**Lucia GRUGNETTI**

# ACQUIS ET APPLICATIONS DE LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES, DU POINT DE VUE DES ÉLÈVES

*En mathématique, le point culminant est l'instant où l'on comprend !*
(G. Glaeser, 1976)

**Abstract.** The aim of this paper is that which concerns some issues in the field of mathematical education from pupils' point of view. Which are the productions of our pupils when confronted with problem solving ? Which are their acquisitions, their difficulties? An example comes from protocols by pupils who take part in the Transalpine Mathematics Rally. For what concerns obstacles in learning mathematics, the concept of the limit is taken here into account in connection with Linguistic considerations, which, as Pluvinage said, have a considerable part in mathematics teaching.

**Résumé.** Le but de cette intervention est de prendre en considération certaines problématiques didactiques du point de vue des élèves en tant que protagonistes dans ce domaine. Quelles sont donc les productions de nos élèves lorsqu'ils sont confrontés à la résolution de problèmes ? Quels sont leurs acquis, leurs difficultés ? Un exemple est tiré des analyses des copies d'élèves qui participent au Rallye mathématique transalpin. En ce qui concerne plutôt les obstacles de différentes natures que les élèves rencontrent dans la construction des connaissances, c'est le concept de limite qui est pris ici en considération, par rapport, en particulier aux faits langagiers, qui, comme le rappelle Pluvinage dans sa présentation *Expression et représentation, leur rôle dans les études sur l'enseignement mathématique,* Pluvinage 2003, occupent une place considérable dans l'enseignement mathématique.

Mots clés : Résolutions de problèmes, procédures d'élèves, difficultés, obstacles épistémologiques, faits langagiers, comportements de réponse, école primaire, secondaire et secondaire supérieure.

---

## 1. Introduction

Mon intérêt pour la didactique des mathématiques a toujours été marqué par les problématiques liées à l'enseignement - apprentissage « du point de vue des élèves ».

Mais que veut dire « du point de vue de l'élève » pour chacun d'entre nous ?

S'agit-il de l'élève par antonomase, l'élève comme entité fictive, le bon élève, l'élève faible en mathématique, l'élève dont j'ai besoin pour parler de didactique des mathématiques ?

**ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES**, volume 9, p. 45 – 59.

Comme le dit Guy Brousseau (1994, p.51) *la didactique des mathématiques est née de l'intérêt porté dans les années soixante aux moyens d'améliorer l'enseignement des mathématiques.*

Donc l'accent était mis sur « l'enseignement » et sur l'élève dans un sens que je qualifie de global : n'importe quel élève (l'ensemble des élèves).

Dans les années quatre-vingts, le modèle de recherche en Italie, en général était plutôt (cf. Boero, 1994, p.21) du genre *production et expérimentation de propositions novatrices pour l'enseignement des mathématiques et pour la mise à jour des enseignants.*

Je parlerais, dans ce cas, de l'élève comme entité fictive (abstraite). Il s'agit de l'élève dans une *dimension globale.*

L'évolution des conceptions de l'apprentissage de l'époque, ainsi que les séminaires donnés par François Pluvinage à l'Université de Cagliari (où je travaillais à l'époque) sur le thème de sa thèse (1977) dont le dispositif expérimental (imaginé par lui-même), permet de repérer des variations de réponses sous l'effet des variations d'énoncés, nous a forcé à faire le passage de « l'élève comme entité fictive (abstraite) » aux « élèves, chacun dans sa dimension réelle » : l'élève dans une *dimension locale*.

Il s'agit donc du passage des problématiques d'enseignement aux problématiques d'apprentissage avec toute la cour de questions sur les raisons des réussites et des échecs, les raisons des difficultés, le rôle de l'erreur, les obstacles, les conceptions, les théorèmes en acte, les motivations socio-affectives, etc., qui font partie des acquis de la didactique (comme les notions de contrat, de transposition ... – voir Pluvinage 2002), mais qui portent le regard directement sur les élèves et pas seulement sur l'enseignement. On se pose alors la question cruciale suivante :

*l'élève, chaque élève devient-il le protagoniste de la didactique ?*

## 2. Quelques exemples de recherche liées aux productions d'élèves

### 2.1 Le Rallye mathématique transalpin (RMT)[1]

Ces trente dernières années, la recherche en didactique a mis en évidence le rôle essentiel de la résolution de problèmes dans l'apprentissage des mathématiques et de nombreuses innovations pédagogiques cherchent à en tenir compte dans leurs propositions pratiques.

Au cours de la même période, les concours et autres confrontations mathématiques entre classes ont suscité un intérêt croissant, chez les élèves, appelés à résoudre des problèmes, individuellement mais aussi collectivement,

[1] Concours de mathématique par classes ayant lieu dans différents pays européens pour les degrés 3 à 8.

chez les maîtres et chez les chercheurs en didactique qui peuvent ainsi observer les procédures de résolution mises en oeuvre.

