GUY NOËL

POUR UNE APPROCHE TGF DANS LES LOGICIELS DIDACTIQUES

Abstract. The revelation of the importance of the role of semiotic representation registers has been an educational achievement of recent years. This article reviews some standard usage educational software by examining which registers are employed. It puts forward reflections on what could be a new generation of software, which explicitly takes charge of several registers and the conversions between them.

Résumé. La mise en évidence du rôle des registres de représentation sémiotique est un des acquis de la didactique de ces dernières années. Cet article passe en revue quelques logiciels didactiques d'usage courant en examinant quels registres y sont mis en œuvre. Il émet quelques réflexions sur ce que pourrait être une nouvelle génération de logiciels prenant explicitement en charge plusieurs registres et les conversions entre eux.

Mots-Clés *:* Registre, représentation sémiotique, logiciel, didacticiel.

1. Rappels : les registres de représentation sémiotique

Dans un article fondateur (Duval 1993), Raymond Duval mentionne le rôle fondamental joué par les *représentations sémiotiques*[1] dans l'activité cognitive et notamment dans :

- le développement des représentations mentales,
- la conceptualisation et la mise en œuvre des concepts,
- la production de connaissances.

Chaque concept mathématique peut faire l'objet de plusieurs représentations sémiotiques différentes. Ainsi, outre la description dans la langue naturelle, une fonction de I, R dans I, R peut être représentée notamment

- par une expression symbolique permettant le calcul de la valeur d'une variable dépendante y à partir de celle d'une variable indépendante x,
- par un tableau, c'est-à-dire une liste de couples de nombres,
- par une courbe d'un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé,
- …

[1] Les mots en italique dans ce premier paragraphe sont définis avec précision dans (Duval, 1993.)

Annales de didactique et sciences cognitives, volume 8, p. 233 – 254.

On dit selon le cas que la représentation de la fonction est effectuée dans le *registre* des formules, celui des tableaux ou celui des graphiques. Les fonctions ne sont évidemment pas les seuls objets mathématiques à pouvoir être représentés dans ces registres ou dans des registres très proches. Aussi, prendrons-nous ces expressions dans un sens très large, à préciser en fonction de la nature des objets mathématiques que l'on désire manipuler.

Un objet mathématique n'est manipulable qu'à travers une de ses représentations. Comme le précise Duval, si la première fonction d'un registre de représentation sémiotique est de permettre la représentation d'objets, sa seconde fonction est de permettre de leur appliquer des opérations variées, de les manipuler. Duval parle de *traitement*.

Les différentes représentations d'un objet déterminé ne sont pas susceptibles des mêmes traitements. Par exemple calculer la dérivée d'une fonction est relativement aisé dans le registre symbolique, beaucoup plus flou dans le registre graphique et extrêmement hasardeux dans le registre des tableaux.

Une telle constatation amène à considérer comme indispensable de pouvoir non seulement utiliser des représentations différentes d'un concept donné, mais aussi de pouvoir les coordonner en procédant à des *conversions* d'une représentation dans une autre. La coordination de plusieurs registres de représentation est un des facteurs qui permettent la conceptualisation et est donc une condition sine qua non de la *production des connaissances*. Duval estime que tout concept mathématique devrait pouvoir être l'objet de représentations coordonnées dans au moins deux registres différents pour être valablement maîtrisé. Pluvinage (2002) ajoute que tout apprentissage mathématique suppose une interaction de plusieurs programmes de traitement. S'il est nécessaire de coordonner plusieurs registres de représentation, Pluvinage mentionne aussi le principe de séparation d'après lequel il est tout aussi nécessaire, lors d'un apprentissage de proposer des présentations ne mobilisant qu'un seul registre.

On notera que la conversion de la représentation d'une fonction du registre symbolique vers le registre des tableaux soulève de nombreux problèmes. Certes, construire un tableau de valeurs d'une fonction n'est pas très compliqué. Mais une infinité de tableaux de valeurs peuvent être associés à une fonction donnée. Le choix du, ou des, tableau(x) à construire dépend des questions que l'on se pose, des propriétés que l'on veut mettre en évidence, des problèmes que l'on veut résoudre, nous pourrions dire du contexte.

De plus, la tabulation d'une fonction est une discrétisation et entraîne des modifications aux niveaux des images mentales et des méthodes de travail. Ces remarques nous renvoient aux *cadres* introduits et étudiés par Régine Douady. A l'occasion de la tabulation d'une fonction, on passe du cadre des fonctions à celui des suites numériques. Douady, (1986), estime qu'une activité de résolution de problème est facilitée si l'élève-chercheur est à même d'exprimer son problème dans au moins deux cadres différents et de changer de cadre opportunément (voir aussi Bodin et Capponi 1996, Harel et Trgalova 1996, …)

Former des concepts et résoudre des problèmes étant les deux buts principaux, et interdépendants, de tout enseignement de mathématique, on conçoit que les changements de cadres et /ou de registres aient retenu l'attention des chercheurs. Certains ont mis en évidence des situations où on peut vérifier que certaines conversions d'un registre dans un autre sont accompagnées d'un changement de cadre, pas toujours explicité. Il peut alors arriver que la conversion et/ou sa réciproque conduisent à l'apparition *d'obstacles cognitifs*.

M. Bakar et D. Tall (1992) ainsi que F. Hitt-Espinosa (1998) mentionnent les difficultés rencontrées aussi bien dans un groupe d'élèves anglais (pour Bakar et Tall) que dans un groupe d'enseignants mexicains (pour Hitt-Espinoza) à l'occasion d'exercices portant sur la reconnaissance visuelle d'une fonction. Des courbes sont présentées aux personnes testées. Certaines sont les graphes de fonctions, d'autres non. Certaines ont des équations cartésiennes connues, d'autres non.

Pour les courbes dont l'équation est inconnue, le traitement se déroule uniquement dans le registre graphique. Les non-fonctions sont généralement bien reconnues. Par contre, certains graphes fort irréguliers de fonctions sont rejetés : « graphs are usually smooth », « too complicated » (Bakar et Tall, 1992.) L'image mentale associée aux fonctions est en fait celle d'une fonction continue, monotone par morceaux (et encore, avec peu de morceaux !) Les élèves travaillent ainsi dans un sous-cadre de celui des fonctions.

