Richard CABASSUT

ARGUMENTER OU DEMONTRER : CONTINUITE OU RUPTURE DIDACTIQUE ? LES EFFETS D'UNE DOUBLE TRANSPOSITION[1]

Abstract. We approach the works on proof with the theoretical frame of Chevallard's anthropological theory of didactics. So it is possible to interpret mathematical teaching of proof as a double transposition, one of mathematical knowledge and the other one of social knowledge. In this interpretation there is also a didactical continuity between argumentation and demonstration as will be shown by examples taken from mathematical textbooks. We try to explain this continuity with the notions of "function of validation".

Résumé. On aborde les travaux sur la démonstration à l'aide du cadre théorique de l'anthropologie du didactique proposée par Chevallard. On peut alors interpréter l'enseignement de la démonstration en mathématiques comme le lieu d'une double transposition, celle du savoir mathématique et celle du savoir social. Dans cette interprétation, il y a alors continuité didactique entre argumenter et démontrer, comme l'illustreront des exemples issus de manuels scolaires de mathématiques. On essaie d'expliquer cette continuité avec les notions de « fonction de la validation ».

Mots-clés : preuve, démonstration, validation, théorie anthropologique, transposition, contrat, comparaison France Allemagne, international.

Comme le rappelle Hanna [Hanna 2000, p. 10], depuis plusieurs années, l'enseignement de la démonstration est en question aux Etats-Unis, et notamment avec les standards du Conseil National des Professeurs de Mathématiques (NCTM) de 1989 et de 2000. Knuth [Knuth 2000, p. 1] estime que ces standards *« atténuaient le rôle de la preuve dans les mathématiques scolaires, choisissant en revanche de porter l'attention sur le raisonnement »*. Ross [Ross 1998, pp. 252-255] rappelle les positions de ce conseil : *« le but le plus important de l'enseignement des mathématiques est d'enseigner aux étudiants le raisonnement logique. Cette capacité fondamentale n'est pas seulement mathématique […] On devrait faire ressortir que le fondement des mathématiques est le raisonnement. Tandis que la science vérifie à travers l'observation, les mathématiques vérifient à travers le raisonnement logique… Des résultats peuvent être validés dans un petit nombre de cas directement, mais les étudiants doivent reconnaître que tout ce qu'ils ont dans ce cas c'est l'évidence d'une conjecture, jusqu'à ce que le résultat ait été rigoureusement établi… La chose importante est d'être honnête : si seulement des illustrations ou un argument de plausibilité sont proposés, les étudiants doivent se rappeler qu'une raison logique ou une démonstration est*

---

[1] Clin d'œil à l'article fondamental de Duval : *Argumenter, Démontrer, Expliquer : continuité ou rupture cognitive ?* Revue Petit x, n°31, 37-61, 1992.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 9, p. 153 – 174.

nécessaire. Ce point ne devrait pas être perdu maintenant que la technologie propose des moyens d'exploration des idées mathématiques et d'examen des conjectures. Bien sûr, le développement des démonstrations doit se faire davantage d'après leur valeur éducative que d'après la correction formelle.» Ces propos de Ross rappellent que le raisonnement logique n'est pas un monopole des raisonnements mathématiques et qu'il existe d'autres formes de raisonnements que le raisonnement logique, notamment les raisonnements par illustration, par plausibilité, par observation ou par exploration. Montrons que le cadre de la théorie anthropologique du didactique permet de prendre en compte ces variétés de raisonnements.

1. Le cadre de la théorie anthropologique du didactique

1.1. Raisonnement, institution, logique, théorie

Nous adoptons la conception du raisonnement développée par Blanché [Blanché 1995, pp. 1-8] : « un **raisonnement**, c'est d'abord une certaine activité de l'esprit, une opération discursive pour laquelle on passe de certaines propositions posées comme prémisses à une proposition nouvelle, en vertu du lien logique qui l'attache aux premières : en ce sens c'est un processus qui se déroule dans la conscience d'un sujet selon l'ordre du temps […]. Pour se préciser et se communiquer, le raisonnement devra bientôt s'extérioriser dans le langage parlé, et quand enfin il se stabilisera par l'écriture, il sera devenu une sorte de chose impersonnelle et intemporelle, objet pour une analyse structurale […]. Raisonner, c'est inférer une proposition, appelée conclusion, à partir de certaines autres prises comme prémisses […] L'office de la **logique** est de déterminer les conditions de validité d'une inférence.»

Pour étudier un raisonnement il est bon de préciser à suite des travaux de Chevallard [Chevallard 1992, 1999] :

- dans quel contexte d'**institution**[2] il a été produit (vie quotidienne, cours de mathématiques, cours de sciences de la vie et de la terre, laboratoire de mathématiques, manuel de classe) ; le type *d'institution* permettra parfois de mieux préciser le type de *langage* ou la *logique* utilisés ; car si nous concevons qu'un raisonnement utilise *une* logique, celle-ci n'est pour autant ni unique ni explicite,

[2] « institution » est pris dans son sens général : chose (règle, usage, organisme) établie ; Chevallard [Chevallard 1992, 87-88] va jusqu'à parler d'« institution de la vie quotidienne ».

- dans quel cadre *théorique* il est situé : la **théorie**[3] à laquelle est rattaché un raisonnement fixe les règles d'inférence (et à ce titre englobe la logique attachée à ce raisonnement), leurs conditions d'utilisation et par là même les critères permettant de déterminer si l'application d'une règle est correcte ou incorrecte ; la théorie définit également les objets manipulés par le raisonnement (proposition, prémisse, conclusion, …) ; elle définit le vrai, le faux, notamment en définissant des vérités premières admises et les règles d'inférence qui permettront d'étendre la vérité à d'autres propositions. Bien entendu, la théorie n'est pas toujours définie explicitement. La connaissance des *institutions* où la théorie est mise en œuvre permet donc de mieux la préciser.

