CARLOS ARMANDO CUEVAS VALLEJO et FRANÇOIS PLUVINAGE

LES PROJETS D'ACTION PRATIQUE, ELÉMENTS D'UNE INGÉNIERIE D'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Abstract. In this article we consider the basic elements of an enginery for the mathematics education at a post-elementary level (secondary and undergraduate.) Students activity referenced psychology, which we find in Piaget's studies, and theoretical formulations asserted by Dewey, Aebli, Claparède, Brousseau, Duval, lead to a didactical model directed toward a participative learning. We illustrate its feasibility by presenting examples of *practical action projects* which were actually experimented: staircases for studying slope in the Cartesian plane, design of a chair for introducing core concepts of descriptive statistics.

Résumé. Cet article envisage les fondements d'une ingénierie d'enseignement des mathématiques applicable à un niveau post-élémentaire (niveaux de l'enseignement du second degré et début de l'enseignement supérieur.) Les références à l'activité des élèves, empruntées notamment à la psychologie de l'intelligence de Jean Piaget et aux assertions théoriques énoncées par Dewey, Aebli, Claparède, Brousseau, Duval, conduisent à un modèle didactique orienté vers un enseignement à forme participative. Pour en montrer la faisabilité, nous envisageons des *projets d'action pratique* qui ont été effectivement expérimentés : les escaliers, pour l'acquisition du concept de pente d'une droite dans le plan repéré, la conception et la fabrication d'un siège, pour l'acquisition de concepts statistiques.

Mots clés : enseignement mathématique, action, participation, ingénierie éducative, modèle, tutoriel, registre d'expression, plan repéré, pente, statistique descriptive.

---

1. Introduction

Le débat entre les méthodes traditionnelles et les méthodes actives tend à laisser dans l'ombre une importante question : la parcellisation des tâches accomplies par les élèves. Qu'une atomisation du savoir et des savoir-faire puisse permettre à une forte proportion d'élèves d'acquérir de réelles compétences semble devoir être exclu. Nous verrons que la mise en pratique d'une forme *participative* d'enseignement oblige à s'interroger explicitement sur ce sujet. Dans cet article, après un bref rappel des méthodes qui ont principalement cours dans l'enseignement mathématique, en situant notamment l'*enseignement participatif*, nous dégageons quelques principes sur lesquels s'appuie l'élaboration de *projets d'action pratique* au service d'un tel enseignement. A cette fin, nous avons pu nous appuyer sur des références théoriques que nous indiquerons, ainsi que sur des expérimentations qui ont été réalisées au niveau de l'enseignement du second degré et au début de l'enseignement supérieur (dans le système éducatif mexicain : nivel medio superior et nivel superior.)

Annales de didactique et sciences cognitives, volume 8, p. 273 – 292.

2. Méthodes, traditionnelles et actives, enseignement participatif

« La didactique est l'art d'enseigner quelque chose à quelqu'un qui ne désire pas l'apprendre. »Phrase extraite d'une conférence de Guy Brousseau (CINVESTAV Mexico, 2000)

Pour nous permettre de situer notre ingénierie et avant d'entreprendre un examen plus fin, commençons par rappeler les grandes lignes des pratiques d'enseignement usuelles, à savoir les méthodes dites traditionnelles, qui relèvent de la pédagogie de l'exposition, et les méthodes dites actives. Le maître mot de l'enseignement dit traditionnel est l'imitation. L'élève y tente en effet de reproduire les traitements mathématiques qu'en préalable il voit exposer et mettre en œuvre par le professeur. Le maître explicite les principes et les résultats régissant ces traitements en les présentant et il veille ensuite à leur bonne application par ses élèves. Trois types de difficultés auxquelles ce type d'enseignement se heurte sont couramment signalés : les difficultés d'extension des traitements à des situations qui s'écartent de celles présentées lors de l'enseignement, les difficultés à parvenir à des acquisitions conceptuelles et le caractère souvent très volatile des connaissances ainsi apprises. En réaction, l'enseignement actif vise à fournir les moyens de surmonter les unes et les autres. Sa ligne de force est la motivation, à entendre dans un sens qui transparaît dans la citation volontairement provocante mise en exergue de ce paragraphe : *a priori*, l'élève ne voit pas nécessairement à quoi correspond un apprentissage donné et il s'agit en tout premier lieu qu'il fasse siennes les questions qui justifient un apprentissage. Il faut ensuite qu'il éprouve par lui-même qu'il a bien acquis les concepts et instruments adéquats. C'est pourquoi une pratique d'enseignement rapportée au seul critère de l'activité des élèves se heurte à deux écueils principaux : d'une part l'existence de lacunes qui peuvent être importantes, sur les concepts ou résultats que les activités pratiquées n'auront pas ou guère amené les élèves à utiliser, et d'autre part, de même que dans l'enseignement traditionnel mais pas aux mêmes endroits, un défaut d'adéquation entre le bon accomplissement de certaines activités et les compétences que l'on cherche à faire acquérir. On se souviendra de l'exemple caricatural, qui courait à l'époque dite des mathématiques modernes : *« Pour faire un ensemble, on pose des objets par terre et on les entoure d'une corde »*.

C'est pourquoi des réflexions de didacticiens ont porté sur les choix d'activités, le suivi des démarches des élèves et la gestion des différentes phases d'un apprentissage dans la durée. Entre autres retombées pédagogiques, il importe que le professeur évite de s'enfermer dans une programmation trop rigide (le "saucissonnage" des activités), qui ne tiendrait compte ni de la diversité des élèves dans un groupe ni de la nécessité d'une perception d'ensemble des enjeux d'apprentissage, mais se donne néanmoins les moyens d'impulser une dynamique de progression. Une certaine souplesse dans cette progression est indispensable à la *participation* des élèves, autrement dit à leur implication en tant qu'acteurs dans le processus d'apprentissage. L'octroi réfléchi aux élèves d'un rôle décisionnel s'inscrit ainsi dans une démarche d'enseignement qui peut à juste titre être qualifiée de *participative*.

3. Détermination d'un cahier de charges

"Une leçon doit être une réponse". Edouard Claparède

De manière précise nous souhaitons, en nous appuyant notamment sur l'outil informatique, mettre à disposition du professeur un équipement d'enseignement (outils accompagnés de leur guide d'utilisation pédagogique) qui se conforme à un certain nombre de critères, afin de faciliter la pratique d'un enseignement participatif dans de bonnes conditions d'efficacité. Ce sont les critères retenus que nous allons maintenant énoncer. Si, reconnaissons le, notre propre expérience de l'enseignement n'est bien sûr pas totalement étrangère à notre sélection de critères, celle-ci résulte fondamentalement de principes pédagogiques et didactiques que nous allons à présent expliciter.

