ROBERT ADJIAGE

REGISTRES, GRANDEURS, PROPORTIONS ET FRACTIONS

Abstract. This article is to be regarded as the continuation of a theoretical and experimental research that concerned the links between various systems expressing rational numbers and their conceptualisation at the elementary school level (9 to 11 year-olds.) A collection of twenty software programs, specifically conceived for this purpose, greatly facilitated the teaching experiment. Our Hypothesises were strongly validated but certain difficulties arose with problems of ratios and proportions linked to the physical magnitudes. Thus, we reconsider the role of magnitudes in our new research, respecting a precise protocol of separation and articulation of the mathematical and physical fields. In this protocol, the graduated lines is considered as a register of transition between a semiotic and a physical approach of the relative magnitudes. This register allows both to represent and process them. We analyse the first observations of a new group of 12 year-old learners.

Résumé. Ce travail s'inscrit dans la continuité d'une recherche sur les liens entre diverses formes d'expression des nombres rationnels à l'école élémentaire (9-11 ans) et leur conceptualisation. Les hypothèses de cette recherche ont été amplement validées par une expérience d'enseignement privilégiant l'environnement informatique de la série des logiciels ORATIO. Une analyse plus précise des observations laisse cependant apparaître des résultats plus nuancés dans la résolution de problèmes rationnels liés aux grandeurs physiques. Sans revenir à une approche classique où ces derniers sont seuls habilités à fonder le "sens" de la notion de rationnel, nous avons renforcé le rôle des grandeurs dans notre dispositif, en suivant un protocole précis de séparation et d'articulation des champs physiques et mathématiques. Dans ce nouveau dispositif, la droite graduée apparaît comme un registre de transition entre les modes de fonctionnement physique et sémiotique et un outil privilégié de la représentation et du traitement des problèmes rationnels liés aux grandeurs. Nous analysons les premières observations issues d'une mise en œuvre de ce nouveau dispositif dans une classe 6ème.

Mots-clés : Proportion, rapport, grandeur, registre sémiotique, problèmes rationnels, fraction, droite graduée.

Annales de didactique et de sciences cognitives, volume 8, p. 127 – 150.

Cette recherche et cette communication s'inscrivent dans la continuité de travaux précédents (Adjiage ; 1999) : la description, l'analyse et les résultats d'une expérience d'enseignement de la notion de rationnel à la charnière école-collège. L'idée centrale de ce dispositif était que l'acquisition de la notion de rationnel passait par la découverte d'invariants entre trois registres d'expression (Duval ; 1995, p. 21) parmi lesquels celui des droites graduées (Adjiage & Pluvinage ; 2000) jouait un rôle prépondérant, tant pour l'expression initiale des rationnels que pour le contrôle des résultats obtenus dans les autres registres. Rappelons enfin que ces apprentissages reposaient sur un travail systématique de séparation et d'articulation des trois registres mobilisés dans l'environnement des logiciels de la série ORATIO (Adjiage & Heideier ; 1998), spécialement conçus et développés dans ce but.

Cette expérience a connu des succès, pointés notamment lors de l'évaluation nationale à l'entrée en 6ème, mais elle n'a pas permis de départager la population observée de l'échantillon national en résolution de problèmes rationnels liés aux grandeur. Il était donc nécessaire de reconsidérer le protocole d'enseignement autour de questions comme : quelle place pour les grandeurs dans ce dispositif ? A quel moment ? Quelle articulation avec les registres ? Quel rôle la droite graduée peut-elle jouer dans cette articulation ? C'est pour répondre à ce type d'interrogations que nous avons mis en place un nouveau protocole qui doit durer deux années (6ème et 5ème[1].)

Nous tenterons, à l'issue d'une première année d'observation, de démonter la complexité de la notion de rationnel à travers :

– la diversité des problèmes physiques qui la sollicitent,
– la diversité des registres sémiotiques qui permettent leur expression et leur traitement mathématique,
– la difficulté à repérer et à actionner les articulations entre le champ physique et le champ mathématique d'une part, entre les divers registres mobilisables d'autre part.

Nous serons ainsi amenés à repenser l'activité rationnelle en deux champs séparés bien qu'habituellement intriqués sinon embrouillés, tant dans l'esprit des élèves que des enseignants, à savoir le champ physique et le champ mathématique. Nous décrirons alors notre protocole d'enseignement qui reconnaît et organise les séparations et les articulations en valorisant pour cela la référence à la droite graduée qui apparaît de plus en plus comme un puissant outil de transition entre champs et registres.

[1] Classes de Michel Barthelet, collège de Herrlisheim, 67850.

1. Cinq modalités d'appréhension d'un problème de proportion (Transparent Arg1)

L'étude de cas suivante va permettre d'introduire les enjeux et les hypothèses majeurs principaux de ma recherche. Elle s'appuie sur les divers types de procédures de résolution d'un problème de mélange, recensées dans deux classes de 6ème. Ce problème est l'un des nombreux items d'une évaluation diagnostique proposée en septembre 2001 avant enseignement. Il est construit sur le modèle des problèmes de Noelting (1980) repris par Alarcon (1982.)

1.1. L'énoncé d'un problème de mélange, les types de procédures de résolution recensées (Transparents Arg1 et Arg2)

1.2. Les cinq modalités (Transparent Arg3)

Il s'agit d'une classification des procédures recensées en fonction d'une intégration plus ou moins réussie des deux composants du mélange en une nouvelle entité qui préfigure le rapport de l'un à l'autre. Ces modalités ne sont pas à regarder comme les étapes obligées et successives d'un processus d'acquisition, car des phénomènes de simultanéité, de régression ou de saut ont été observés. On peut néanmoins relever que, s'il est délicat de tenter une hiérarchisation des modalités 1-2-3, l'accès aux modalités 5-6 témoigne d'une plus-value conceptuelle et opératoire sur les notions de rapport et de proportion.

2. Comment se déploie l'activité dans cet exemple ?

Pour tenter de répondre à cette question nous allons examiner l'échantillon, très représentatif, des réponses élèves que nous proposons sur le transparent Arg2.

2.1. Réponses de Modalité 1

2.1.1. Type 1-c (LINDA)

Elles s'en tiennent à une vision partielle de l'expérience physique d'un sur-dosage en chocolat dans la recette A. Elles sont sans doute orientées par la présence du terme chocolat dans la question, relayée par le côté visuellement attracteur de la couleur noir. Elles sont très peu interprétatives (au sens d'un traitement de l'énoncé qui amènerait par exemple à différencier "parts de chocolat" et "goût du chocolat") et mathématisées, et pourraient se décrire en termes de stimuli : "chocolat, plus de noir perçu en A qu'en B", et de réponse : "plus de chocolat donc plus de goût".

