FERNANDO HITT

LE CARACTÈRE FONCTIONNEL DES REPRÉSENTATIONS

Abstract.

The study of mental representations was so important in the past, that it occulted the need for studying the semiotic representations from this perspective as well as the construction of concepts from that of problem solving. The study of the semiotic representations has allowed us a new approach on the construction of mathematical concepts. However, in our opinion, after the major importance given to the study of mental representations, another extreme consists in considering only the study of the role of semiotic representations. We need a balance in order to get satisfactory explanations on general processes of learning and on particular construction of mathematical concepts. In this article, we want to stress the functional character of the representations and especially to understand their role in the process of learning. So we focus our attention to the whole of the semiotic representations produced by an individual in situation of construction of a concept or in a problem solving situation.

Résumé.

Dans le passé, l'étude des représentations mentales avait une telle importance, qu'elle a occulté la nécessité de faire des études sur les représentations sémiotiques tant au point de vue de la construction de concepts que de la résolution de problèmes. L'étude des représentations sémiotiques nous a permis une nouvelle approche de la construction des concepts mathématiques. Cependant, à notre avis, après avoir donné une grande importance à l'étude des représentations mentales, on est passé à l'autre extrême en ne s'occupant plus que des représentations sémiotiques sans arriver à un équilibre qui apporte des explications satisfaisantes sur l'apprentissage en général et la construction de concepts mathématiques en particulier. Dans cet article, nous voulons mettre l'accent sur le caractère fonctionnel des représentations et nous voulons surtout comprendre leur rôle dans l'apprentissage en considérant le caractère indissociable de l'ensemble des représentations sémiotiques produites par un individu en situation de construction d'un concept ou de résolution d'un problème.

Mots clés : représentations, fonctions, variables, limites, connaissances conceptuelles, connaissance procédurales.

---

1. Introduction

L'analyse des recherches en psychologie cognitive des années 1960-1985, nous permet de dire que le domaine de référence pour la modélisation de la construction des concepts était l'organisation de la mémoire sémantique qui rend compte de la compréhension immédiate des discours en langue naturelle. Si nous prenons, par exemple, le travail de Skemp (1960, 1971) et celui de Richard (1998),

Annales de didactique et sciences cognitives, volume 8, p. 255 – 271.

ces travaux soulèvent plusieurs questions qui ne peuvent pas être complètement passées sous silence :

1) La construction des concepts mathématiques se fait-elle de la même manière que la construction des concepts scientifiques dans les domaines autres que les mathématiques ?
2) La construction des concepts mathématiques ou scientifiques se fait-elle de la même manière que ce que depuis Vygotski on appelle les « concepts quotidiens » ?
3) Peut-on considérer un codage utilisant une liste de symboles indépendants comme un système de signes qui peuvent remplir les différentes fonctions cognitives fondamentales.

Le matériel d'expérimentation utilisé par Skemp et Richard, ainsi que leurs formulations théoriques laisseraient penser que finalement ce sont les concepts quotidiens qui sont privilégiés dans leurs études et que l'activité sémiotique ne dépasse pas une activité de codage qui utilise une liste de signes ne formant pas entre eux un réel système qui permet des traitements spécifiques. Si tel est le cas, on ne peut pas en espérer grand chose pour la didactique des mathématiques.

Skemp (1978) a signalé l'existence de deux types de compréhension, la compréhension instrumentale (liée aux algorithmes) et la compréhension relationnelle (liée aux concepts). Pendant les années qui suivirent, les chercheurs, pour expliquer la construction des concepts mathématiques, ont cherché à distinguer les différents types de connaissances liés aux différents processus de compréhension.

Resnick et Ford (1981), parlent de la connaissance conceptuelle et de la connaissance procédurale :

> *This process of building new relationships is essential to learning. It means that mathematical knowledge –both the procedural knowledge of how to carry out mathematical manipulations and the conceptual knowledge of mathematical concepts and relationships– is always at least partly « invented » by each individual learner.* (pp. 249-250).

Hiebert et Lefevre (1986) ont aussi suivi cette approche et ils ont donné des précisions sur chacun des types de connaissance (Idem, pp. 3-6). Selon Hiebert et Lefevre, la connaissance conceptuelle donne un sens à la connaissance procédurale qui, à son tour, amplifiera la connaissance conceptuelle. Mais Hiebert et Lefevre n'indiquent jamais comment naît la connaissance conceptuelle de base. C'est-à-dire que pour eux, il y a déjà quelque chose de construit. Là où le problème se complique, c'est lorsque cette connaissance de base, n'est pas adéquate. Que faut-il faire alors ? Nous discuterons de ceci plus avant.

Conne (1992), fait une distinction entre savoir et connaissance et dans sa définition il mentionne que la connaissance permet au sujet d'agir sur la représentation :

Lorsque le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui, le lien inducteur de la situation sur cette connaissance devient inversible, il sait. Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance utile, utilisable, dans ce sens qu'elle permet au sujet d'agir sur la représentation. (p. 225)

Un point que nous tenons à soulever ici concerne le peu d'importance que donnent certains auteurs au rôle des représentations sémiotiques, qui pourtant semblent primordiales dans la construction des concepts mathématiques.