Les précurseurs de l'école active : Lay, J. Dewey, E. Claparède, G. Kerschensteiner, nous font noter l'importance que revêt, pour l'acquisition des concepts et notions que l'on prétend enseigner, le fait que l'individu effectue des actions concrètes (reprises par Piaget sous la désignation d'*actions effectives*.) Seulement, l'absence d'une conception de la pensée comme schémas d'action leur interdisait d'expliquer bien des processus du fonctionnement intellectuel. Néanmoins, les apports de cette école ont été d'une très grande importance pour le développement de la psychologie que Piaget concrétisa et énonça ultérieurement. Des principes qu'elle a adoptés, nous en retiendrons trois qui tiennent un rôle majeur :

– Amener constamment l'élève à résoudre ou tenter de résoudre des problèmes. Il est essentiel que l'apprenant soit toujours en train d'effectuer une action. C'est en effet lui-même qui, moyennant la résolution de problèmes spécifiques dosés graduellement, construit ou atteint le concept visé.

Le second principe, qui reprend l'apport le plus important de l'enseignement sensoriel – empiriste, se décrit comme suit.

– Pour chaque introduction d'un concept ou d'une notion mathématique, partir d'un problème général qui se pose dans un contexte susceptible de présenter de l'intérêt pour l'apprenant. Proposer des exercices engendrés par ce problème ou des sous-problèmes dont la résolution, sous une forme structurée et coordonnée, amène à exprimer ou désigner le concept mathématique souhaité.

Évidemment, cela n'est pas faisable pour chacun des concepts intrinsèques à un thème donné et il est alors de la décision du professeur de choisir lequel ou lesquels paraissent décisifs. En tout cas, ne jamais introduire un concept par sa définition formelle[1].

Le troisième principe accompagne le précédent.

– Amener l'étudiant, une fois résolu le problème posé, à valider ses résultats, en vérifiant qu'ils aient un sens logique et qu'ils soient en accord avec le problème.

Ainsi dit, cela peut paraître simple, mais une mise en application dans l'enseignement ne va pas sans soulever des questions. Par exemple, à quels indices est-il possible de reconnaître, au vu d'une réponse donnée, qu'une validation a effectivement été mise en œuvre par des étudiants ? Sans aller jusqu'à la validation complète, des pratiques de vérification peuvent être préconisées. Pour une résolution d'équation ou de système, il n'y a pas de difficulté : la pratique d'un rite du genre "*je vérifie que la (les) solution(s) trouvée(s) convien(nen)t bien*" peut être préconisée (voire exigée, si l'on est d'un tempérament professoral plus strict) ; cela ne mange pas beaucoup de pain et ne peut pas faire de mal, mais son équivalent pour une question géométrique ou un problème d'analyse n'est nullement évident. Il s'agit pour ce faire d'introduire dans l'enseignement des apprentissages spécifiques, qui sont souvent, ce qui est heureux, d'un grand intérêt théorique et pratique : Nous songeons aux invariants, dont une exploitation simple prend la forme de déplacements lors de l'utilisation de logiciels de constructions géométriques, ou aux équations aux dimensions lorsque des grandeurs sont en jeu. Quoi qu'il en soit, relevons que la validation ne s'ajoute pas à l'enseignement, mais s'y inscrit pleinement, au point que dans la théorie des situations de G. Brousseau, l'une des dialectiques des processus d'enseignement est bien celle de la validation.

Revenons à des considérations sur le rôle à impartir à l'action. Pour Piaget (1967, p. 23), *les opérations intellectuelles dont la forme supérieure est logique et mathématique constituent des actions réelles, sous le double aspect d'une production propre au sujet et d'une expérience possible sur la réalité*. Situer parmi les actions la résolution de problèmes conduit à inclure dans les caractéristiques fondamentales de notre programme didactique, celle de proposer aux apprenants la résolution de problèmes adéquats. Mais l'action matérielle n'engendre pas nécessairement en elle-même les opérations intellectuelles dont la coordination mène à la compréhension d'un concept. De quelle manière les opérations intellectuelles peuvent-elles s'organiser ? Ou encore : Sur la base de quelle méthodologie, le ou les concepts implicites dans un problème s'intériorisent-ils chez l'étudiant ? Mentionnons à ce sujet qu'une des particularités de l'opération est qu'elle se compose d'opérations partielles, lesquelles, coordonnées selon une

[1] La définition formelle correspond au niveau d'études de l'apprenant.

forme continue, constituent un système cohérent et mobile. C'est ainsi qu'il est possible d'appliquer la dite opération dans des situations similaires.

Ce point nous amène à deux questionnements. Comment déterminer les opérations partielles propres à une opération donnée ? Comment doter une opération de mobilité ? Commençons par répondre à la première question.

Aebli (1995, p. 159) mentionne qu'avant d'entreprendre l'étude d'un thème donné, le professeur doit élaborer un *plan* ou "*déroulement d'actions*", dans lequel apparaissent clairement toutes les activités que l'étudiant devra réaliser pour résoudre un problème posé. Dans notre cas, quand l'objectif est d'enseigner un certain concept mathématique complexe, il faut procéder à son examen détaillé, afin de pointer ce dont l'étudiant a besoin pour pouvoir aboutir au concept. Ce fait ajoute le principe suivant à ceux déjà énoncés pour notre programme didactique.

- Quand il s'agit d'enseigner un certain thème ou un concept mathématique complexe, moyennant la résolution d'un problème fixé, décomposer ou diviser le problème en sous-problèmes qui représentent les opérations partielles constitutives ; noter toutes les opérations et/ou concepts qui résultent de cette analyse et qui sont nécessaires à l'étudiant pour résoudre le problème initial. Constituer à partir de là un *plan d'action*, lequel, moyennant des exercices dosés graduellement, amène de manière coordonnée et cohérente à atteindre l'objectif.

Apportons à présent une réponse à la question relative à la mobilité d'une opération. Piaget (1967, pp. 48-49) éclaircit notre second questionnement en mentionnant que la mobilité d'une opération est définie par la réversibilité et l'associativité. Cela détermine une différence fondamentale par rapport à une habitude, par nature irréversible en raison de son caractère stéréotypé et rigide.