2.1.2. Type1(l-c) (GUILLAUME)

Elles sont aussi très limitées sur le plan de l'interprétation du texte, pouvant se ramener à une description séquentielle des lignes du dessin (plus de chocolat en A qu'en B sur la première ligne, plus de lait en A qu'en B sur la deuxième ligne.) On peut ici penser à une modélisation rudimentaire non exprimée, qui donne au chocolat et au lait des rôles symétriques ("plus de verres de chocolat **et** de verres de lait"), assimilant le mélange à une paire {A ; B} et lui appliquant un théorème implicite : si A1 > B1 et A2 > B2, alors {A1 ; A2} > {B1 ; B2}.

2.1.3. Type1-l (GEOFFREY)

Elles témoignent de plus de profondeur dans l'interprétation de l'énoncé car elles prennent en compte le **goût** comme entité "inversement proportionnelle" à la quantité de lait. Comme la question porte sur le chocolat, d'ailleurs cité dans la réponse, et que le résultat passe par une considération sur le lait, on peut supposer qu'un lien est créé entre les deux constituants, même si le chocolat disparaît de la comparaison finale. L'énoncé est ici traité puisque le **goût** du chocolat est bien distingué de la **quantité** de chocolat. Il n'apparaît en revanche pas de mathématisation, mais plutôt l'évocation d'une expérience physique banale : plus dilué par le lait, donc moins le goût du chocolat.

2.2. Réponses de Modalité 2

Elles se contentent d’une description non opératoire de la situation. Il n’y apparaît donc ni traitement de l’énoncé, ni mathématisation. Ces réponses, dont 3 sur un total de 7 dans les deux classes sont exactes, témoignent tout à la fois d’un refus de s’exonérer d’un des deux constituants (contrairement à la modalité précédente) mais aussi de la gêne à leur appliquer **un** traitement qui **les** prenne en compte simultanément.

2.3 Réponses de Modalité 3

La description devient opératoire tout en restant qualitative. Des tentatives (Emmanuel et Mylène), encore maladroites, pour dégager une nouvelle entité « mélange » à partir d’un traitement verbal des constituants (« plus de **goût** », « chocolat**ée** ») apparaissent. Un lien est en voie d’établissement entre les deux composantes du goût (« 2 parts de chocolat pour **juste** 1 part de lait ».) Il témoigne d’une bonne prise en compte de l’expérience mentale, de sa coordination avec le texte de l’énoncé, et des traitements qu’on est capable d’appliquer au dernier sous le contrôle de la première. La mathématisation reste ici encore embryonnaire.

2.4. Réponses de Modalité 4

Avec ces dernières, on observe pour la première fois la mobilisation en actes de propriétés de la linéarité pour traiter cette "entité" (le goût, le mélange) appréhendée via une "dualité" (lait et chocolat.) L'aspect lapidaire de la réponse de Nathalie masque un processus complexe de séparation et d'articulation d'une expérience physique, d'un traitement, sans doute en langue naturelle, de l'énoncé, et d'un proto-modèle mathématique (la linéarité.) Ce dernier, reconnu pertinent par l'élève, l'autorise à rechercher un référent commun puis de rapporter, par des opérations légitimes dans le modèle, toutes les quantités à ce référent commun, ce qui permet d'effectuer la comparaison sur un seul constituant, et donc, au final, de réaliser le programme des élèves de la modalité 1. On notera que les moyens d'expression sollicités pour le traitement mathématique restent implicites (Nathalie) ou rhétoriques (Jennifer et Éric), ou passent par une schématisation qui se substitue aux mots qui semblent manquer à Marjorie.

2.5. Modalité 5

Un seul élève sur les 47 évalués recourt explicitement à une expression numérique, fractionnaire et / ou entière, pour caractériser le goût chocolaté et effectuer sa comparaison. Une fois l'expression fractionnaire reconnue légitime pour représenter le lien, une fois trouvée l'expression fractionnaire adéquate, la comparaison de ces entités à deux composants se ramène à une comparaison de nombres. Une fraction bien comprise est donc un objet mathématique qui permet de lever la contradiction du **un** pour **deux**. Mais les voies de passage vers cette acception semblent bien étroites (1 élève sur 47 en ce début d'année scolaire.)

L'énoncé et l'illustration de ces cinq modalités (**Transparent Arg 3**) vont nous permettre de dégager une définition didactiquement opérationnelle d'un nombre rationnel à ce stade et de justifier empiriquement la séparation de l'activité de résolution de problème en champs articulables les uns aux autres (Adjiage ; 2001, p. 11.)

3. Un objet et des champs d'activités rationnels

3.1. Un nombre rationnel à ce stade de la scolarité

L'étude qui précède nous permet de dégager les caractéristiques sensibles, soit celles qui rendent compte des démarches et des obstacles relevés, de la transposition didactique d'un nombre rationnel à ce stade de la scolarité. Nous y voyons un objet à double détente (**Transparent Arg 3.1**) :

- **un lien** numérique entre deux entiers, ce qui fait d'un rationnel **un** nombre exprimé par **deux** nombres ;

– un **lien linéaire** entre deux séries de couples d'entiers, ce qui fait d'un rationnel un nombre exprimable par un **ensemble** de couples "réputés" équivalents.

En résumé, dans l'écriture $\frac{3}{4}$ *:*

L'expert voit le lien de 3 à 4 **pouvant exprimer aussi** le lien de 75 à 100 ou de 15 à 20… l'élève ne voit souvent que 3 et 4, ou 3 parmi 4.

Le principal obstacle à dépasser par les élèves pour produire un objet fractionnaire réside dans cette contradiction entre unité (du lien) et pluralité de sa représentation (deux entiers, deux ensembles d'entiers.) D'autant que ce risque continue à être renforcé par un enseignement qui privilégie de manière quasi exclusive la représentation en "parts de tarte", alimentant l'illusion que : "c'est facile, il suffit de compter les parts", et ce malgré les études multiples concluant toutes au faible potentiel de cette illustration à rendre compte du concept : Hart & Sinkinson, 1989 ; Streefland, 1993, p. 114 ; Adjiage, 1999, p. 204…. Nous trouvons un écho de cet obstacle dans les productions de Linda par exemple qui s'exonère d'un composant du mélange, ou de Florian qui, faute de dégager un invariant du mélange, en est réduit à paraphraser sa composition ; nous trouvons un écho de son dépassement auprès des élèves de modalité 4 et 5 qui, en recherchant plus ou moins explicitement un référent commun – tout ramener à un verre de lait – modifient corrélativement la quantité de chocolat initiale, témoignant de leur prise de conscience d'un lien dynamique entre les deux constituants.