Duval, conscient du rôle que jouent les représentations sémiotiques dans la construction des concepts mathématiques, introduit sa théorie de la sémiosis et de la noésis (1993, 1995). Voici comment il définit la sémiosis et la noésis :

Si on appelle sémiosis l'appréhension ou la production d'une représentation sémiotique, et noésis les actes cognitifs comme l'appréhension conceptuelle d'un objet,…L'analyse des problèmes de l'apprentissage des mathématiques et des obstacles auxquels les élèves se heurtent régulièrement conduit à reconnaître derrière la seconde hypothèse une loi fondamentale du fonctionnement cognitif de la pensée : ***il n'y a pas de noésis sans sémiosis****, c'est-à-dire sans le recours à une pluralité au moins potentielle de systèmes sémiotiques, recours qui implique leur coordination pour le sujet lui-même.* (1995, pp. 2-5)

L'approche théorique de Duval nous apporte des éléments qui nous obligent à considérer le rôle important joué par les représentations pour générer un concept. Dans ce cadre théorique, les tâches de conversion entre les diverses représentations sont fondamentales pour la construction d'un concept.

Duval précise clairement qu'il y a des différences dans la construction d'un concept selon que l'on se place dans une perspective liée à la vie quotidienne ou dans une perspective liée aux concepts mathématiques. Il signale en particulier un point important, qui semble trivial une fois énoncé, mais qui est un point capital de sa recherche et qui est le suivant : Les objets mathématiques ne sont accessibles qu'à travers des représentations sémiotiques ce qui les différencie des concepts de la vie quotidienne dans laquelle les représentations d'un concept sont des objets physiques.

En se centrant sur chacun des registres de représentation (voir Duval, 1995, pp. 21-22), Duval analyse les caractéristiques propres au registre qui sont importantes pour comprendre la construction d'un concept. Par exemple, dans le registre graphique, et en relation avec les fonctions linéaires, il introduit la notion de « variable visuelle » et il montre qu'il faut apprendre à discriminer les variables visuelles pertinentes pour l'analyse d'un graphique afin d'être capable de reconnaître ou de « voir » rapidement le type d'expression algébrique correspondant. Ce que nous voulons dire par-là, c'est qu'un étudiant qui est entrain de construire un concept, comme, par exemple, celui de droite, aura de grandes difficultés d'apprentissage si le professeur ne lui demande que de construire des représentations graphiques à partir d'expressions algébriques et en calculant les coordonnées de quelques points seulement. De plus, cette façon de procéder, point par point, sera un obstacle lorsqu'il s'agira de lire un graphique et de trouver l'expression algébrique qui convient. En effet, pour effectuer le processus inverse, il est nécessaire que l'étudiant ait développé une habileté globale à voir le comportement des droites sous leur forme graphique ce qui est justement en lien avec les variables visuelles dont parle Duval (1988).

Pour Duval, les tâches de conversion entre les diverses représentations sémiotiques d'un objet mathématique sont fondamentales pour la construction d'un concept. Le rôle qu'il a donné à ces représentations est d'une grande importance. D'une part, il montre la nécessité d'utiliser des représentations sémiotiques dans l'activité mathématique pour effectuer n'importe quel traitement et, d'autre part, il montre la variété hétérogène des représentations sémiotiques mobilisées dans les démarches mathématiques. Cette hétérogénéité fait à la fois la richesse de la pensée mathématique et la difficulté de son apprentissage. Ces difficultés apparaissent, par exemple, dans les problèmes de conversion de représentation et de coordination de registres. La prise en compte des différents types de représentations sémiotiques caractérise le champ des phénomènes à étudier. Si on se contente de parler simplement de représentations sémiotiques, sans souligner leur hétérogénéité, on manque ce qui est le phénomène essentiel.

Implicitement, dans son travail, il traite de la construction des concepts pour lesquels les représentations institutionnelles (celles qu'utilisent les professeurs, les manuels ou celles qui apparaissent à l'écran d'un ordinateur) sont prépondérantes dans la construction de ce concept. Par contre, nous constatons que lors de la construction des concepts, les représentations produites par les étudiants sont loin d'être celles qui sont attendues par le professeur (représentations institutionnelles). De plus, nous croyons que ces représentations sémiotiques spontanées jouent un rôle crucial dans la construction des connaissances.

Brun (1994), en référence au travail de Vergnaud (1991), a signalé le caractère fonctionnel des représentations :

> *Si l'on suit le fonctionnement des schèmes au fur et à mesure du développement de l'enfant, l'apparition de la fonction sémiotique à un moment de ce développement fournit des éléments nouveaux à ce fonctionnement ; ce sont les représentations du type sémiotique. Les sujets peuvent s'appuyer sur des signifiants qu'ils peuvent distinguer des signifiés. Les représentations sémiotiques jouent donc un rôle éminemment fonctionnel, même si elles restent subordonnées aux opérations.* (p. 75).

Notre approche souligne, elle aussi, le caractère fonctionnel de certaines représentations sémiotiques spontanées qui surgissent lors de la construction d'un concept ou lors de la résolution d'un problème.

