PIERRE BELMAS

APPRENTISSAGE DE LA PROPORTIONNALITÉ ET SYMBOLISATIONS CHEZ DES ÉLÈVES EN ÉCHEC SCOLAIRE DE SEGPA

Abstract. Problem solving and symbolisation among students who fail in school.
Directed at students who fail in the school system, the aim of this research is to analyse the impact of interaction between different kinds of symbolisation in relation to concepts in problem solving. There are two sorts of methods for symbolisation: natural language and schematisation. These symbolic accompaniments of thought are in reality a new type of mediation which can allow students to have the perspective and distance necessary to face cognitive obstacles which up until then have been insurmountable. The experience (1999-2001) has been based on the theoretical relationship between psychology (genetic and cognitive), semiotics and mathematical pedagogy. Within this framework, problems known as "4th proportional" were presented to 15-year old students of SEGPA*. The specificity of these mathematical problems is that they engage students in problem solving. Students worked on them during clinical sessions as well as in the classroom, which encouraged pair work interaction. During the classroom work, the clinicians, helped by the teachers, picked opportunities to use symbolisations to, among other things, provoke a rupture in the thought process, so that students could modify their representations of the problems. Individual follow-up of selected students with contrasting results, allowed the measurement of the evolution of their cognitive profile throughout the experimentation period.

Résumé. Pour des élèves en échec scolaire, cette recherche a pour objectif de constater l'impact de l'interactivité entre divers types de symbolisation par rapport à la conceptualisation de la proportionnalité. Les outils de symbolisation utilisés sont principalement de deux sortes : le langage naturel et les schématisations. Ces accompagnements symboliques de la pensée, sont, de fait, de nouvelles médiations qui peuvent permettre de prendre de la distance et le recul nécessaires pour faire face à des obstacles cognitifs jusqu'alors insurmontables. L'expérience (1999-2001) prend principalement appui sur des articulations théoriques entre la psychologie (génétique et cognitive), la sémiologie et la didactique des mathématiques. C'est dans ce cadre de référence qu'il est proposé à une classe de 4^{e} de SEGPA* des problèmes dits de quatrième proportionnelle. Ces problèmes présentent la particularité d'impliquer les élèves dans une mise en œuvre du raisonnement de proportionnalité. Elles sont traitées par les élèves dans le cadre d'entretiens cliniques mais aussi lors de séquences de classe collectives favorisant l'interactivité entre pairs. L'expérimentateur, aidé par le maître lors des moments collectifs, va proposer aux moments estimés opportuns l'utilisation de symbolisations pour, entre autres, provoquer des ruptures cognitives afin que les élèves puissent modifier leur représentation des problèmes. Un suivi individuel d'élèves sélectionnés aux résultats contrastés permet de mesurer l'évolution de leur profil cognitif tout au long de l'expérimentation.

*SEGPA : Section d'enseignement général et professionnel adapté

Mots Clés : Apprentissage, échec scolaire, SEGPA, proportionnalité, médiation, symbolisation, interactivité, schématisation, représentation, profil cognitif.

Annales de didactique et sciences cognitives, volume 8, p. 167 – 189.

1. Introduction

Pour des élèves en échec scolaire du second degré, cette expérience a eu pour objectif de constater l'impact de l'interactivité entre divers types de symbolisation par rapport à la conceptualisation de la proportionnalité.

Les outils de symbolisation utilisés sont principalement de deux sortes : le langage naturel et les schématisations. Ces accompagnements symboliques de la pensée, sont, de fait, de nouvelles médiations qui peuvent permettre de prendre de la distance et le recul nécessaires pour faire face à des obstacles cognitifs jusqu'alors insurmontables.

L'expérience (1999-2001) prend principalement appui sur des articulations théoriques entre la psychologie (génétique et cognitive), la sémiologie et la didactique des mathématiques. C'est dans ce cadre de référence qu'il est proposé à une classe de 4^e^ de SEGPA[1] en Seine Saint-Denis des problèmes dits de quatrième proportionnelle. Ces problèmes présentent la particularité d'impliquer les élèves dans une mise en œuvre du raisonnement de proportionnalité. Elles sont traitées par les élèves dans le cadre d'entretiens cliniques mais aussi lors de séquences de classe collectives favorisant l'interactivité entre pairs. L'expérimentateur, aidé par le maître lors des moments collectifs, va proposer aux moments estimés opportuns l'utilisation de symbolisations pour, entre autres, provoquer des ruptures cognitives afin que les élèves puissent modifier leur représentation des problèmes. Un suivi individuel d'élèves sélectionnés aux résultats contrastés permet de mesurer l'évolution de leur profil cognitif tout au long de l'expérimentation.

2. La SEGPA

2.1 Des données chiffrées

Depuis 15 ans environ, la population des élèves relevant des enseignements adaptés du second degré (SEGPA et EREA-LEA[2]) est stable. On compte aujourd'hui en France métropolitaine 117 500 élèves en établissements ou classes d'enseignement adapté. Les filles représentent moins de 40 % des effectifs. À la sortie de l'école primaire, les élèves qui entrent dans l'enseignement adapté sont plus âgés que ceux qui accèdent au collège. Ainsi 56,5 % des élèves sont en retard contre 20,4 % pour l'enseignement ordinaire. La proportion des élèves étrangers dans les SEGPA, bien qu'en baisse, reste beaucoup plus élevée (12,6 %) que dans l'enseignement banal (6 %) ; malgré une forte diminution depuis 1992 (où elle représentait 18,4 % des effectifs), cette population reste encore largement sur représentée.

---

[1] **SEGPA : Section d'Enseignement Général et Professionnel Adapté**

[2] **EREA-LEA** : Établissement régional d'enseignement adapté - Lycée d'enseignement adapté.

2.2. Les finalités

Les sections d'enseignements généraux et professionnels adaptés, intégrés au collège, assurent (aux élèves) " une formation commune qui vise à leur faire acquérir, en fin de 3^{e}, une autonomie et les acquisitions suffisantes pour préparer une formation qualifiante ". Les enseignements proposent des parcours individualisés pour que les élèves (de 12 ans à 16 ans) obtiennent au minimum une qualification de niveau V.