Pour les courbes dont l'équation est connue, des interférences entre les registres symbolique et graphique interviennent, qui induisent des erreurs si la coordination entre les deux registres est faible. Lorsqu'une courbe familière, donnée par une équation cartésienne bien connue, est soumise aux participants à une enquête, un nombre important d'entre eux, n'hésitent pas à affirmer que cette courbe est le graphe d'une fonction alors que ce n'est pas toujours le cas. Ainsi, dans l'enquête anglaise, 65% des membres d'un groupe d'étudiants universitaires estiment qu'un cercle est le graphe d'une fonction.

Comme l'écrit Hitt-Espinoza, l'existence d'une expression algébrique associée à une courbe remplace la vérification géométrique (ligne verticale) et la définition de fonction.

L'erreur commise révèle ici l'oubli d'une contrainte du cadre d'origine (celui des fonctions.) Celui-ci est remplacé par un « sur-cadre » : celui des courbes ayant une équation de type $f(x,y)=0$. Cette analyse n'explique cependant pas tout. Par exemple il arrive fréquemment que le demi-cercle unité situé dans le demi-plan supérieur ne soit pas accepté comme le graphe d'une fonction car « the graph would continue, not just stop » (Bakar et Tall, 1992.) Cette fois, une contrainte supplémentaire est inopportunément introduite : une fonction doit être définie sur l'intégralité de I, R.

Dans les cas qui viennent d'être examinés, les changements de registres permettent de détecter l'existence chez certains élèves d'images mentales inadéquates par rapport au cadre utilisé. Ils montrent aussi que les cadres utilisés par les élèves ne sont pas stables. Selon les particularités de la situation considérée, des contraintes sont introduites ou au contraire éliminées.

En présence de telles situations, il apparaît qu'il serait utile d'expliciter le plus complètement possible, non seulement les traitements possibles dans un registre donné, et les conversions possibles entre deux registres, mais aussi le domaine de validité de ces traitements et de ces conversions. Duval (1993) mentionne aussi la nécessité d'identifier les *unités signifiantes* (les variables pertinentes) propres à chaque registre.

2. Le T-G-F mathématique

Pluvinage (2002) énumère toute une série de registres, certains étant en quelque sorte emboîtés les uns dans les autres :

- le registre de la langue naturelle, sous forme orale ou sous forme écrite ;
- le registre des nombres entiers et décimaux,
- le registre des nombres fractionnaires,
- le registre numérique généralise les deux précédents,
- le registre de la géométrie euclidienne plane,
- le registre de la géométrie « dynamique », c'est-à-dire celle qui est mise en œuvre par exemple dans Cabri-Géomètre,
- le registre du plan muni d'un repère, qui a des aspects numériques aussi bien que géométriques,
- le registre des tableaux.

Cette énumération n'est en rien limitative. Nous pourrions y adjoindre le registre des arbres ou celui --- plus général --- des graphes sagittaux. Et pourquoi pas des registres symboliques tels que celui défini par l'emploi d'un langage de programmation (Logo ou autre) ?

Dans la suite, nous regrouperons les divers registres en trois « familles » : celle des registres de **tableaux**, celle des registres **graphiques** et celle des registres symboliques ou de **formules**. C'est le T-G-F mathématique[2].

Précisons que par *formule*, nous entendons toute expression écrite dans un langage symbolique formalisé qui permet de définir un objet mathématique avec

---

[2] L'expression est de Nicolas Rouche.

précision. Ainsi, une équation et une expression algébrique sont des formules, mais aussi une procédure écrite dans un langage informatique.

Nous rangerons dans les *tableaux* les données qui sont strictement numériques : suites de nombres finies ou infinies, à un nombre quelconque d'indices. Un nombre tout seul est aussi un tableau (à une ligne et une colonne.)

Les *graphiques* comprendront les figures de la géométrie plane ou spatiale, mais aussi les diagrammes de toutes espèces : diagrammes sagittaux, arbres, organigrammes, diagrammes de Venn, etc. Les règles de production des graphiques sont souvent moins précises que celles des formules ou des tableaux.

On pourrait discuter à perte de vue sur la validité de ces définitions. Est-il raisonnable de considérer des tableaux de taille infinie ? Peuvent-ils même avoir une infinité d'indices ? Peut-on admettre comme formules des expressions récursives, etc. Partant du principe que les définitions précises viennent après coup, nous considérerons une telle discussion comme prématurée. Au surplus, nous nous placerons bientôt dans le cadre (?) de l'utilisation de logiciels où certaines de ces questions perdent leur pertinence.

Pour étudier l'ensemble des situations susceptibles de se présenter dans l'enseignement secondaire, les trois familles de registres TGF nous semblent constituer un minimum. Par ailleurs, les registres TGF sont suffisamment généraux pour la plupart des situations de l'enseignement secondaire.

Il est clair que, par ses aspects analytique et synthétique, la géométrie fait un usage important du registre des graphiques et de celui des formules. De plus le dessin effectif d'une courbe passe généralement par celui d'une approximation polygonale, donc par une discrétisation. On est là dans le registre des tableaux.

L'algèbre et la trigonométrie sont intimement associés à la géométrie et utilisent donc les mêmes registres. Quant à l'arithmétique, il suffira de citer le triangle de Pascal, la formule donnant le nombre de diviseurs d'un nombre ou la représentation graphique des treillis de diviseurs pour se convaincre qu'elle entre bien dans le schéma « T-G-F ».

Enfin, les probabilités et la statistique font visiblement une consommation intense de ces registres.

3. Du côté des logiciels

Dès l'apparition des micro-ordinateurs vers 1980, nombreux ont été les enseignants qui ont entrepris de rédiger des logiciels didactiques. Dans les premiers temps, il s'agissait de logiciels à objectifs limités, portant sur un point précis de matière. Certains d'entre eux comportaient des séquences d'animation non interactive, se situant dans la ligne des films mathématiques réalisés après 1940, par exemple par Jean-Louis Nicolet (Nicolet 1944.)

Mais ces logiciels étaient très souvent fermés, proposant inlassablement aux élèves les mêmes séquences. Nous ne traiterons ici que de logiciels ouverts, à vocation suffisamment large, c'est-à-dire susceptibles d'être utilisés dans des circonstances variées et avec des élèves d'âges très différents. Notre but n'étant pas de réaliser une étude exhaustive des logiciels existants (un colloque ne suffirait pas), nous nous limiterons aux logiciels les plus répandus en Belgique francophone.