2. Le caractère fonctionnel des représentations

Afin de centrer notre propos, nous voudrions montrer plusieurs exemples qui nous permettront de mieux préciser notre position. Le premier sera tiré d'une étude colombienne dans laquelle les mêmes problèmes étaient proposés à des élèves de différents niveaux (Benitez et Santos, 2000.) Ainsi, deux élèves Soath, 11 ans, et Álvaro, 14 ans, répondirent au problème suivant :

> *Dans une course, Manuel a compté 25 véhicules pendant que Carlos comptait 70 roues. Les véhicules étaient soit des taxis soit des motos. Combien de taxis et combien de motos y avait-il dans la course ?*

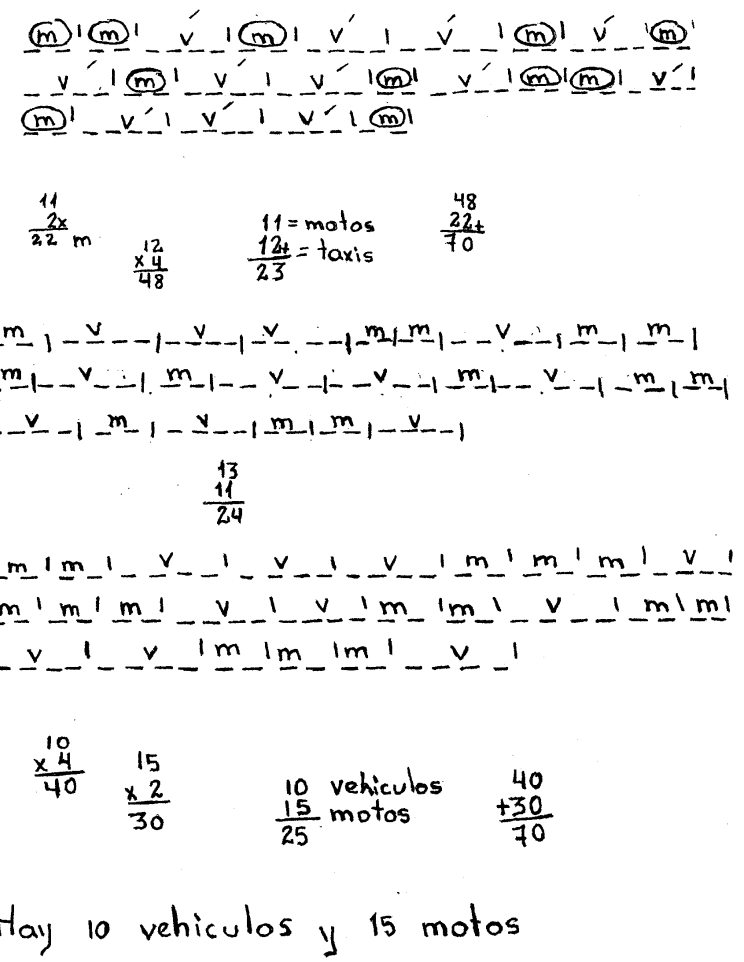


Figure 1: La réponse de Soath.

On peut voir que Soath a fait des productions sémiotiques auxiliaires (figurales) par rapport à l'énoncé. Elle a représenté à la fois les vingt-cinq véhicules (séparation par des traits verticaux) et les soixante-dix roues (traits horizontaux). Ainsi, ses représentations sémiotiques peuvent remplir une fonction particulière : servir d'objet pour effectuer des opérations de comptage comme on compte des objets. En effet, nous pouvons constater qu'elle a cherché à contrôler le nombre total de roues (70) et qu'elle a seulement compté après le nombre de motocyclettes et de taxis. Il y a eu une coordination entre le passage de la représentation figurale à la représentation numérique qui prend en considérations les autres données du problème. Les représentations mobilisées par Soath ont une caractéristique fonctionnelle et sont un élément essentiel pour donner une cohérence à sa production numérique pour atteindre le résultat.

Cet exemple nous montre clairement l'importance que revêt une analyse globale des représentations sémiotiques dans laquelle il nous semble essentiel de ne pas séparer la production de celles-ci de la structure interne qui les a fait naître. Dans la démarche développée par Soath on peut voir une harmonie entre sa connaissance et son adaptation à la nouvelle situation. La lecture de la solution nous montre des étapes auxquelles nous pourrions associer « un sentiment de malaise » qui entraîne une action pour rétablir l'équilibre et pour passer à une autre étape dans laquelle le conflit est dépassé. En fait, Soath éprouve à nouveau, par la suite, une situation de conflit cognitif qui la pousse à nouveau à rétablir l'équilibre et, enfin, à trouver la solution (voir Figure 2).

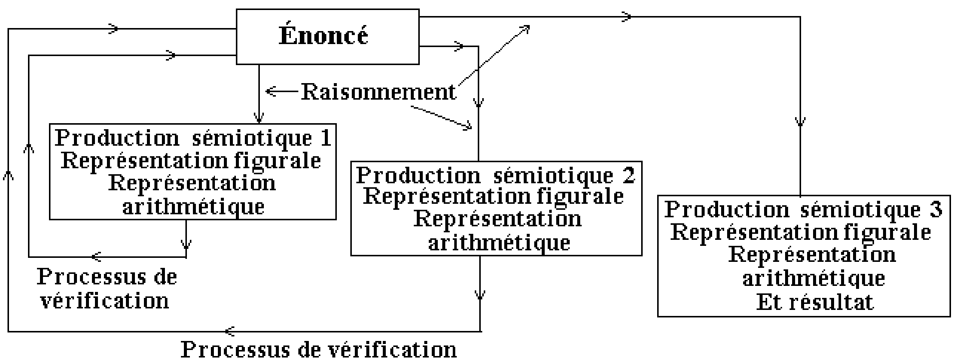


Figure 2

3. Les difficultés rencontrées lors de l’assignation de variables

Analysons maintenant la solution d’Álvaro. (qui termine son premier cours d’algèbre, voir la Figure 3.)