A l'inverse (une fraction étant donnée, en fournir une représentation), parmi les 7 compétences nécessaires à la maîtrise de l'expression des rationnels (Adjiage ; 1999, pp.205-211), nous avions placé en premier la capacité à doubler l'information (**transparent Arg4**), c'est à dire la capacité à prendre en compte les deux termes d'une fraction et à leur trouver un équivalent dans un autre registre (par exemple géométrique) qui exprime leur lien d'interdépendance. Nos observations ultérieures, notamment en 6ème, confirment et amplifient le rôle central de cette compétence.

3.2. Cinq types de problèmes rationnels liés aux grandeurs ; les raisons d'un choix (transparent Arg4.1)

Traditionnellement, les didacticiens distinguent diverses acceptions d'une fraction à ce stade de la scolarité, en fonction des problèmes liés aux grandeurs, donc des problèmes physiques qu'ils permettent de résoudre. Brousseau (1986 ; pp. 90-94, pp.98-100 et 1987 ; pp.2-18 et pp. 136-151) distingue ainsi le rationnel-mesure accompagné d'une unité ($\frac{3}{4}km$) du rationnel-dilatation sans unité (agrandir par un coefficient de $\frac{7}{4}$), là où les anglo-saxons (Kieren ; 1980) se réfèrent à cinq sous-constructions (relation partie/tout, quotients, ratios, opérateurs et mesures.) Nous distinguerons, pour notre part, deux grandes catégories de problèmes liés aux grandeurs, dont la deuxième est elle-même subdivisée en quatre sous-catégories :

I. *Problèmes de nombres mesurant ou de rapports d'une grandeur à une grandeur de référence – unité - fixée*

Par exemple, comparer : deux champs de $\frac{3}{5}ha$ et $\frac{2}{3}ha$; la part de chaque invité si dans un cas 7 pizzas sont à partager en 4 invités, et, dans l'autre cas, 9 pizzas sont à partager en 5 invités.

II. *Problèmes de rapports de nombres mesurant*

Nous y rangeons les problèmes pour lesquels, notamment lors d'une comparaison, il n'existe pas de référence fixe (par exemple, pour comparer les deux mélanges de 0, le total des verres est 5 dans un cas et 3 dans l'autre) :

a) rapports de grandeurs homogènes (dilatation, densité…),
b) rapports de grandeurs hétérogènes (vitesse, débit, poids spécifique),
c) ratios ou taux ou fréquences (3 chances sur 5, 3 élèves sur 7 ont réussi cet item…),
d) mélanges (5 parts d'arabica pour 2 de robusta.)

Remarquons que cette classification est faite a priori, à partir d'une analyse de contenus. Nous verrons, lors de l'évaluation finale des élèves observés, si une étude statistique des résultats peut faire apparaître une ventilation de l'échantillon dépendant des catégories ci-dessus.

Nous pouvons à présent justifier le choix d'un problème de mélange, comme "exemple exemplaire", parmi les cinq types de problèmes que nous venons de repérer. Ce choix est stratégique, dans la mesure où nous l'avons retenu à la fois pour éclairer nos hypothèses et à la fois comme premier problème rationnel lié aux grandeurs proposé aux élèves dans notre dispositif d'enseignement.

Nos justifications sont de deux ordres, l'un de nature empirique (transparents **Arg5a et Arg5b**), l'autre de nature théorique. Le premier établit la faisabilité du projet : La rapidité avec laquelle de bons à de très bons résultats ont été obtenus, tant lors des passations logicielles (**Arg5a**) que lors des évaluations papier / crayon (**Arg5b**, passation deux mois après le début de notre enseignement.) Nous y rajouterons deux observations, l'une faite par Jean-Claude Rauscher et moi-même dans une classe de CM1 / CM2[2], l'autre dans la classe expérimentale de 6ème. Ces deux observations convergent à relever la force de l'impact des problèmes de mélange sur les élèves, en termes de production de procédures différentes et d'acharnement à les défendre. Jean-Claude Rauscher propose dans ce même colloque des écrits réflexifs produits par les élèves, comme témoignage de cette richesse et de cette diversité.

La justification de nature théorique renvoie à notre définition d'un nombre rationnel $\frac{a}{b}$ (0) qui valorise le lien de *a* à *b* plutôt que le couple (*a* ; *b*.) Il convenait donc de trouver, dans l'univers des grandeurs, des problèmes qui, pour être réussis, demandent la prise en compte d'une grandeur relative, aisément identifiable et désignable (le mélange), plutôt que d'une double cardinalité (comme c'est le cas de nombres de problèmes liés aux parts de tartes.)

Notons enfin que ce choix n'est pas le choix fait habituellement, et notamment en France où les deux études qui servent de référence (Brousseau ; 1987) et (Douady & Perrin ; 1986) commencent le processus d'enseignement par une approche du rationnel-mesure, suivant en cela une démarche qui s'intéresse à la mesure des grandeurs avant d'aborder le rapport de ces mesures. On relèvera la cohérence de cette démarche avec le primat "physique" qui la caractérise : une fraction est l'invariant des problèmes rationnels liés aux grandeurs.

3.3. Les champs d'activité

Après avoir caractérisé l'objet d'enseignement en 0, tentons de délimiter les champs d'activités qui lui donnent son statut et sa finalité. Il s'agit en fait de démêler ce qui paraît emmêlé chez les élèves de notre échantillon, qu'ils aient réussi ou échoué au problème de mélange énoncé en 0.Examinons à cet effet un ensemble de conditions suffisantes pour la résolution de ce dernier.

Phase 1. Se représenter l'expérience physique du mélange, c'est à dire être capable d'imaginer les gestes et la succession des gestes qui amènent à la réalisation du mélange ainsi qu'à l'appréciation de son goût ;

Phase 2. Décrire ces gestes au moyen de la langue naturelle ;

Phase 3. Interpréter cette première description jusqu'à la construction de ce que Julo (2000 ; p. 13) appelle "une représentation fonctionnelle du problème, [c'est à dire qui] devra permettre [..] d'élaborer une procédure de résolution". En termes de registres, nous parlerions de traitement, dans le registre de la langue naturelle, destiné à obtenir :

a) soit une formulation congruente à une reformulation dans un registre numérique (conversion congruente vers des écritures

[2] CM1-CM2 de Régine Baltz, école Karine, Strasbourg Hautepierre.

fractionnaires par exemple comme Antoine, ou conversion vers un registre figural comme Marjorie sur qui nous allons revenir plus loin),

b) soit, sans changer de registre, une solution purement rhétorique mobilisant, outre les mots de la langue naturelle, les entiers et des traitements multiplicatifs élémentaires de ces derniers (comme Nathalie, Jennifer ou Éric.)