Le Rallye mathématique transalpin (RMT), en dix années d'existence (Grugnetti, Jaquet, 1999) a connu un développement rapide et important[2] : augmentation du nombre des classes participantes, extension internationale, ouverture vers les premiers degrés de l'école secondaire, approfondissement des analyses didactiques. Il se situe dans cet espace dynamique où élèves, enseignants et chercheurs se rencontrent sur le thème de la construction des connaissances mathématiques.

Les finalités du Rallye sont définies explicitement : résolution de problèmes, interactions entre élèves, engagement et responsabilité du groupe classe, explicitation des procédures de résolution, justification des solutions.

Ses animateurs ont toujours maintenu une réflexion active à propos de ces objectifs : ils les analysent de façon critique, cherchent à contrôler leur évolution, vérifient leur adéquation aux attentes des différents partenaires. Ils réfléchissent aussi à la manière d'exploiter les potentialités du Rallye dans le domaine de la rédaction de problèmes, de leur analyse a priori et a posteriori, de la gestion de leurs variables didactiques, de l'étude des stratégies de résolution, des obstacles cognitifs qu'ils présentent pour les élèves.

Dans le RMT on est aussi confronté :

- à la problématique des situations a-didactiques,
- au rôle de l'erreur et des conflits cognitifs,
- au phénomène de l'évolution des connaissances en fonction de l'âge.

On y retrouve donc un ensemble de paramètres de la didactique des mathématiques centré sur les élèves.

### *2.1.1 RMT comme situation a-didactique*

Le milieu créé par le RMT (Grugnetti, Jaquet, Tièche Christinat, preprint) a des caractéristiques très particulières, différentes de la situation classique d'enseignement : l'activité se déroule dans un lieu qui a pour fonction institutionnelle l'enseignement et l'apprentissage, mais en l'absence de l'enseignant, remplacé par une personne étrangère et neutre et dont la seule fonction est la

---

[2] En décembre 1992, *Math-Ecole* proposait à ses lecteurs une confrontation sur des problèmes de mathématiques, par classes entières de 3e, 4e et 5e primaire. C'était le premier *Rallye mathématique romand* auquel ont participé une vingtaine de classes. L'intérêt s'est vite développé et, dès sa troisième édition, lors de l'année scolaire 1994-1995, le concours franchissait ses frontières d'origine et devenait le *Rallye mathématique transalpin* a se développant successivement dans plusieurs régions d'Italie, au Tessin, en France (Bresse), au Luxembourg, en République tchèque et en Israel. Outre son développement géographique, le Rallye s'est aussi étendu aux degrés 6 à 8 de l'école secondaire.

surveillance de la classe. En l'absence d'intention didactique clairement exposée, les élèves reconnaissent et attribuent toutefois à la situation des caractéristiques similaires à une situation d'enseignement par problèmes, où l'intérêt est centré non seulement sur l'évaluation de la réussite, mais également sur l'élaboration des procédures de résolutions (Iesu, 1999, Mazzoni, 1999 et Puxeddu, 1999).

Les situations-problèmes du RMT sont conçues comme des situations où les élèves vont mettre en jeu soit des connaissances personnelles déjà construites, soit des savoir-faire enseignés ou, par nécessité, créer des procédures de résolution donnant lieu à de nouvelles connaissances. Il y a lieu de souligner que les problèmes présentés sont inédits ; les élèves ne peuvent pas, ainsi, recourir uniquement à des connaissances anciennes et les ajuster au problème. De plus, la situation d'interactions dans laquelle les élèves se trouvent, nécessite une médiation de leurs connaissances, leur mise en jeu dans le groupe afin de choisir la justification de leur solution qui leur paraît susceptible d'obtenir le plus de points. Les rapports avec le milieu permettent aux élèves de passer d'un niveau de connaissances à l'autre. Par ailleurs les problèmes sont proposés de manière à ce que les élèves ne soient pas guidés par la lecture des intentions du professeur, mais par la logique du milieu proposé. Ces différentes particularités nous amènent à penser que les situations du Rallye ont un caractère essentiellement a-didactique.

De plus, en vertu des expériences faites lors des épreuves d'essai ou d'épreuves antérieures, les élèves sont certains que le problème posé peut se résoudre et sont assurés, dans une certaine mesure, que leur connaissances sont suffisantes pour élaborer des solutions acceptables du problème et que leur enseignant leur fait confiance. Ainsi, même en l'absence de l'enseignant, nous pouvons constater l'existence implicite d'un contrat didactique liant le maître et l'élève face au contenu mathématique des problèmes et permettant que "l'élève accepte la responsabilité de résoudre les problèmes dont on ne lui a pas enseigné la solution." (Brousseau, 1996, p. 68).