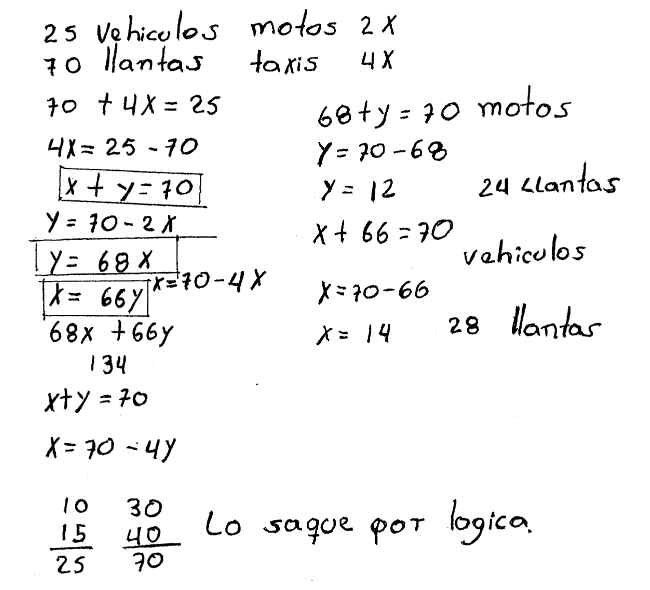


Figure 3: La “solution” d'Àlvaro.

En premier lieu, il est important de faire remarquer que le raisonnement initial fait par Álvaro au début du problème est correct si nous l’analysons de façon isolée. C’est-à-dire qu’il réfléchit sur le nombre de roues des motos et il le représente par 2x. Ici, “x” représente le nombre de motos. Si nous considérons d’autre part le nombre de roues des taxis, la notation adoptée par Álvaro est 4x. Dans ce cas, “x” désigne le nombre de taxis. Le problème survient au moment où, pour poser son équation algébrique, Álvaro mélange les deux inconnues, c’est-à-dire utilise “x” pour désigner à la fois le nombre de taxis et le nombre de motos. Il est probable que l’utilisation exclusive du registre algébrique, et des manipulations peu efficaces des expressions algébriques, ont fait qu’Àlvaro n’a pas trouvé la solution[1]. Àlvaro est revenu plusieurs fois sur sa démarche, mais sa conception de l’« inconnue », qui joue plusieurs rôles dans ses représentations sémiotiques, l’a conduit à commettre des erreurs. Le manque de relations unifiantes entre l’idée et

[1] Dans l’entrevue que les chercheurs ont eu avec Àlvaro, celui-ci a dit qu’il avait copié la réponse.

la désignation des inconnus est bien décrit par plusieurs auteurs (voir, par exemple, Radford, 1996).

Selon Duval, nous pourrions expliquer l'inadéquations de certaines des représentations sémiotiques produites par Álvaro comme un manque de coordination entre les représentations. Nous pourrions même montrer avec précision l'endroit où Álvaro n'a pas pu réaliser un lien cohérent dans le traitement de ses expressions algébriques. Le fait qu'Álvaro recommence plusieurs fois le problème nous amène à penser qu'il éprouve, plusieurs fois au cours de sa démarche, des conflits intérieurs qui l'obligent à reconsidérer son processus. Comme il n'a pas utilisé des représentations sémiotiques figurales (par exemple) et qu'il s'est limité au registre algébrique cela ne lui ont pas permis de développer un processus cohérent menant à la solution de ce problème.

4. Difficultés liées à une conception de l'intégrale et aux processus algébriques

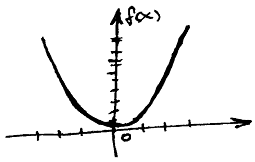
Dans l'exemple que nous allons présenter ci-dessous, il s'agit du cas d'un professeur de terminale à qui l'on avait demandé, lors d'une expérimentation, de choisir un sujet et de le développer comme s'il était entrain de préparer son cours de mathématiques. Il n'avait pas le droit de consulter de manuels ni de notes d'aucune sorte. Le professeur en question proposa l'activité suivante (voir Figure 4.)

L'étudiant devra appliquer le théorème fondamental du calcul (en établissant la relation entre la différentielle et l'intégrale.)
Nous pouvons dire que l'Intégrale est connue comme la primitive d'une Fonction donnée, cette fonction étant la Dérivée.
Par conséquent la Différentielle est une séquence de l'intégrale.
En analysant des exemples qui ont déjà été utilisés antérieurement. En introduisant la relation entre la dérivée et l'intégrale dans des problèmes qui se rapportent au calcul d'Aires d'une parabole, calcul de la vitesse d'un mobile, etc.

Exemple. Soit $f(x) = x^2$

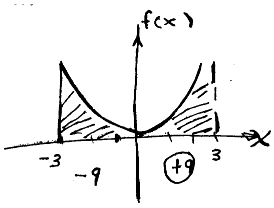
$f'(x) = 2x$ $dy/dx = 2x$ $dy = 2x\, dx$

Si nous traçons le graphique de la première fonction pour $-3 \le x \le 3$, $[-3, 3]$, nous trouvons que



Nous pouvons observer qu'il s'agit d'une parabole dont le sommet est à l'origine et qui est symétrique, la dérivée de cette fonction est 2x donc l'intégrale sera

$f(x) = \int 2x dx$ on pourra observer que l'Intervalle [-3, 3] pourra se subdiviser en sous-Intervalles de [-3, 0] à [0, 3] ; alors $\int_{-3}^{3} 2x\ dx = \int_{-3}^{0} 2x\ dx + \int_{0}^{3} 2x\ dx$ Pour cette raison, nous trouvons une série d'aires



$\int_{-3}^{3} 2x\ dx\ = x^2]_{-3}^{3} = [3^2] - [-3^2] = 9 - 9 = 0$. Alors

$$2\int_{-3}^{3} x\ dx = 2\int_{-3}^{0} x\ dx + 2\int_{0}^{3} x\ dx = x^2]_{-3}^{0} + x^2]_{0}^{3} = 0^2 - (-3)^2 + (3)^2 - (0)^2 = -9 + 9 = 0$$

C'est ce que nous voulions Démontrer. En trouvant une méthode pour Déterminer des intégrales plus complexes.