Entre 1970 et 1980 ont commencé à apparaître des logiciels ambitieux, réalisés par des équipes pourvues parfois de moyens importants. Les plus utilisés actuellement sont vraisemblablement les *tableurs*, par exemple *Excel*, les logiciels de *géométrie dynamique*, dont *Cabri-Géomètre* est le prototype, des logiciels permettant le calcul symbolique, par exemple *Derive* ainsi que des langages de programmation : nous retiendrons *Logo.*

Ces quatre types de logiciels mettent à la disposition des élèves des micro-mondes (pour ce concept, voir Papert, 1981, ainsi que Balacheff, 1994 ou Balacheff et Kaput, 1996) susceptibles d'être étendus par l'élaboration de macros ou la définition de fonctions. Une telle possibilité est essentielle sur le plan didactique, en particulier dans le cadre d'une activité de résolution de problème. Elle ne résout cependant pas tous les problèmes.

Mais d'abord, demandons-nous quelle place ces logiciels réservent à d'éventuels changements de registres et/ou de cadres.

Du côté des cadres, la situation semble relativement simple. On peut sans doute munir un ordinateur d'une table établissant des relations entre des théories mathématiques distinctes, de façon à attirer l'attention de l'utilisateur sur des possibilités de transfert. Mais il y a loin de là à ce qu'un ordinateur réalise lui-même le transfert de l'expérience acquise dans un domaine mathématique à un autre, à ce qu'il détecte des raisonnements analogues. Et comment formaliser le concept d'image mentale, dont on connaît l'importance du rôle dans les changements de cadres ? Les logiciels actuels sont essentiellement capables d'aider les utilisateurs à opérer des traitements sur les données, ce qui s'effectue dans un registre fixé, et à procéder à certaines conversions dans des cas où la congruence entre registres est notable.

Nous nous limiterons donc à examiner les possibilités de quelques logiciels actuels en cette matière, tout en précisant qu'il ne nous sera pas possible d'entrer dans de nombreux détails. Une telle entreprise serait d'ailleurs vaine étant donné qu'à chaque mise sur le marché d'une nouvelle version d'un logiciel, ces possibilités peuvent être modifiées.

4. Des performances inégales

4.1. Logo

Conçu par Seymour Papert, *Logo* est un des plus anciens logiciels didactiques à avoir été réalisé. Il en existe de nombreuses versions, certaines disposant même d'un interface adapté à Windows (avec menus déroulants, boutons-poussoirs, etc.) Si *Logo* est avant tout connu par l'usage qui en est fait en *géométrie-tortue,* c'est d'abord un langage de programmation universel, dérivé du *Lisp*, un peu lourd et assez lent, mais qui peut en principe être utilisé à n'importe quelles fins et qui, par certains aspects, se rapproche des langages « orientés objet », un concept bien postérieur au travail de Papert. Cela étant dit, il est surtout raisonnable d'utiliser *Logo* pour son point fort : l'apprentissage de la géométrie. Il s'agit essentiellement d'une géométrie locale. Abelson et di Sessa (1981) exploitent cette propriété pour faire émerger des concepts de géométrie différentielle des surfaces.

Du point de vue des changements de registres, *Logo* nous intéresse en ce qu'il demande à l'enfant de s'identifier parfois à la tortue, parfois au pilote de la tortue. Lorsqu'il mime les mouvements qu'il veut voir réalisés par la tortue, l'enfant établit une connexion directe entre lui-même et le registre graphique dans lequel les dessins sont ensuite réalisés. De cette façon, à travers un « couplage entre une représentation sémiotique et une représentation non sémiotique » (Duval 1993), il construit une véritable géométrie naturelle. (On aimerait connaître le points de vue de spécialistes de la psycho-motricité à ce sujet.) Lorsqu'il pilote la tortue au clavier, éventuellement en rédigeant de petites procédures, l'enfant utilise nécessairement un registre symbolique. La simple pression de la touche Enter lui permet de confronter les deux registres. De plus, la possibilité d'exécuter la même procédure plusieurs fois, en attribuant des valeurs différentes à un paramètre, rend possible d'explorer les propriétés d'une famille de figures.

En enchaînant des procédures simples, *Logo* permet la réalisation de figures assez complexes. Cependant les objets et propriétés accessibles à travers *Logo* relèvent finalement d'un sous-cadre assez particulier du cadre de la géométrie euclidienne plane. C'est sans doute ce qui explique que l'emploi de *Logo* ne soit pas plus important dans les classes.

5. Cabri-Géomètre

A l'inverse de *Logo*, l'emploi de *Cabri*[3] s'est étendu assez rapidement. C'est essentiellement dû à la capacité d'animation de *Cabri* qui permet à peu de frais de réaliser le programme de Nicolet (1944) : *faire voir la vérité avant de rechercher*

[3] Nous disposons de *Cabri II Version 1.0 MS-Windows.*

une démonstration. Ici, l'élève interagit en direct avec la représentation graphique sans avoir besoin d'utiliser un registre symbolique. Les possibilités d'animation, manuelle ou automatique, de *Cabri* installent un registre graphique d'une nature nouvelle : celui de la géométrie dynamique. Dans ce registre, un objet donné, par exemple un triangle, représente en réalité la classe de tous les objets en lesquels il peut être déformé, dans notre exemple, tous les triangles. L'idée d'objet « quelconque » prend ainsi son sens véritable. Laborde et Capponi (1994) parlent à ce sujet d'extension du *domaine de fonctionnement* (du registre de la géométrie euclidienne plane.)

Si le registre de la géométrie dynamique est, et de loin, le point fort de *Cabri*, des registres non graphiques sont également présents par l'intermédiaire de la géométrie « en coordonnées » ou de tableaux numériques. Ces aspects restent néanmoins quelque peu marginaux. *Cabri* est également pourvu d'un langage symbolique utilisé pour enregistrer les figures et les macros, mais ce langage n'est pas documenté et n'est pas destiné à l'utilisateur.

6. Excel

Excel[4] permet des manipulations importantes dans le registre des tableaux et utilise à cet effet un langage symbolique. Comme dans *Logo*, la coordination du registre symbolique et du registre des tableaux est immédiate. Cependant les formules ayant servi à construire une feuille ne sont visibles qu'une à la fois, ce qui limite l'emploi du registre symbolique. Dans *Excel*, les cellules jouent le rôle de variables au sens informatique du terme, les unes indépendantes, les autres dépendantes. Les fonctions primitives du langage, ainsi que les macros définies par l'utilisateur sont les éléments utilisés pour définir les variables dépendantes. Par la distinction nette entre variable et fonction, le registre symbolique de *Excel* est assez différent d'un registre algébrique usuel.

Excel permet aussi des représentations graphiques limitées, particulièrement adaptées au cadre statistique, mais qui peuvent également être utilisables en géométrie analytique du plan ou de l'espace. On imaginerait cependant mal un cours de géométrie euclidienne traditionnelle dont les figures seraient toutes réalisées avec *Excel*.

