arithmétique est utilisée :

- ou bien, les points qui représentent les nombres entiers sont des objets d´un espace affine ; exemple, le point 7,
  (conception statique 1 – “ photographique ”)
- ou bien, deux points étant donnés, la distance entre ces points repérés renvoie à un espace euclidien à une dimension familier des enfants,

(conception 2 – “cartographique”)

- ou bien, deux points étant donnés, on peut envisager deux opérateurs qui les échangent et qui renvoient à un espace vectoriel (ou à une transformation : la translation.) Un opérateur conduit à l´addition (exemple 5 + 6 = 11) et un autre conduit à la soustraction (exemple 11- 6 = 5)

(conception dynamique 3 –cinématique.)

Ces trois conceptions peuvent être associées à trois types de tâches qui apparaissent dans le questionnaire C :

1. placer (trouver) sur la droite arithmétique les points 7, 12, 9…
2. quelle est la distance entre les points 12 et 7, 16 et 9, etc. (à associer à : $12 – 7 = \boxed{}$, $16 – 9 = \boxed{}$) ?
3. quels sont les points correspondant à : $11 + 8 = \boxed{}$, $14 + 9 = \boxed{}$?

Cette co-existence possible des trois conceptions pourrait être source d´obstacles épistémologiques pour le concept d’ordre et les opérations entre nombres.

7.2. La “ double ” nature de la droite arithmétique comme modèle de représentation dans l´enseignement

1. Une droite ordinaire de la Géométrie Euclidienne peut être un modèle géométrique pour l´addition, la soustraction, la multiplication et la division des nombres rationnels (et aussi pour la construction des nombres irrationnels.) Descartes fait essentiellement la même chose dans sa *Géométrie*, afin de généraliser la signification des nombres : les opérations sur les nombres réels sont représentées comme des opérations sur les segments de la droite.

2. Une droite munie d’une échelle est un type mixte de représentation. D´un côté, elle fonctionne comme un nouveau modèle géométrique où les rationnels ne correspondent pas seulement aux segments orientés et aux opérateurs mais aussi à l’ensemble des points distingués de la droite. D´un autre côté, la graduation peut être utilisée comme un moyen d’arithmétisation. En accord avec le “ Principe de mesure de la droite ” (Birkoff & Beatkey, 40-42), les points sur la droite peuvent être “ numérotés ” de telle manière que les différences de nombres mesurent les distances entre les points correspondants. Ainsi, chaque opération géométrique (comme l´addition des segments etc.) peut être “ traduite ” par une opération arithmétique et exécutée algorithmiquement.

3. Habituellement ce que nous entendons par “droite arithmétique” comme outil didactique est une droite munie d’une échelle qui permet la représentation et l´exécution des opérations arithmétiques en offrant ainsi aux enfants une visualisation. Cette possibilité est supposée être un aide à la compréhension et à la résolution des problèmes des tâches mathématiques. Néanmoins, avant

d´entrer dans des expérimentations ou des évaluations didactiques, nous devons être conscients de la double nature d´une représentation telle qu´elle a été analysée ci-dessus. Les enseignants doivent être conscients de cette double nature afin d´éviter le “ glissement ” des enfants d´une fonction à l´autre et leur confusion.

4. Nous appelons «droite graduée » le triplet :

$$\mathcal{S}^1 = (E^1, O, O+\longrightarrow)$$

O : un point pris au hasard choisi comme origine des coordonnées
$O+\longrightarrow$ une application 1-1 des nombres réels sur les points.
E^1 : l’ensemble des points de la droite où l’application 1-1 :

$$\begin{array}{ccccc} O+ & \longmapsto & R & \longmapsto & E^1 \\ a & \longleftrightarrow & O+\!\!\longrightarrow & & a \end{array}$$

est telle que la distance entre les points $O+\longrightarrow a$ et $O+\longrightarrow b$ est égale à $|b-a|$ (donc en particulier la distance entre O et $O+\longrightarrow a$ est $|a|$).

La dernière demande est équivalente au « <u>Ruler Postulate</u> » de Birkoff.