Figure 4 : Transcription fidèle de la préparation du professeur.

L'objectif visé par le professeur était : « la compréhension » du Théorème Fondamental du Calcul, nous ne savons pas pourquoi il l'appela ainsi[2], parce qu'en réalité il voulait illustrer la propriété suivante à l'aide d'un exemple :

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \int_{a}^{x} f(x)\, dx + \int_{x}^{b} f(x)\, dx; \quad pour\ \ x \in [a, b].$$

Il est clair que ce professeur a développé une idée intuitive du concept d'intégrale et que cette idée pourrait être résumée par : *« L'intégrale, c'est l'aire sous la courbe. »* Cette idée intuitive est fortement enracinée dans son esprit et tous les processus algébriques et graphiques doivent être en accord avec celle-ci. Pour cette raison, et afin de concilier le processus algébrique avec son idée géométrique, il est « obligé » de considérer que « l'aire sous la courbe du côté gauche de l'axe vertical est négative » (voir Figure 5.) Le professeur ne s'aperçoit pas que la fonction qu'il devrait tracer est la fonction *f(x)* = *2x*, à la place de *f(x)* = x^2. Comment ce professeur transmet-il le concept d'intégrale à ses étudiants ? La question reste posée puisque, comme nous l'avons déjà dit, il ne nous fut pas permis de l'interviewer et de filmer quelques-uns de ses cours.

[2] La direction de l'établissement dans lequel l'expérimentation s'est effectuée ne nous autorisa pas à connaître l'identité des professeurs, raison pour laquelle nous n'avons pas pu réaliser les entrevues prévues. Par conséquent, nous ne pouvons présenter que les résultats écrits par ces professeurs.

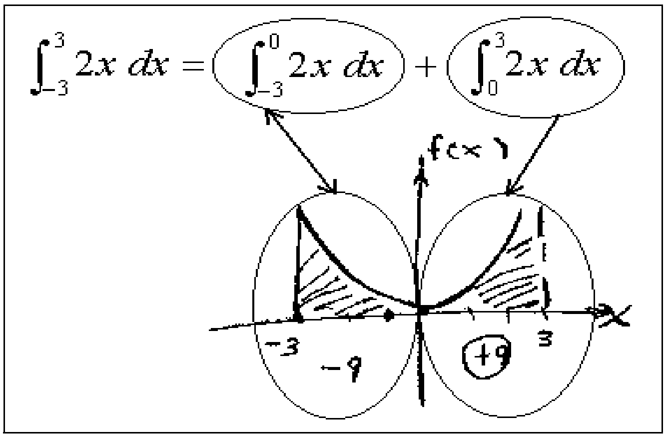


Figure 5

Dans la perspective de Hiebert et Lefevre, nous pouvons dire qu'il y a des connexions entre la connaissance conceptuelle et la connaissance procédurale du professeur. Alors, comment expliquer le raisonnement du professeur dans cette perspective ?

Dans la perspective de Duval, nous éprouvons aussi des difficultés à expliquer ce que le professeur a fait. En effet, il est capable de faire des conversions d'une représentation à une autre, mais sa conception de l'intégrale entraîne des liens erronés entre les représentations.

Ne trouvant de réponse satisfaisante ni dans la perspective de Hiebert et Lefevre, ni dans celle de Duval, nous aimerions essayer de trouver une explication du côté des représentations fonctionnelles. Pour ce faire, nous analyserons une expérience réalisée avec 18 professeurs de Terminale et de 1ère année de Génie, dans une approche coopérative. Nous allons décrire cette expérimentation ci dessous.

5. Les représentations fonctionnelles liées au concept de limite

Notre objectif est donc d'analyser, d'un point de vue fonctionnel, les productions sémiotiques produites par les professeurs de Terminale et de 1ère année de Génie qui suivaient un cours de maîtrise en enseignement des mathématiques. La méthodologie utilisée fut, comme indiqué ci –dessus, un apprentissage coopératif (Hagelgans et al., 1995) dans une approche d'ingénierie didactique (Artigue, 1995). En suivant cette approche méthodologique, six groupes de trois professeurs-étudiants chacun ont été formés, après une épreuve diagnostique.

Ces professeurs-étudiants ayant à enseigner le concept de limite à leurs étudiants, nous étions en droit de penser que ce sujet était connu, qu'ils avaient construit eux-mêmes le concept de limite et que leurs constructions conceptuelles devraient leur permettre de réaliser les 20 tâches que nous avions choisies. Des exemples de ces activités seront donnés plus loin.

Nous verrons par la suite, qu'en fait les professeurs-étudiants n'avaient pas construit le concept de limite et que c'est dans le cadre de l'expérimentation qu'ils l'ont construit et où nous avons pu vérifier notre hypothèse.