Ainsi, bien que la caractérisation antérieure n'indique pas comment enseigner, elle nous définit clairement comment fonder une didactique qui se démarque de la création d'habitudes chez l'individu. C'est à dire que si elle ne nous dit pas que faire, elle nous indique ce qu'il ne faut pas faire. Complétons notre didactique par deux éléments supplémentaires.

- Chaque fois que sont réalisées des opérations qui nous amènent à des concepts mathématiques, mettre en place dans la mesure du possible les opérations inverses.
- Quand une forme ou une méthode de résolution de problème est montrée, tenter de donner une forme de solution alternative. En aucun cas n'imposer une forme de solution.

Une des parties les plus importantes dans la théorie de l'intelligence de Piaget est celle qui concerne l'équilibre. Brièvement résumée, cette théorie soutient qu'il existe chez l'être humain deux processus jumeaux qui opèrent simultanément : l'assimilation et l'accommodation. Comme tous deux s'opposent d'une certaine façon, ils rendent nécessaire une compensation, qui conduit de manière progressive à des niveaux de compréhension supérieurs. *Piaget appelle équilibre cette compensation intellectuelle active avec le milieu ambiant* (Labinowicz, 1998, p. 36.) Tout niveau supérieur de compréhension produit une structure plus vaste ou des formes de pensée plus complexes. *Quand les possibilités d'interaction avec le milieu ambiant s'accroissent, l'enfant peut assimiler avec plus de facilité le profit de l'information externe dans un cadre de référence qui non seulement s'est agrandi, mais s'est également davantage intégré* (Labinowicz, 1998, p. 41.) On le voit, il s'agit ici d'être prudent : D'une part, Piaget n'avait pas un objectif didactique, car il s'agissait pour lui d'expliquer la construction chez l'enfant et l'adolescent des structures constitutives de l'intelligence, d'autre part nous ne pouvons pas affirmer que tous les concepts mathématiques qui sont les enjeux de l'enseignement sont d'une portée telle qu'ils touchent à la représentation du monde environnant. Nous retiendrons néanmoins de la vision du développement que nous avons rappelée, le rôle que peut jouer une perturbation externe à l'individu, comme peut l'être la présentation d'un nouveau concept mathématique.

Nous considérerons en conséquence que l'acquisition d'un concept sera en conséquence complète pour un individu seulement après une telle perturbation. Cela nous conduit à adjoindre à notre cahier de charges :

– Bâtir des problèmes où le concept récemment acquis soit un élément d'analyse pour un thème plus avancé ou plus complexe ou bâtir des problèmes qui requièrent le concept en dehors du contexte didactique dans lequel il a été enseigné. Cela signifie penser à des problèmes où le concept enseigné fasse partie de la structure avec laquelle l'élève doit analyser et résoudre la question posée.

Jusqu'ici, nous n'avons pas jusqu'ici envisagé les questions liées à l'expression, principalement sous des formes écrites pour le cas de l'enseignement des mathématiques. Or de telles questions font apparaître toute l'importance que tiennent les représentations dans l'analyse qu'un élève fait d'un problème ; ce sujet a été abordé par de nombreux chercheurs (J. Kaput, C. Janvier, R. Duval, F. Pluvinage, etc.) Davantage même, des recherches ont pu repérer qu'un étudiant soit capable de résoudre un problème donné dans un registre déterminé et se trompe dans un autre (Duval, 1998, p. 125.)

Il convient de signaler que le terme "*représentation*" a de nombreuses connotations. Le présent travail ne souhaite pas ouvrir une discussion autour de la signification du terme *représentation*, qui constitue pour beaucoup un sujet d'étude menant à la construction d'une théorie sémiotico-mathématique. Mais simplement, nous nous rapporterons à une représentation dans le même sens que Duval se référant à ce qu'il nomme registre de représentation sémiotique (Duval, 1998, p. 175.)

Plus spécifiquement, nous faisons usage des registres de représentation sémiotique avec l'intention d'identifier les éléments qui participent d'un registre de représentation donné, en raison de la nécessité qu'un concept mathématique soit instancié et travaillé dans les divers registres où il est représenté. Par ailleurs, nous adhérons complètement à ce qu'avance Duval sur la nécessité d'une pluralité de registres de représentation et le caractère central de l'activité de conversion pour le fonctionnement cognitif de la pensée (Duval, 1998, p. 199.) En effet, comme il l'affirme, chaque registre de représentation sémiotique apporte certains aspects cognitifs qu'un autre registre ne recouvre pas, c'est à dire que *toute représentation est cognitivement partielle relativement à ce qu'elle représente* (Duval, 1998, p. 185.) En d'autres termes, les registres se complètent.

Mais il nous signale aussi que l'existence des registres n'est pas suffisante et que la conversion d'un registre dans un autre est nécessaire, affirmant que pour l'appréhension conceptuelle des objets, la coordination des divers registres est nécessaire (Duval, 1998, pp. 176, 181, 185, 189.)

> *On peut observer à tous les niveaux un compartimentage des registres de représentation chez la grande majorité des élèves. Ils ne reconnaissent pas le même objet au travers des représentations données par des systèmes sémiotiques différents.* (Duval, 1998, p.191.)

Janvier (1987) mentionne aussi à ce sujet que l'un des problèmes majeurs est de pouvoir articuler deux registres de représentation sémiotique ou de passer de l'un à l'autre, signalant l'importance de pouvoir offrir différents registres à une notion ou un concept.

De même il subsiste, outre le problème signalé, celui de la manière d'attribuer une signification à un concept mathématique dans un registre donné de représentation sémiotique. Et il est clair que ces deux problèmes son liés puisque, comme nous l'avons déjà mentionné et redit, l'éducation traditionnelle tend à la création d'habitudes chez l'individu, d'où il résulte que le sens d'une notion ou un concept enseigné disparaît ou fait défaut dans un registre de représentation distinct de ceux de l'enseignement.

Comme on le sait, pouvoir piloter dans une classe traditionnelle les divers registres sémiotiques associés à un concept mathématique déterminé n'est pas une tâche simple ; une aide appréciable peut résulter de l'emploi de l'informatique. Dans l'exemple de la pente présenté ci-après, nous pouvons reconnaître au moins quatre registres sémiotiques : l'arithmétique (variations proportionnelles), l'algébrique (coefficients d'équations linéaires), le géométrique (quotient de segments orientés), le figural (inclinaison d'escaliers.)