2.3. Les élèves

Les textes actuels nous décrivent les élèves des SEGPA comme "présentant des difficultés scolaires graves et persistantes auxquelles n'ont pu remédier les actions de prévention, de soutien, d'aide et l'allongement des cycles dont ils ont pu bénéficier. Ils présentent sur le plan de l'efficience intellectuelle des difficultés et des perturbations qui ne peuvent être surmontées ou atténuées que sur plusieurs années et qui, sans relever du retard mental… se traduisent par des incapacités et désavantages tels qu'ils peuvent être décrits dans la nomenclature des déficiences, incapacités et désavantages" (arrêté du 9-1-1989.) "Les élèves auxquels est proposée une orientation en SEGPA ont connu une scolarité primaire perturbée. Même si l'entrée au collège, qui est perçue comme une promotion personnelle, favorise le développement de nouvelles potentialités, il reste que beaucoup ont conscience de leur échec et ont une image d'eux-mêmes dévalorisée." [3]

Sur un plan général, on peut parler d'élèves présentant une inhibition intellectuelle qui se caractérise par une « rigidification » des fonctions cognitives : des compétences sont établies localement par rapport à des situations précises qui ne permettent pas de déboucher sur des expériences nouvelles susceptibles de provoquer la construction de nouvelles compétences. De fait, les compétences locales ne peuvent se transférer ou s'adapter à un environnement modifié : l'individu ne peut que réutiliser à l'identique les compétences préalablement construites dans un environnement familier.

Plus précisément, certains élèves des SEGPA éprouvent des difficultés à recevoir et utiliser simultanément plusieurs sources d'information. Les liens ne peuvent être établis, la complexité perturbe et provoque une centration sur quelques informations, excluant les autres. C'est ce que l'on peut appeler une approche " épisodique " de la réalité : l'appareil cognitif ne dirige pas suffisamment l'appareil perceptif. C'est plus particulièrement à partir de ces problèmes de sélection de l'information que l'on peut constater chez bon nombre d'élèves de SEGPA des difficultés de compréhension concernant les consignes.

Dans le prolongement de ces premières difficultés, on peut caractériser certains de ces élèves comme ayant une difficulté de prise de distance par rapport à

[3] **Circulaire n°98-129** du 19/6/1998.

l'activité à mener. Ce manque de distance provoque des mises en activité instinctives, impulsives. L'élève est dans « le faire ». La planification des actions n'existe pratiquement pas et donc a fortiori la coordination des schèmes pour atteindre l'objectif fixé.

Ces premières remarques sur l'appareil cognitif des élèves de SEGPA s'accompagnent de caractéristiques affectives particulières. Ces élèves qui vivent leur scolarité en SEGPA ont, pour la plupart, vécu difficilement un échec scolaire avéré dès l'école primaire. Cette expérience douloureuse contribue à développer chez eux une résistance à tout apprentissage nouveau. Un échec, même local, ne peut plus être envisagé. Ces élèves ont à la fois le désir et la peur d'apprendre. Les élèves ont ainsi à se recréer une identité positive pour pouvoir développer des projets, qu'ils soient de vie, d'apprentissage ou professionnels. Le " soi " s'organise à partir du sentiment de continuité, de la préhension et de la maîtrise de l'horizon temporel. Être quelqu'un, c'est avoir un passé, être soi-même, c'est valoriser le temps présent et structurer des projets.

Malgré les processus d'identification au groupe qui se développent à l'adolescence, pour bon nombre des élèves de SEGPA l'échec scolaire peut provoquer un comportement égocentrique à l'intérieur de l'établissement scolaire et plus particulièrement face aux apprentissages. Cela se caractérise par une grande difficulté à communiquer dans le cadre des activités scolaires. On assiste ainsi à un repliement de l'élève sur lui-même, le groupe classe et ses effets bénéfiques (dynamisme, interaction) sont parfois inexistants.

3. L'ingénierie mise en œuvre

3.1. Les élèves de la classe de 4e de SEGPA

3.1.1. Âges et sexes

Seuls deux élèves sont nés en 1984, tous les autres sont nés en 1985. Les âges des élèves de la classe sont donc homogènes. La classe est composée de sept garçons et de neuf filles.

3.1.2. Les redoublements

12 des 16 élèves ont redoublé leur CP. On peut raisonnablement supposer que ces redoublements sont dus à des difficultés d'apprentissage de la langue. Ce constat local pourrait très certainement être généralisé. En effet, bon nombre d'élèves de l'AIS n'ont pas appris à lire quand leurs enseignants le souhaitaient. Quatre des élèves redoublent le CE2, dont deux avaient déjà redoublé le CP. La classe de CE2 représente le seuil de tolérance de l'école primaire, toujours principalement par rapport à la maîtrise de la langue. En effet par la suite, dans

l'échantillonnage considéré, on ne constate plus de redoublement. Au total, dans cette classe, 14 élèves ont redoublé, dont 2 deux fois (le CP et le CE2.)

3.2. Le type de proportionnalité choisi : la quatrième proportionnelle

Si l'on fait référence à la classification des différents problèmes de proportionnalité réalisée par Vergnaud, la quatrième proportionnelle est un problème de « proportionnalité simple » particulière comme le présente le tableau ci-dessous.

3.2.1. Proportionnalités simples

<table>
<tr><th></th><th>Problème de « type classique »</th><th>Problème de quatrième proportionnelle</th></tr>
<tr><td>Énoncés</td><td>1 petite voiture de collection vaut 9 €. Combien valent 7 voitures ?</td><td>3 stylos « encre » coûtent 56,25 €. Combien coûtent 8 stylos</td></tr>
<tr><td>Symbolisa-tions des structures</td><td><table><tr><th>Voiture(s)</th><th>Euro(s)</th></tr><tr><td>1</td><td>9</td></tr><tr><td>7</td><td>x</td></tr></table></td><td><table><tr><th>Stylo(s)</th><th>Euro(s)</th></tr><tr><td>3</td><td>56,25</td></tr><tr><td>8</td><td>x</td></tr></table></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Caractéristi-ques</td><td colspan="2">• Relation quaternaire (4 termes)
• Quatre quantités dans deux espaces de mesures : les voitures et les € ; les stylos et les €</td></tr>
<tr><td>• Présence de la valeur unitaire : 9 €/voiture</td><td>• Absence de la valeur unitaire : le prix d'1 stylo</td></tr>
<tr><td>Procédures de résolution</td><td>• Procédure horizontale ou « fonction », fondée sur l'utilisation de l'opérateur fonction X 9 €/voiture : 7 voituresX9 €/voiture= 63 €
• Procédure verticale ou « scalaire » fondée sur la mise en évidence de l'opérateur scalaire X 7 soit l'utilisation de la propriété d'isomorphisme multiplicatif :
f(kx)=kf(x) soit 9 eurosX7=63 €
• Procédure additive fondée sur l'addition réitérée :
9 €+9 €…=63 €</td><td>• Procédure de la règle de trois : x=8X56,25/3</td></tr>
</table>

3.3. Les étapes de l'expérience et les problèmes proposés

L'expérience repose sur la mise en œuvre des cinq étapes suivantes :