1.2. Tâche, technique, technologie, théorie

Nous appellerons raisonnement de validation ou **validation**[4], un raisonnement qui infère (par une règle[5] d'inférence) la connaissance de la vérité d'une proposition à partir d'autres propositions données, dont on suppose connaître la vérité. La connaissance de la vérité peut être qualifiée de certaine ou de plausible, avec éventuellement un degré de plausibilité. La logique et la théorie rattachées au raisonnement de validation précisent la qualification de la connaissance de la vérité. Lorsque la connaissance de la vérité est certaine, nous appellerons la validation **démonstration** ou preuve[6] ; lorsqu'elle est plus ou moins

[3] « théorie » est pris dans son sens général : ensemble des idées ou des intuitions concernant un domaine particulier ; Chevallard [Chevallard 1999 p. 227] conçoit la théorie comme le niveau de « justification-explication-production » des technologies et des techniques qui ont permis d'effectuer certaines tâches au sein d'une institution

[4] Nous empruntons le terme validation à Balacheff [Balacheff 1988 p. 32]. Nous étudions ici les raisonnements de validation, et non pas la validation des raisonnements. Nous ne nous intéressons pas aux raisonnements non valides, c'est-à-dire qui ne respectent pas la logique à laquelle ils se réfèrent. Nous étudierons donc dans cette étude des raisonnements valides du point de vue d'une certaine logique. C'est pourquoi ces raisonnements seront extraits de manuels scolaires ou en références à des programmes officiels d'enseignement, qui proposent en général des raisonnements valides.

[5] Nous n'effectuons pas la subtile distinction de Blanché [Blanché 1968, 1996, p. 72] entre règle et loi.

[6] Nous utiliserons indifféremment les deux mots *démonstration* et *preuve* qui sont traduits bien souvent par le même mot *Beweis* en allemand et par le même mot *proof* en anglais. A la différence de Balacheff [Balacheff 1988 p. 30] nous ne limiterons pas le mot démonstration aux institutions mathématiques ou d'enseignement des mathématiques. Dans ces derniers cas nous préciserons *preuve mathématique* ou *démonstration mathématique*.

plausible nous l'appellerons **argumentation**. Cette définition s'inspire des travaux de Toulmin[7] [Toulmin 1958, 1993].

Nous allons étudier le **type de tâche** « valider la vérité d'une proposition donnée à partir de prémisses dans une institution donnée » ou en abrégé le genre de tâche *validation*. On rappelle que l'institution précise la théorie dans laquelle on se place, et notamment la vérité et la logique considérées.

Une tâche de validation s'accomplit en utilisant une ou plusieurs techniques. Une **technique**[8] est l'application[9] d'une règle d'inférence aux prémisses pour en inférer la conclusion. Lorsqu'une tâche de validation n'utilise qu'une seule technique on pourra l'appeler pas de validation : on peut donc décomposer une tâche de validation en pas de validation.

Dans le cas où la règle d'inférence est un énoncé-tiers de la forme « si conditions alors conclusion », la technique prend en charge ce que Duval [Duval 1995, p. 244] appelle la « vérification des conditions » par les prémisses et « le détachement de la condition de l'énoncé-tiers » appliqué en conclusion de la validation.

Une **technologie**[10] est une justification de la technique : elle est constituée de la règle d'inférence, de la validation de la règle d'inférence et de tout ce qui est nécessaire à cette validation (autres prémisses, définitions, autres règle d'inférence, …).

Une **théorie**[11] propose des justification des technologies utilisées. Elle précise notamment la logique utilisée. On peut se limiter à une théorie locale,

---

[7] Toulmin [Toulmin 1993, p. 184] propose « la distinction entre arguments nécessaires et probables : c'est-à-dire entre les arguments dont la garantie nous autorise à avancer sans équivoque la conclusion (qui peut donc être accompagnée du qualificatif modal « nécessairement ») et ceux dont la garantie ne nous habilite qu'à tirer une conclusion provisoire (nuancée par le mot « probablement »), sujette à de possibles exceptions (« vraisemblablement ») ou conditionnelle (« pourvu que… ») ».

[8] Pour Chevallard [Chevallard 1999, p. 225], une *technique* est « une manière d'accomplir, de réaliser les tâches ».

[9] On distingue donc l'application d'une règle, qui relève de la technique, de la règle elle-même qui relève de la technologie.

[10] « On entend par technologie, et on note généralement θ, un discours rationnel […] ayant pour objet premier de justifier « rationnellement » la technique τ, en nous assurant qu'elle permet bien d'accomplir les tâches du type T, c'est-à-dire de réaliser ce qui est prétendu. » [Chevallard 1999, p. 226]. C'est au niveau de la technologie que se situe la garantie ou règle d'inférence de Toulmin [Toulmin 1993, p. 120]. *« Une deuxième fonction de la technologie est d'expliquer, de rendre intelligible, d'éclairer la technique »* [Chevallard 1999, p. 226].

[11] « A son tour, le discours technologique contient des assertions, plus ou moins explicites, dont on peut demander raison. On passe alors à un niveau supérieur de justification-explication-production, celui de la théorie, Θ ». [Chevallard, 1999, p. 227].

comme proposée par Stein [Stein 1986, p. 12], dans laquelle on développe uniquement ce qui est nécessaire à la compréhension de la technique. Illustrons notre propos dans différentes institutions.

1.2.1. Dans des institutions sociales

Chevallard déclare [Chevallard 1999, p. 225] : « Le point crucial à cet égard, dont on découvrira peu à peu les implications, est que la théorie anthropologique du didactique situe l'activité mathématique, et donc l'activité d'étude en mathématiques, dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales. » Dans ces institutions sociales on peut débattre sur des lois, des règles, des contrats, des coutumes, des savoirs, des problèmes concernant des communautés données.

On peut d'abord considérer l'« institution de la vie quotidienne » [Chevallard 1992, 87-88] dans laquelle on peut développer, à propos de la validation, une « théorie de la vie quotidienne » [Stein 1986, p. 14] fondée sur une « logique de la vie quotidienne » [Stein 1986, p. 14]. De nombreux auteurs ont étudié cette logique sous différents noms : logique naturelle [Grize, 1996, *Logique naturelle et communication*], logique en action [Toulmin 1993 p. 181], logique appliquée [Toulmin 1993 p. 315], logique pratique [Toulmin 1993 p. 320], logique de la pratique [Bourdieu 1980, p. 134], le raisonnement pratique [Audi,1989].

On peut également étudier d'autres logiques dans d'autres institutions : en droit [Perelman 1963, Haarscher 1994], dans les sciences expérimentales [Carnap, Chalmers, Hempel], en philosophie [Perelman 1952]…

Nous réserverons de préférence le qualificatif *social* pour une institution, un savoir, une théorie, une logique qui n'ont pas de rapport direct avec le savoir mathématique[12].