Toutefois, la situation didactique du rallye est particulière du point de vue de son organisation temporelle, puisqu'elle ne présente pas d'homogénéité temporelle. En effet, pour chacun des problèmes proposés, la situation se déroule en deux temps distincts. Dans un premier temps, le problème est entièrement dévolu aux élèves qui le prennent en charge. En vertu des règles du concours, le maître absent de la classe n'intervient pas. Dans un deuxième temps, chronologiquement séparé, le maître reprend la situation-problème en classe et exploite les procédures des élèves afin de les intégrer dans des objectifs mathématiques tels que l'initiation à la démarche scientifique ou à des objectifs mathématiques en lien avec d'autres situations-problèmes. Les problèmes du RMT deviennent ainsi partie intégrante du système didactique mis en place lors des séquences d'enseignement, pour autant que l'enseignant ait décidé d'exploiter les problèmes du RMT.

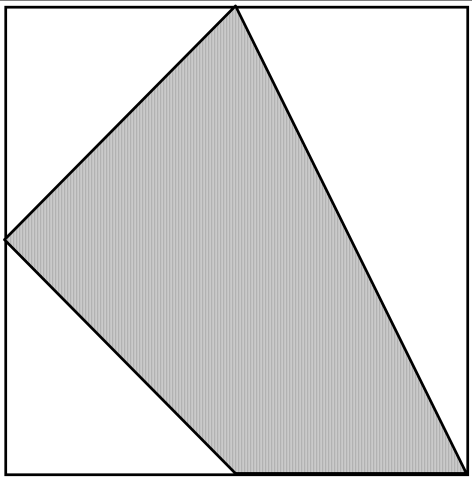
### *2.1.2 Le rôle de l'erreur et des conflits cognitifs*

Le cas du conflit aire-périmètre (Jaquet, 2000)

Lorsque les élèves sont confrontés pour les premières fois au calcul de l'aire de figures géométriques, ils doivent abandonner les procédures additives qu'ils utilisaient pour calculer les périmètres et passer au produit de mesures. Mais ce passage n'est pas évident. Les deux grandeurs en présence pour une même figure : la longueur des côtés et l'aire, sont l'objet de confusions.

**LE JARDIN DE MONSIEUR TORDU**

Voici le jardin de Monsieur Tordu.
Il a planté des fleurs dans la partie grise.
Il a semé du gazon dans la parte blanche.
Monsieur Tordu observe son jardin et se demande:
**"Quelle est la plus grande partie de mon jardin, celle avec les fleurs ou celle avec le gazon ?"**
**Et vous, qu'en pensez-vous ?**
Expliquez votre réponse.



Le problème *Le jardin de Monsieur Tordu* fait apparaître un phénomène que les didacticiens désignent par "conflit" entre l'aire et le périmètre d'une figure. L'analyse des feuilles réponses révèle des raisonnements et des comportements tout à fait sereins. Les élèves ne semblent pas vivre une situation "conflictuelle": on ne trouve nulle trace d'anxiété, ni de désarroi dans leurs commentaires. On a même l'impression que chaque groupe est certain de l'exactitude de sa réponse, le doute ne subsiste que dans quelques rares réserves ou protections du genre : *nous pensons que le gazon est plus grand.*

Cette quiétude et cette assurance des élèves sont heureuses, certes, mais on ne peut s'en contenter, car, de là à la béatitude, il n'y a qu'un pas !

L'analyse a priori du problème était extrêmement réduite, par les contraintes de l'organisation du concours. L'analyse a posteriori a dévoilé une profonde richesse de procédures, dont certaines étaient même inattendues car elles conduisent à des réponses fausses.

**La pratique de la classe**

Il faut prendre en compte ces procédures d'un point de vue didactique. Les regarder sans les juger. Comprendre les raisons de leur mise en oeuvre. Ce n'est qu'à ce moment que l'enseignant pourra agir avec plus d'efficacité, placer ses élèves dans des situations analogues pour leur faire distinguer les deux grandeurs en jeu dans la comparaison de figures, pour les faire discerner les cas où il s'agit de l'aire de ceux où il s'agit du périmètre.

Les enseignants des classes du Rallye ont en main quelques éléments pour poursuivre la réflexion sur le problème *Le jardin de Monsieur Tordu* avec les élèves des groupes qui l'ont résolu, puis avec les autres élèves de leur classe. Ceux qui ne participent pas au rallye peuvent aussi tirer profit du problème et de son analyse.

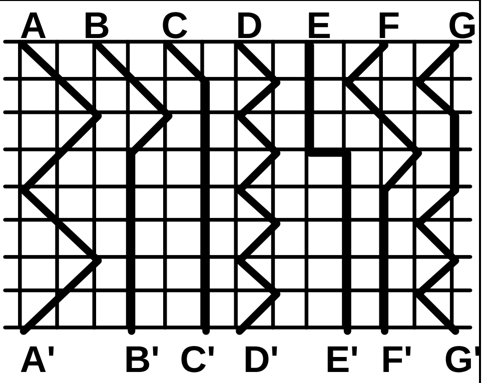
***2.1.3 Le rôle de l'erreur et évolution des connaissances selon l'âge***

Une caractéristique intéressante du RMT est aussi le fait que la plupart des problèmes soient proposés à différentes catégories, donc à des groupes d'élèves d'âges et de niveaux scolaires différents. Cela permet une analyse sur l'évolution des connaissances selon l'âge, aussi bien que le rôle de l'erreur.