3.3.1. La programmation de l'expérience

ÉTAPES	MODALITÉS DE TRAVAIL	RESPONSA-BLES	SUPPORTS	ACTIONS/OBJECTIFS
I Position-nement	Collective : toute la classe.	Maître.	Six problèmes de quatrième proportionnelle.	• Évaluer pour définir les difficultés en fonction des variables didactiques • Constituer des groupes d'élèves homogènes et choisir des élèves aux résultats contrastés.
II Entretien clinique	Individuelle : chaque élève de la classe.	Expérimenta-teur.	Trame d'entretien et reprise d'un problème résolu et d'un problème non résolu lors de l'étape I.	• Déterminer ce que chaque élève sait ou ne sait pas. • Utiliser des accompagnements du raisonnement par la symbolisation.
III Interac-tions	Collective : toute la classe.	Maître et expérimenta-teur.	Deux séances de classe par rapport à trois problèmes (possibilité d'utiliser la calculette si besoin est.)	• Utiliser des accompagnements symboliques. • Confronter différents schémas. • Mettre en évidence des démarches.
IV Entretiencli nique	Individuelle : les élèves aux résultats contrastés.	Expérimenta-teur.	Trame d'entretien et un nouveau problème.	• Suivre individuellement chaque élève en proposant des accompagnements symboliques.
V Position-nement	Collective : toute la classe.	Maître.	Trois problèmess dont deux de quatrième proportionnelle.	• Évaluer les effets des accompagnements symboliques.

Les étapes correspondent à la résolution de problèmes de quatrième proportionnelle spécifique.

3.3.2. La programmation des problèmes mathématiques[4]

ÉTAPES	PROBLÈMES	ÉNONCÉS
I	**1.1**	*2 stylos coûtent 8 francs. Combien coûtent 6 stylos ?*
	1.2	*4 gommes coûtent 6 francs. Combien coûtent 6 gommes ?*
	1.3	*15 pinceaux coûtent 45 francs. Combien coûtent 139 pinceaux ?*
	1.4	*15 règles coûtent 139 francs. Combien coûtent 45 règles ?*
	1.5	*J'achète 12 bouteilles de cidre à 49,50F les 3. Combien dois-je payer ?*
	1.6	*3 pelotes de laine pèsent 200 grammes. Il en faut 8 pour faire un pull. Quel est le poids du pull ?*
II	Mêmes problèmes que pour l'étape précédente	
III	**3.1**	*Combien pèsent 120 sacs de terreau, sachant que 25 sacs pèsent 75 kilogrammes ?*
IV	**4.1**	*Quelle distance parcourt un train en 36 minutes, sachant qu'il roule à vitesse constante et qu'il parcourt 40 kilomètres en 16 minutes ?*
V	**5.1**	*Combien coûtent 14 mètres de fil électrique, sachant que 4 mètres coûtent 10 francs ?*
	5.2[5]	*Jacques et Paul ont chacun la même somme d'argent. Jacques donne 23 francs à Paul. Combien Paul a-t-il maintenant de plus que Jacques ?*
	5.3	*La longueur du parcours d'une course automobile est de 247,760 kilomètres. Une voiture consomme en moyenne 6,785 litres au 100 kilomètres. Combien consommera cette voiture pendant la course ?*

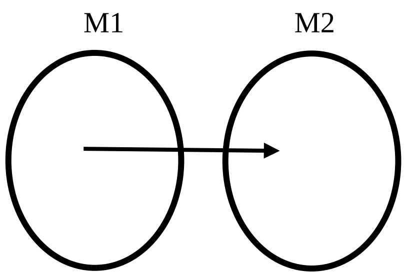
4 L'expérience ayant été menée de 1999 à 2001, les prix énoncés utilisent les francs et non pas les €.

5 Le problème 5.2 joue le rôle de l'intrus. En effet, il ne s'agit pas d'un problème de quatrième proportionnelle. Son introduction correspond à la volonté de créer une rupture afin de voir si les élèves reconduisent d'une manière mécaniste un même raisonnement, sans analyser le problème proposée.

3.4. Les accompagnements de symbolisation proposés

3.4.1. La fiche distribuée aux élèves lors de la phase 2

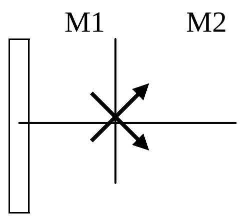
<u>Ensembles</u>



<u>Tableau de proportionnalité</u>

M1	M2

Produit en croix



Graphique

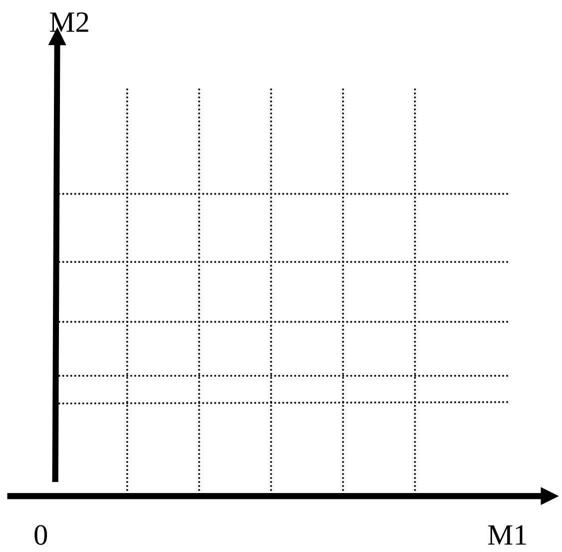
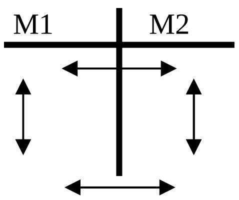


Tableau fléché



Ces différents outils de symbolisation sont des schémas qui ont pour objectif, entre autres, de favoriser la réflexion par la sélection des informations nécessaires et la représentation dans l'espace à deux dimensions des propriétés du problème.

Ces cinq outils présentent des caractéristiques particulières au niveau de leur composition, qui sont en relation directe avec le rôle qu'ils peuvent tenir dans la résolution de problèmes de quatrième proportionnelle. La synthèse de la mise en relation entre les composants et les spécificités de ces outils est proposée dans le tableau suivant.

3.4.2 *L'analyse des schémas symboliques proposés*

Caractéristiques / Noms	Composants	Spécificités	Observations
Ensembles	• Deux diagrammes de Venn. • Deux symboles (M1 et M2.) • Une (des) flèche (s.)	• Mise en évidence des deux espaces de mesures. Pour ce faire ces deux ensembles sont disjoints. • La flèche symbolise " fortement " la correspondance de mesures (deux ensembles appa-rentés par un même système de relation.) L'objectif est d'induire la correspondance terme à terme et de mettre en évidence l'opérateur fonction.	• Il n'y a pas de repères spatiaux pour le positionnement des grandeurs à l'intérieur des ensembles ce qui ne favorise pas la mise en place d'une procédure horizontale ou verticale. • Le niveau d'abstraction est élevé.
Tableau de proportionnalité	• Un tableau constitué de deux colonnes et d'un nombre important de lignes. • Deux symboles : M1 et M2 les deux espaces de mesure.	• L'objectif est d'induire la constitution de couples de mesures pouvant aider à la mise en place du raison-nement linéaire et donc de la mise en évidence de l'opérateur fonction. • En fonction de son nombre de lignes, ce tableau peut induire et favoriser la recherche de la valeur unitaire.	• Il n'y a pas de mise en évidence de l'aspect quaternaire de la relation de proportionnalité. • L'exhaustivité du tableau engendre la mise en œuvre de mécanismes opératoires souvent peu conscientisés.