Phase 4. Dans le cas décrit en Phase 3a) ci-dessus, finir par une comparaison : de fractions comme Antoine (un traitement dans le registre des écritures fractionnaires) ; de quantités représentées comme Marjorie (un traitement dans un registre figural l'amène à rapporter les quantités de chocolat de chaque mélange à un verre de lait et donc, au final, à comparer un verre et demi à deux verres de chocolat.)

Remarquons que, dans le cas de Marjorie, le moment de traitement en langue naturelle du début de la phase Phase 3 peut être plus ou moins shunté, dans la mesure où le registre figural et les traitements (flèches, ligne de partage) qu'elle y applique sont congruents à une représentation mentale de phase Phase 1 et / ou Phase 2. L'avantage de cette représentation, c'est qu'elle à la fois descriptive et opératoire, à l'articulation entre un fonctionnement physique et un fonctionnement sémiotique. Le cas de Marjorie nous semble fondateur de notre démarche car il exhibe la genèse d'une modélisation linéaire à partir d'une conversion langue naturelle / registre figural[3] et / ou d'un traitement dans un registre (ici figural) approprié, spontanément mobilisé. Nous verrons qu'il est possible et, c'est une de nos hypothèse, bénéfique de **provoquer** mobilisation et conversion de registres lorsque cette mobilisation / conversion spontanée ne se produit pas.

Ce que nous voyons apparaître dans cette succession de phases, ce sont des moments d'activité à l'intérieur d'un champ donné (champ de l'expérience physique en phase Phase 1 par exemple, champ sémiotique en phase Phase 3a) ou Phase 4 par exemple) et des moments d'articulation soit entre deux champs (physique / sémiotique en début de phase Phase 3), soit entre deux registres du champ sémiotique (langue naturelle / registre figural ou fractionnaire en phase Phase 3a) mais cela pourrait être aussi registre figural / registre numérique.) Dans le champ sémiotique, nous retrouvons les deux activités cognitives fondamentales, traitements et conversions, décrites par Duval (1995 ; pp.39-44.)

---

[3] Nous n'avons que peu de trace de cette conversion, dans la mesure où les explications de Marjorie ne nous donnent à voir que son dessin et une paraphrase de l'énoncé. On peut néanmoins la subodorer dans la mesure où cette paraphrase précède et semble donc orienter le traitement figural (flèches dédoublées, ligne de partage) qui permettent le traitement de l'énoncé.

Et l'activité mathématique dans tout cela ? L'émergence d'objets et de traitements mathématiques apparaît chez Marjorie et Antoine, alors que nous voyons dans les raisonnements précédents un tout indifférencié de l'univers physique. Nous situerons résolument l'activité mathématique dans la mise au point puis la mise en œuvre d'objets et d'opérations portant sur ces objets ayant au moins quatre caractéristiques :

1. l'accès à ces objets passe par la mobilisation de représentations sémiotiques,
2. ces représentations et les traitements qu'on leur applique forment des systèmes hétérogènes,
3. ces systèmes sont articulables les uns aux autres,
4. la (re)construction de ces systèmes peut être orientée par la modélisation de problèmes physiques.

Nous voyons que nous séparons l'objet mathématique (**un** nombre rationnel dans lequel nous situons l'**unité** de la notion) des objets et expériences physiques (dans lesquels nous situons la **dispersion** de la notion – voir classification 0 – en qui peuvent motiver sa mise au point[4]. Nous ne caractérisons pas un objet mathématique à partir de la diversité des problèmes physiques dont il permet la modélisation (comme c'est le cas des approches rappelées en début de 0), mais à partir des systèmes sémiotiques qui permettent de l'exprimer. Bien entendu, ces systèmes ne sont pas arbitraires. Ils peuvent être engendrés, on le voit dans les reconstructions opérées par des élèves comme Marjorie, à partir de certaines caractéristiques de dispositifs physiques. D'où l'importance de registres de transition, susceptibles à la fois de représenter une expérience physique, mais aussi d'objectiver, dans un jeu de contrôles réciproques avec des registres concurrents et notamment celui de la langue naturelle, d'exprimer et de traiter les objets mathématiques de la modélisation. Cette séparation nette entre univers physique et mathématique, dont on retrouvera l'écho dans notre protocole d'enseignement, permet de ne pas confondre les méthodes (ici je mesure, là je calcule, ici je contrôle avec un instrument, là je prouve et je contrôle par un raisonnement) mais, surtout, elle révèle en creux la nécessité des articulations. La cohésion de notre démarche

4 Nous ne pensons pas que l'expérience physique soit la seule source acceptable de motivation à l'activité mathématique, mais, avec Etienne Klein (2000 ; p. 71) que "les mathématiques se nourrissent aussi de processus de création contingents et libres, qui apportent des concepts réellement nouveaux, dont l'origine n'est ni le monde extérieur ni l'entendement pur, mais plutôt la nécessité interne des formalismes eux-mêmes." Nous avons prouvé (Adjiage ; 1999) que cette assertion, triviale à un niveau de scolarité plus élevé, est vraie dès l'école élémentaire.

est assurée par un primat sémiotique : un nombre rationnel est l'invariant de registres sémiotiques hétérogènes.

4. Principes et hypothèses

Résumons-nous autour d'un ensemble formé de principes et d'hypothèses qui déboucheront sur le protocole d'enseignement retenu pour notre expérience en $6^{\text{ème}}$.

4.1 Principe de séparation[5]

Dans un processus d'acquisition de la notion de rationnel, nous distinguons :

- l'activité physique liée à la réalisation effective ou mentale d'une expérience, de mesurages, de reformulations, d'émissions de conjectures, relatifs à des phénomènes de mesures ou de rapports de grandeurs (voir classification en 0),
- l'activité mathématique liée à la mobilisation de divers registres sémiotiques, aux traitements et conversions de représentations exprimant des nombres, des fonctions (opérateurs), ou des points.
  Il est possible de conjuguer et donc d'orienter cette activité mathématique en fonction de trois points de vue, que nous rappellerons brièvement ici, nous contentant de renvoyer à (Ratsimba-Rajohn ;1982) et (Adjiage ; 1999, pp.181-182) pour plus de détails : le fractionnement de l'unité ($\frac{3}{4}$ vu comme trois fois un quart), le quotient de deux entiers ($\frac{3}{4}$ vu comme un quart de trois ou trois divisé par quatre), la commensuration ($\frac{3}{4}$ vu comme le rapport de u à v tels que $3v = 4u$.)

4.2. Principe d'articulation

Modéliser un problème physique rationnel relève d'une double articulation : articulation entre l'univers physique et l'univers des registres ; articulation entre les registres d'expression rationnels.