Les points forts de *Excel* sont d'une part la possibilité de réaliser des calculs itératifs par simple recopiage de la formule définissant une cellule vers des cellules voisines, d'autre part la présentation en tableau qui permet d'avoir une vue globale, synthétique, de certaines situations.

Excel est un des logiciels qui mettent en œuvre le plus de registres différents. Il reste néanmoins centré sur le registre numérique. On rêve d'un tableur dans

---

[4] Notre version est *Excel 97-SR1*.

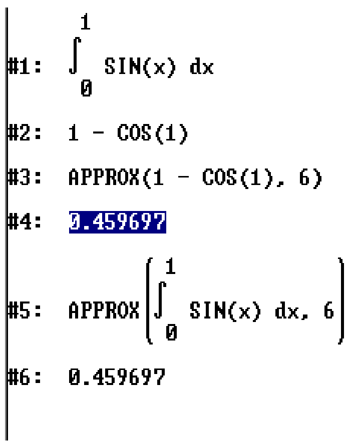
lequel les cellules pourraient être occupées par des expressions algébriques auxquelles on pourrait appliquer des calculs symboliques tels qu'on en trouve actuellement dans les logiciels scientifiques et qui, de plus, pourraient d'un simple clic être représentées graphiquement.

7. Derive

A priori, *Derive*[5] est un logiciel à vocation scientifique, plutôt que didactique. Il suffit pour s'en convaincre de parcourir les sujets traités dans la bibliothèque de macros (fichiers .mth) qui accompagne le logiciel. C'est également sensible à travers la conception de l'interface et la présentation des opérations sous la forme d'une liste d'expressions où manquent les expressions introduites par l'utilisateur si celui-ci a immédiatement actionné le bouton Simplify.

On apprécierait également qu'une modification apportée à une ligne soit immédiatement répercutée sur les lignes suivantes. Au lieu de cela, la ligne modifiée, et toutes celles qui en dépendent doivent être recopiées à la fin de la liste.

Ajoutons encore que l'on est parfois agacé par le manque de convivialité dû au nombre de manipulations à effectuer pour obtenir le résultat souhaité. On peut ainsi s'« emmêler les pinceaux » même dans des situations qui devraient être simples. Considérons par exemple la liste suivante :



La ligne #1 est introduite par l'utilisateur qui veut connaître une valeur approchée de l'intégrale. La ligne #2 est obtenue en appliquant Simplify:Basic à #1. C'est logique : on a oublié de mentionner qu'on désire une valeur approchée. Mais en appliquant Simplify Approx à #2, on obtient #3! Enfin, #4 résulte de Simplify :Basic appliqué à #3. Les deux lignes suivantes montrent un chemin plus court : appliquer d'abord Simplify:Approx à #1, puis Simplify:Basic à #5. On continue de se demander pourquoi Simplify:Approx ne passe pas directement de #1 à #6.

[5] Nous nous référons ici à *Derive for Windows*, version 4.04

Autre exemple : pour calculer une valeur particulière d'un polynôme (pour $x=1$ par exemple), on utilise normalement la boîte de dialogue associée au bouton Substitute. Il est à conseiller d'en sortir en utilisant le bouton Simplify au lieu de OK sans quoi $3.x^2$ est remplacé tout simplement par 3.1^2. Pour l'emploi dans une classe, on pourrait souhaiter un procédé plus direct. Cela obligerait les concepteurs du logiciel à distinguer le processus de calcul d'une valeur numérique et celui de substitution d'une variable par une expression.

L'expérience réalisée par Mouradi et Zaki (2001) montre qu'en effet les étudiants sont parfois désorientés par des réponses inattendues du logiciel, et notamment des points d'interrogation dont la signification n'est pas explicitée. Elle a permis aussi --- et c'est plus important car indépendant des particularités techniques du logiciel utilisé --- de mettre en évidence une tendance à utiliser des traitements portant sur une expression algébrique complète (traitement que les auteurs qualifient de « synthétique ») plutôt que sur les composantes de cette expression (auquel cas le traitement serait dit « analytique ».)

Si nous examinons à présent la question des registres de représentation sémiotique utilisés par *Derive*, on constate immédiatement leur variété : les trois familles TGF sont en effet représentées. On pourrait s'attendre à ce que, mis en présence d'une question relative à une fonction d'une variable réelle, les étudiants s'empressent de passer dans le registre graphique en demandant au logiciel de dessiner le graphe de cette fonction. Manquant de l'expérience de l'ordinateur, les étudiants de Mouradi et Zaki n'ont pas eu ce réflexe. Nous ne pouvons en déduire qu'une chose, à savoir que l'utilisation des technologies nouvelles n'entraîne pas immédiatement une modification en profondeur du comportement des étudiants. Dans un premier temps, ceux-ci n'utilisent le nouvel outil que comme une aide pour réaliser les mêmes démarches que dans un environnement papier-crayon. Ajoutons qu'il n'y a aucune raison pour que les enseignants eux-mêmes se comportent différemment. Un temps important est donc nécessaire avant que l'on puisse réellement évaluer l'impact des nouvelles technologies sur la formation des conceptions et sur les procédures des étudiants (de tous âges.)

On remarque aussi que l'utilisation de *Derive* fait intervenir au moins deux registres symboliques différents : un registre linéaire dans lequel toute formule tient sur une ligne (une fraction s'écrit 2/3), et un autre registre multilinéaire (une fraction s'étend sur trois lignes.)

La conversion entre ces deux registres est suffisamment simple pour pouvoir être réalisée par une machine. Elle est suffisamment compliquée pour poser de vrais problèmes aux élèves du début du secondaire. L'enquête (DIDIREM, 1995) menée par une équipe composée de M. Artigue, M. Abboud, J.-P. Drouhard et J.-B. Lagrange, le montre bien.

L'exemple suivant, extrait de (DIDIREM, 1995) est probant: pour obtenir l'affichage ci-contre, qui s'étale sur plusieurs lignes, l'utilisateur doit entrer au clavier l'expression linéaire *(1+2/(3+4/(5+x)))/(6/(7+8/(9+x))+10).*

$$\frac{1 + \dfrac{2}{3 + \dfrac{4}{5 + x}}}{\dfrac{6}{7 + \dfrac{8}{9 + x}} + 10}$$

Les problèmes dus aux règles de priorité des opérations, à l'apparition et à la disparition de parenthèses ont amené les auteurs à analyser la complexité réelle de conversions de ce type, en la distinguant soigneusement de la complexité apparente, basée sur la perception visuelle, et à conseiller un choix d'exercices tenant compte de cette complexité réelle.