Produit en croix	• Un quadrillage constitué de 4 carrés. • Deux symboles : M1 et M2 les 2 espaces de mesure. • Deux flèches.	• C'est, d'une manière implicite, l'utilisation de la définition mathématique de la proportionnalité : *a/b=c/d soit ad=bc* • Les deux flèches favorisent le calcul et permettent d'économiser le coût cognitif du raisonnement. • Ce schéma implique les élèves dans l'utilisation de l'algèbre pour la résolution d'une équation.	• Le mécanisme opératoire peut ne pas impliquer l'élève dans le raisonnement de proportionnalité c'est-à-dire la procédure "fonction" ou scalaire. • Le croisement des flèches ne met pas en valeur la relation des couples qui s'établit entre les deux espaces de mesure. • Son utilisation rend la détermination de l'unité difficile.
Graphique	• Deux axes orientés. • Trois symboles : O représentant l'origine, M1 et M2 les 2 espaces de mesure. • Un quadrillage constituant les couples de grandeurs.	• C'est l'expression de la proportionnalité dans le registre graphique des mathématiques qui se caractérise par l'alignement de points avec l'origine (la fonction linéaire $y=ax$). • Ce schéma peut impliquer les élèves dans l'utilisation de l'algèbre pour la résolution d'une équation.	• Le niveau d'abstraction est élevé. Le graphique est en effet une invention des mathématiciens qui, dans l'espace, présente les grandeurs comme indépendantes, ce qui est pertinent dans le cadre de la proportionnalité multiple mais pas nécessairement pour une problème de quatrième proportionnelle (pas de mise en évidence du coefficient de proportionnalité ni des rapports scalaires.)
Tableau fléché	• Deux symboles : M1 et M2 les 2 espaces de mesure. • Quatre flèches.	• L'objectif est de mettre en évidence l'aspect quaternaire de la relation de proportionnalité à partir de deux couples de mesure. • Les quatre flèches favorisent à la fois la procédure horizontale et la procédure verticale. • Les deux colonnes favorisent la procédure verticale. • L'utilisation de l'opérateur fonction permet de déterminer l'unité du résultat trouvé.	• Dans certains cas, en fonction des valeurs numériques lorsque les procédures horizontale et verticale ne sont pas perceptibles, l'aspect " circonstancié ", " ciblé " de la représentation peut perturber la recherche de la valeur unitaire, si celle-ci apparaît nécessaire au sujet.

Il est à souligner que :

1. les élèves de la classe concernée ont été habitués à utiliser, d'une manière relativement mécanique, le tableau en croix?
2. l'expérimentateur utilisera en priorité, lors des entretiens cliniques le tableau fléché.

C'est en ce sens qu'il paraît intéressant de constater que la comparaison de ces deux outils de symbolisation met en évidence :

3. une similitude sémiotique/une même disposition spatiale (tableau 2X2) qui permet la mise en évidence de la relation quaternaire?
4. des différences sémiotiques/pour le tableau fléché, un balayage vertical-horizontal favorisant la perception des opérateurs (fonction, scalaire) et pour le tableau en croix, un balayage croisé qui fait référence au traitement algébrique, à une équation.
5.

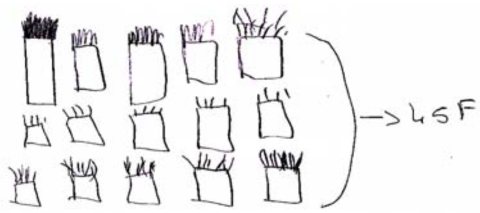
3.5. La classification des schématisations des élèves

Il est à noter que, pour le bon déroulement de l'expérimentation, il a été nécessaire d'opérer des regroupements des schémas produits. Ces regroupements ont été difficiles à réaliser car la majorité des représentations, compte tenu des conditions de l'expérimentation et du niveau conceptuel des élèves, associent bien souvent textes, symboles et dessins figuratifs et narratifs.

La classification des schémas se fonde sur leurs aspects prédominants. Ainsi il est apparu pertinent de créer 3 catégories de schémas :

- **" figuratif/narratif "** qui regroupe les représentations à la fois figuratives et narratives (exemple : BD), la discrimination paraissant particulièrement difficile à réaliser

3.5.1. Le schéma figuratif/narratif de Coralie, problème 1.3

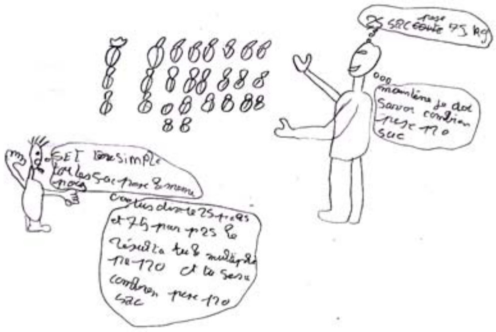


15 pinceaux coûtent 45 francs. Combien coûtent 139 pinceaux ?

Ce schéma est ainsi principalement constitué d'une « image-icône », dessin des pinceaux, qui témoigne de la prise en compte des énoncés : cela correspond à une fonction d'illustration. (L'autre partie abstraite du schéma, très réduite, ➔45F, représente le début du traitement mathématique du problème.

3.5.2. Le schéma figuratif/narratif de Julien, problème 3.1

Combien pèsent 120 sacs de terreau, sachant que 25 sacs pèsent 75 kilos grammes ?

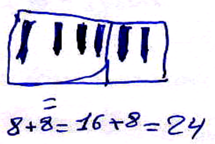


Ce schéma narratif représente une image de BD. Le choix est pris de rendre compte, d'une manière imagée, le problème posé. Julien raconte la situation en y apportant des éléments susceptibles de lui donner encore plus de sens (la situation se déroule sur un lieu de travail : un patron un employé.) Pour Julien, la fonction de communication de la représentation l'emporte sur ses autres fonctions. De plus, l'importante de la place donnée au texte lui permet d'exposer son raisonnement.

1. **" mixte"** qui regroupe des représentations utilisant à la fois des aspects figuratifs et des aspects symboliques.

3.5.3. Le schéma mixte d'Alexis, problème 1.1

2 stylos coûtent 8 francs. Combien coûtent 6 stylos ?



Le schéma est composé de deux partie occupant un espace équivalent. La première partie est une image icône qui a pour fonction de présenter un matériau de comptage. En dessous, la seconde partie, qui fait logiquement suite à la première, présente le traitement mathématique du problème à l'aide d'une équation.