La droite graduée $\mathcal{S}^1$ est un modèle géométrique du système $\Sigma^1 = (R, +)$ (c.à.d du groupe additif des réels)
Chaque élément de R^1 (c.à.d chaque nombre réel) a est représenté par un élément de $\mathcal{S}^1$ et ceci de deux façons (attention au fait que les éléments de $\mathcal{S}^1$ sont de deux espèces) :

1° comme un point de E^1 et plus concrètement $O+\longrightarrow a$
2° comme une transformation géométrique (translation parallèle) de E^1 et plus concrètement la transformation :

$$T_a : (O+\!\!\longrightarrow X) \longrightarrow (O+\!\!\longrightarrow (X + a)) = (O+\!\!\longrightarrow X) + a$$

Et l’opération (addition) du système Σ^1 est représentée sur $\mathcal{S}^1$ comme suit. Etant donnés deux nombres réels a,b, le résultat de l’addition a + b (dans Σ^1) correspond au point :

$$T_b\,(O+\!\!\longrightarrow a) = (O+\!\!\longrightarrow a) +\!\!\longrightarrow b = (O+\!\!\longrightarrow a) + b,$$

où le nombre réel a est représenté ou bien comme un point $(O+\!\!\longrightarrow a)$ ou bien comme une transformation (T_a) tandis que le nombre réel b est représenté comme une transformation T_b.

5. La théorie des *Registres de Représentation Sémiotique* de R. Duval n'est pas suffisante pour la description de la structure de la droite graduée. En effet, cette structure n’est pas un objet mathématique qui accepte différentes représentations dans divers systèmes sémiotiques (comme le décrirait la théorie des registres).
Au contraire, cette structure est un objet mathématique complexe qui met en jeu nécessairement, de manière interne, au moins deux systèmes sémiotiques

$\longrightarrow$

différents : celui des points de l'espace (comme par exemple O, O+ a, etc.) et celui des translations parallèles (ou les vecteurs libres, comme par exemple T_a, T_b, etc. La structure d'un espace affine ne peut être sûrement pas représentée par un seul et unique système de points.

7.3. Questions de recherche

La droite numérique améliore-t-elle la connaissance des opérations numériques ?

Si on se base sur les résultats de notre recherche et sur l'analyse théorique des paragraphes 7.1 et 7.2, nous pouvons confirmer que dans certaines conditions l'utilisation de la droite rend plus complexes la tâche des élèves. Pour un élève qui ne sait pas compter et qui a compris la représentation, en particulier qui a compris que la flèche qui englobe deux intervalles consécutifs représente “ ajouter 2 ”, la droite peut servir à “ trouver ” le résultat d'une addition comme 3 + 2. Mais il est improbable que l'élève comprenne cela avant de savoir le résultat 3 + 2 = 5, illustré par diverses représentations (réunion de collections par exemple).

De sorte que le diagramme ne fait qu'ajouter une certaine complexité et éventuellement, pour un débutant, de la perplexité.

L'utilisation de la droite pour des calculs effectifs sur des nombres plus grands montre qu'il y a très vite une complexité effective qui rend le modèle assez inutilisable.

La principale difficulté vient de ce que l'élève qui ne voudrait pas utiliser ses connaissances numériques devrait compter effectivement des intervalles, ce qui ne lui apporte que peu d'avantages par rapport au dénombrement d'une collection d'objet mobiles par exemple. Seule l'énumération est simplifiée.

L'utilisation de la droite numérique pour représenter des nombres aide-t-elle ou contrarie-t-elle les élèves à comprendre et à calculer ?

Nous croyons que notre expérience ne permet pas de répondre définitivement à cette question qui, à notre avis, doit être étudiée indépendamment pour chaque structure (ordre naturel discret, structure additive des naturels, structure de groupe additif des entiers, structure de groupe additif des décimaux) et aux diverses étapes de l'apprentissage.

BIBLIOGRAPHIE

BILLSTEIN R., LIBESKIND S., & LOTT J. W., 1984, *A problem solving approach to mathematics for elementary school teachers*, California : Benjamin / Cummings.

CARPENTER T. P., CORBITT M. K., KEPNER H. S. Jr., LINDQUIST M. M., & REYS R. E., 1981, *Results from the second mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress,* Reston, Va : NCTM.

CARR K., & KATTERNS B., 1984, *Mathematics in School*, 13 (4), 30-34.

DFEE, 1999, *The national curriculum for England*. London : DfEE.