4.3 Hypothèses

Il est possible de repérer, sur l'apprentissage, des effets d'un enseignement des nombres rationnels :

---

[5] Nous reformulons de manière substantielle des principes , hypothèses et développements exposés dans : Adjiage ; 2001, pp. 11-14.

1. qui sépare clairement l'activité physique de l'activité mathématique,
2. qui propose des activités systématiques d'articulations entre le champ physique et le champ mathématique d'une part, entre les différents registres sémiotiques exprimant les rationnels d'autre part,
3. qui provoque l'usage d'un registre de transition entre le champ d'activité physique et le champ d'activité mathématique.

5. Le protocole d'enseignement

5.1. Modalités générales

Nous avons opté pour un dispositif de type classe expérimentale (6ème B) / classe témoin ($6^{ème}$ A.) Ces deux classes sont deux sixièmes du même collège, ayant le même professeur (voir note 1, p. 128.) Elles sont observées depuis septembre 2001 et le seront jusqu'à la fin de la $5^{ème}$ en juin 2003. L'idée générale est de comparer l'évolution des performances de ces deux classes à l'issue (en fin de $6^{ème}$ puis en fin de $5^{ème}$) d'un enseignement des rationnels centré sur les mêmes objectifs mais mené selon des méthodes différentes. Les contenus et objectifs d'enseignement ont été très précisément définis en début d'année avec le professeur de ces deux classes. Les objectifs généraux visés sont énoncés dans le **transparent Arg6**, mais des objectifs opérationnels plus détaillés ont été soigneusement mis au point et seront publiés ultérieurement avec l'ensemble du dispositif d'enseignement. Nous avions convenu que dans la classe témoin l'enseignant ne changerait rien à sa méthode habituelle. Dans la classe expérimentale en revanche, il se plierait à un protocole, présenté ci-dessous, mettant en œuvre les principes et hypothèses énoncés en 0.

Afin de disposer d'un état des lieux initial, chacune des classes a été évaluée en début de $6^{ème}$ à partir d'exercices portant sur l'ensemble des compétences **à acquérir au cours de l'année scolaire**, notamment en ce qui concerne la résolution des cinq types de problèmes liés aux grandeurs (0.) La plupart des contenus sur les rationnels abordés en $6^{ème}$ ayant déjà été approchés au cycle 3, aucun item de cette évaluation initiale n'était censé rester totalement étranger au champ de compréhension des élèves. Une évaluation de fin d'année, portant sur les mêmes compétences, est prévue entre mai et juin.

L'évaluation initiale, en particulier les procédures de résolution du problème de mélange, nous ont permis de nous fixer un certain nombre de repères, parmi lesquels la définition des cinq modalités (0) occupe une place de choix. Ces dernières notamment nous permettront d'apprécier et de comparer, au-delà de la réussite brute, les évolutions procédurales et conceptuelles de chacune des deux 6èmes.

Ce dispositif n'aurait guère été possible sans l'existence de la série de logiciels ORATIO[6] (Adjiage & Heideier ; 1998), développée pour la première expérimentation (Adjiage ; 1999.) C'est pourquoi nous rappelons brièvement les caractéristiques principales de ces logiciels et certains choix qui ont guidé leur conception. Pour plus de détail on se rapportera à : Adjiage ; 1999, chapitres III.2 et VI.1.

5.2. La série ORATIO

Composée de vingt logiciels répartis en deux ensembles et d'une base de données. Le premier ensemble est formé de quatorze logiciels dits de traitement. Il donne aux élèves l'occasion d'une **investigation séparée** de trois registres d'expression des rationnels, à savoir en respectant l'ordre de leur introduction en classe : les droites graduées (six logiciels) ; les écritures fractionnaires (cinq logiciels) ; les écritures décimales (trois logiciels.) Conformément aux principes et hypothèses énoncés en 0, lors de l'investigation de chacun de ces systèmes les liens avec les systèmes précédents ne sont l'objet d'aucun travail spécifique, même si nombre d'élèves les évoquent spontanément. Ce n'est qu'avec l'étude du deuxième ensemble (six logiciels dits de conversion) que les élèves sont invités à un travail de mise en correspondance systématique des trois registres pris deux à deux.

Chaque logiciel propose plusieurs tâches, souvent à partir d'une consigne de comparaison de deux rationnels exprimés dans un des trois registres. Les prérequis sont minimes : droite numérique des entiers, fréquentation de fractions usuelles ou d'écritures à virgules. Le logiciel ne cherche pas à expliquer, il ouvre un accès aux objets mathématiques non par une définition formelle et / ou illustrée, mais par des mises à l'épreuve de leur mode d'expression, de traitement, puis de conversion. L'élève est censé agir en testant des hypothèses : 3,14 est-il supérieur à 3,5 puisque 14 est supérieur à 5 ; $\frac{3}{4}$ est-il inférieur à $\frac{7}{10}$ puisque 3 et 4 sont respectivement inférieurs à 7 et 10 ? Le milieu (le logiciel) rétro-agit alors, donne à observer des phénomènes qui invitent à engager une nouvelle action puis à échafauder des règles qu'on remet à l'épreuve. Le questionnement que l'on cherche à provoquer serait : quels objets mathématiques méritent une telle expression, un tel mode de traitement ?

Exemple 1 : transparent Arg5a

[6] Une suite à ORATIO est en cours d'écriture. Elle devrait servir de base de travail l'an prochain pour la suite de l'expérimentation en cinquième. NEW-ORATIO propose des activités systématiques de recherche d'image et d'antécédent, par une opération de dilatation, sur une droite graduée munie d'une double échelle.

Un élève peut penser que B > A parce que les intervalles sont plus longs, ou parce que B est à droite de A. Le corrigé lui dira que c'est faux et l'invitera à tout imaginer à la même échelle, ce qui peut l'amener à situer des tiers sur une droite découpée en dixièmes, soit par resubdivisions, soit par approximations ou toute autre stratégie de son choix.

Exemple 2 : transparent Arg7

5.3. Quatre moments forts de chaque séquence d'enseignement en classe expérimentale (transparents Arg8 et Arg9)

La progression générale suit celle des logiciels ORATIO. Une séquence (de plusieurs séances) type se déroule immuablement selon le protocole suivant :

Moment 1. Passation sur un logiciel de la série ORATIO.

Moment 2. Un problème de type ORATIO est posé aux élèves dans un environnement papier /crayon.

Moment 3. Un problème lié aux grandeurs, structurellement et numériquement analogue à celui du Moment 2, est posé aux élèves. Le professeur n'évoque pas cette analogie. Les élèves résolvent le problème par les moyens de leur choix. A ce stade, certains d'entre eux identifient spontanément dans ce nouvel énoncé une expression différente du même problème que celui du Moment 2. Le professeur se garde bien de trancher et renvoie le débat scientifique (Legrand ; 2000, pp.35-54) à la séance suivante.