Nous allons proposer quelques exemples de règles d'inférence utilisées dans **les validations sociales** : de ce fait nous désignerons ces règles sous le nom d'arguments. La modalité de la vérité de la conclusion (vrai certainement ou vrai plausiblement) sera fixée suivant l'institution, la logique et la théorie considérées.

Argument d'autorité [Perelman, Olbrechts-Tyteca 1976, p. 410-417]

Si une autorité (reconnue dans l'institution) affirme qu'une proposition est vraie, alors la proposition est vraie (certainement ou plausiblement).

C'est au niveau que se situe le fondement de la garantie de Toulmin [Toulmin 1993, p. 128].

[12] Il est cependant bien clair que les institutions mathématiques ou d'enseignement des mathématiques sont des institutions sociales. Mais comme nos travaux portent sur l'enseignement des mathématiques il nous a paru plus simple de regrouper sous le terme *social* ce qui n'est pas en rapport direct avec le savoir mathématique, et de réserver le terme *mathématique* à ce qui est en rapport direct avec le savoir mathématique.

« Les autorités invoquées sont fort variables : tantôt ce sera « l'avis unanime » ou « l'opinion commune », tantôt certaines catégories d'hommes, « les savants », « les philosophes », « les Pères de l'Eglise », « les prophètes » ; parfois l'autorité sera impersonnelle : « la physique », « la doctrine », « la religion », « la Bible » ; parfois il s'agira d'autorités nommément désignées [Perelman, Olbrechts-Tyteca 1976, p. 413].»

Par exemple, en classe de mathématiques, le professeur ou le manuel scolaire sont des autorités et leurs affirmations sur le savoir mathématique sont supposées vraies : c'est une clause du contrat didactique dans la classe. Dans la même classe de mathématiques les élèves pourront invoquer l'autorité du plus grand nombre. Dans ce cas cette autorité n'est pas reconnue dans l'institution *classe de mathématiques* ; par contre elle peut être reconnue dans l'institution *groupe des élèves*. On voit donc que chaque institution possède sa propre logique qui peut conduire à des vérités différentes.

Argument pragmatique [Perelman,Olbrechts-Tyteca 1976, p. 358-364]

Perelman et Olbrechts-Tyteca appellent « argument pragmatique celui qui permet d'apprécier un acte ou un événement en fonction de ses conséquences […]. Cependant, hors les cas où cause et effet peuvent être considérés comme la définition l'un de l'autre […] l'événement à apprécier ne sera qu'une cause partielle, ou une condition nécessaire. Pour pouvoir transposer sur lui tout le poids de l'effet, il faudra diminuer l'importance et l'influence des causes complémentaires, en les considérant comme des occasions, des prétextes, des causes apparentes». [Perelman Olbrechts-Tyteca 1976, p. 358, p. 361-362].

L'argument pragmatique est la base du raisonnement expérimental dans les sciences, où une hypothèse est validée si ses conséquences sont vérifiées expérimentalement. Oléron précise [Oléron, 1996, p. 106-107] : « A défaut de pouvoir être strictement vérifiée, une hypothèse peut se présenter comme plus ou moins *plausible* […]. Divers facteurs de plausibilité ont été mentionnés : la simplicité, l'ampleur du champ d'application, la similitude avec des interprétations acceptées, l'intelligibilité des mécanismes invoqués. Ce peuvent être des raisons pour accepter une interprétation, mais ce ne sont pas des preuves au sens strict du mot. »

On peut considérer que la vérification expérimentale d'une affirmation portant sur un objet par la réalisation matérielle de l'objet relève de ce type d'argumentation. On utilise la conséquence suivante : si une proposition portant sur un objet est vraie, alors elle sera vraie sur toute réalisation matérielle de cet objet. C'est le cas en géométrie lorsqu'on construit pratiquement une figure à l'aide d'instruments ou de logiciels de dessin et que l'on vérifie, visuellement ou par mesure, l'affirmation sur l'objet réalisé. C'est également le cas lorsqu'on vérifie une égalité d'aires par manipulation et recomposition de surfaces. On rejoint ici les preuves pragmatiques de Balacheff [Balacheff 1988, p. 54].

Argument par induction [Perelman, Olbrechts-Tyteca 1976, p. 471-499]

Perelman et Olbrechts-Tyteca [Perelman, Olbrechts-Tyteca 1976, p. 471] analyse "les liaisons qui fondent le réel par le recours au cas particulier. Celui-ci peut jouer des rôles fort divers : comme exemple, il permettra une généralisation ; comme illustration, il étayera une régularité déjà établie ; comme modèle, il incitera à l'imitation. »

On peut distinguer différents types d'induction :

- l'induction incomplète[13] : on vérifie une propriété sur un nombre de cas jugé suffisant ou sur un cas considéré comme suffisamment général ou générique pour entraîner la plausibilité de la vérité de la propriété dans tous les cas,
- l'induction statistique : on s'appuie sur les modèles probabilistes pour en déduire la probabilité de la vérité d'une proposition (statistique inférentielle) à partir d'une vérification sur un échantillon,
- l'induction expérimentale : on généralise à tous les cas la vérification expérimentale effectuée sur un nombre fini de cas.

1.2.2. Dans des institutions mathématiques

Nous appellerons institutions mathématiques des institutions dont la fonction est l'élaboration du savoir mathématique, par exemple les départements mathématiques des universités, les centres de recherche en mathématiques, mais aussi les institutions qui organisent la communication et les échanges dans la communauté des mathématiciens. Nous parlerons de **mathématiques savantes** en nous référant aux mathématiques hors des institutions sociales où elles ont été produites, dans leur fonctionnement propre et autonome, comme corpus de connaissances. Cette conception traverse l'histoire des mathématiques de Platon, pour qui les mathématiques existent indépendamment des êtres humains, jusqu'aux formalistes, pour qui il n'y a pas d'objets mathématiques : « les mathématiques consistent seulement en axiomes, définitions théorèmes - en d'autres mots des formules » [Davis 1985, p. 309]. On pourra utiliser comme illustration approximative (et approchante) de ces mathématiques savantes les mathématiques et des démonstrations savantes, celles que l'on trouve dans les traités théoriques de Bourbaki.