DUFOUR – JANVIER B., BEDNARZ N., & BELANGER M., 1987, Pedagogical considerations concerning the problem of representation, in C. Janvier (Ed.) *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, 109-122, Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum.

DUVAL R., 1987, The role of interpretation in the learning of mathematics. Diastasi, 2, 56-74 (in Greek).

DUVAL R., 2001, Pourquoi les représentations sémiotiques doivent-elles être placées au centre des apprentissages en mathématiques ; In A. Gagatsis (Ed), Learning in Mathematics and Science and Educational Technology, 67-90, Intercollege press : Cyprus.

ERNEST P. 1985, The number line as a teaching aid. Educational Studies in Mathematics, 16 (4), 411-424.

FISCHBEIN E., 1972, Les modèles génératifs et le développement intellectuel. ActivitésRecherches Pédagogiques, 5, 10-14.

FUEYO V., & BUSHELL D. Jr., 1998, Using number line procedures and peer tutoring to improve the mathematics computation of low-performing first graders. Journal of Applied Behavior Analysis, 31 (3), 417-430.

GAGATSIS A., & MOUGI A., 2000, Aptitude of primary school students in formulation of algebraic relations in a context of translation tasks. Proceedings of the 6th Conference of the Cyprus Paedagogical Association, Contemporary Research in Educational Sciences, 337-347(in Greek).

GAGATSIS A., & PANAOURA G., 2000**,** The interplay of the arithmetic line in the resolution of addizione and subtraction tasks. Proceedings of the 6th Conference of the Cyprus Paedagogical Association, Contemporary Research in Educational Sciences, 348-359 (in Greek).

GAGATSIS A., & PATRONIS T., 1990, The use of geometrical models in the teaching of mathematics. Cahiers de Didactique des Mathematiques, 6, 55-71.

GAGATSIS A., MICHAELIDOU E., & HIAKALLI M., 2001, Theories of representation and the learning of mathematics. Nicosia : Erasmus IP1.

GOLDIN G. A., 1987, Levels of language in mathematics problem solving. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 59-65.) Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum.

GOLDIN G. A., & KAPUT J. J., 1996, A joint perspective of the idea of representation in learning and doing mathematics. In von L. P. Steffe & . . . . Mahwah, Theories of mathematical learning, 397-430, Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum.

HALL N., 1998, Concrete representations and the procedural analogy theory. The Journal of Mathematical Behavior, 17 (1), 33-52.

HART K. M. (Ed.), 1981, Children's understanding of mathematics. London : John Murray.

JANVIER C. (Ed.), 1987, Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics. Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum.

KAPUT J. J., 1987, Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 19-26.) Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum.

KLEIN A. S., 1998, BEISHUIZEN M., & TREFFERS A., The empty number line in Dutch second grades : Realistic versus gradual program design. Journal for Research in Mathematics Education, 29 (4), 443-464.

LESH R., BEHR M., & POST T., 1987, Rational number relations and proportions. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics, 41-58, Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum.

LIEBECK P., 1984, How children learn mathematics. Harmondsworth : Penguin.

MESQUITA A. L., 1998, On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. The Journal of Mathematical Behavior, 17 (2), 183-196.

Ministère de l'Education et de la Culture de Chypre, 1994, Curriculum for elementary schools. Nicosia : Department of Curriculum Development.

NCTM, 2000, rincipals and standards for school mathematics. Reston, Va : NCTM. Association of America.

PAIGE D. D., THIESSEN D., & WILD M.,1982, Elementary mathematical methods. New York : Wiley

REISMAN F. K., 1982, A guide to the diagnostic teaching of arithmetic. Columbus, Ohio : Charles E. Merrill.

ROTH W. M., & MCGINN M. K., 1998, Inscriptions : Towards a theory of representing as social practice. Review of Educational Research, 68 (1), 35-59.

UNDERHILL B., UPRICHARD E., & HEDDENS J., 1982, Diagnosing mathematical difficulties. Columbus, Ohio : Charles E. Merrill.

VON GLASERSFELD E., 1987, Preliminaries to any theory of representation. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics, 215-225, Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum.

Département de l'Education
Université de Chypre
P.O. Box 20537
1678 NICOSIE, CHYPRE
Tel. 00357-22-753725
Fax. 00357-22-753702
e-mail : gagatsis@ucy.ac.cy