Par exemple, le problème *la traversée du quadrillage* a été proposé aux catégories 5, 6 et 7 et l'analyse des stratégies (Crociani et al., 2001) mises en œuvre par les différents groupes d'élèves s'est révélée riche en informations :

**LA TRAVERSEE DU QUADRILLAGE**

André, Berthe, Carlo, Denise, Émile, François et Géraldine ont chacun choisi un chemin pour traverser le quadrillage.
André est parti de **A** pour arriver à **A'**, Berthe de **B** à **B'**, etc.
**Classez ces chemins du plus court au plus long.**
**Indiquez comment vous avez établi votre classement et justifiez votre raisonnement.**




**Deux erreurs récurrentes**

a) Une erreur assez répandue et étrange, présente dans toutes les catégories, dans chaque pays et région consiste à considérer que la mesure de la diagonale est la moitié de celle d'un côté de carré. "Une ligne verticale vaut un carré et une ligne oblique vaut la moitié d'un carré." "Nous avons compté les carrés divisés pour une moitié et les carrés entier pour un."
Il ne s'agit pas d'une faute de formulation ou d'une simple inattention car les groupes qui ont commis cette erreur l'ont ensuite répercutée de façon parfaitement cohérente dans le classement des parcours, trouvant que A et D sont les plus courts et que E est le plus long.

Ces erreurs n'ont pas été assimilées à celles de mesure. Elles sont probablement liées à une confusion entre aire et longueur ou entre segments et carrés, du fait que la diagonale partage un carré en deux et que le parcours le long d'un côté le laisse entier.
On peut imaginer aussi l'interprétation suivante : un parcours est vu comme la surface des carrés immédiatement à sa droite (ou à sa gauche).
La présence d'un rôle joué par l'aire est révélée par d'autres réponses comme la suivante (Degré 7) :
*"Pour trouver l'ordre des parcours, nous avons regardé comment il était articulé et combien de place il occupait dans le rectangle."*
Ceci suggère aussi que certaines estimations du rapport d/l (comme 2/1 ou 4/1) ont une origine dans la confusion entre un carré et son côté.

b) D'un tout autre ordre, l'erreur prévue par l'analyse a priori est celle qui conduit à dire que E est le parcours le plus long et que tous les autres sont égaux. Dans ce cas, aucune distinction n'est faite entre le côté d'un carré et sa diagonale.
*"Les parcours sont tous égaux, de 8 carré excepté le parcours d'Émile que est de 9 carrés. Nous avons compté les carrés pour trouver l'ordre des parcours."*
Ce type d'erreur est le plus fréquent dans les degrés 5 et 6, il dénote l'absence de distinction entre la distance et le parcours effectué pour cette distance. Mais, comme le suggère l'exemple précédent, il peut être aussi dû à une fixation de l'attention sur le carré, non pas comme aire ou comme longueur, mais comme atome constitutif du parcours.
Ces genres d’erreurs peuvent bien être à la source d’autres erreurs et de conceptions erronées chez les élèves. Il faut en tenir compte, il faut en être conscient afin de comprendre les difficultés des élèves et de les aider à les surmonter.

Comme on peut le constater à la lecture des pages précédentes, le RMT n'est pas qu'un concours. Dans l'idée de ses concepteurs, c'est aussi - et surtout - l'occasion d'un intense travail d'analyse didactique. Lors de l'élaboration des sujets, l'équipe internationale de rédaction envisage, a priori, les différentes procédures que les élèves pourront adopter, les obstacles qu'ils rencontreront, les représentations qu'ils se feront de la tâche.

Une deuxième phase formalise l'écriture des textes et le réglage des variables qui permettra de tirer le meilleur profit de la situation. Certaines de ces variables pourront se transformer en variables didactiques lors d'exploitations des problèmes en classe par les enseignants. Après l'épreuve, viennent les corrections où les explications des élèves, les "perles" parfois, la rigueur des justifications surtout, n'en finissent pas d'étonner les correcteurs. Finalement l'analyse a posteriori permet de confirmer ou d'infirmer les hypothèses de départ, de faire apparaître des stratégies ou des représentations non prévues, de calculer la fréquence des types de procédures, de mesurer les difficultés rencontrées par les élèves.

Le déroulement du Rallye offre également des conditions exceptionnelles pour une évaluation des aptitudes du groupe et de ses individus. Tous les maîtres qui l'ont expérimenté le reconnaissent : ils perçoivent à cette occasion des phénomènes, des attitudes, des compétences, des lacunes ou des obstacles qu'ils n'avaient pas pu constater dans les conditions habituelles de classe. Ces observations, exploitées lors de mises en commun, après la passation des épreuves, conduisent à des mises au point, des consolidations, des activités complémentaires, toutes caractéristiques d'une évaluation formative.

## 2.2 Recherches sur le concept de limite du Groupe 0°

Pour ce qui est des recherches du groupe, on pourra se référer, par exemple, à GRUGNETTI et AL., 1999 ; Andriani et al., 1999 ; Dallanoce et al., 2000 ; Alberti et al., 2001 ; Grugnetti et al., 2002.