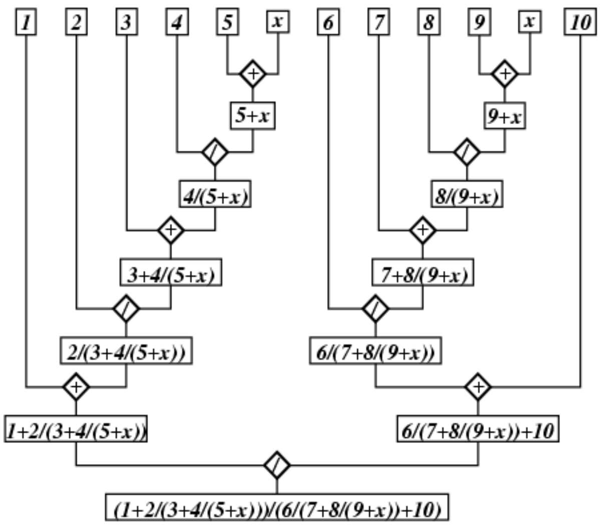
8. Des lacunes

La (trop) brève description que nous venons de faire des logiciels d'usage courant ne saurait être complète si nous ne signalions pas des domaines qui nous semblent y être insuffisamment présents ainsi que des registres pourtant susceptibles d'être utiles, mais qui n'y sont pas mis à la disposition des utilisateurs.

8.1. Le registre des graphes sagittaux

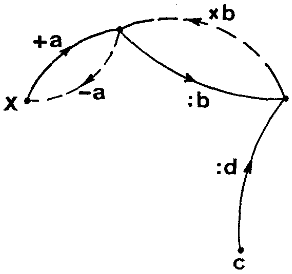
Revenons d'abord sur la conversion entre le registre symbolique linéaire et un registre symbolique multilinéaire dont il a été question à la fin du paragraphe précédent. Le registre (graphique) des arbres pourrait utilement servir d'intermédiaire.

Les expressions mentionnées plus haut peuvent en effet être également représentées par un arbre, lequel peut être lu de bas en haut comme de haut en bas. La lecture de haut en bas indique dans quel ordre les opérations sont effectuées, la lecture de bas en haut correspond à une analyse de l'expression algébrique.



81.

$$\boxed{\frac{a+x}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow x = ?}$$



On part de x ⎫
puis ⎬ pour aboutir en un même point!
on part de c ⎭

On réalise le trajet de c vers x que l'on traduit

$$\Rightarrow \frac{cb}{d} - a = x$$

L'emploi de graphes sagittaux comme support pour le raisonnement n'est pas nouveau. Introduit à l'époque des mathématiques dites « modernes », c'est peut-être un des bébés qui ont été jetés avec l'eau du bain. Le petit fascicule (introuvable aujourd'hui) d'Emile Ridiaux (1969), qui relate des activités réalisées avec des élèves de 12 ans de l'enseignement technique, reste une petite merveille quand on le considère du point de vue de la conversion entre le registre symbolique et celui des graphes. En voici un extrait :

Nous reparlerons des graphes sagittaux à propos des probabilités.

8.2. L'arithmétique

L'arithmétique n'est pas totalement disparue des programmes de l'enseignement secondaire. Elle n'est pas non plus totalement absente de notre échantillon de logiciels. Indirectement elle est présente dans *Logo* et *Cabri* : l'analyse de dessins de polygones réguliers étoilés mène à des calculs de pgcd et ppcm. Dans *Excel,* nous avons trouvé les fonctions Ent (partie entière) et Mod (reste de la division euclidienne.) Dans *Derive*, on trouve ces deux mêmes fonctions (bien que Ent devienne Floor) ainsi que Ceiling (le compagnon obligé de Floor), GCD (calcul du pgcd), LCM (calcul du ppcm) et Prime (test de primalité.) C'est tout, et c'est bien maigre : aucun outil de factorisation d'un nombre, aucune fonction pouvant aider dans des situations du genre de celles qu'on manipule au début du secondaire. Demandons-nous par exemple comment avec *Derive* et *Excel*, calculer la somme des chiffres d'un nombre.

Avec *Excel*, nous plaçons le nombre donné dans la cellule A_1. On définit ensuite la cellule B_n comme $Mod(A_{n-1},10)$, puis A_n comme $(A_{n-1}-B_n)/10$. Il reste à additionner les éléments de la colonne *B*.

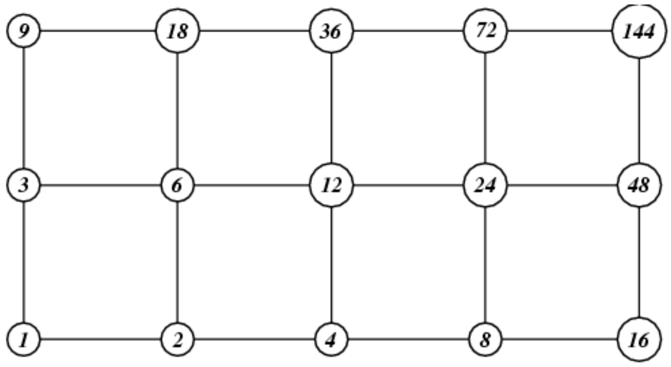
	A	B
1	456789	
2	45678	9
3	4567	8
4	456	7
5	45	6
6	4	5
7	0	4
8		
9		
10		39
11		

Avec *Derive*, nous n'avons pu trouver plus simple que le petit programme que voici :

```
#1:  CHIF(n) := MOD(n, 10)

                 n - CHIF(n)
#2:  QUO10(n) := ───────────
                     10

#3:  SUITEQUO(n) := APPROX(ITERATES(QUO10(x), x, n, LOG(n, 10)))

#4:  SUITECHIF(n) := VECTOR(CHIF(ELEMENT(SUITEQUO(n), i)), i, 1, 1 + LOG(n, 10))

#5:  SOMCHIF(n) := APPROX(SUITECHIF(n)) · APPROX(VECTOR(1, i, 1, 1 + LOG(n, 10)))

#6:  SOMCHIF(657)

#7:  18
```

Vous aurez remarqué que nous utilisons exactement la même méthode dans les deux cas. Pour autant que cette méthode soit réellement la meilleure, l'emploi du registre symbolique de *Derive* semble peu opportun, surtout avec de jeunes élèves. Que dire, sinon que nous trouvons ici la confirmation de ce que *Derive* n'est pas vraiment conçu pour le calcul numérique et que *Excel* est limité à ce calcul. Et qu'aucun des deux ne possède une primitive aussi simple que « somme des chiffres d'un nombre ».