Nous appellerons **mathématiques sociales** les mathématiques conditionnées par une institution sociale, conditions par exemple sur la réception, la production

[13] on peut classer dans cette catégorie l'empirisme naïf, l'expérience cruciale et l'exemple générique proposés par Balacheff [Balacheff 1988, pp. 56-58].

ou le traitement de ces mathématiques. On envisage bien entendu les paramètres socio-culturels mais aussi des paramètres plus individuels (psychologiques, cognitifs,...). Certains auteurs parlent d'ethnomathématiques [IREM de Montpellier, 1993, pp. 535-580]. Un débat philosophique pourrait conduire à discuter la position que toutes les mathématiques sont sociales ; en effet les mathématiciens professionnels, les **savants** mathématiciens, forment une communauté sociale qui valide les connaissances du corpus des mathématiques. L'histoire des mathématiques illustre les variations de conception de cette communauté, comme le précise Barbin [IREM de Besançon, 1989, p. 5] à propos de la démonstration : « Situer la démonstration dans l'histoire, c'est aussi se garantir de la « méprise » qui consiste à croire que la démonstration est univoquement définie, c'est être obligé de penser sa diversité. Les fondements de la démonstration se transforment, la signification de la démonstration se modifie, les formes de la démonstration changent, le sentiment de l'évidence varie avec l'histoire ». Nous n'ouvrirons pas ce débat ici.

Dans une démonstration mathématique, les différentes règles d'inférence utilisées peuvent être produites par la théorie logique utilisée ou par la théorie mathématique dans laquelle on se situe ; elles auront différents statuts : axiomes, théorèmes, propriétés…

1.2.3 Dans des institutions didactiques

« Dans la plupart des univers culturels contemporains, l'intention didactique, relative à un savoir déterminé, est cristallisée en institutions ayant, vis-à-vis de ce savoir, une mission d'enseignement, et définissant, pour ses membres, relativement à ce savoir, deux positions majeures : celle d'enseignant, celle d'enseigné. » [Chevallard]. Nous appellerons **institutions didactiques** ces institutions, par exemple une classe de Gymnasium allemand, une classe lycée français, le système éducatif d'enseignement secondaire du Bade-Wurtemberg…

Nous appellerons **mathématiques didactiques** les mathématiques conditionnées par une institution sociale particulière à savoir une institution d'enseignement. Dans notre étude, nous nous limiterons à l'enseignement secondaire. Ces mathématiques didactiques prennent souvent leur origine dans les mathématiques savantes.

Nous appellerons **validation didactique** une validation dans une institution didactique.

Nous parlerons enfin de **techniques didactiques** pour les techniques utilisées dans l'enseignement des mathématiques.

Cette restriction à l'enseignement des mathématiques est très importante. Nous ne nous intéresserons pas *a priori* aux techniques didactiques de validation développées dans l'enseignement du français à propos de l'argumentation, ou dans l'enseignement de la philosophie à propos de la dissertation, ou dans l'enseignement des sciences physiques à propos de la méthode expérimentale...

Une technique didactique de validation de la vérité mathématique d'une proposition est donc une technique qui permet, dans une institution didactique où les mathématiques sont enseignées, de valider la vérité mathématique d'une proposition.

Nous rappelons un terme important du contrat en situation d'enseignement, dans le cas d'une validation didactique : le professeur est en mesure, dans la plupart des cas (car on peut imaginer une conjecture pour laquelle le professeur n'arrive pas à se prononcer), de garantir la vérité mathématique d'une proposition. Nous appellerons cette clause du contrat *« référence à l'autorité du professeur »*, et l'application de cette clause sera appelée « *argument d'autorité du professeur* ». Cette clause de contrat n'existe pas pour une démonstration mathématique. Ceci ne veut pas dire que dans la communauté des mathématiciens il n'y a pas des mathématiciens dont l'autorité permet de recommander un article pour une revue ou de placer un auditoire dans une situation de confiance, avec baisse de vigilance. Mais cette référence à l'autorité du mathématicien ne peut être un argument pour la démonstration mathématique. Cet argument d'autorité est utilisé lorsque le professeur énonce un théorème et déclare la démonstration admise, ou encore lorsque, lors d'une démonstration, il « tire de son chapeau » une propriété-secours, qu'on admet, et qui permet de poursuivre la démonstration. Nous verrons des exemples plus loin.

Une technique didactique peut être :

- une technique mathématique, par exemple si dans une classe donnée tous les élèves ont accès à cette technique mathématique,
- une technique sociale, notamment pour remplacer une technique mathématique non disponible,
- une combinaison des deux types de techniques.

Tietze [Tietze 1997, p. 159] écrit : « Il est important pour l'enseignement des mathématiques qu'on n'admette pas seulement la démonstration mathématique comme justification, mais qu'on s'expose à de multiples formes de justifications. En outre il faut encourager la mise au premier plan de la forme dialoguée de justification. »

1.3. L'hypothèse de la double transposition

1.3.1. Transposition didactique

Le passage des mathématiques savantes aux mathématiques didactiques a été étudié par Chevallard sous le nom de **transposition didactique** : « un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement. Le « travail » qui d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement est appelé la transposition didactique [Chevallard, 1985, p. 39]. »

De manière générale on pourrait parler de transposition d'un savoir d'une institution dans une autre. Lorsque l'institution d'arrivée est une institution didactique, on parlera de transposition didactique.

1.3.2. Le savoir social

Cependant l'école n'a pas pour seule fonction d'opérer la transposition didactique du savoir savant mathématique ou plus généralement de savoirs savants d'autres disciplines. Elle doit permettre à l'élève d'acquérir des **savoirs sociaux**.

Ainsi **en France** « la mission du lycée est de permettre à tous les élèves... d'acquérir les savoirs fondamentaux et d'accéder aux capacités de jugement et aux formes culturelles et patrimoniales qui les inscrivent dans la collectivité nationale et européenne et, plus généralement dans l'histoire des hommes... L'acquisition des connaissances qui sont la base de toute formation intellectuelle doit permettre, dans toutes les disciplines, de développer le sens de l'effort, l'attitude de probité intellectuelle, de recherche honnête de la vérité, de respect de l'opinion d'autrui... Tous les enseignements doivent favoriser l'indépendance intellectuelle, solliciter l'imagination, développer l'intérêt et la curiosité des élèves, obtenir leur participation active en encourageant les productions individuelles et collectives sous toutes leurs formes. [Ministère, 1999, p. 4]».

En Allemagne, dans le Bade-Wurtemberg, « on peut transmettre les qualifications clés futures comme l'autonomie, la conscience de la responsabilité, la capacité à travailler en équipe, et la compétence méthodique » [Ministerium, 4/1994, p. 5].