### *2.2.1 Obstacles de différentes natures*

Le concept de limite est difficile, on le sait bien : les enseignants le savent par la pratique et l'expérience, les chercheurs par leurs recherches. Ce concept fait partie de la famille des obstacles épistémologiques mais cette particularité est reconnue plus par les chercheurs que par les enseignants. Nous avons décidé de mener une enquête sur le sens "linguistique" attribué aux termes "limite" et "infini" ainsi qu'à certaines expressions d'usage courant comme "à la limite" etc. Comme Iacomella, Letizia, Marchini (1997) le montrent bien, il est nécessaire d'acquérir des informations sur ce que certains termes évoquent à l'esprit des élèves pour pouvoir établir un lien avec leur "statut empirique". Ceci devrait éviter que l'une des pires sortes d'incommunicabilité, celle du type disciplinaire, s'instaure entre l'enseignant et l'élève.

Comme le rappelle Pluvinage (2003) dans sa présentation *Expression et représentation leur rôle dans les études sur l'enseignement mathématique,* les faits langagiers occupent une place considérable dans l'enseignement mathématique.

Pour recueillir suffisamment de productions d'élèves, vu la variété des réponses possibles, nous avons choisi de proposer un questionnaire à des élèves des cinq années d'école secondaire supérieure (14-19 ans). La fiche a été proposée à des élèves de 14 à 19 ans, de différents types d'écoles, et parfois à des adultes. Globalement, nous avons analysé presque 600 fiches. Le même questionnaire a été proposé à des adultes non mathématiciens. Nous avons également demandé aux élèves d'instituts artistiques d'illustrer par des dessins leur idée de limite.

Dans la plupart des représentations, apparaît une barrière physique (espace et temps ) et une barrière intellectuelle ou morale.

Le registre de la langue naturelle (pour utiliser l'expression de Duval et Pluvinage), dans le cas du concept de limite n'aide pas pour le passage vers le « registre mathématique ».

Pour vérifier nos hypothèses selon lesquelles les aspects liés à la limite comme "barrière" sont fortement en contradiction avec l'idée de limite infinie, nous avons préparé et proposé aux mêmes élèves impliqués dans l'enquête précédente des questions qui provoquent un conflit cognitif. Ces questions concernent aussi bien la problématique liée aux limites des suites (d'une façon implicite) que celle liée aux limites des fonctions. Comme on le sait bien, les niveaux cognitifs sont assez différents dans les deux domaines.

Les questions liées aux limites des fonctions ont été proposées seulement aux élèves qui avaient déjà travaillé sur le concept de limite. Les autres ont été proposées à tout le monde.

Classe ............. Ecole ..........

*Expliquer le sens du mot « limite »*

*Expliquer le sens des expressions suivantes :*
*« à la limite »*
*« cas limite »*
*« sans limite »*
*« dans une certaine limite (mesure)»*

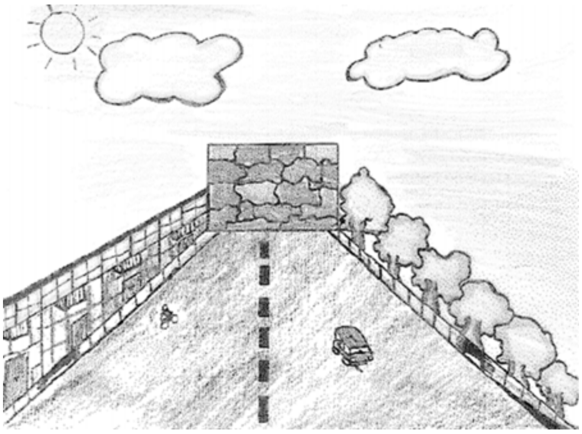
*Tu peux éventuellement ajouter des observations*

En considérant en particulier la première question, qui, d'une certaine façon, recoupe toutes les autres, on a essayé de classifier les réponses en distinguant l'idée principale exprimée.

1. idée d'empêchement, de barrière, de règle, de restriction,... **44%**
2. idée de borne, de fermeté, de distinction,... **30 %**
3. idée de bout, de fin, d'extrême, d'objectif,... **19 %**
4. autres significations[3] **3 %**
5. aucune réponse **4 %**

Puisque l'interprétation des données n'a pas été facile, les résultats précédents doivent être considérés sur un mode qualitatif plutôt que quantitatif. Mais il est intéressant de remarquer que les mêmes concepts apparaissent dans les dessins qu'on a demandés aux étudiants de l'école moyenne et du lycée artistique pour exprimer leur idée de limite :

[3] Dans les “ autres significations ” on a considéré les définitions de caractère mathématique, qui ont été vraiment peu nombreuses (moins de 10 sur 600), même si au moins 100 interviewés avaient étudié la limite au sens mathématique du terme.