Un sujet capital en arithmétique est la factorisation. La représentation graphique du treillis des diviseurs d'un nombre est possible (et peut être très utile) tant que ce nombre n'admet pas plus de 4 facteurs premiers distincts. Voici par exemple le treillis des diviseurs de 144 :

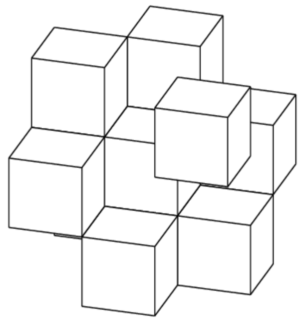


Ce graphique permet de repérer aisément le pgcd et le ppcm de deux éléments du treillis. En assimilant la multiplication par un facteur premier à un déplacement (une translation) sur le treillis, on fait apparaître les règles des exposants. En prolongeant le treillis vers la gauche et/ou vers le bas, on étend l'étude aux nombres rationnels et aux exposants négatifs.

8.3. La géométrie de l'espace

N'importe quel logiciel de dessin géométrique plan permet de réaliser des figures spatiales … à condition de connaître les règles de représentation en

La figure ci-contre montre un ensemble connexe de cubes situés à trois niveaux, ainsi qu'un cube isolé. Pouvez-vous affirmer avec certitude si celui-ci est à un des trois niveaux (et lequel) ou s'il est situé entre deux niveaux ?



perspective. Il existe heureusement des logiciels qui réalisent directement des représentations d'objets spatiaux, notamment de polyèdres. On attend de ces logiciels qu'ils mettent à la disposition de l'utilisateur des registres graphiques dont le domaine de fonctionnement soit particulièrement étendu. Selon les circonstances, on peut en effet souhaiter représenter des objets spatiaux en perspective cavalière, en projection orthogonale sur un plan ou en perspective centrale (ou linéaire.) Il est important aussi de pouvoir faire varier dynamiquement les paramètres de ces représentations, de manière à donner l'impression que l'objet représenté tourne sur lui-même. Comme dans la vie courante, c'est le mouvement qui permet de « voir dans l'espace ».

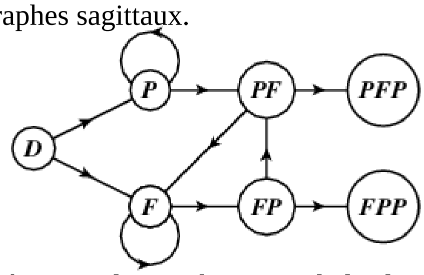
Une représentation statique plane d'un objet spatial est nécessairement ambiguë puisque tout point du plan représente nécessairement une infinité de points de l'espace.

8.4. Les probabilités

Excel et Derive permettent à l'utilisateur de modéliser des situations probabilistes, via l'utilisation de la fonction Random. On peut ainsi simuler différentes expériences aléatoires, généralement, mais pas uniquement, dans le domaine discret, dessiner des distributions d'échantillonnages, et les comparer à des distributions théoriques. Dupuis et Rousset (1998) ont montré que ces activités élémentaires, allant jusqu'à la détermination de probabilités conditionnelles, sont grandement facilitées lorsqu'on traduit les situations dans le registre des arbres, et/ou celui des tableaux. Malheureusement *Excel* et *Derive* ne donnent pas accès au registre des arbres.

Aller plus loin pourrait consister par exemple en l'étude de situations se modélisant en chaînes de Markov finies, comme le préconisait déjà Arthur Engel en 1975. Ces situations sont particulièrement intéressantes car leur maîtrise s'appuie généralement sur le tracé de graphes de flux et fait intervenir des concepts et techniques issus des probabilités, mais aussi de l'algèbre. Elles sont de ce fait riches en changements de cadres et de registres. Nous retrouvons ici l'utilité de disposer de logiciels permettant le tracé de graphes sagittaux.

Deux personnes A et B jouent à pile ou face jusqu'à ce que les résultats de trois lancers consécutifs soient PFP ou FPP. Dans le premier cas, A gagne, dans le second B gagne. Quelle est la probabilité de gain de chacun ?



La modélisation du problème amène à tracer le graphe sagittal de droite. Jouer une partie revient à déplacer un pion sur ce graphe, en démarrant en *D* et en tenant compte de ce que chaque transition, représentée par une flèche, a une probabilité de 0,5 (nous supposons la pièce parfaitement symétrique.) Passer du registre de la langue naturelle au registre des graphes sagittaux est la partie difficile de la modélisation. On effectue ensuite une seconde conversion vers le registre algébrique en introduisant des inconnues : on note x, y, z, t, u les probabilités pour que le pion finisse par arriver en *PFP* quand il est respectivement en *D, P, PF, F* ou *FP*. En utilisant alors la formule des probabilités totales, on écrit un système d'équations linéaires en x, y, z, t, u. La valeur de l'inconnue x est la probabilité de gain de A.

9. Une nouvelle génération de logiciels ?

Il est temps de conclure en explicitant quelques idées qui pourraient sous-tendre la réalisation d'une nouvelle génération de logiciels didactiques.

9.1. Du côté des caractéristiques générales

Souhaitons d'abord que soient harmonisées les différences purement techniques entre les différents logiciels utilisés dans les classes. Le fait que chaque changement de logiciel entraîne l'apprentissage du fonctionnement d'un nouvel interface et de nouvelles conventions est un obstacle important à la diffusion de ces nouvelles méthodes. Un seul logiciel, couvrant tous les besoins, constituerait l'outil « idéal ». C'est sans doute irréalisable. Le minimum que l'on peut demander est que les interfaces soient proches et que chaque logiciel puisse charger les fichiers de résultats constitués à l'aide des autres.

Un logiciel didactique doit mettre un certain nombre d'outils à la disposition des utilisateurs. A l'instar de certains des logiciels que nous avons brièvement évoqués, il devrait être *extensible et rétractile*.

Extensible : L'utilisateur doit pouvoir définir et sauvegarder des « macros » qu'il pourra réutiliser soit séparément soit au sein d'autres procédures. Il peut ainsi constituer progressivement sa propre bibliothèque de procédures. Une macro définie dans un registre donné devra être utilisable dans d'autres registres congruents.