Nous faisons l'hypothèse qu'il y a également une transposition didactique de ces savoirs sociaux dans des savoirs scolaires. Et la classe de mathématiques est également un lieu de cette transposition, c'est-à-dire qu'un objet mathématique enseigné peut être utilisé comme objet d'enseignement d'un savoir social, d'un savoir mathématique savant et éventuellement d'une combinaison des deux savoirs.

Une conséquence de cette double transposition est qu'il peut y avoir interaction entre ces transpositions.

Nous faisons l'hypothèse que l'enseignement de la démonstration en mathématiques est le lieu d'une double transposition, celle de la validation sociale et celle de la validation mathématique.

Pour vérifier cette hypothèse nous allons observer des exemples de validations didactiques dans des manuels scolaires où vont cohabiter des techniques sociales et des techniques mathématiques de validation. Nous ferons des hypothèses sur les fonctions assignées aux différentes techniques.

2. Exemples issus de manuels scolaires

Nous nous proposons d'observer les techniques de validation utilisées dans un exemple concernant la validation de la proposition : la circonférence P d'un cercle de rayon r vaut $2\pi r$ et l'aire A d'un disque de rayon r vaut πr^2 .

2.1. Un exemple de validation par des techniques sociales

Dans un livre[14] français de 6ème on propose l'activité ci-jointe

À la recherche de π

Matériel : un rouleau de papier adhésif, feutre, ciseaux, règle graduée...

A. Expériences, mesures et calculs

1. *Mesurer le diamètre d du rouleau de papier adhésif.*
Tracer, au feutre, un trait, juste au début du ruban **(fig. 1).**

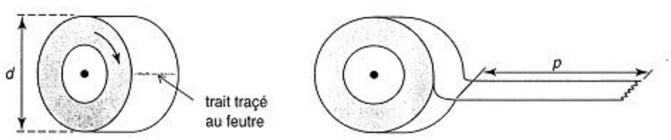


fig. 1 fig. 2

Dérouler le ruban jusqu'au trait, puis le fixer sur une feuille.

2. *Mesurer la longueur p du ruban déroulé* **(fig. 2).**
Compléter ce tableau avec différentes valeurs obtenues dans la classe.

Périmètre (cm) $p =$					
Diamètre (cm) $d =$					
$p \div d \approx$					

B. Conclusion

1. *Que constate-t-on dans ce tableau ?*
2. *Compléter la phrase :*

> Le périmètre d'un cercle est égal à son diamètre multiplié par ...

3. *Compléter la formule :* $\boxed{p = \pi \times \ldots}$ avec $\boxed{\pi \approx \ldots}$

14 *Le nouveau Pythagore 6ème*, Edition Hatier, 1996, pp. 208-209.

Analyse des technologies utilisées et de leurs fonctions

On a d'abord un *argument pragmatique* qui permet, après différentes mesures de constater qu'il est plausible que $d \div p$ soit constant. (question B1).

On affirme par un *argument d'autorité* que ce rapport est constant. On conclut l'activité par un argument d'autorité suggérant la formule : $p = 2\pi r$. Nous supposons qu'il s'agit de l'autorité du livre éventuellement renforcée par celle du professeur conduisant l'activité.

Cette validation est la succession de techniques sociales appliquant un argument pragmatique et un argument d'autorité.

Il n'y a pas de techniques mathématiques utilisées.

Nous faisons l'hypothèse que l'argument pragmatique a pour *fonction de persuasion* au niveau de la plausibilité de la propriété, alors que l'argument d'autorité a pour *fonction de persuasion* au niveau de la certitude de la propriété en s'appuyant sur le contrat didactique implicite qui affirme l'autorité du professeur ou du manuel scolaire.

L'argument de plausibilité renforce l'argument d'autorité ; il permet à l'élève de participer à la validation, et en ce sens a plus de force psychologique que l'argument d'autorité qui tout seul aurait laissé l'élève inactif.

Enfin une étude du programme de 6ème montrerait qu'aucune technique mathématique n'est disponible pour participer à cette validation.

2.2. Quelques exemples de validations avec des techniques sociales et des techniques mathématiques

2.2.1. Exemple allemand

Dans un livre[15] allemand de classe 10 (15-16 ans) on propose l'activité suivante. La traduction du théorème proposé dans cette activité est :

Théorème : On note A l'aire d'un disque de rayon r.

Le rapport $\dfrac{A}{r^2}$ est le même pour tous les disques.

Observons le texte la validation proposée dans le manuel.

« Pour vérifier notre conjecture, nous considérons deux polygones réguliers de même nombre n de sommets inscrits dans deux cercles de rayons respectifs r_1 et r_2. Comme ces deux polygones sont semblables, leur aires A_1 et A_2 sont dans le rapport :

[15] Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium, Ausgabe Baden-Würtemberg, Klasse 10, Lambacher Schweizer, Ernst Klett Verlag.

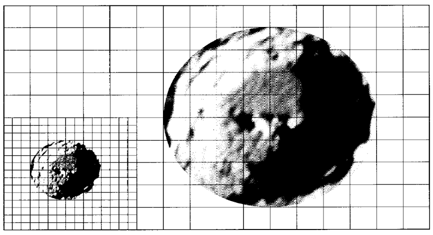
$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{r_1^2}{r_2^2} \text{ ou } \frac{A_2}{r_2^2}=\frac{A_1}{r_1^2}.$$

Cela signifie que, pour un n fixé, le quotient de l'aire d'un polygone à n côtés inscrit dans un cercle de rayon r et l'aire d'un carré de côté r est le même pour tous les cercles. Comme l'aire d'un polygone à n côtés diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire du disque correspondant pour n suffisamment grand, on doit avoir de la même façon également pour les aires de disques :

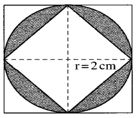
Théorème : Le rapport $\frac{A}{r^2}$ est le même pour tous les disques.

IV Kreisberechnung

1 Die Kreiszahl π

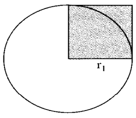


1 Die beiden Bilder zeigen den Mondkrater „Kopernikus" auf zwei verschiedenen Mondkarten.
a) Kann man den Bildern entnehmen, wie groß die Fläche des Kraters in Wirklichkeit ist?
b) Wie viele der eingezeichneten Quadrate liegen ganz in der Kraterfläche?
Warum sind es auf beiden Karten gleich viele?
c) Gib für den Flächeninhalt des Kraters einen Näherungswert in der Flächeneinheit „1 Quadratfläche" an.
d) Wie lautet der Näherungswert in der Einheit „1 Radiusfläche"?