Dès lors, comment promouvoir l'articulation des différents registres de représentation sémiotiques pour introduire un concept donné ? Notre programme suit sur ce point le schéma que Piaget propose pour l'acquisition d'un concept : il s'agit de la réalisation d'opérations concrètes conduisant d'un registre de représentation sémiotique à un autre et vice versa. Tout ce qui précède doit être réalisé avec soin, en sélectionnant ce que le concept a de pertinent dans l'autre registre, puisqu'il n'y a évidemment pas transfert dans tous les registres de représentation et qu'il est encore moins possible de transférer tous les pas de solution d'un problème d'un registre fixé à un autre.

La synthèse de ce qui précède nous conduit à compléter pour conclure notre cahier de charges par les deux éléments suivants :

- Chaque fois qu'un concept mathématique est présenté dans un registre fixé de représentation sémiotique, le travailler (si le concept le permet) dans les autres registres appropriés.
- Si un concept mathématique est présent dans plus d'un registre de représentation sémiotique, mettre en place des opérations directes et inverses qui favorisent l'articulation (le transfert) entre les différents registres.

4. Application : des projets d'action pratique

4.1. Premier exemple : l'enseignement du concept de pente

Pour introduire le concept de pente d'une droite à partir d'un projet d'action pratique, on se propose de poser un problème tel que la construction d'un escalier, dont la figure 3 montre une vue de profil, connaissant sa portée, sa hauteur et son nombre de marches ou bien le nombre de marches et les mesures caractéristiques d'une de ses marches, à savoir le giron et la contremarche (note : à ces termes spécialisés, on peut préférer les expressions de largeur et hauteur d'une marche, qui sont certes familières mais ambiguës.) En envisageant des variations sur les données du problème envisagé, l'étudiant peut "voir" la variation de l'inclinaison d'un escalier ainsi que la possibilité de le construire.

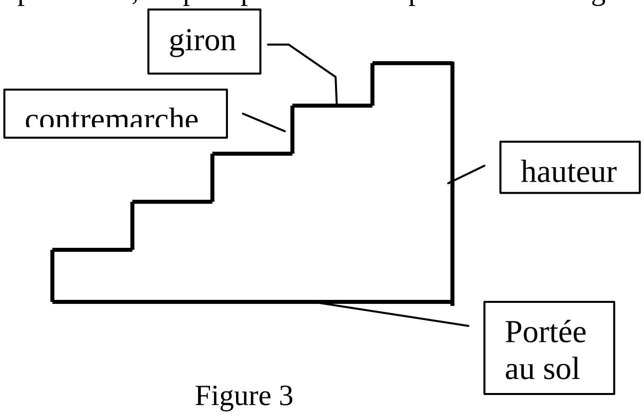


Figure 3

Une étude en forme d'enquête introductive au sujet envisagé (voir scénario en annexe 1) peut permettre aux élèves de se familiariser avec le vocabulaire à utiliser et les conduire à se poser eux-mêmes des questions. Il s'agit aussi que soit ensuite évitée l'atomisation de leur activité, par la possibilité d'une certaine prise de distance au moment de traiter d'énoncés précis, tels que ceux qui suivent, pris parmi les exercices que nous avons effectivement proposés à des élèves.

a.1. Dessine un escalier de hauteur h = 168 cm, de portée au sol s = 168 cm, ayant n = 4 marches.
a.2. Quelle est la mesure en cm de la contremarche de chaque marche ?
a.3. Quelle est la mesure en cm du giron de chaque marche ?
a.4. Quelle inclinaison va-t-il avoir ?

2.1 Dessine à présent un escalier de hauteur ***h***/2 et de portée au sol ***s***.
2.2 Est-il plus ou moins incliné (raide, pentu) que le précédent ?
2.3 Comment ont été modifiées les dimensions d'une marche ?
2.4 Est-ce possible ou as-tu été confronté à des difficultés ?

3.1. Dessine à présent un escalier de hauteur ***h***/2, de portée au sol ***s*** et de ***n*** marches.
3.2. Est-il plus ou moins incliné (raide, pentu) que le premier escalier ?
3.3. Comment comparer leurs inclinaisons ?
3.4. Quelles vont être les dimensions d'une marche ?

4.1. Dessine à présent un escalier de hauteur ***h***, de portée au sol ***s***/2 et de ***n*** marches.
4.2. Quelle va être à présent l'inclinaison ?
4.3. Comment comparer son inclinaison avec celle du premier escalier ?
4.4. Comment comparer son inclinaison avec celle de l'escalier précédent ?
4.5. Quelles vont être les dimensions d'une marche ?

5 Dans les exercices précédents, quel escalier est celui dont l'inclinaison est la plus grande ? La moins grande ?

Au terme de tels exercices, il s'agit d'aboutir à exprimer l'inclinaison d'un escalier sous la forme du rapport entre hauteur atteinte et distance horizontale, ce qui suppose une coordination du type de celle indiquée notamment dans le chap. XI du livre de Piaget, Grize, Szeminska, Vinh Bang, 1968, sur la notion de fonction. Nous pouvons élaborer des questions comme les suivantes sur cette inclinaison.

6 Etant donnée une inclinaison ***x*** = 0,8, indique une valeur pour la hauteur et la portée d'un escalier ayant cette inclinaison. Pour un escalier de cette inclinaison, pourrais-tu donner les dimensions d'une marche ? Ces valeurs sont-elles uniques ou peux-tu construire plusieurs escaliers ayant cette inclinaison ?

7 Pour une inclinaison ***Z*** = 0,30, construire un escalier de 20 marches en donnant des mesures pour le giron et la contremarche, sachant que marche et escalier sont dans la même proportion.

8 Est-il possible de construire un escalier ayant cette inclinaison, mais de contremarche $\boldsymbol{W} = 34$ et de giron $\boldsymbol{Y} = 60$?