Pour construire le concept de limite, il faudra que les professeurs-étudiants construisent les concepts d'infini potentiel et celui d'infini actuel. De nombreuses recherches nous ont montré combien ce dernier concept est difficile à construire (par exemple, Cornu, 1981, 1991 ; Sierpinska, 1987, 1988). L'histoire des mathématiques nous a largement montré que les obstacles rencontrés lors de la construction du concept d'infini actuel sont d'ordre épistémologique (un obstacle épistémologique dans le sens de Bachelard, 1938). On trouvait déjà une idée en lien avec l'infini potentiel dans les paradoxes de Zénon (V^e siècle avant J.C.), mais il faudra attendre le travail de Bolzano (1817) sur la continuité d'une fonction pour trouver un changement de paradigme sur le concept d'infini (Grattan-Guinness, 1970). Les étapes importantes de ce changement furent la définition de la continuité d'une fonction en un point (Bolzano, 1817) et son livre « *Les paradoxes de l'infini* » (Bolzano, 1851). Avec Bolzano nous avons deux idées : Une idée intuitive de l'infini qui est celle de l'infini potentiel ; et une idée de voisinage qui est liée à l'infini actuel (pour une version plus large, voir Hitt à paraître).

Les tâches qui ont été choisies peuvent être séparées en deux parties : Les huit premières activités (empruntées à Hauchart et Rouche, 1987) ont été conçues pour faire émerger, de façon naturelle, une idée intuitive de l'infini (infini potentiel[3]). Les onze activités suivantes ont été conçues pour provoquer un conflit cognitif chez les professeurs-étudiants qui ne parvenaient pas à construire l'infini actuel. Les activités qui leur ont été proposées sont des calculs de suites et de séries tant convergentes que divergentes. En résumé, ce que nous voulions faire c'était de proposer des activités qui déséquilibreraient les professeurs-étudiants, ce qui entraînerait des discussions en petits groupes, et par la suite en grand groupe, au cours desquelles ils pourraient confronter leurs idées intuitives avec celles de leurs camarades. En d'autres termes, notre objectif était de créer un conflit cognitif (déséquilibre cognitif) chez les professeurs-étudiants et de provoquer ainsi une discussion riche qui permettrait d'entraîner une évolution de la pensée.

Dans ce qui suit, nous allons rapporter le contenu de certaines séances. Après l'éprouve diagnostique, voici la première activité proposée.

---

[3] « Kant (1790, § 26), dans sa *Critique du jugement*, fait une distinction entre l'infini potentiel (constructible) et l'infini actuel (non-constructible), c'est-à-dire que l'infini potentiel peut se concevoir à travers l'expérience (possibilité d'aller plus loin), par contre, l'infini actuel ne peut se construire qu'à travers la pensée. » (Hitt, à paraître).

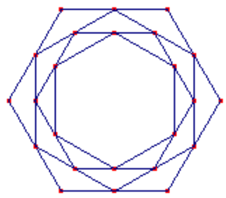
Dans un hexagone régulier, dessinez un autre hexagone régulier en joignant les points milieu de chacun des côtés de l'hexagone de départ (voir figure.) Recommencez la construction à partir du 2^e hexagone et ainsi de suite. Que deviennent les aires des hexagones ?	

Figure 6

Cette activité a permis aux professeurs-étudiants de s'exprimer librement sur la question de la limite. Nous avions eu bien soin d'établir, au préalable, une atmosphère propice à la discussion. Nous allons reproduire ci-dessous quelques extraits des échanges qui ont eu lieu.

Ainsi, Also dit :

Also : *Je n'ai jamais pensé que la limite était la valeur, j'ai toujours pensé que ça « s'approche » ou « que ça tend vers»…*

Plus loin, Also poursuit :

Also : *Le symbole d'égalité qui a été placé comme résultat d'une limite ne doit pas exister* $\underset{n\to\infty}{Lim}\ a_n = L$… *Je propose* $\underset{n\to\infty}{Lim}\ a_n \to L$.

Vatin demande alors à Also :

Vito : *Tu n'as jamais demandé à ton professeur pourquoi il plaçait le signe d'égalité à la place de tend vers* [$\underset{n\to\infty}{Lim}\ a_n \to L$] *?*

Also : *Non, parce que c'est probablement un questionnement personnel, quand on est dans cette situation on se pose la question, je le dis, je le dis pas, et parfois tu le gardes pour toi, non ? Et comme ici je peux poser la question alors je le dis.*

Unia intervient :

Unia : *La notation* $\underset{n\to\infty}{Lim}\ a_n \to L$ *est redondante.*

Je lui proposons alors la notation $Lim\, a_n \underset{n\to\infty}{\to} L$.

Unia : *La notation n'est ni formelle, ni élégante, contrairement à* $\underset{n\to\infty}{Lim}\ a_n = L$.

Les professeurs-étudiants dont les idées intuitives sur l'infini potentiel étaient très enracinées considéraient que la notation $Lim\, a_n \underset{n\to\infty}{\to} L$ était la notation adéquate.

Devant cette activité, Rado s'exprime ainsi :

Rado : *À la fin, on obtient un tout petit hexagone, dont l'aire est différente de zéro, et qui est tout près du centre de tous les hexagones, qui est un point.*

Ces professeurs-étudiants ont reçu un enseignement formel du concept de limite et, au cours des années, ils se sont lentement éloignés de la définition pour laisser la place à une conception intuitive de la limite. En résumé, nous pourrions dire qu'ils ont interprété la limite comme étant un « rapprochement », ce qui est une idée intuitive liée à l'infini potentiel.