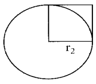
Bisher haben wir Flächeninhalte von Vielecken berechnet. Nun versuchen wir, Flächeninhalte von krummlinig begrenzten Flächen zu bestimmen. Die wichtigste derartige Figur ist der Kreis.
Der Flächeninhalt des Kreises auf dem Rand ist kleiner als 16 cm², aber größer als 8 cm².
Vergleicht man den Flächeninhalt A eines Kreises mit dem Flächeninhalt r^2 des Radiusquadrates, so stellt man fest: Bei allen Kreisen ist

$$2r^2 < A < 4r^2 \quad \text{oder} \quad 2 < \frac{A}{r^2} < 4.$$

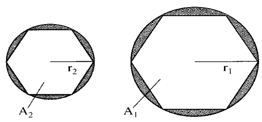


Die Schranken 2 und 4 hängen nicht von r ab; wir können daher vermuten: Bei allen Kreisen ist der Quotient $\frac{A}{r^2}$ die **gleiche** (zwischen 2 und 4 gelegene) Zahl, bzw: Bei allen Kreisen ist der Flächeninhalt **dasselbe** Vielfache von r^2.
Um die Vermutung zu überprüfen, denken wir uns regelmäßige Vielecke derselben Eckenanzahl n in zwei Kreise einbeschrieben. Da diese n-Ecke ähnlich sind, gilt für ihre Flächeninhalte A_1 und A_2:

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{r_2^2}{r_1^2} \quad \text{oder} \quad \frac{A_2}{r_2^2}=\frac{A_1}{r_1^2}.$$



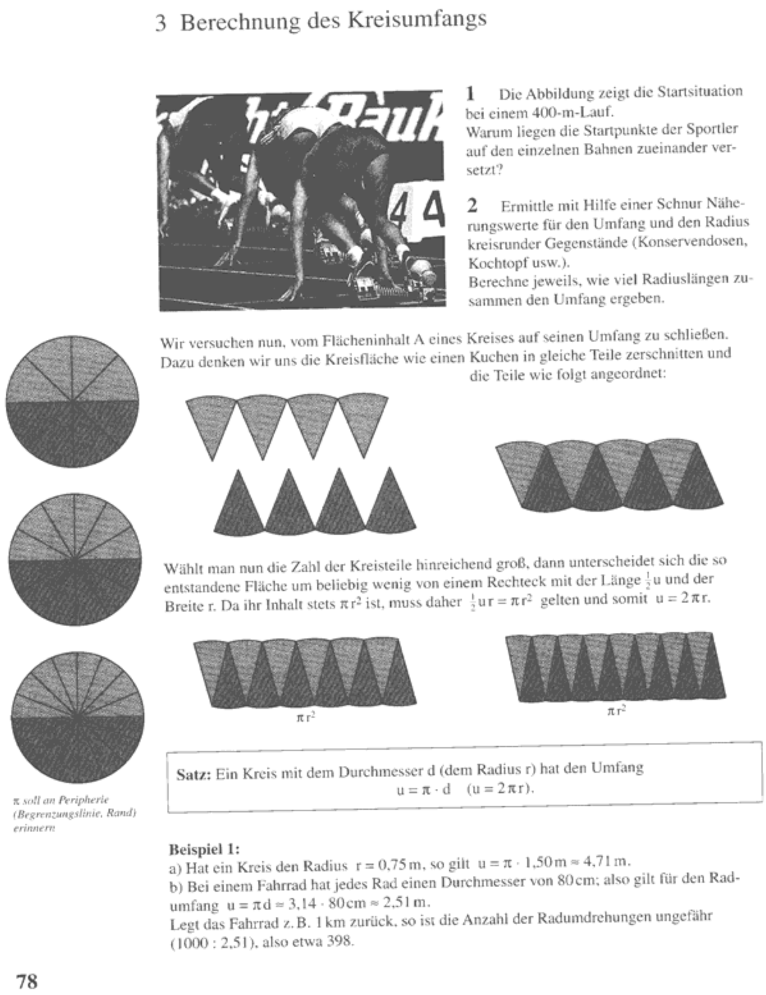
D. h.: Bei festem n ist der Quotient aus n-Eck-Inhalt und Inhalt des Radiusquadrats bei allen Kreisen gleich.
Da sich der Inhalt eines n-Ecks bei hinreichend großer Eckenzahl vom zugehörigen Kreisinhalt nur beliebig wenig unterscheidet, muss in gleicher Weise auch für die Kreisinhalte gelten:



Satz: Der Quotient $A : r^2$, d. h.:
(Flächeninhalt des Kreises) : (Flächeninhalt des Radiusquadrates)
ist bei allen Kreisen gleich.

On définit le nombre π comme étant ce rapport constant.

Plusieurs méthodes sont proposées pour déterminer une valeur approchée de π (méthode d'Archimède,...)[16] On établit ensuite le « théorème de la circonférence du cercle »[17].



3 Berechnung des Kreisumfangs

1 Die Abbildung zeigt die Startsituation bei einem 400-m-Lauf.
Warum liegen die Startpunkte der Sportler auf den einzelnen Bahnen zueinander versetzt?

2 Ermittle mit Hilfe einer Schnur Näherungswerte für den Umfang und den Radius kreisrunder Gegenstände (Konservendosen, Kochtopf usw.).
Berechne jeweils, wie viel Radiuslängen zusammen den Umfang ergeben.

Wir versuchen nun, vom Flächeninhalt A eines Kreises auf seinen Umfang zu schließen. Dazu denken wir uns die Kreisfläche wie einen Kuchen in gleiche Teile zerschnitten und die Teile wie folgt angeordnet:

Wählt man nun die Zahl der Kreisteile hinreichend groß, dann unterscheidet sich die so entstandene Fläche um beliebig wenig von einem Rechteck mit der Länge $\frac{1}{2}u$ und der Breite r. Da ihr Inhalt stets πr^2 ist, muss daher $\frac{1}{2}u\,r = \pi r^2$ gelten und somit $u = 2\pi r$.