Moment 4. La convergence provoquée : le professeur rappelle en début de séance les enjeux du débat, et ses arbitrages tentent de l'orienter vers la question de savoir "en quoi ces deux problèmes sont différents et en quoi ils sont analogues".

On vérifie aisément que ces quatre moments respectent bien les principes et hypothèses de séparation et d'articulation.

Notons pour terminer cette section que les bilans, mises au point, entraînements et institutionnalisations ne suivent pas chaque séquence. Ils s'imposent, par approximations successives, à un moment de maturité (nécessité) repéré par le professeur et / ou l'expérimentateur.

6. Conclusion

Nous avons dans cette communication tenté de repérer des étapes clés de l'acquisition de la notion de rationnel dans la scolarité obligatoire. La séparation de cet ensemble d'étapes en deux champs, physique et mathématique, dotés chacun d'instruments d'investigation (essentiellement matériels pour le premier, sémiotiques pour le deuxième) et de méthodes propres, est une nécessité épistémologique. Nous avons émis l'hypothèse que c'était aussi une nécessité didactique, ce qui pose la question des articulations entre les deux champs, et donc d'outils susceptibles d'accompagner la transition. Cet outil, de par son statut, se doit d'avoir un certain nombre de caractéristiques de synthèse entre les deux champs. En ce qui concerne les rationnels, notre choix s'est porté sur la droite graduée, dans un environnement informatique (**transparent Arg 10**.) Nous pensons que ce type d'outils pourrait être recherché, développé et caractérisé pour d'autres enseignements mathématiques, notamment ceux prolongeant la proportionnalité

En ce qui concerne la conduite des activités dans le champ physique, l'absence d'une réalisation effective de l'expérience de mélanges, et surtout de la mise au point de tests sensibles permettant de comparer ces derniers, nous apparaît a posteriori comme regrettable. Non pas tant à des fins de vérification (« Lequel des mélanges est effectivement le plus chocolaté ? ») entachées de subjectivité qu'à des fins d'orientation du processus de modélisation : pour comparer deux mélanges (type lait / chocolat) réalisés dans deux **grandes** cruches, on peut par exemple goûter un échantillon (une **petite** cuillère) de chacun, ce qui légitime une idée d'invariance du goût sous une opération de fragmentation pouvant favoriser l'ancrage des problèmes de mélanges dans le champ multiplicatif (contre le champ additif.) Dans notre protocole, un travail d'articulation non congruente entre la forme verbale de l'énoncé et sa forme non verbale (dans notre exemple du mélange lait / chocolat, la représentation iconique des verres de lait et de chocolat) se substitue à l'expérience physique effective et augmente la difficulté de la tâche sans lui apporter d'éclairage opératiore.

Notons pour terminer que nous n'avons pas encore, au moment de la rédaction de cet article, dépouillé les résultats de l'évaluation finale. Les cinq modalités définies en 0 devraient permettre de repérer un état de savoir et donc d'apprécier des évolutions, par rapport au début de l'année scolaire et par rapport à la classe témoin.

BIBLIOGRAPHIE

ADJIAGE R. & HEIDEIER A., 1998**,** *didacticiels de la série Oratio*, éditions Pierron, 57206 Sarreguemines.

ADJIAGE R, 1999., *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial*, thèse, IREM, ULP Strasbourg 1.

ADJIAGE R. ET PLUVINAGE F. , 2000, *Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des rationnels*, RDM, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble, Vol.20.1,41-88.

ADJIAGE R., 2001, *Maturations du fonctionnement rationnel. Fractions et décimaux : acquisitions d'une classe, projets de programme 2000 pour l'école élémentaire*, Annales de didactique et de sciences cognitives, IREM de Strasbourg, Vol 7, 7-48.

ALARCON J., 1982, *L'appréhension des situations probabilistes chez des élèves de 12-14 ans : résultats d'une enquête proposée à des élèves de 4ème et de 5ème*, thèse de 3ème cycle, IRMA, ULP Strasbourg 1.

BROUSSEAU G., 1981, *Problèmes de didactique des décimaux*, RDM, Vol 2.1, 37-128, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble.

BROUSSEAU G., 1986, *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, thèse, Bordeaux.

BROUSSEAU G. ET N., 1987, *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, IREM de Bordeaux.

BROUSSEAU G., 1998, *Théorie des situations didactiques*, La Pensée sauvage, éditions,Grenoble.

CARRAHER D. W. & DIAS SCHLIEMANN A. L., 1991, *Children's Understanding of Fractions as Expressions of Relative Magnitude*, PME XV, 184-193, Assisi.

DOUADY R. ET PERRIN M.J., 1986, *Nombres décimaux*, liaison école-collège, IREM, Université de Paris VII, Paris.

DUPUIS C. ET PLUVINAGE F., 1981, *La proportionnalité et son utilisation*, RDM Vol. 2, 166-212, La Pensée Sauvage (éd.), Grenoble.

DUVAL R., 1993, *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol. 5, 37-65, IREM de Strasbourg.

DUVAL R., 1995, *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Bern.

DUVAL R., 1996, *Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?* RDM, Volume 16-3, 349-382, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble.

DUVAL R., 1998-1, *Signe et objet, trois grandes étapes dans la problématique des* *rapports entre représentation et objet*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol. 6, 139-163, IREM de Strasbourg.

DUVAL R., 1998-2, *Signe et objet, questions relatives à l'analyse de la connaissance*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol. 6, 165-196, IREM de Strasbourg.

FIGUERAS O., FILLOY E., VALDEMOROS M., *Some Difficulties which Obscure the Appropriation of the Fraction Concept*, PME XI, vol..1, 366- , Montréal, 1987.

HART K. & SINKINSON A., 1989, *They're useful - Children's view of Concrete Materials*, PME XIII vol. 2, 60- 66, Paris.

JULO J., 1995, *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*, Presses Universitaire de Rennes.

JULO J., 2000, *Aider à résoudre des problèmes, Pourquoi ? comment ? quand* ? Actes du XXVII^e Colloque Inter-IREM des formateurs chargés de la formation des maîtres, 9-28, IREM de Grenoble.

KIEREN T.E., 1980, *The rational number construct - its elements and mechanism*, in T.E. Kieren (ed), Recent Research on Number Learning, ERIC/SMEAC, 125-150, Columbus.

KLEIN ÉTIENNE, 2000, *L'atome au pied du mur*, Éditions Le Pommier-Fayard.