Dans l'équipe d'Ale on note une très forte tendance à penser qu'un processus infini est, comme celui-ci l'exprime: *« un processus qui ne se termine jamais »*. Ainsi, par exemple, au sujet de la 1re activité, les conclusions de l'équipe, émises par Lino sont:

Lino : *L'aire devient aussi petite que l'on veut. Cependant, elle n'arrive jamais à zéro. Si nous supposons que c'est un processus infini il n'a pas de fin alors elle ne va jamais arriver à être nulle.*

Après quelques cours Lino s'interrogeait toujours :

Lino : *…j'ai cette ambivalence dans mon cerveau, je mets égal ou je mets…* [il a été interrompu par une professeure-étudiante].

Tout ceci nous amène à dire que la notation usuelle (institutionnalisée) de la limite ($\underset{n\to\infty}{Lim}\ a_n = L$) n'est pas acceptée par tous parce qu'elle ne représente pas l'image qu'ils se font de la limite.

Dans les discussions en grand groupe, Also et Ale ont commencé à utiliser des représentations graphiques pour communiquer leurs idées sur la convergence des suites. Tian, qui partageait le même type d'idées sur la limite qu'Also et Ale, a produit ce que l'on voit à la Figure 7 pour expliquer la limite à ses coéquipiers.

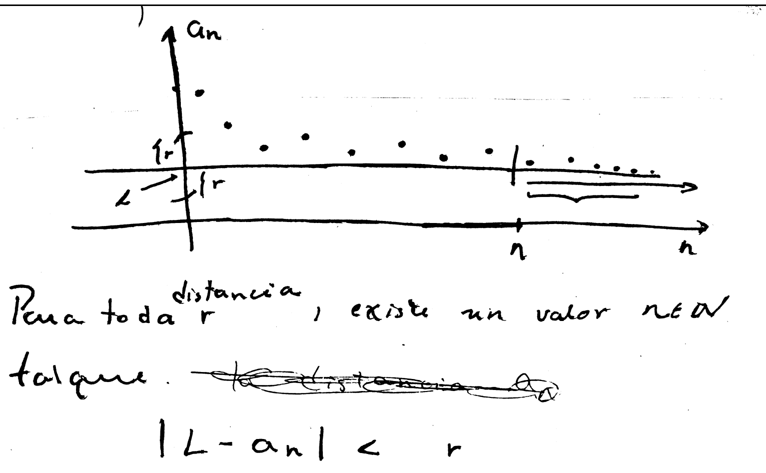


Figure 7

Si nous observons *exclusivement* le schéma ou si nous observons exclusivement ce qu'il a écrit sous le schéma, nous pourrions penser que sa compréhension de la limite est partielle. Par contre, si nous observons l'ensemble de ses différentes représentations et que nous le considérons comme un *tout indissociable*, nous pouvons dire que sa compréhension du concept de limite est cohérente (voir Figure 8).

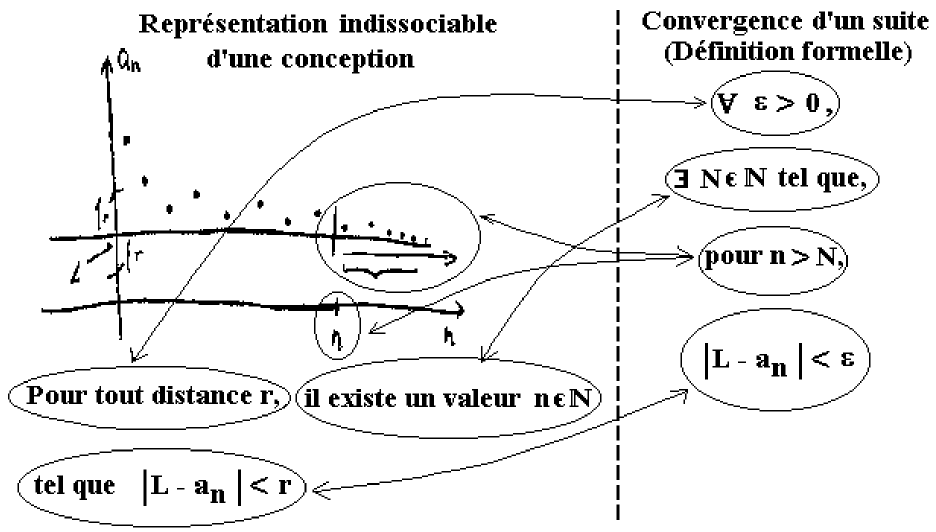


Figure 8

L'analyse de la production de Tian nous permet de voir une évolution entre l'idée de la limite qu'il avait et celle qu'il a exprimée dans la Figure 7. Nous pouvons affirmer que Trian manifeste une très grand cohérence dans sa conception de la limite, bien qu'il ne l'exprime pas de façon formelle (voir notre interprétation dans la Figure 8).

L'exemple que nous venons de vous rapporter pour soutenir notre point de vue montre bien que les représentations jouent un rôle fonctionnel dans la construction d'un concept.

Dans le cadre de notre expérimentation, les idées intuitives et la production de représentations sémiotiques non-institutionnalisées, ainsi que les discussions en équipe et en grand groupe, sont essentielles pour la construction de la connaissance. Les activités ont joué le rôle que nous leur avions attribué, à savoir, provoquer des conflits cognitifs chez les étudiants-professeurs. La Figure 9 ci-dessous, illustre, à notre avis, les étapes de la construction d'un concept.