πr^2 πr^2

Satz: Ein Kreis mit dem Durchmesser d (dem Radius r) hat den Umfang
$u = \pi \cdot d \quad (u = 2\pi r)$.

π soll an Peripherie (Begrenzungslinie, Rand) erinnern

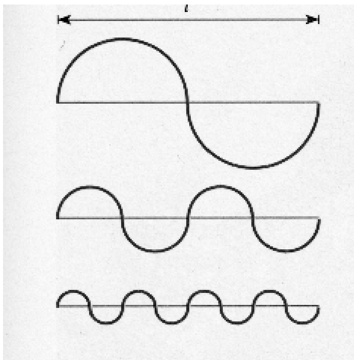
Beispiel 1:
a) Hat ein Kreis den Radius $r = 0{,}75\,\text{m}$, so gilt $u = \pi \cdot 1{,}50\,\text{m} \approx 4{,}71\,\text{m}$.
b) Bei einem Fahrrad hat jedes Rad einen Durchmesser von 80 cm; also gilt für den Radumfang $u = \pi d \approx 3{,}14 \cdot 80\,\text{cm} \approx 2{,}51\,\text{m}$.
Legt das Fahrrad z. B. 1 km zurück, so ist die Anzahl der Radumdrehungen ungefähr (1000 : 2,51), also etwa 398.

78

[16] Pages 75, 83, 84.
[17] Pages 78 et 79.

On décompose le disque en secteurs de même angle que l'on recompose de manière à former une figure approchant un parallélogramme, comme suggéré par la figure jointe.
« On choisit un nombre de secteurs suffisamment grand pour que l'aire de la surface recomposée diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire d'un rectangle de longueur une demi-circonférence et de largeur un rayon ». Comme l'aire du rectangle recomposé est l'aire du disque, et comme on a précédemment établi que l'aire du disque vaut π fois le carré du rayon, on en déduit que la circonférence du cercle vaut π fois le diamètre.

On signale cependant par la figure ci-dessous qu'une ligne ondulée peut approcher de plus en plus un segment de droite sans pour autant que la longueur de la ligne ondulée approche la longueur du segment.



Analyse des technologies utilisées et de leurs fonctions

Pour la formule sur l'aire du disque, on commence avec une *technologie mathématique* (théorème sur le rapport des aires de polygones semblables), suivie d'un *argument d'induction* incomplète (suggestion d'une approximation de l'aire d'un disque par un polygone inscrit à n côtés) s'appuyant sur un *argument pragmatique* (vérification visuelle sur un exemple) et complétée par un *argument d'autorité* (énoncé de l'extension au disque de la propriété des polygones). Cependant dans le passage à la limite (induction et argument d'autorité), par le traitement du cas particulier de manière générique, avec la notation n, on essaie de préparer le passage à la limite, comme le montre la formulation « comme l'aire d'un polygone à n côtés diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire du disque correspondant pour n suffisamment grand, on doit avoir de la même façon également pour les aires de disques ».

On voit ici la cohabitation d'une technologie mathématique disponible et de technologies sociales (argument par induction, argument d'autorité) lorsque les technologies mathématiques sur les limites ne sont pas disponibles.

Nous faisons l'hypothèse que les technologies sociales, présentes pour remplacer les technologies mathématiques absentes, ont pour fonction de préparer à l'enseignement des limites, ce que nous appellerons une *fonction propédeutique*[18].

Elles ont aussi une *fonction d'explication*[19] : expliquer l'idée de la démonstration (par recours aux arguments pragmatique et d'induction), qui est le passage à la limite.

Les arguments pragmatiques et d'autorité remplissent également une *fonction de persuasion* au niveau respectivement de la plausibilité et de la certitude de la propriété par rapport à des technologies mathématiques non disponibles.

Pour la formule de circonférence, un *argument pragmatique* (étude de recompositions de la figure), suivi d'un *argument d'induction* incomplète (passage à la limite suggéré par plusieurs cas), d'une technologie mathématique (formules de l'aire d'un parallélogramme et de l'aire d'un disque), complétés par un argument d'autorité (qui énonce la propriété de la circonférence du cercle). Comme précédemment, nous faisons l'hypothèse que les technologies sociales ont pour fonction de préparer à l'enseignement des limites, ce que nous appellerons une *fonction propédeutique*[18]. Elles ont aussi une *fonction d'explication*[19] : expliquer deux idées de la démonstration (par recours aux arguments pragmatique et d'induction) : le passage à la limite après recomposition et utilisation du résultat précédent sur l'aire du disque.

[18] Nous justifierons cette hypothèse lors de l'étude des programmes.
[19] La fonction d'explication propose un « aperçu sur pourquoi c'est vrai [Hanna 2000, p. 8] ».

2.2.2. Exemple français

Dans le manuel[20] de 5ème de la même collection que le précédent manuel de 6ème, on propose l'activité reproduite en page suivante.

4 **Aire d'un disque**

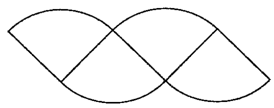
Entre nous

Objectifs :
- Utiliser la formule du périmètre du cercle
- Découvrir la formule de l'aire d'un disque.

Remarques :
- Un peu de patience : la formule est au bout.
- Les collages sont plus aisés et plus propres avec du papier autocollant.

A. Découpage et collage

1. *Dessiner et découper 4 disques de mêmes dimensions.*
2. *Couper le premier disque en 4 secteurs identiques et coller tête-bêche ces 4 secteurs.*



3. *Couper le second disque en 8 secteurs identiques et coller tête-bêche ces 8 secteurs.*
4. *Même travail avec 16 secteurs (et avec 32 si vous voulez).*

B. Formule

1. *À quoi ressemble la figure obtenue en collant tête-bêche des secteurs nombreux et très fins ?*
En déduire une formule pour calculer l'aire d'un disque.
2. Un disque compact fait 12 cm de diamètre.
Peu importe son air ! Calculer son aire.

Analyse des technologies utilisées et de leurs fonctions

On a des techniques analogues à l'exemple allemand, avec recomposition des secteurs.