Rétractile : Laborde et Capponi (1994) ont montré l'intérêt pédagogique des situations de « jeux sur les menus » consistant en le retrait (momentané) de certaines fonctions d'un menu en vue de placer l'élève dans une situation d'apprentissage nouvelle. Pour beaucoup d'élèves, il en résulte un enrichissement des images mentales et une meilleure conceptualisation.

La nécessaire rétroaction : Comme dans *Cabri* et *Excel*, il est indispensable de pouvoir à tout moment modifier un des éléments de base introduits antérieurement, le logiciel modifiant en conséquence les éléments qui en dépendent dans les différents registres utilisés. De cette manière, des conjectures peuvent être évaluées expérimentalement. L'importance de cette caractéristique est suffisamment connue pour que nous ne devions pas nous y attarder.

Des modes de fonctionnement différents : Un logiciel didactique pourrait aussi prévoir deux modes de fonctionnement différents selon que l'élève se trouve en situation d'apprentissage ou en situation de résolution de problème (bien que la distinction entre ces deux types de situation soit loin d'être toujours claire.)

En mode « résolution de problème », le logiciel doit avoir un caractère ouvert : l'utilisateur le contrôle entièrement.

Lors d'un apprentissage, il peut parfois être utile que le logiciel perde un peu de son caractère ouvert pour proposer à l'élève une séquence didactique conçue en vue d'introduire un nouveau concept.

Lors de l'introduction du concept d'intégrale d'une fonction, une séquence didactique va présenter à l'élève une suite de fonctions en escalier approchant la fonction donnée et calculer la suite correspondante des approximations de l'intégrale. Au cours de cette séquence, l'élève perd un peu de son contrôle de l'ordinateur: il n'a plus que le choix de la fonction à intégrer et du nombre d'approximations à réaliser. On attend de lui qu'il observe le processus de convergence dans les registres graphique et numérique, sans avoir programmé lui-même ce processus, ce travail de programmation risquant de détourner son attention de l'objectif poursuivi.

On comprend que lors de l'apprentissage du concept d'intégrale, la présence au menu d'un article fournissant directement la valeur de l'intégrale serait au mieux inutile, au pire nuisible (si l'élève considère que cette fonctionnalité le dispense de comprendre ce qu'est une intégrale.) Par contre, dès que le concept est maîtrisé, il serait absurde d'infliger la même séquence didactique à l'élève qui a besoin de la valeur d'une intégrale à l'occasion d'une résolution de problème. Une fonction toute faite est alors bienvenue.

On pourrait donc demander aux logiciels scolaires de pouvoir fonctionner selon deux modes : un mode « apprentissage » et un mode « scientifique ». Dans le mode apprentissage, l'élève n'aurait pas accès à toutes les fonctionnalités relatives aux concepts en cours d'étude. L'idéal serait un logiciel didactique « à géométrie variable » qui, au fil des années, se transforme progressivement (par adjonction de modules) en un logiciel scientifique.

9.2. Du côté des registres

Dans les paragraphes précédents, nous avons rencontré toute une série de registres relevant des trois familles TGF. Il est inutile d'en reprendre l'énumération ici. Notre conviction est que tout, ou presque tout, domaine des mathématiques est susceptible de représentation dans au moins un registre de chacune de ces trois familles. Les logiciels devraient donc systématiquement les prévoir et les mettre à disposition des utilisateurs, en veillant à ce que les conversions et l'indispensable coordination puissent être assurées aisément.

En particulier, afin que les registres soient bien explicités, il semble nécessaire que chacun d'entre eux dispose à l'écran d'une fenêtre propre.

En mode scientifique, ainsi que lors de nombreuses activités d'apprentissage, il est nécessaire que toute modification aux données effectuée dans un registre soit automatiquement répercutée dans les autres. Par exemple, si on considère la coordination entre un registre symbolique-géométrique et un registre graphique en géométrie euclidienne plane, on imagine deux fenêtres voisines. Dans la première, on peut définir un point (par exemple) par une instruction du type « Point A : (3,4) ». Automatiquement le point serait positionné dans la seconde. Si alors, à la souris on déplace le point *A*, les coordonnées affichées dans la fenêtre « symbolique » seraient ajustées. Cette fonctionnalité figure déjà dans *Cabri*, mais dans une seule fenêtre et suivant des principes différents : si dans la fenêtre graphique une droite *d* est définie comme étant la perpendiculaire à une droite *f* passant par le point *A*, ce que nous voulons voir apparaître dans la fenêtre symbolique-géométrique n'est pas l'équation de *d* (où la condition de perpendicularité est disparue), mais une expression du type « Droite *d* : Perp(*A*,*f*) » qui mentionne la dépendance de *d* par rapport à *A* et *f*. Si on veut disposer des équations, une troisième fenêtre pourrait être consacrée à un registre « symbolique-algébrique », mais la conversion du registre symbolique-géométrique vers ce registre est accompagnée d'une perte d'informations.

Bien entendu, si l'activité d'apprentissage soumise aux élèves consiste précisément en la conversion d'un registre dans un autre, l'automatisme de la conversion doit pouvoir être déconnecté.

De même qu'il est utile de pouvoir limiter les articles apparaissant dans un menu, de même il peut être utile de limiter, voire d'interdire, l'accès en entrée à certains registres. Par exemple, pour éviter qu'un élève trace au jugé la tangente en un point à un cercle, pour l'obliger à mettre en œuvre ses connaissances géométriques, on peut par un procédé quelconque (cacher le curseur de la souris dans la fenêtre graphique, masquer les menus de cette fenêtre) obliger l'élève à utiliser le registre symbolique-géométrique.

La détection systématique des modifications induites dans la fenêtre associée à un registre par celles apportées à la fenêtre d'un autre permettrait d'après Duval (1993) de déterminer les unités *signifiantes* des représentations et de coordonner les deux registres.

La séparation systématique des registres en des fenêtres différentes doit aussi faciliter l'apprentissage des traitements spécifiques à chaque registre de représentation et par là la production de tâches dans des registres différents.

Une autre idée qui nous tient à cœur est de multiplier les possibilités d'appliquer des méthodes itératives qui permettent de ramener l'étude de phénomènes complexes à celle de processus simples. Par exemple, on ne voit pas pourquoi les principes d'un tableur ne pourraient être appliqués au registre des fonctions ou des expressions algébriques.

On sait que quels que soient les réels positifs x et x_0, la suite définie par récurrence par $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{x}{x_{n-1}})$ converge vers $\sqrt{x}$. Dans Excel, cette propriété est facile à illustrer pour une valeur numérique de x. Si on pouvait placer non des nombres mais des fonctions dans les cellules d'un tableur, pourquoi ne pourrait-on approcher de la même façon la fonction racine carrée ? Bien entendu, dans chaque cellule du tableur, un bouton permettrait d'obtenir la représentation graphique de la fonction située dans la cellule.