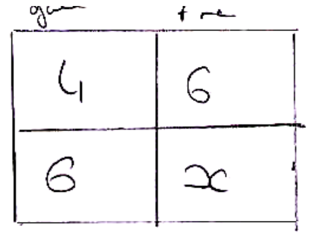
- " symbolique" qui regroupe des représentations qui utilisent majoritairement des symboles qu'ils soient mathématiques ou non.

3.5.4. Le schéma symbolique d'Adiaratou, problème 1.2

4 gommes coûtent 6 francs. Combien coûtent 6 gommes ?

Il s'agit d'un tableau en croix induisant le traitement algébrique du problème.

4. Les résultats



4.1. Les groupes d'élèves suivis

4.1.1. Résultats généraux

Le tableau suivant permet de comparer l'évolution des groupes d'élèves (groupes de niveau) constitués en début d'expérimentation. Cette évolution se constate plus particulièrement à partir des résultats des élèves aux problèmes de quatrième proportionnelle de l'étape III et V qui présentent des caractéristiques communes :

- valeurs numériques de grande taille (problème 3.1 : 25, 75, 120 ; problème 5.3 : 247,760),
- absence de multiple pour les problèmes de l'étape V (5.1 et 5.3) ou multiples difficilement identifiables, pour ces élèves, dans le problème 3.1 (25 et 75),

	RÉPONSES EXACTES			**RÉPONSES INEXACTES**		
GROUPES[6]	**Problème 3.1**	**Problème 5.1**	**Problème 5.3**	**Problème 3.1**	**Problème 5.1**	**Problème 5.3**
Groupe 1 : « Bons » 4 élèves	2	3	3	2	1	1
Groupe 2 : « Moyens » 4 élèves	1	4	3	3	0	1
Groupe 3 : « Faibles » 3 élèves	2	2	1	1	1	2
Groupe 4 : « très faibles » 5 élèves	0	0	0	5	5	5
Total :16 élèves	**5**	**9**	**7**	**11**	**7**	**9**

6 Les groupes ont été constitués en fonction des résultats obtenus lors de l'étape I.

- Les résultats des élèves du groupe 1 évoluent positivement,
- les résultats des élèves du groupe 2 sont ceux qui évoluent le plus. Les élèves de ce groupe semblent donc avoir bénéficié plus que les autres des effets de l'expérimentation. Leurs performances en fin d'expérimentation dépassent celles du groupe 1,
- les résultats des élèves du groupe 3 restent stationnaires ;
- Dans le strict cadre de l'expérience, les résultats des élèves du groupe 4 n'évoluent pas[7].

4.1.2. Six constats

1) Globalement on peut souligner que les erreurs de calcul sont pratiquement inexistantes. La raison première semble être toute naturelle : les élèves n'utilisent pas des techniques opératoires qu'ils ne maîtrisent pas suffisamment, et c'est l'expérimentateur qui procède éventuellement aux calculs numériques. Ils sont ainsi en recherche de sécurité. La conscience qu'ils ne maîtrisent pas telle ou telle technique opératoire peut avoir pour certains élèves un effet sur la représentation qu'ils se sont construits de la structure du problème. Une nouvelle question est ainsi soulevée : quelle interaction y a-t-il entre les techniques de calcul maîtrisées et la perception des relations mathématiques ?

2) C'est dans ce contexte que l'on peut constater, en début d'expérience, la prédominance et l'impact des stratégies fondées sur la décomposition additive " raisonnée ", plus particulièrement dans le cadre du raisonnement par isomorphisme. Ce choix stratégique est souvent fait par rapport à une maîtrise insuffisante des tables de multiplication et de l'algorithme de la multiplicaion. La peur de l'échec conduit ainsi les élèves à adopter une stratégie qu'ils jugent plus économique sur le plan cognitif, mais lourde et répétitive en calculs. Le public scolaire en difficulté ou en échec a peur d'apprendre.

De plus, on remarque que la stratégie additive est très souvent mise en œuvre dans le cadre d'un raisonnement qui n'implique pas toujours la maîtrise du raisonnement de proportionnalité.

En effet, bon nombre d'élèves, une fois l'opérateur scalaire découvert, se cantonnent alors dans un seul espace de mesure. L'unique centration sur un raisonnement vertical peut s'avérer préjudiciable car son transfert est parfois impraticable, par exemple à cause des valeurs des variables numériques.

3) Dans le cadre des différents entretiens, les accompagnements langagiers se sont avérés rentables puisque pratiquement tous les élèves ont résolu les problèmes proposés avec l'aide de l'expérimentateur. Il est important de souligner que plus l'élève rencontre de difficultés et plus ce type d'accompagnement nécessite du temps. Ce temps supplémentaire pour les élèves, les plus en difficulté

---

7 Ce constat ne concerne pas l'évolution cognitive de chaque élève de ce groupe.

correspond à la nécessité de changer de représentation du problème. En effet, plus l'élève rencontre de difficultés, plus il cherche, et plus sa pensée est amenée à produire, dans le meilleur des cas, différentes représentations du problème. Ainsi, bien souvent, le coût cognitif s'accentue tout au long de l'entretien nécessaire pour trouver la représentation opératoire du problème. L'élève demande alors à l'adulte médiateur d'accroître sa prise en charge du pilotage de la réflexion. C'est ainsi que certains élèves, épuisés par le coût cognitif de la recherche, éprouvent des difficultés à mettre en œuvre la technique opératoire qu'ils ont découvert et qui leur permettrait de conclure leur raisonnement. Dans la logique précédente, on peut dire que les élèves de plus bas niveau n'ont pas l'initiative des dialogues, notamment en fin d'entretien.

4) On peut constater que très peu d'élèves utilisent spontanément des accompagnements de symbolisation graphique lors de la résolution de problèmes (étape I.) Il n'y a pas d'habitus scolaire relatif à la schématisation. Seule une minorité d'élèves utilise le tableau en croix d'une manière mécaniste : c'est l'effet maître, le contrat didactique. Lors de l'expérimentation, les schématisations, par rapport aux problèmes de quatrième proportionnelle les plus complexes, ont contribué en particulier à penser la nécessité de rechercher la valeur unitaire. C'est souvent une visualisation qui facilite la prise de conscience de l'existence d'une question intermédiaire : la recherche de la valeur unitaire. Les représentations de type tableau fléché semblent être, en ce sens, les plus performantes. Elles mettent en évidence la possibilité de raisonner verticalement ou horizontalement. Les schémas sont, pour la majorité des élèves, en interaction avec la construction du raisonnement de proportionnalité.