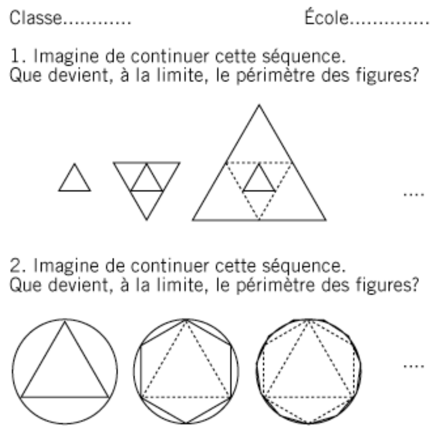
En répartissant les réponses par niveau d'âge (14-17, 18-19, >19), on remarque en particulier que l'idée d'empêchement est plus fréquente chez les plus jeunes et se réduit quand l'âge augmente. L'intolérance aux contraintes ou aux règles est en effet typique des jeunes élèves.

On peut se demander si ces images de limite peuvent gêner l'apprentissage du concept mathématique. On suppose qu'elles pourraient produire deux genres de difficultés : d'un côté celle d'assimiler la limite à une idée d'itération (donc à un processus qui continue à l'infini) et de l'autre celle d'accepter la possibilité d'une limite infinie. En effet, la présence d'une opposition entre l'idée de limite et celle d'infini a été confirmée par une autre enquête que nous avons menée avec les mêmes élèves. Les réponses plus fréquentes à la question " expliquent ce que signifie pour toi le terme " infini " " ont été du genre " quelque chose qui n'a pas de limite ".

### *2.2.2 La limite est-elle une barrière ? Le cas d'une suite*

On a vu dans la discussion des questionnaires précédents que beaucoup d'étudiants, et particulièrement ceux qui ont donné les définitions de BARRIÈRE et de BORNE, associent le mot "limite" à une idée de finitude dans le temps et dans l'espace qui les conduit à considérer la limite en opposition à l'infini.

Pour tester cette conjecture, nous avons mis au point une activité destinée aux élèves qui n'avaient jamais entendu parler de limite au sens mathématique.




Selon notre “ analyse a priori ” un premier conflit devrait émerger dans les deux cas entre la demande de continuer la séquence et l’expression « à la limite ». De plus, dans la première question, l’ambiguïté contenue dans l’affirmation des réponses “ *la limite est infinie* ” devrait se présenter, même si ce n'est que d’une façon implicite.

Enfin, dans la deuxième question, la présence d’un “ bord ” qui renferme toutes les figures devrait facilement être associée à une des images les plus fréquentes de limite, celle d’une ligne qui circonscrit un espace.

Pour la classification des réponses (voir diagramme ), nous avons distingué avant tout entre réponses correctes (indiquées par A) et réponses erronées (B), tandis que les élèves qui n’ont donné aucune réponse font partie du groupe C.

Les réponses du genre A ont été divisées en deux catégories. La première (A1) contient les réponses où, bien qu’on n’arrive pas à donner une valeur à la limite, on établit un rapport exact entre les termes de la suite. La deuxième (A2) contient les réponses correctes en tolérant même les expressions peu rigoureuses.

Parmi les réponses erronées nous avons distingué celles où la construction n’a pas été comprise (B1), celles où l’on s’arrête à la quatrième situation (B2), celles qui contiennent des fautes relatives aux variables[4] (B3), celles qui présentent d’autres fautes (B4).

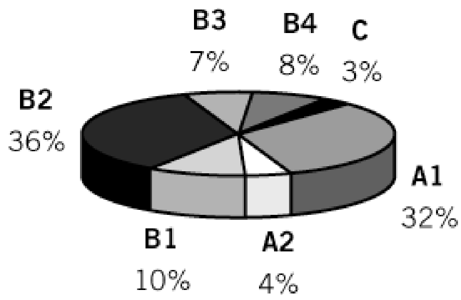
La fiche a été proposée à un échantillon de 406 étudiants de l’école moyenne (collège) et supérieure (lycée) de 13 à 18 ans, qui n’avaient pas encore abordé les notions d’analyse.

Les résultats montrent que les problèmes dont la cause pourrait être, à notre avis, une opposition entre limite et infini, se présentent d’une façon assez

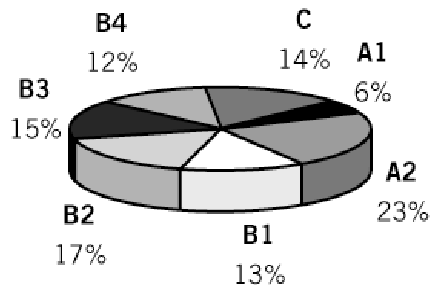
[4] Les fautes impliquant les variables (B) concernent principalement un choix erroné de la variable en jeu (par exemple le nombre ou la longueur des côtés des polygones) ou l’échange entre variable dépendante et variable indépendante.

remarquable. On le voit par exemple dans les réponses correctes, où 32 % des élèves ont une bonne intuition de la croissance de la suite, mais 4 % des étudiants seulement arrivent à affirmer que “ la limite est infinie ”. L’ambiguïté impliquée dans cette expression détermine un véritable conflit : on le voit très bien dans cette réponse d’un élève de collège (13 ans) : “ Je n’arrive pas à comprendre ce qu’on entend par “ à la limite ” parce que si l’on circonscrit continuellement les triangles selon le rapport P’ =2P, on n’a ni une borne ni un périmètre, parce que autrement le résultat serait P=∞”

Question 1




Question 2




Parmi les réponses erronées on remarque que 36% des élèves s’arrêtent à la quatrième situation (pour des raisons "pragmatiques", en général) comme s’ils n’associaient pas l’expression “ à la limite ” à l’idée d’un processus itératif.