Voici un autre exemple issu de la géométrie :

Pour surveiller un champ carré de sommets a, b, c, d, un gardien effectue une ronde. Il part du poste de garde situé en un point p à l'intérieur du champ. Il se dirige en ligne droite vers le sommet a. Arrivé aux deux tiers du trajet, il oblique vers le sommet b, en marchant toujours en ligne droite. Il continue de la même façon: aux deux tiers du trajet vers b, il oblique vers c et aux deux tiers du trajet vers c, il oblique vers d. Où faut-il placer le point p pour que le point q, situé aux deux tiers du trajet vers d coïncide avec p et que le gardien soit ainsi revenu à son poste de garde ?

Le point *q* étant l'image de *p* par la composée de quatre homothéties de rapport 2/3, il n'est pas difficile avec un logiciel de géométrie dynamique de choisir un point *p* arbitrairement, de construire *q*, puis de déplacer *p* de manière à amener *p* et *q* à coïncider.

Si le logiciel permettait, après la construction de *q*, de redéfinir *p* comme étant *q*, un processus itératif serait enclenché qui convergerait (très rapidement) vers la solution du problème.

L'introduction de processus itératifs en géométrie pourrait se révéler une retombée positive importante de l'apparition d'une nouvelle génération de logiciels didactiques, mais il convient évidemment de rester prudent : des études doivent être effectuées en vue de déterminer l'utilité réelle et détecter les effets pervers possibles.

Si la coordination de plusieurs registres de représentation sémiotique joue un rôle important dans la conceptualisation, il n'est que logique que les logiciels didactiques proposent effectivement aux élèves le choix entre plusieurs registres. Les différences de tempérament des élèves y trouveront également leur compte, certains s'exprimant plus aisément dans un registre que dans un autre. Mais cela pose aussi de nouveaux problèmes aux didacticiens. Par exemple, même dans les cas où la conversion est immédiate, le micro-monde associé à un registre de géométrie dynamique a-t-il les mêmes potentialités, les mêmes caractéristiques, les mêmes domaines d'interprétation et de fonctionnement (Laborde, 1992) que celui qui est associé à un registre géométrique-symbolique ? *A priori*, tout porte à croire que non. Cependant, la meilleure conceptualisation qui résulterait de la possibilité d'effectuer aisément la conversion de l'un à l'autre pourrait modifier fondamentalement la situation. Seul l'usage pourra répondre à des questions de ce genre.

Un dernier mot : le meilleur des logiciels didactiques ne donnera que des résultats médiocres s'il est utilisé de façon inintelligente. Nous souhaitons que les logiciels permettent l'accès à un nombre important de registres différents. Les enseignants et les élèves ne doivent utiliser cette capacité qu'à bon escient et avec parcimonie sous peine de perdre la maîtrise de la situation en étant ensevelis sous une avalanche d'informations qui entraîne une dispersion de l'attention.

Il est clair que les logiciels didactiques continueront d'évoluer dans le futur. Il est tout aussi clair que les quelques idées présentées ci-dessus posent plus de problèmes qu'elles n'en résolvent. En cela, elles méritent d'être discutées, analysées et précisées. Si cela se produit, et même, si aucune de ces idées n'est finalement retenue, nous n'aurons pas perdu notre temps.

BIBLIOGRAPHIE

ABELSON H. and DISESSA A., *Turtle Geometry : The Computer as a Medium for Exploring Mathematics »,* MIT Press, Cambridge, MA, 1981.

BAKAR MdNor and TALL David, « Students' Mental Prototypes for Functions and Graphs », *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., 23, 39-50,* 1992.

BALACHEFF Nicolas, « Didactique et Intelligence artificielle », *Recherches en didactique des mathématiques, 14, (1-2), 9-42,* 1994.

BALACHEFF Nicolas and KAPUT James, « Computer-based Learning Environments in Mathematics », *in (Bishop 1996),* 469-501, 1996.

BISHOP Alan et al, *International Handbook of Mathematics Education,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.

BODIN Antoine et CAPPONI Bernard, « Junior Secondary School Practices », *in (Bishop 1996),* 565-614, 1996.

DOUADY, Régine, « Jeux de cadres et dialectique outil-objet », *Recherches en didactique des mathématiques, 7, (2), 5-31,* 1986.

DUPUIS Claire et ROUSSET-BERT Suzette, « De l'influence des représentations disponibles sur la résolution de problèmes élémentaires de probabilité et sur l'acquisition du concept d'indépendance », *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 6, 67-87,* 1998.

DUVAL Raymond, « Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée », *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5, 37-65,* 1993.

ENGEL Arthur, « The probabilistic abacus », *Educational Studies in Mathematics, 6, 1-22,* 1975.

ÉQUIPE DIDIREM, « Une recherche sur le logiciel Derive, rapport », *Cahier de DIDIREM,* numéro spécial n°3, 1995.

HAREL Guershon et TRGALOVA Jana, « Higher Mathematics Education », *in (Bishop 1996),* 675-700, 1996.

HITT-ESPINOSA Fernando, « Systèmes sémiotiques de représentation liés au concept de fonction », *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 6, 7-26,* 1998.

LABORDE Colette, « Enseigner la géométrie : permanence et révolutions », *in Actes du 7e congrès international sur l'enseignement des mathématiques*, Presses de l'Université Laval, Québec, 47-75, 1992.

LABORDE Colette et Capponi Bernard, « Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique », *Recherches en didactique des mathématiques, 14, (1.2), 165-210,* 1994.

MOURADI Mohammed et ZAKI Moncef, « Résolution d'un problème d'analyse à l'aide d'un logiciel de calcul formel », *Recherches en didactique des mathématiques, 21, (3),* p. 355-392, 2001.

NICOLET Jean-Louis, *Le dessin animé appliqué à l'enseignement des mathématiques et des sciences*, Scientifilm A. Colomb, Lausanne, 1944.

PAPERT Seymour, *Jaillissement de l'esprit*, Flammarion, Paris, 1981.

PLUVINAGE François, Expression et représentation, leur rôle dans les études sur l'enseignement mathématique, *Didactique des mathématiques, revue du Centre de Recherche en Education*, n° 22-23, p. 235 – 276, Publications de l'Université de Saint - Etienne, 2002.

RIDIAUX Emile *Transformation de formules par la méthode des graphes,* Wesmael-Charlier, Namur-Paris, 1969.