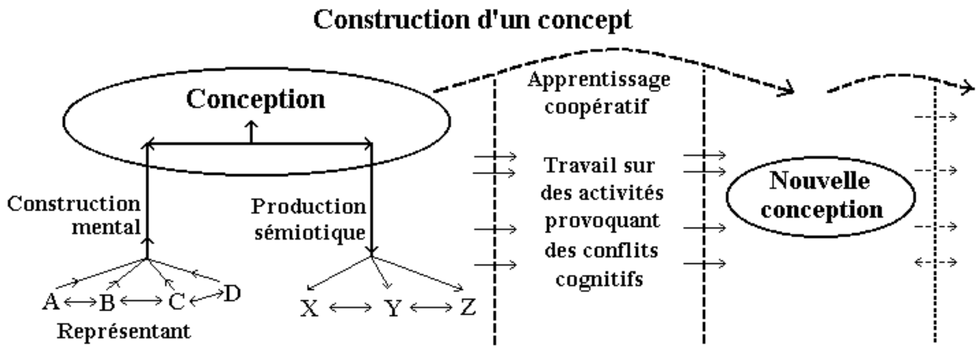


Figure 9

6. Conclusion

Nous avons voulu montrer à l'aide de plusieurs exemples en arithmétique, en algèbre et en calcul, l'importance des représentations sémiotiques et leur caractère fonctionnel.

Tout au long de l'analyse que nous avons faite nous avons cherché à comprendre le lien étroit, « fonctionnel » pourrions-nous dire, des représentations sémiotiques produites par des étudiants et qui permettent la construction d'un concept mathématique. Nous avons aussi voulu montrer combien il est important de considérer l'ensemble des différentes représentations produites par les étudiantes (par exemple celles de Soath ou celles de Tian) et qui montrent bien l'aspect indissociable des représentations pour exprimer une idée mathématique.

Pour obtenir des résultats intéressants, il est nécessaire de travailler dans une ambiance d'enseignement coopératif avec une méthodologie reliée a l'ingénierie didactique. En effet, les activités construites doivent provoquer des conflits cognitifs, engendrer des discussions entre les étudiants, d'abord en équipe et ensuite en grand groupe, pour faire émerger en premier lieu les représentations spontanées des étudiants et, en second lieu, permettre la construction des concepts mathématiques. Bien entendu, chaque étudiant doit aussi fournir un travail individuel entre les cours afin d'harmoniser les résultats du travail en équipe (et en grand groupe) et sa propre démarche.

Bibliographie

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gomez (Editor), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33-59). Grupo Editorial Iberoamérica.

Bachellard, G. (1938). *La Formation de L'Esprit Scientifique.* France : Librairie Philosophique J. Vrin. 10eme édition.

Bolzano B. (1991) *Las Paradojas del Infinito*. Colección MATHEMA, Traducción del original de 1851. México.

Benitez D., y Santos M. (200) El uso espontáneo de representaciones y la importancia de las estrategias metacognitivas para el entendimiento. En Hitt F. (Editor) *Experimentaciones en Educación Matemática en los Niveles Medio Superior y Universitario* (pp. 151-166). México: Cinvestav-IPN.

Brun J. (1994). Évolution des Rapports entre la Psychologie du Développement Cognitif et la Didactique des Mathématiques. En M. Artigue, R. Grass, C. Laborde et P. Tavignot (Eds.), *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France* (pp. 67-83). La Pensée Sauvage Éditions. France.

Conne F. (1992). Savoir et Connaissance dans la Perspective de la Transposition Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 12, no. 2.3 pp. 221-270.

Cornu B. (1981). Apprentissage de la notion de limite : modèles spontanés et modèles propres. *Proceedings PME-V, I,* 322-326. Grenoble, France.

Cornu B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 215-230). Kluwer Academic Publishers.

Duval R. (1988) Graphiques et équations: l'Articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1,* IREM de Strasbourg, 235-253.

Duval R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 5,* 37-65.

Duval Raymund (1995) Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Peter Lang, Suisse.

Grattan-Guinness I. (1970) *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemmann.* MIT Press.

Hagelgans N., Reynolds B., Schwingendorf K., Vidakovic D., Dubinsky E. Shahin M. and Wimbish J. (1995). A Practical Guide to Cooperative Learning in Collegiate Mathematics. MAA NOTES, Number 37. USA.

Hauchart C., et Rouche N. (1987). *Apprivoiser l'infini. Un enseignement des débuts de l'analyse*. GEM, CIACO Éditeur, Belgique.

Hiebert J. & Lefevre P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge the Case of Mathematics* (pp. 1-28). Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Hitt F. (À paraître). El concepto de infinito: Obstáculos en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En F. Filloy, F. Hitt, C. Imaz, A. Rivera, S. Ursini (Editores), *Matemática Educativa: Aspectos de la Investigación Actual* (pp. 79-100), Fondo de Cultura Económica, México.

Resnick L. et Ford W. (1981). *The Psychology of Mathematics for Instruction*. LEA, Hillsdale, New Jersey.

Skemp R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. Penguin Books.

Skemp R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, Vol. 26, no. 3, 9-15.

Sierpinska A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, *18*, 371-397.

Sierpinska A. (1988) Sur la relativité des erreurs. Proceedings of CIEAEM 39. Les Éditions de l'Université de Sherbrooke, Canada, pp. 70-87.