Après réalisation de ce programme, on en vient à la définition de pente. Un didacticiel peut permettre à chaque étudiant de travailler à son propre rythme, selon une démarche que nous nous contentons ici de décrire succinctement. Le didacticiel, comportant un générateur aléatoire, fait apparaître une droite dans un repère cartésien du plan. Un point est placé sur la droite et on demande à l'étudiant de réaliser des déplacements du point sur la droite, qui déterminent des segments orientés portés par chacun des axes de coordonnées. A nouveau la pente est définie comme un rapport, celui entre les déplacements verticaux et horizontaux. A cela près que l'orientation des segments fait apparaître un signe, ce qui peut produire des pentes négatives. On poursuit par des problèmes amenant l'étudiant à confronter la pente de la droite avec les valeurs obtenues pour le quotient. Une fois l'étudiant familiarisé avec cette manière de voir la pente, le même problème peut être posé en donnant les coordonnées sans référence explicite à une échelle déterminée, de telle sorte que les déplacements restent définis en termes de différences des coordonnées respectives, invariance qui conduit à la formule mathématique complète de la pente.

4.2. Deuxième exemple : introduction des concepts de statistique descriptive

L'objectif d'enseignement est l'acquisition des concepts usuels en statistique descriptive, à savoir : populations, échantillons, variables, types de variables, regroupement de données et mesures de tendance centrale. Nous proposons dans ce cas comme *projet d'action pratique* la conception et la construction d'une chaise ou plus généralement d'un siège, en s'appuyant sur une enquête à élaborer. Le problème étant de concevoir et réaliser un siège, une première phase a consisté en une discussion orientée vers la recherche des facteurs importants pour la conception. Cela amena les élèves à considérer des variables relevant d'aspects différents : taille, poids, âge et revenus des clients potentiels, matériaux, couleurs et coût du produit, etc.

Dans une deuxième phase, on sélectionna les données à retenir et on fut amené à catégoriser les variables associées, en variables nominales, ordinales ou d'intervalles. Une troisième phase consista à discuter de la manière d'obtenir des données en quantité suffisante pour constituer des représentants valables pour les tailles, revenus, couleurs, etc. Cela conduisit naturellement au concept d'échantillon, puis au regroupement de données. C'est la nécessité du choix d'une donnée représentative de la population et des variables qui a alors fait directement aboutir aux diverses mesures de tendance centrale.

Il y a lieu de noter que tout au long de ce processus, on élabora des exercices proposant des problèmes inverses et qu'on laissa toute liberté de méthode et d'emploi de techniques pour obtenir les valeurs visées. Par exemple on proposait un ensemble de données en demandant de quelle catégorie elles relevaient, puis on inversait en demandant des données qui soient de type nominal, ordinal, etc.

On demandait aussi, lors du calcul des diverses mesures de tendance centrale, de voir le problème qualitativement et quantitativement. Indiquons que furent mises au point des séances spécialement consacrées à des concepts tels que variable, variable aléatoire, etc. issus des analyses des concepts antérieurs et nécessaires pour le thème en étude. Il en fut de même pour la moyenne, en raison de sa place particulièrement importante.

En parallèle à la construction de tables de distributions de fréquences apparaissait aussi un histogramme dont la représentation était demandée à partir des données de la table et, inversement, des exercices demandant de remplir une table à partir d'un histogrammeétaient proposés. De plus, on identifiait sur des histogrammes les mesures de tendance centrale. Signalons l'utilisation d'un tableur, rendant attractif un ensemble de tâches à effectuer, qui serait apparu horriblement lourd et fastidieux sans cet instrument.

5. Vers une généralisation, à la lumière de quelques observations

En l'absence d'outil spécifique, il pourrait se faire que ce qui vient d'être présenté pose au professeur un sérieux problème, dans la mesure où le fait de mener à bien une méthodologie telle qu'indiquée requiert un effort supplémentaire de sa part. En contrepartie, les avantages sont énormes :

- Premièrement, il s'agit d'une opportunité pour tous les élèves, même s'ils n'ont pas parfaitement assimilé les notions antérieures pour diverses raisons, d'être à même de suivre le nouveau développement qui leur est présenté.
- En second lieu, il nous permet d'éviter au départ le symbolisme particulier requis pour la résolution du problème. De plus, si l'on réussit à éveiller l'intérêt de l'élève pour le problème présenté ou pour le projet d'action pratique, la connaissance à enseigner surgit comme une nécessité et non comme quelque chose d'imposé par le professeur.
- Troisièmement, une association est établie entre l'opération que l'on désire enseigner et ses domaines d'application dans la vie quotidienne. Autrement dit, l'énoncé du problème doit se situer dans les possibilités de la structure cognitive de l'apprenant, aboutissant ainsi à la mise en relation significative de la nouvelle connaissance avec les connaissances antérieurement acquises, ce qui produit d'emblée un ancrage plus ferme des nouvelles idées (Ausubel et al. 1998, p. 111.)

Pour favoriser de telles pratiques, il vaut alors la peine de promouvoir l'usage par les professeurs d'une panoplie d'instruments pédagogiques propres à faciliter leur tâche, à leur permettre aussi de concentrer leur attention sur les apprentissages de leurs élèves. Certains de ces instruments sont de plus équipés de modules d'enregistrement pour le suivi des travaux d'élèves.

Au service du premier exemple cité, un logiciel spécifique (LIREC, Cuevas 1994) a été élaboré. Il s'est avéré convivial et a effectivement permis aux élèves non seulement d'avancer à leur rythme, mais de choisir leur progression parmi les activités proposées. Il nous a aussi permis, grâce aux enregistrements des travaux d'élèves, de repérer certaines difficultés que des élèves ont pu rencontrer. Des changements de registres sont apparus parmi ces difficultés, comme le fait d'exprimer la longueur orientée d'un segment sous la forme qui était demandée, c'est à dire en employant des variables. Nous avons pu aussi observer que, dans le registre algébrique, les traitements à effectuer sont coûteux pour beaucoup d'élèves, chaque pas représentant pour eux un travail important.

A propos du second exemple cité (concepts statistiques), nous avons déjà mentionné l'utilisation de cet outil qu'est le tableur-grapheur. Toutefois, si un tel instrument s'avère extrêmement efficace pour les traitements, ce n'est pas en soi un didacticiel, auquel seraient associés des enregistrements des résultats au cours du temps, donnant au professeur la possibilité de suivre l'évolution de ses élèves. Nous pourrions signaler de la même manière les possibilités qu'offrent, pour diverses études, les logiciels de calcul formel et ceux de construction géométrique. Pour tous ces outils, il revient au professeur de se doter des instruments complémentaires lui permettant le suivi de la progression de ses élèves.

Par ailleurs, la mutualisation des pratiques des enseignants, grâce au réseau Internet, ouvre des perspectives véritablement séduisantes : elle peut éviter que chacun ait tout à construire chaque fois en passant par les mêmes errements ou en se heurtant aux mêmes obstacles, enrichir considérablement les idées, amener à des confrontations de points de vue, conduire à renouveler les sujets d'évaluation.