LEGRAND MARC, 2000, *Sciences, Enseignement, Démocratie et Humanisme*, Actes du XXVII^e Colloque Inter-IREM des formateurs chargés de la formation des maîtres, 9-28, IREM de Grenoble.

NOELTING G., 1980, *The development of proportional reasoning and the ratio concept*, Educational Studies in mathematics, Vol. 11, 217-253, Cambridge.

PITKETHLY A. & HUNTING R., 1996, *A Review of Recent Research in the Area of Initial Fraction Concepts*, ESM vol. 30 N° 1, 5-37, Cambridge.

PLUVINAGE F., 1998, *La nature des objets mathématiques dans le raisonnement*, Annales de didactique des mathématiques, volume 6, 125 - 138, IREM de Strasbourg.

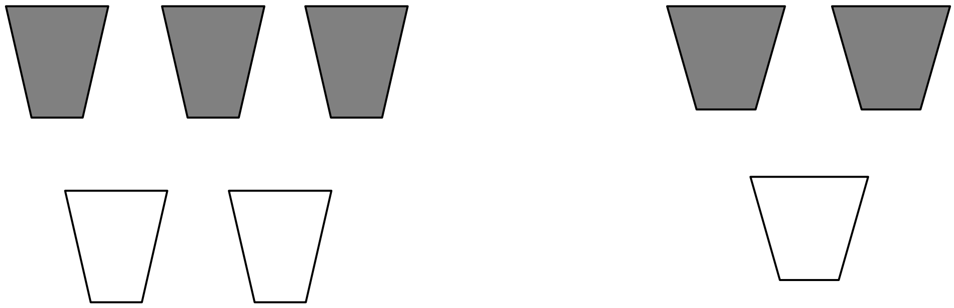
RATSIMBA-RAJOHN H., 1982, *Eléments d'étude de deux méthodes de mesure rationnelle*, RDM vol.3.1., 66 - 113, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble.

STREEFLAND L., 1993, *The Design of a Mathematics Course, a Theoretical Reflection*, Educational Studies in Mathematics, Vol. 25, 109-135, Dordrecht, Holland.

VERGNAUD G. ET LABORDE C., 1994, *Apprentissages et didactiques, où en est-on ?*, Hachette Education (ed), 57-93, Paris.

Annexe 1 : Arg1

On prépare une boisson chocolatée en mélangeant du chocolat et du lait. La recette A mélange 3 parts de chocolat pour 2 parts de lait. La recette B mélange 2 parts de chocolat pour 1 part de lait.



Mélange A **Mélange B**

Complète par A ou B : le mélange qui a le plus le goût du chocolat est le mélange :

Explique brièvement.

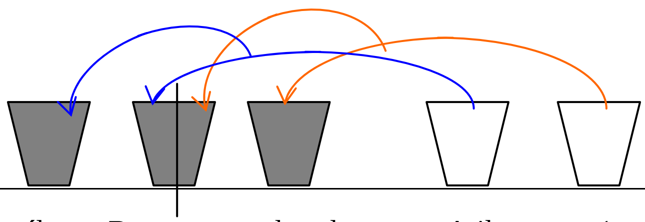
Annexe 2 : Arg2

LINDA : "le mélange A, parce que dans la recette A, il y a 3 parts de chocolat qu'on mélange et dans la recette B, il y a 2 parts de chocolat, alors dans la recette A il y a plus de goût."
GEOFFREY : "le mélange B, la recette B a le plus le goût du chocolat parce qu'il y a moins de lait que dans A."
GUILLAUME : "C'est la recette A, parce que la recette A a plus de verres de chocolat et de verres de lait que la recette B.

FLORIAN : "Recette A, parce que dans la recette A il y a 3 bols de chocolat, 2 bols de lait et dans la recette B il y a 2 bols de chocolat et 1 bol de lait."

LOÏC : "Recette A, [parce que dans la recette A] il y a plus de tasses de chocolat que de tasses de lait. Le B a moins de tasses de chocolat et 1 tasse de lait"
EMMANUEL : "La recette A parce qu'il y aura plus de lait, mais ça laissera plus de goût vu qu'il y a plus de chocolat."
MYLÈNE : "La recette B est la plus chocolatée, car il y a 2 parts de chocolat pour juste 1 part de lait."

NATHALIE : "C'est la B car si le A serait égale, il y aurait 4 parts de chocolat."
JENNIFER : "La recette B. Dans la recette A, il y aura 1 entière et 1 demi part de chocolat dans chaque bol [de lait] et dans la recette B il y aura 2 parts entière dans le bol [de lait]."
ÉRIC : "Recette B, parce qu'on met 1 verre noir dans le blanc et après il reste encore 1 noir. Alors que dans la recette A le dernier verre [après avoir fait le mélange 2 verres de chocolat pour 2 verres de lait, implicitement reconnu équivalent au 1 pour 1], il faut le partager en 2.
MARJORIE : "Recette B, parce qu'il n'y a qu'un verre de lait et deux au chocolat. Parce que dans le A il y a trois verres au chocolat



ANTOINE : "le mélange B, parce que dans la recette A il y a que $1 + \frac{1}{2}$ de chocolat, et dans la recette B il y a 2 parts de chocolat."

CÉLIA : "Les deux ont le même goût. Si pour 2 parts de chocolat, il y a 1 part de lait [recette B] et que pour la recette A on rajoute 1 part de chaque, les deux auront le même goût."

Annexe 3 : Arg3

Les cinq modalités d'appréhension d'un problème rationnel

MODALITÉ 1 **:** prise en compte d'une seule des deux grandeurs en jeu
MODALITÉ 2 : prise en compte purement descriptive des deux grandeurs en jeu
MODALITÉ 3 : prise en compte d'un lien qualitatif entre les deux grandeurs en jeu
MODALITÉ 4 : remplacement des valeurs initiales par des valeurs proportionnelles, (par exemple pour la recherche d'un référent commun dans une comparaison : quelle quantité de chocolat par verre de lait ?)
MODALITÉ 5 : caractériser par une expression numérique les rapports des grandeurs en jeu

	Modalité 1	***Mod 2***	***Mod 3***	***Mod 4***	***Mod 5***	***Add***	***Autres***	***Total***
6A	***8 (3l+ 5c)***	***2***	***3***	***5***	***1***	***2***	***2***	***23***
6A (%)	***35***	***9***	***13***	***21***	***4***	***9***	***9***	***100***
6B	***5 (1l+2c+2l-c)***	***5***	***2***	***7***	***0***	***1***	***4***	***24***
6B (%)	***21***	***21***	***8***	***29***	***0***	***4***	***17***	***100***
6A+B	***13***	***6***	***6***	***12***	***1***	***3***	***6***	***47***
6A+B (%)	***28***	***13***	***13***	***25***	***2***	***6***	***13***	***100***

Tableau 1 : Ventilations comparées et cumulées sur les cinq modalités

Annexe 4 : Arg4.1

Cinq types de problèmes rationnels liés aux grandeurs répartis en deux familles

Problèmes de mesure : problèmes pour lesquels la référence (unité), notamment lors d'une comparaison, est fixe. Par exemple, comparer deux champs de $\frac{3}{5}ha$ et $\frac{2}{3}ha$.