Dans la deuxième question, on remarque que les réponses correctes sont pour la plupart complètes (23 %) et seulement un petit nombre d’élèves (6 %) s’arrête à la description du cours général de la suite. Il apparaît qu’il n’existe plus de problèmes pour ceux qui répondent correctement, à affirmer que “ la limite est la circonférence ”, en s’appuyant probablement sur l’image de limite comme “ borne ”.

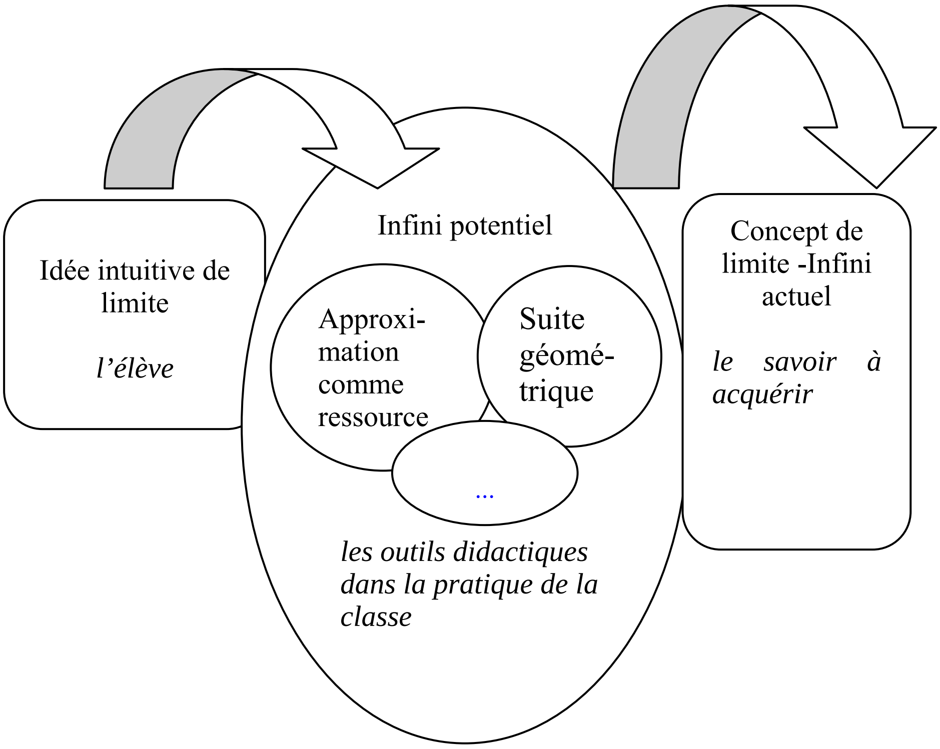
En essayant de tirer quelques conclusions on remarque que les difficultés prévues à procéder par l’itération et à affirmer que la limite est infinie apparaissent d’une façon significative.

On pourrait rapporter ces problèmes à une opposition entre les termes “limite” et “infini” engendrée par l’usage commun de ces mots.

Mais la question s’est révélée plus insidieuse que l’on ne pensait et les causes des insuccès sont probablement diversifiées et non complètement attribuables à des raisons linguistiques.

On a remarqué par exemple une difficulté considérable et imprévue dans l’interprétation des données graphiques et linguistiques et parfois une mauvaise maîtrise du concept de fonction.

A la suite et à partir des résultats de cette recherche et d'autres qui l'ont suivie (présentation de Falcade, Rizza à Mulhouse en mars 2002) sur les difficultés des élèves en analyse infinitésimale, nous sommes en train de construire des outils didactiques pour la construction de certains concepts, en tenant compte des caractéristiques saillantes de notre recherche (verticalité-de 6 à 18 ans-, prééminence des intuitions des élèves, familiarisation précoce avec l'infini) :



## BIBLIOGRAPHIE

ALBERTI N., ANDRIANI M. F., BEDULLI M., DALLANOCE S., FALCADE R., FOGLIA, S., GREGORI S., GRUGNETTI L., MARCHINI C., MOLINARI F., PEZZI F., RIZZA A., VALENTI C.: 2001, 'Sulle difficoltà di apprendimento del concetto di limite', *Riv. Mat. Univ. Parma*, (6) 3*, 1-21.

ANDRIANI M.F, DALLANOCE S., GRUGNETTI L., MOLINARI F., RIZZA A., 1999, "Autour du concept de limite" in F. Jaquet (ed.) Proceedings of CIEAEM 50, Neuchâtel 2-7 August 1998, 329-335.