Tout cela est toutefois trop beau ; nous ne serions pas les premiers à mettre en garde contre une illusion extrêmement tentante : celle de croire que les nouveaux outils sont transparents pour leurs utilisateurs et n'exigent aucune compétence particulière. Un travail d'investigation didactique considérable reste à conduire, ne nous le cachons pas. L'un de ses objectifs les plus importants sera de préciser des *scénarios d'application* de l'ingénierie proposée et d'en mesurer les effets. En annexe 1 est présentée l'ébauche d'un scénario pour l'étude des escaliers, à titre d'exemple d'étude exploratoire. Un tel scénario sera achevé lorsque toutes les phases de l'enseignement, de l'introduction à des évaluations terminales (voir à titre d'exemple en annexe 2 un sujet proposé en France pour le recrutement d'élèves-professeurs), seront prises en compte, avec leurs constituants (références au contenu enseigné, prérequis, découpage en séquences et objectifs propres à chacune, résultats attendus) et des effets auprès de la population étudiante, repérés et mesurés. On pourra se rapporter dans un tel but à l'ingénierie de recherche exposée par Michèle Artigue et abondamment utilisée depuis lors.

6. Conclusions

On a proposé une ingénierie didactique pour l'enseignement des mathématiques. Le modèle retenu extrait ses éléments théoriques de l'école active, de la psychologie de l'intelligence de Jean Piaget et du programme didactique élaboré par Hans Aebli, des études didactiques récentes sur les représentations. Insistons sur le fait qu'il s'agit d'un modèle qui est particulièrement destiné à l'enseignement des mathématiques et qui s'applique à l'éducation post-élémentaire.

Les difficultés les plus grandes que nous avons rencontrées en essayant d'appliquer notre ingénierie didactique, ou seulement certains de ses principes, à l'enseignement d'un concept mathématique sont au nombre de trois.

La première est de trouver un problème approprié à l'élaboration d'un plan d'action pratique, ayant à satisfaire aux caractéristiques suivantes :

b) Etre suffisamment explicite et simple pour être bien compris, sans forcément que sa solution soit simple.
c) Etre attractif pour la majorité des élèves ou étudiants.
d) Etre suffisamment riche pour contenir dans sa résolution le(s) concept(s) mathématique(s) à enseigner.

C'est un défi à relever par le professeur, qui doit être sensible aux préoccupations de ses élèves et qui doit être en mesure de poser des problèmes touchant au sport, à l'économie, la physique, l'astronomie, l'administration, etc. et non pas justifier d'emblée la mathématique par la mathématique.

La seconde grande difficulté est de procéder à une inspection afin de chercher quels concepts et quelles capacités sont requises pour que l'élève atteigne la compréhension du concept à enseigner. Pour le professeur, cette recherche représente un travail complexe et fastidieux, parce que communément l'enseignant suppose de manière implicite une série de connaissances et de capacités que l'élève ne possède souvent pas. On peut recommander à cette fin de dessiner une sorte de *carte conceptuelle*, mettant en évidence les familles de concepts mathématiques nécessaires à l'acquisition souhaitée.

En dernier lieu, il convient de disposer de facilités pour pouvoir présenter un concept mathématique dans les divers registres sémiotiques qui lui sont propres. Avec l'ordinateur, nous avons rencontré un outil inestimable pour pouvoir représenter, moyennant modélisation, les divers registres associés.

Quelques résultats : Nos réalisations les plus importantes ont été faites sous forme de logiciels, permettant des apprentissages tutorés avec l'ordinateur. L'architecture des systèmes y reste conditionnée au schéma didactique. Une telle proposition didactique a été éprouvée avec succès lors d'expérimentations, au cours desquelles a pu être vérifiée l'efficacité en termes d'apprentissage, par une sensible élévation des notes scolaires moyennes obtenues (Cuevas, 1994 ; Manriquez, 1995 ; Moreno, 1997 ; Bueno, 2001.)

Nous avons la ferme conviction qu'on peut élever ou améliorer l'éducation mathématique, ou l'enseignement des concepts mathématiques, à quelque niveau de profondeur que ce soit, au moyen d'une ingénierie didactique appropriée, notamment celle que nous présentons. Nous considérons qu'on peut au contraire lui faire obstruction par des méthodes d'enseignement produisant chez l'individu une conception de la mathématique comme quelque chose de purement composé de formules et de techniques incompréhensibles, laborieuses et inutilisables. Malheureusement, que ce soit de manière consciente ou inconsciente, c'est une telle conception qui apparaît de nos jours comme un cas fréquent dans notre système éducatif, du moins au niveau de l'enseignement du second degré.

> *Pour la grande majorité des étudiants, le calcul n'est pas un corps de connaissances, mais un répertoire de modèles à imiter.* (E. E. Moise cité par Tall, 1996, p. 290.)

Dans cet article, nous avons seulement évoqué ce que peut être un programme de travail et de recherches s'intéressant à l'environnement professionnel du professeur aujourd'hui. Le traditionnel manuel scolaire, aussi bien fait soit-il, accompagné de son livre du maître, la salle de classe et son tableau, les cahiers et les copies, ne suffisent plus à introduire les élèves dans le monde où ils auront à trouver leur place et à œuvrer. Et c'est bien là que réside un enjeu auquel l'enseignement mathématique doit apporter une contribution essentielle.

BIBLIOGRAPHIE

ADJIAGE Robert, 2001, Maturation du fonctionnement rationnel, *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, volume 7, 7 – 48, IREM de Strasbourg.

AEBLI Hans, 1966, *Didactique psychologique*, Delachaux et Niestlé, Neuchâtel.

AEBLI Hans, 1995, *12 formas básicas de enseñar*, NARCEA, España.

ARNOLD V.I., 1996, *Sur l'enseignement des mathématiques*, Palais de la Découverte, Paris.

ARTIGUE Michèle, 1988, *Ingénierie didactique*, Recherches en Didactique des Mathématiques volume 9/3, 281-308, Grenoble, La Pensée Sauvage.

AUSUBEL D., HANESISIAN, H., NOVAK J., 1999, *Psicología educativa*, Ed. Trillas. México.

BUENO G, 1999, *TUTOREST, un tutor computacional para la enseñanza de la estadística descriptiva*, Tesis de doctorado, CINVESTAV-IPN, México.