Problèmes de rapports : problèmes pour lesquels, notamment lors d'une comparaison, il n'existe pas de référence fixe. Par exemple, pour comparer deux mélanges, le total des verres de chaque mélange est variable.

1. rapports de grandeurs homogènes (dilatation, densité, démultiplication…),
2. rapports de grandeurs hétérogènes (vitesse, débit, poids spécifique),
3. ratios ou taux ou fréquences (3 chances sur 5, 3 élèves sur 7 ont réussi cet item…),
4. mélanges (5 parts d'arabica pour 2 de robusta.)

Annexe 5 : Arg5a

Passations sur Gradu4

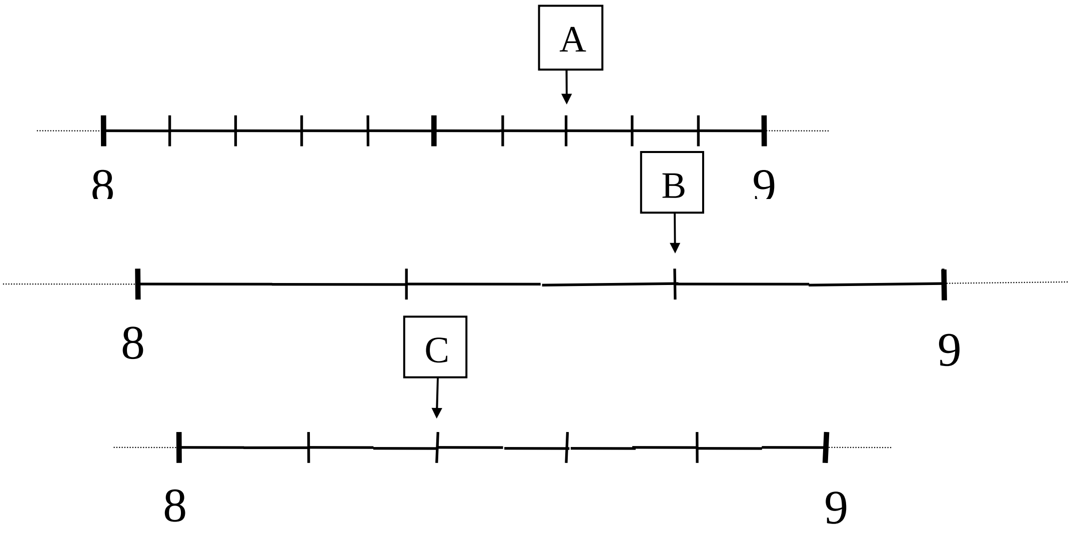


Figure 1 : Range A, B, C du plus petit au plus grand

	Réussite	***Echec***	***Tmoy***	***Tmin***	***Tmax***
Anjusa	39 *(70%)*	17	36”	19”	1’41”
Jedafa	28 *(82%)*	6	1’3”	14”	3’17”
Joguima	48 *(89%)*	6	44”	18”	1’50”
Laechaj	49 *(79%)*	13	36”	16”	1’7”
Nasej	37 *(80%)*	9	48”	16”	1’49”
Nimajub	19 *(95%)*	1	1’13”	34”	2’5”
Olietc	44 *(79%)*	12	40”	17”	1’48”
Vicora	22 *(92%)*	2	1’26”	26”	4’12”

Tableau 2 : Résultat des passations sur Gradu 4 du 26/09/97 (Début du CM2)

Annexe 6 : Arg 6

Les compétences générales visées

1. Exprimer un rationnel dans un des trois registres étudiés (les droites graduées, les écritures fractionnaires et décimales) ; convertir l'expression d'un rationnel, d'un de ces registres vers un autre,

2. interpréter les données numériques d'un problème au moyen de rationnels exprimés dans l'un des trois registres,

3. comparer et encadrer des rationnels, intercaler un rationnel entre deux autres rationnels,

4. utiliser un critère permettant de décider qu'un rationnel est entier,

5. conjecturer et utiliser un critère permettant de décider qu'un rationnel est décimal.

Annexe 7 : Arg 8

Quatre moments forts d'une séquence d'enseignement

Moment 1. Passation sur un logiciel de la série ORATIO.

Moment 2. Un problème de type ORATIO est posé aux élèves dans un environnement papier /crayon.

Moment 3. Un problème lié aux grandeurs, structurellement et numériquement analogue à celui du Moment 2, est posé aux élèves. Les élèves résolvent le problème par les moyens de leur choix. Certains d'entre eux identifient spontanément dans ce nouvel énoncé une expression différente du même problème que celui du Moment 2.

Moment 4. La convergence provoquée : le professeur rappelle en début de séance les enjeux du débat scientifique : "en quoi ces deux problèmes sont-ils différents et en quoi sont-ils analogues".

Annexe 8 : Arg10

Le registre privilégié des droites graduées

1. ***Valorise le lien linéaire : repérage de la position relative, invariante sous changement d'échelle, d'un point entre deux points d'un repère, obtenue à partir de deux entiers, le fractionneur (futur dénominateur) et le pointeur (futur numérateur.)***

2. ***Outil de transition entre un fonctionnement sémiotique : les points, les flèches, les segments, les entiers sont des signes permettant l'expression et le traitement des rationnels ; et un fonctionnement physique : découpage et report de segments permettant de schématiser tout problème de proportion.***

3. ***Outil d'expérimentation et de contrôle***
   - ***l'environnement informatique permet une démarche essai / erreur à moindre coût ;***
   - ***Visualise les opérations fondatrices des rationnels : report et subdivision ;***
   - ***annonce et contrôle les futurs traitements fractionnaires.***

L'étude communiquée par cet article s'inscrit dans les travaux d'un groupe de recherche, coordonné par Jean-Claude RAUSCHER et Alain KUZNIAK, dont le projet s'intitule :
Nouvelles modalités d'action(s) didactique(s)en mathématiques, enjeux d'enseignement et de formation.

Ce groupe est issu de l'opération de recherche de l'IUFM d'Alsace, elle-même rattachée à l'
Équipe d'Accueil EA 2182 – CeRF (Centre de Recherche sur la Formation) de l'IUFM de Toulouse.