5) Toujours par rapport à l'ensemble du groupe classe, on peut affirmer que les différents types d'accompagnements par la symbolisation aident les élèves à penser la structure des problèmes. D'ailleurs les outils de symbolisation proposés par l'expérimentateur, plus particulièrement lors des entretiens, sont déclencheurs de ruptures, et conduisent chaque élève à changer sa représentation du problème. En ce sens, le changement de registre de représentation, proposé par le médiateur, est source de pensées nouvelles formulées par les élèves. C'est la raison pour laquelle on peut dire qu'il y a bien interactivité entre la production de schémas et les formes langagières de la pensée.

6) En fonction des résultats constatés, le problème de classe correspondant à l'étape III s'est avérée particulièrement " rentable " sur le plan cognitif. Fondée sur la confrontation des schématisations crées par les élèves, elle a favorisé la rencontre des points de vue, les argumentations et donc les décentrations. De plus, l'aspect dynamique du problème a très certainement contribué à développer la motivation des différents élèves composant le groupe classe.

4.2. Les suivis individuels

Ces suivis individuels concernent 7 élèves aux résultats contrastés. L'exemple d'Adiaratou, et celui d'Olivier présentés ci-dessous, mettent en évidence des évolutions cognitives particulières.

Adiaratou

4.2.1. État initial du profil cognitif

Performances, constats

En début d'expérience, lors de la première étape, Adiaratou réussit une problème sur six. Elle fait ainsi partie du groupe d'élève faible. Elle accompagne sa pensée : trois schémas pour six problèmes. Ces schémas sont principalement des tableaux en croix à l'intérieur desquels l'inconnue est symbolisée par x. Or le problème réussi n'est pas accompagné de symbolisation. Adiaratou rencontre quelques difficultés pour effectuer les multiplications et les divisions.

Interprétations

Le contrat didactique imposé par le maître de la classe, en particulier dans le cadre des enseignements mathématiques, est particulièrement prégnant. Sur un plan général, les garçons de la classe tiennent le devant de la scène pédagogique. Ils semblent être vécus par le maître non seulement comme étant les plus performants mais aussi les plus motivés. Dans ce contextee, on peut penser que les filles, et plus particulièrement Adiaratou, ont du mal à trouver leur place. Adiaratou, presque renfermée, adopte une attitude de recul.

Si on analyse plus précisément le contrat didactique véhiculé par le maître, on constate que les aides proposées à la résolution des problèmes mathématiques sont fondées sur l'économie de la pensée : « les trucs pratiques ». c'est dans ce cadre que le maître fait ses propositions (l'utilisation du tableau en croix), ce qui peut parfois avoir pour effet « de passer à côté » du raisonnement de proportionnalité utilisable par l'élève. Aucun autre outil n'est proposé et les élèves l'utilisent de façon pratique en s'aidant de la calculette. L'outil étant ainsi généralisé pour toute la classe, dans ce contexte et à des fins de reconnaissance, Adiaratou utilise presque systématiquement le tableau. La pression du contrat est si forte qu'elle s'ingénie à utiliser ce type de symbolisation même pour des problèmes qu 'elle pourrait pratiquement résoudre mentalement.

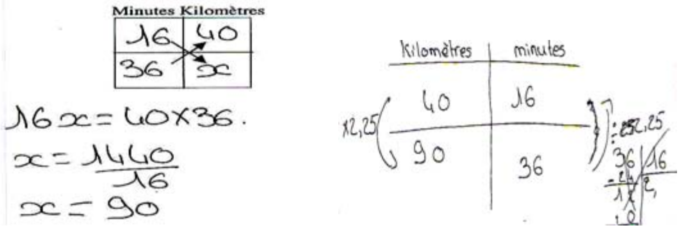
On peut s'interroger sur la vision des élèves que véhicule ce type de contrat didactique. On peut aussi s'interroger sur la représentation des savoirs mathématiques (prédominance de l'aspect outil des concepts) véhiculé par un tel contrat. Quoi qu'il en soit Adiaratou ne se retrouve pas dans un tel cadre, lequel s'oppose, dans une certaine mesure, à ses apprentissages.

4.2.2. *État final du profil cognitif*

Performances, constats
L'étape V confirme les progrès réalisés par Adiaratou puisque, dès l'étape III, tous les problèmes sont résolus. De plus Adiaratou accompagne toujours sa pensée de schématisation passant presque systématiquement du tableau en croix au tableau fléché.

4.2.3. *Problème 4.1*

Quelle distance parcourt un train en 36 minutes, sachant qu'il roule à vitesse constante et qu'il parcourt 40 kilomètres en 16 minutes ?

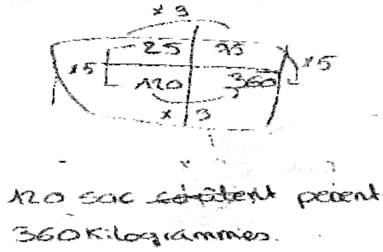


On assiste à une évolution simultanée des réussites et de l'utilisation des représentations visuelles. Lors de l'étape III, elle sait même exposer au groupe classe les deux procédures possibles de résolution du problème proposé.

Interprétations
Le changement de contrat a porté ses fruits. Cette rupture satisfait pleinement Adiaratou qui peut alors prendre le risque de se confronter aux perturbations inhérentes à tout nouvel apprentissage et de s'exprimer. Dans un nouvel espace de pensée, Adiaratou prend de la distance par rapport aux outils qu'elle utilisait. Elle se décentre et constate qu'il existe d'autres outils, peut-être plus adaptés, plus performants. D'une manière générale, on peut dire qu'elle commence à appréhender le caractère objet de la proportionnalité. Dans la même dynamique, elle constate les liens existant entre le tableau en croix et le tableau fléché pour en arriver, grâce à ce dernier, à expliquer au groupe classe le raisonnement vertical « scalaire » et le raisonnement horizontal « fonction », ce qui témoigne d'un niveau élaboré de conceptualisation.

4.2.4. Problème 3.1

Combien pèsent 120 sacs de terreau, sachant que 25 sacs pèsent 75 kilogrammes ?



Olivier

4.2.5. État initial du profil cognitif

Performances, constats

Lors de l'évaluation initiale, Olivier résout deux situations sur six. Ces réponses exactes sont obtenues grâce à la mise en œuvre de stratégies additives. Il n'accompagne pas sa pensée de schéma.

Interprétation

Bien qu'il maîtrise la technique opératoire de la multiplication, Olivier est cantonné dans la mise en œuvre de stratégies additives qui, plutôt que de refléter un raisonnement scalaire, illustrent une démarche de tâtonnement. C'est en fait un raisonnement vertical additif.

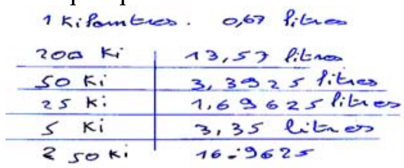
4.2.6. État final du profil cognitif

Performances, constats

En fin d'expérimentation, lors de l'étape V, Olivier résout les deux situations proposées en mettant en œuvre des stratégies fondées sur l'utilisation d'une division et d'une multiplication. Il utilise un schéma pour accompagner son raisonnement dans l'une des deux situations.