CUEVAS Armando, 1994, *Sistema Tutorial Inteligente LIREC*, Tesis doctoral, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

DUVAL Raymond, 1988, Graphiques et Equations : L'Articulation de deux registres, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg.

DUVAL R., 1998, Didáctica, *Investigaciones en Matemática Educativa II*, Editor F. Hitt, Gpo. Edit. Iberoamérica, México.

DUBINSKY Ed., 1991, Reflective abstraction in Advanced Mathematical Thinking, *Advanced Mathematical Thinking*, Edited by David Tall, Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

HALMOS Paul R., 1994, What is teaching? *American Mathematical Monthly*, n° de novembre.

IREM de Strasbourg, 1989, *Mathématiques classe de 3e*, Istra – Casteilla, Paris.

JANVIER Claude, 1987a, Conceptions and representations : The circle as an Example, *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates, USA.

JANVIER Claude, 1987b, Translation Processes in Mathematics Education *; Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates, USA.

LABINOWICZ Ed., 1998, *Introducción a Piaget, Pensamiento, Aprendizaje Enseñanza*, Addison Weley Longman. México.

MANRIQUEZ P., 1995, *Diseño de las experiencias de aprendizaje para el desarrollo de un curso de Geometría Analítica con el auxilio del Sistema Tutorial Inteligente LIREC*, Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás Hidalgo. México.

MORENO S., 1997, *Experimentación educativa en el aula: Uso del Sistema Tutorial Inteligente LIREC versus la enseñanza tradicional en Matemáticas III del sistema CCH-UNAM*, Tesis de Maestría, CINVESTAV-IPN, México.

PIAGET Jean, 1974, *El Estructuralismo*, Oikos-tau, S. A. Ediciones, España.

PIAGET Jean, 1983, *Seis estudios de psicología*, Ariel, México.

PIAGET Jean, 1967, *La Psychologie de l'Intelligence*, Armand Colin, Paris.

PIAGET Jean, 1968, GRIZE Jean-Blaise, SZEMINSKA Alina, VINH Bang, *Epistémologie et psychologie de la fonction*, P.U.F. Paris.

TALL David, 1996, "Functions and Calculus", *International Handbook of Mathematics Education*, chapter 8, Kluwer Academic Publishers, Pays-Bas.

TALL D. & VINNER S, 1981, Concept Image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 125-147.

VERGNAUD, Gérard, 1987, Conclusion, *Problems of Representation in theTeaching and Learning of Mathematics*, C. Janvier ed., Lawrence Erbaum Associates, Canada.

VINNER S., 1983, Concept definition, concept image and the notion of function, *The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14, 293-305.

Ciencas de la computación CIMAT et
Departamento de Matemática Educativa
CINVESTAV – IPN, México
<ccuevas@mail.cinvestav.mx>

IREM de Strasbourg
France
<pluvin@math.u-strasbg.fr>

Annexe 1 : Ebauche de scénario pour les escaliers

Phase exploratoire : Le professeur a intérêt à se placer lui-même dans les conditions que rencontreront ses élèves. Pour cela, on peut prendre dans son proche environnement des mesures relatives à divers escaliers rencontrés. Voici un exemple de données réelles recueillies dans une maison, rassemblées en un tableau.

Localisation	Matériau	Giron en cm	Contremarche en cm	Impression
Entrée	Pierre	32	17,5	Confortable
Accès aux étages	Bois	27	17	Confortable
Accès au sous-sol	Ciment	24	18	Etroit et raide
Jardin	Pierre	29,5	21	Marches hautes
Véranda	Ciment	25	18,5	Raide

Faire un tel tableau conduit à fixer le vocabulaire, à se rendre compte de l'incidence des mesures sur l'utilisation (d'où la colonne où sont consignées des impressions.) On est aussi amené à choisir et donc à délimiter le sujet traité ; la question de la volée et des formes d'un escalier est par exemple apparue, mais elle n'a pas été retenue pour le tableau. Pour cette raison, les nombres de marches n'y sont par exemple pas mentionnés.

Notons au passage que ce même sujet pourrait être intéressant pour un recueil de données statistiques. A envisager pour une autre étude, moyennant une réflexion supplémentaire…

Phase de réalisations (modèles, maquettes, représentations) : Un choix possible est de faire des escaliers en pliant du papier. Une feuille de format A4 coupée en deux dans la longueur fournit deux bandes d'une trentaine de centimètres (29,7 cm exactement) chacune. Elles seront pliées, superposées et assemblées par collage à leurs extrémités : l'une n'aura qu'un pli unique et servira à faire le sol et un mur, l'autre sera pliée pour former l'escalier proprement dit. Il est facile, en faisant du pliage accordéon, d'obtenir un escalier dont les mesures des marches sont les mêmes en hauteur et en largeur. Plus difficile, nécessitant des calculs qui mobilisent la proportionnalité est l'obtention d'un escalier à marches ayant un profil rectangulaire autre que carré.

Constat, amusant : l'ensemble assemblé sol-mur et escalier est parfaitement pliable. Un travail rapide sur CabriII (un programme, non présenté ici, a été élaboré) conduit à énoncer un résultat élémentaire de géométrie, en rapport avec les parallélogrammes articulés : *Tout escalier est complètement repliable*. On rencontre d'ailleurs réellement çà et là des escaliers pliables, par exemple pour accéder à des combles. On s'écarte là quelque peu des questions de pente, mais les déplacements effectués font notamment observer des alignements, qui sont bel et bien au cœur du sujet à étudier.

Cela est inhérent à la phase de réalisations : l'un ou l'autre détour surgit immanquablement des problèmes rencontrés. Certains peuvent s'avérer très intéressants pour l'étude d'un thème du programme mathématique autre que celui qui est dans le collimateur ; ils peuvent alors être mis en réserve, en quelque sorte au sein d'une "banque" de la classe, pour être exploités le moment venu. D'autres peuvent donner lieu à une présentation additionnelle, séparée du traitement du sujet proprement dit à l'étude. Le savoir-faire du professeur comme animateur ou directeur de recherches est bien évidemment sollicité pour ces mises en valeur des découvertes dénichées par ses élèves.