BOERO P., 1994, 'Situations didactiques et problèmes d'apprentissage : convergences et divergences dans les perspectives de recherche', *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, La Pensée Sauvage, 17-50.

BROUSSEAU G., 1976, 'Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques', *Comptes-rendus de la XXVIIIe rencontre de la CIEAEM,* Louvain-la-Neuve, 101-117.

BROUSSEAU G., 1996, Fondements et méthodes de la didactiques de mathématiques, in : J. Brun (sous la direction de) *Didactiques des mathématiques*, Delachaux et Niestlé, Lausanne, Paris, 45-143.

CROCIANI C., SALOMONE L., 2001, 'Un problème de type géométrique : *La traversée du quadrillage*', in (Grugnetti, Jaquet, Crociani, Doretti, Salomone, eds) Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin, Siena 1999-Neuchâtel 2000, 118-128.

DALLANOCE S., GRUGNETTI L., MOLINARI F., RIZZA A. et AL., 2000, 'A cognitive co-operation across different sectors of education', in Ahmed, Kraemer, Williams (eds.) *Proceedings of CIEAEM 51*, Chichester, Horwood Publishing, 297-303.

FALCADE R., RIZZA A, preprint, 'Approche intuitive du concept de limite', *Comptes rendus du colloque « Regards et perspectives sur l'enseignement de l'Analyse* », Mulhouse, mars 2002.

GLAESER G., 1976, 'Heuristique générale : estimation de la difficulté d'un problème', *Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre de la CIEAEM*, Louvain-la-Neuve , 33-47.

GRUGNETTI L., RIZZA A., BEDULLI M., FOGLIA S., GREGORI S., 1999, 'Le concept de limite : Quel rapport avec la langue naturelle ?' in F. Jaquet (ed.) Proceedings of CIEAEM 50, Neuchâtel 2-7 August 1998, 313-318.

GRUGNETTI L, JAQUET F., TIÈCHE CHRISTINAT C., preprint, 'Enjeux didactiques des concours mathématiques', Actes du Colloque international Guy

Brousseau « Autour de la théorie des situations didactiques », Bordeaux 26-28 giugno 2000.

GRUGNETTI L., RIZZA A., DALLANOCE S, FOGLIA S., GREGORI S., MARCHINI C., MOLINARI F., PICCOLI A., VANNUCCI V., 2002, 'Piccole intuizioni crescono : alcune attività per sviluppare idee intuitive a livello di scuola dell'obbligo', in Malara N.A., Marchini, C., Navarra, G., Tortora, R. (eds.), 2002 : *Processi didattici innovativi per la matematica nella scuola dell'obbligo*, Pitagora Editrice, Bologna.

IACOMELLA A., LETIZIA A., MARCHINI C., 1997, *Il progetto europeo sulla dispersione scolastica : un'occasione di ricerca didattica. Dalla lingua d'uso comune e con il buon senso verso l'idea di connettivo logico e di quantificatore logico*, Galatina.

IESU N., 1999, 'Le point sur l'expérience, in (Grugnetti, Jaquet, eds) *Le Rallye mathématique transalpin. Quel profits pour la didactique ?*, Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin, Brigue 1997 – 1998, Dipartimento di Matematica, Università di Parma & Institut de recherche et de documentation pédagogique, Neuchâtel 33-36.

JAQUET F., 2e Rallye mathématique romand, Math-Ecole, n. 162, 1994, 17-21.

JAQUET F., 2000, 'Le conflit aire-périmètre', *L'educazione Matematica*, première partie. n. 2-giugno, 66-77, deuxième partie n. 3-ottobre, 126-143.

MAZZONI C., 1999, Le point de vue d'une enseignante de l'école primaire. IN : L. Grugnetti & F. Jaquet (Eds) ) *Actes des journées d'études sur le RMT, Brigue 1997-98,* 23 - 28. Dipartimento di Matematica, Università di Parma & Institut de recherche et de documentation pédagogique, Neuchâtel, 23 – 28.

PLUVINAGE F., 1977, *Difficultés des exercices scolaires en mathématiques (Etude des comportements de réponse par enquêtes à plusieurs modalités*, Strasbourg, Thèse de Doctorat d'Etat (Sciences).

PLUVINAGE F., 2003, Expression et représentation, leur rôle dans les études sur l'enseignement mathématique in : Didactique des mathématiques, *Revue du Centre de Recherche en Education*, n° 22-23 (décembre 2002) coordonné par Alain Denis, Saint-Étienne, Université Jean Monnet, 235-276.

PUXEDDU S., 1999, Rallye et interdisciplinarité : l'expérience d'une enseignante de lettres. IN : L. Grugnetti & F. Jaquet (Eds) ) *Actes des journées d'études sur le RMT, Brigue 1997-98,* 29 - 32. Dipartimento di Matematica, Università di Parma & Institut de recherche et de documentation pédagogique, Neuchâtel, 29-32.

Unità locale di Ricerca Didattica dell'Università di Parma, Italie