Interprétation

On constate donc une évolution positive d'Olivier. Cette évolution se caractérise plus particulièrement par le passage de l'utilisation de stratégies additives à l'utilisation d'une division et d'une multiplication. On remarque aussi l'utilisation d'un schéma de type symbolique qui est de fait un tableau de proportionnalité.



D'une certaine manière, ce tableau de proportionnalité représente la trace du raisonnement vertical additif fondé sur le tâtonnement constaté en début d'expérimentation. On peut donc faire l'hypothèse qu'Olivier est en train de concrétiser une rupture cognitive qui va lui permettre d'établir, à terme, le raisonnement proportionnel. Dans un premier temps, il a encore besoin de s'appuyer sur sa démarche première, qui tient du " bricolage " . Par la suite, il pourra le dépasser.

Ce comportement témoigne de la prégnance des procédures établies antérieurement qui ont pu s'avérer efficaces face à certaines situations, mais pas pour tous les problèmes de quatrième proportionnelle. Olivier a eu besoin de temps pour se rendre compte que les stratégies additives ne s'appliquent pas aisément à tous les cas.

5. Des réponses

On peut dire que plus les publics sont en échec scolaire et plus leur pensée est conservatrice, peu désireuse de se confronter à de nouveaux obstacles après tant d’années de difficultés scolaires. Cette expérience, par ses résultats, met en évidence que pour les élèves de l’AIS, il paraît important de mettre au travail et de réactiver les différents aspects de ce que Piaget a appelé la fonction symbolique (ceci sans faire référence aux stades piagétiens qui pourraient ramener degré ces élèves du second degré à un âge mental correspondant au premier.) Dans la même logique, on peut établir un lien avec les travaux de Feuerstein qui assimilent ces élèves à des " déprivés culturels ", c’est-à-dire des personnes qui n’ont pas suffisamment bénéficié de médiations dans leur plus jeune âge pour pouvoir appréhender la complexité du monde. Ces médiations reposent de fait sur la construction et l’utilisation d’outils sémiotiques permettant de comprendre les différents signes de l’environnement sociétal et de pouvoir entrer en communication avec lui.

Sur un plan très général, il paraît important, pour ces élèves, de favoriser l’expression symbolique à la fois sur le plan langagier et sur le plan graphique. Bien que le langagier soit transversal à toutes les activités de conceptualisation, on peut aussi souligner que l’association des différents types de symbolisation (langagières et non-langagières), le passage de l’un à l’autre (changement de registre) peuvent provoquer des ruptures de la pensée. Le changement de registre, qui implique une conversion cognitive d’un type de représentation à une autre, déstabilise, ce qui peut contribuer à débloquer les conceptualisations. Cette variation des accompagnements de symbolisation correspond à une multiplication des médiations proposées aux élèves en très grande difficulté scolaire afin de construire une représentation opératoire de la réalité.

Plus précisément, sur le plan graphique, les schématisations de tels ou tels problèmes peuvent, pour certains élèves, jouer un rôle important par rapport aux apprentissages. Pour ce faire, il semble pertinent, dans un premier temps, de mettre les apprenants en position d'étudier leurs propres schémas. L'objectif est de tendre, grâce à une étude comparative, vers l'expression de la pensée la plus abstraite possible, de passer de l'illustration au schéma en travaillant la relation signifié/signifiant. Par la suite, l'activité de schématisation permettra l'extériorisation d'une partie du " langage intérieur " et donc la prise de recul par rapport à la pensée. C'est en ce sens que ce type de démarche peut provoquer une prise de distance qui engendre un contrôle et une planification des actions permettant de dépasser les réactions impulsives fréquentes chez ces élèves. La schématisation induit un travail " métacognitif graphique " particulièrement bénéfique pour des élèves relevant du domaine de l'AIS. C'est en effet grâce à ce travail qu'ils prendront de la distance par rapport à l'aspect outil des concepts, de manière à établir des liens avec leur aspect objet, favorisant l'institutionnalisation du savoir.

Ainsi la schématisation du problème de proportionnalité permet de mettre en évidence les relations entre les divers éléments qui la constituent. C'est donc un travail sur la perception de la structure mathématique que l'élève met en œuvre. De plus, la qualité de sa schématisation va reposer sur la pertinence de la relation signifié/signifiant qu'il aura élaborée.

Toutefois il convient de souligner que ces accompagnements, outils au service de la pensée, ne sont pas généralisables à tout le groupe d'élèves, dont pourtant la caractéristique commune, dans l'expérimentation présente, est l'échec avéré en mathématiques. On s'aperçoit ainsi, à travers cette recherche, que certains n'ont pas besoin de passer par les schémas pour trouver la solution des problèmes proposées.

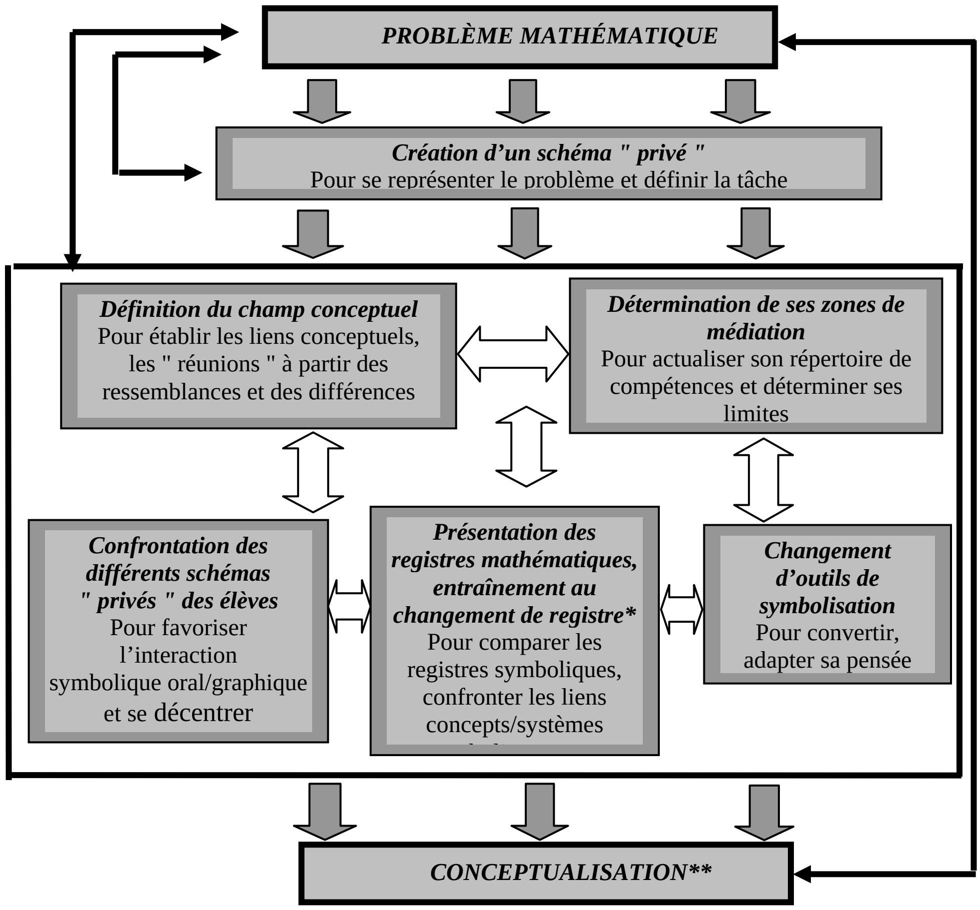
Il est donc nécessaire de garder " la bonne distance " par rapport à de tels outils car l'histoire de la réflexion didactique dans le domaine de l'AIS est caractérisée par des dérives fréquemment renouvelées, qui substituent aux objets d'enseignement des outils de médiation. C'est en ce sens qu'il est essentiel de ne pas faire de ces symbolisations un objet de savoir mais plutôt un objet de réflexion et un objet d'étude sémiologique pour le groupe. En effet, on a pu constater (étape III) combien les élèves ont participé activement à l'exposé des différentes possibilités de représentation visuelle des problèmes mathématiques, véritable support à l'argumentation et à la confrontation des points de vue. Enfin, pour les élèves utilisateurs de tels outils, il est nécessaire de veiller à ne pas créer de dépendance à leur égard.