Phases de traitement mathématique de la notion : On retrouvera à cette occasion ses classiques de didactique, à commencer par la nécessité de sortir du seul sujet des escaliers, ce qui empêche de continuer à se mettre dans la situation de l'élève. Celle-ci est désormais conditionnée par des décisions qui incombent au professeur envisageant un panorama des mises en œuvre et applications de la notion de pente. Ici c'est clairement l'apparition de signes pour les droites du plan repéré qui demande une approche que les escaliers ne permettent pas (on est amené aussi bien à y monter qu'à en descendre.) Pour cette approche générale, il vaut la peine d'envisager une pratique prenant en compte la distinction des trois champs ou domaines d'apprentissage, que Robert Adjiage propose (voir Adjiage, 2001) : *l'expérience physique*, *le modèle mathématique sous-jacent* et *les moyens d'expression sollicitables pour développer le modèle*. Le modèle mathématique est ici le plan cartésien avec ses droites.

Les phénomènes d'évolution sont, entre autres, de bons "candidats" à intervenir dans l'élargissement nécessaire des points de vue : croissances ou allongements d'une part, érosions ou évaporations ou usures (exemple : épaisseur des gommes d'un pneu, si l'on pense à des pentes faiblement négatives) d'autre part, pour ne pas s'en tenir aux sempiternelles données d'évolution de marchés ou de populations, qu'il ne faut pas néanmoins manquer d'examiner. En effet, ce sont notamment des besoins d'extrapolation pour des prévisions qui conduisent à des mobilisations dans des calculs des notions présentées à propos des droites du plan cartésien. Mais une distinction fondamentale apparaît à l'occasion de la représentation de données hétérogènes, comme durée et prix, par rapport aux situations purement géométriques, comme celle de l'escalier : celle entre *pente* et *coefficient directeur*. Dans le second cas, la considération d'une tangente d'angle n'a pas de sens effectif, puisque les choix d'unités sur les axes ne peuvent qu'être arbitraires. Mais un coefficient directeur se trouvera en contrepartie affublé d'une dimension. Ce pourra être par exemple un allongement en cm par kg pour un ressort, ou encore un prix en Euro par km si l'on souhaite comparer des prix à payer selon le nombre de kilomètres parcourus auprès de deux sociétés de location de véhicules (problème de brevet 1987 de l'Académie de Bordeaux, repris dans un manuel scolaire, voir : IREM de Strasbourg, 1989.)

Bref, une question de choix du *cadre mathématique* se pose : géométrie euclidienne ou géométrie affine ? Pour le professeur ce choix dépend des instructions officielles accompagnant les programmes scolaires, ce qui ne va évidemment pas à l'encontre de son propre examen personnel. Pour l'institution, un véritable débat se trouve instauré, à propos duquel les didacticiens ont leur mot à dire. D'une part, le plan affine est plus malléable, plus général, donc mieux propre à des traitements de données de toute sorte, d'autre part les instruments de dessin ou les outils informatiques (après réglage toutefois des proportions largeur – hauteur) opèrent dans un plan homogène, donc euclidien.

Ce choix mathématique arrêté, la route du professeur est en principe libre pour l'exploitation pédagogique. Celle ci sera fonction des principes didactiques auquel il souhaite se conformer et de leur mise œuvre précise (voir par exemple Raymond Duval, 1988), elle dépendra aussi des instruments auxquels il a accès et de son savoir-enseigner auprès du public qu'il accueille, encadre et cherche à faire progresser.

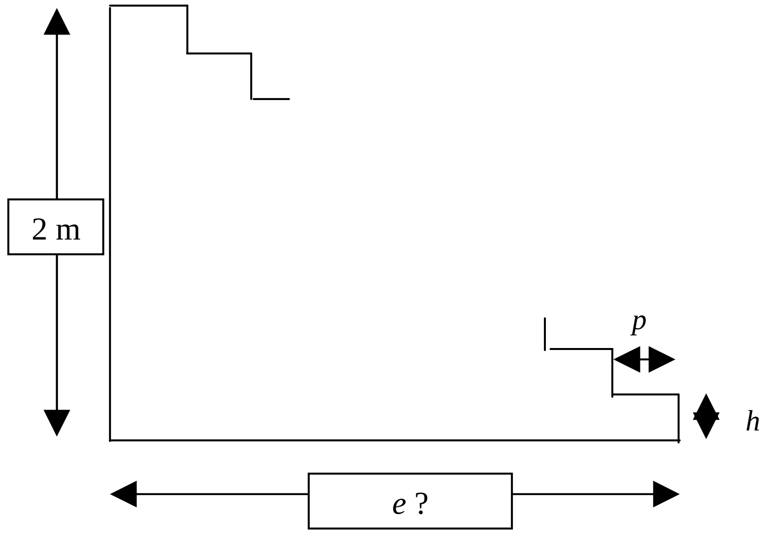
Nous ne ferons qu'évoquer dans cette annexe le sujet de l'évaluation. En effet, le lecteur pourra lui-même trouver de nombreuses références sur ce sujet, en raison de son importance pédagogique évidente. Simplement à titre d'illustration, l'annexe 2 présente un extrait d'épreuve de concours pour le recrutement d'élèves professeurs.

Annexe 2 : Un exercice extrait d'une épreuve d'accès à la première année d'IUFM (Alsace, session 2001)

Un escalier de 10 marches a un dénivelé de 2 m. Les normes en vigueur indiquent que la hauteur h d'une marche doit être liée à sa profondeur p par la relation (en cm) :

$$60 \leq 2h + p \leq 63.$$

Parmi les nombres suivants, lesquels sont des valeurs acceptables pour l'encombrement au sol e exprimé en mètres ?



A 6,1 B 5,8 C 2,2 D 2,1 E 1,8

A	B	C	D	E

<u>Note 1 :</u> On remarquera dans ce sujet le recours à un vocabulaire non spécialisé, mais choisi de manière à éviter des confusions (le mot profondeur d'une marche notamment.)Pour ce qui est des « normes en vigueur », sont–elles réelles ? (Les marches acceptées semblent étroites)

<u>Note 2</u> : Le tableau à remplir pour répondre soulève une question classique d'évaluation. On demandait de mettre des croix dans les cases convenables. Or il faudrait que chaque valeur donne lieu à acceptation ou rejet, afin qu'il soit clair pour les candidats qu'une absence de réponse pour une valeur ne va pas être prise pour un rejet. Avoir à choisir entre une case OUI et une case NON sous chacune des lettres A, B, C, D, E ne compliquerait pas sensiblement la tâche de réponse et éviterait l'ambiguïté. Ce serait donc préférable.