6. Des perspectives

De ces travaux, on peut extraire un certain nombre d'axes de travail qui pourraient être des supports aux mises en œuvre de pratiques pédagogiques favorisant la réussite scolaire des élèves. Ces axes de travail peuvent servir, par exemple, à la construction d'une démarche spécifique et non linéaire au service de la conceptualisation de la proportionnalité. L'objectif de ces axes est de favoriser, pour chaque élève, la construction de diverses procédures adaptables et transférables à la plus grande variété possible de problèmes de proportionnalité. De plus, il convient de proposer des problèmes qui permettent la construction de concepts et théorèmes en acte qui sont les fondements du développement des procédures.

Un certain nombre des axes présentés dans le schéma ci-dessous correspondent aux transferts, tout à fait volontaires, d'une partie des réflexions de cette recherche à la réalité de la classe. C'est donc une démarche qui a pour objectif de reproduire en classe les réflexions didactiques et psychologiques de la recherche, malgré les difficultés scolaires rencontrées par les élèves de SEGPA.

6.1. Une démarche d'accompagnement par la symbolisation



* Dans le registre arithmétique, utilisation du schéma de type tableau fléché pour établir la relation quaternaire dans deux espaces de mesure.
** La conceptualisation est en jeu tout au long de la démarche ; ici il s'agit d'un état de conceptualisation supérieur à l'état initial.

BIBLIOGRAPHIE

ADAM M., 1999, *Les schémas - Un langage transdisciplinaire*, Paris, L'Harmattan.

BAKHTINE M., 1977, première édition 1929 *Le marxisme et la philosophie du langage*, Paris, Les Éditions de Minuit.

BELMAS P., *Apprentissage de la proportionnalité et symbolisations chez des élèves en échec scolaire*,Thèse de doctorat, Université Paris V.

BELMAS P., HAMEAU C., PLANCHON H., ROUX M.-O., VERGNAUD G., 1997, Symboliser les mathématiques, *Journal des Instituteurs*, n°3, 61-76.

BELMAS P., GILLIG J.-M., LESAIN-DELEBARRE J.-M., MÈGE-COURTEIX M.-G., 1997, Difficulté et handicap : le droit à la différence, *Journal des Instituteurs*, n°4, 62-76.

BROUSSEAU G., 1998, *Théorie des situations didactiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage.

BRUNER J.S., 1983, Le rôle de l'interaction de tutelle dans la résolution de problème, *in* : *Savoir dire, savoir faire*, Paris, Presses Universitaires de France.

CHEVALLARD Y., 1989, Le concept de rapport au savoir - Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel, *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, Université Joseph Fourier, Grenoble I, 1988-1989, 211-236.

COSSETTE C., 1985, *Les images démaquillées*, Montréal, Riguil.

DENIS M., 1979, *Les images mentales*, Paris, Presses Universitaires de France.

DUPUIS C., PLUVINAGE F., 1981, La proportionnalité et son utilisation, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 2, 165-212.

DUVAL R., 1999, Conversion et articulation des représentations analogiques, *Séminaires de recherche*, IUFM Nord Pas-de- Calais.

FEHR J., 2000, *Saussure entre linguistique et sémiologie*, Paris, Presses Universitaires de France.

FEUERSTEIN R., 1994, L'expérience d'apprentissage médiatisé, *in* Bentolila A. (Ed.), *Les entretiens Nathan : enseigner, apprendre, comprendre*, Paris, Nathan, 205-219.

KAPUT J., 1985, *Multiplicative word problems and intensive quantities : An integrated software response*, Harvard Graduate School of Education, Educational Technology Center.

LEMOIGNE J.L., 1999, Préface , *in* : Adam M., *Les schémas - un langage transdisciplinaire*, Paris, L'Harmattan.

LEVAIN J.P. 1997, *Faire des maths autrement, développement cognitif et proportionnalité,* Paris, L'Harmattan.

MERRI M., 1995, *L'analyse de la tâche et l'analyse des protocoles : résolution de problèmes multiplicatifs par des stagiaires de la formation professionnelle dans une problème d'entretien,* Thèse de doctorat d'État, Université Paris V.

PLAISANCE E., 1985, *L'échec scolaire, nouveaux débats, nouvelles approches sociologiques*, Paris, Éditions du CNRS.

REVAULT D'ALLONNES G., 1920, Le mécanisme de la pensée : I Les schèmes mentaux, *Revue philosophique*, XC, 161-202.

RICHARD J.F., Pointreau S., 1988, Problématique de l'analyse des protocoles individuels d'observations comportementales, *in* : Caverni J.P., Bastien C., MENDELSON P., TIBERGHIEN G., *Psychologie cognitive : modèles et méthodes*, Presses Universitaires de Grenoble.

VERGNAUD G., 1990, La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 10, n°2.3, 133-170.

VERGNAUD, G., 2000, Récopé M., De Revault d'Allonnes à une théorie du schème aujourd'hui, *Psychologie Française*, n°45-1, 35-50.

VYGOTSKI L.S., 1985 deuxième édition, pour la traduction française de F. Sève**,** *Pensée et langage* , Paris, Éditions Sociales/Messidor.

VYGOTSKI L.S., 1995, Psychisme, conscience, inconscient (1930), *Société française*, n°51, 37-52.