Les deux seules différences portent sur la structure de la démonstration :

- on a commencé par valider la formule du périmètre et c'est cette formule qu'on utilise pour valider la formule de l'aire ; sans doute parce que, ne disposant pas de la technologie sur le rapport des aires de figures semblables utilisée dans la validation allemande, il n'était pas aisée de mettre en place un argument pragmatique pour mesurer les aires ; par contre cet argument paraît plus facile à mettre en place pour mesurer les périmètres ; on voit donc que la disponibilité de technologies mathématiques peut influencer l'ordre de présentation dse validations,
- on n'a pas formulé l'induction du passage à la limite sous forme générique (comme dans le cas allemand) : nous faisons l'hypothèse que c'est l'absence de fonction propédeutique à l'enseignement des limites qui explique cette absence ; une explication pourrait être l'éloignement des

[20] *Le nouveau Pythagore, 5ème*, Edition Hatier, 1997, p. 172.

classes de $6^{ème}$ et $5^{ème}$ par rapport à la classe de $1^{ère}$ où sont introduites les limites.

3. La recherche de justification de l'utilisation de techniques

3.1. Continuité didactique entre argumentation et démonstration

Nous avons justifié la présence de techniques sociales d'abord par l'absence de technologies mathématiques. On peut assurer la continuité de la validation, en remplaçant, dans des démonstrations mathématiques incomplètes, les technologies mathématiques absentes par des technologies sociales.

Mais cette continuité ne se limite pas à la fonction première de validation de l'argumentation et de la démonstration, elle s'étend à d'autres fonctions[21] de la démonstration qui peuvent être assumées par l'argumentation lorsque la démonstration mathématique n'est pas possible : nous avons vu des exemples avec les fonctions d'explication, propédeutique ou de persuasion. On peut voir dans [Cabassut 2002] d'autres exemples, notamment avec la fonction culturelle.

3.2. Justification des technologies

On peut chercher dans les théories didactiques la justification des technologies didactiques employées en distinguant deux niveaux pour les théories didactiques.

Le niveau des programmes et de leurs accompagnements permet de préciser les technologies didactiques disponibles et les fonctions assignées à ces technologies. Par exemple le programme[22] de classe 10 de Bade-Wurtemberg précise pour ce qui concerne le cercle et le disque : « Les élèves comprendront le problème des déterminations de la circonférence et de l'aire du cercle[…]. Ils reçoivent un point de vue sur comment une considération propédeutique des limites permet le calcul. » Ces programmes insistent avec force sur les arguments de plausibilité. Les programmes indiquent également les théories mathématiques et didactiques auxquelles ils se réfèrent. Ces programmes permettent donc d'expliquer et de justifier l'articulation entre validation sociale et validation mathématique. Notre programme de recherche porte d'abord sur l'étude de cette articulation dans les programmes d'enseignement des mathématiques de 1970 à 2002 en France et en Bade-Wurtemberg. Nos premiers résultats montrent une articulation croissante avec le temps entre le social et le mathématiques. Ensuite nous avons étudié cette articulation dans les programmes de mathématiques et ceux des autres disciplines pour la période actuelle : notre observation montre la part

[21] Nous renvoyons aux articles [De Villiers 1990],[Hanna 2000], et [Cabassut 2002].

[22] MINISTERIUM für Kultus und Sport Baden-Würtemberg *Bildungsplan für das Gymnasium,* Lehrplanheft 4/1994, Neckar-Verlag, 4/1994.

importante des techniques d'argumentation et leurs renvois à des situations interdisciplinaires pouvant impliquer l'enseignement des mathématiques.

Au niveau plus général de la noosphère, c'est-à-dire au niveau des concepteurs de programmes, des associations de professeurs de mathématiques, des didacticiens des mathématiques, nous étudions comment le discours produit peut expliquer les phénomènes de transposition dans la validation didactique.

3.3. Le cadre de la théorie anthropologique

Le cadre de la théorie anthropologique nous paraît bien adapté pour décrire d'une part les influences entre le social et le mathématiques dans la validation, d'autre part en montrant l'influence des institutions, notamment par l'observation de deux pays différents. Notre programme de recherche étudie notamment des productions de démonstration d'élèves des deux pays dans un contexte d'évaluation pour laquelle les technologies mathématiques disponibles sont les mêmes : les premières observations montrent des différences de contrat et de coutume [Balacheff *Le contrat et la coutume* 1988.2] entre les pays que nous essayons d'expliquer par des différences d'institutions et de théories didactiques.

BIBLIOGRAPHIE

AUDI Robert, 1989, *Practical Reasoning,* Routledge, London.

BALACHEFF Nicolas, 1988, *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège,* Thèse, université Joseph Fourier de Grenoble.

BALACHEFF Nicolas, 1988.2, *Le contrat et la coutume deux registres des interactions didactiques,* in Actes du premier colloque franco-allemand de didactique, 15-26, La pensée Sauvage.

BLANCHE Robert, 1968, 1996, *Introduction à la logique contemporaine,* Armand Colin-Masson, Paris.

BLANCHE Robert, 1995, *Raisonnement,* in Encyclopédie Universalis, CDROM.

BOURDIEU Pierre, 1980, *Le sens pratique,* Les éditions de Minuit. Paris.

CABASSUT Richard, 2002, *Pourquoi démontrer ? Un exemple allemand sur les aires et les volumes pour entrer dans le processus de preuve et d'explications*, in revue Repères n°47.

CARNAP R., 1966, *Philosophical Foundations of Physics,* Martin Gardner, Basic Books, New York.

CHALMERS Alan, 1976, 1982, *What is this thing called science ?,* University Of Queensland Press, Sta Lucia.

CHALMERS Alan, 1987, *Qu'est-ce que la science ?* La découverte. Paris.

CHEVALLARD Yves, 1985, *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné,* La pensée sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Yves, 1992, *Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique,* revue Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 12 n°1, 73-112.

CHEVALLARD Yves, 1999, *Nouveaux objets, nouveaux problèmes en didactique des mathématiques,* in Vingt ans de didactique des mathématiques en France, La pensée sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Yves, 1999.2, *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique,* Recherches en Didactique des Mathématiques, vol.19 n°2, 221-266.

DAVIS Philip J. et HERSH Reuben, 1985, *L'univers mathématique,* Gauthier-Villars.

DAVIS Philip J. et HERSH Reuben, 1982, *The mathematical experience,* Birkhäuser, Boston.

DE VILLIERS Michael, novembre 1990, *The role and the function of proof in mathematics,* Pythagoras n°24, 17-24.

DUVAL Raymond, 1995, *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang.

GRIZE J.B., 1996, *Logique naturelle et communications,* Paris, Presses Universitaire de France.

HANNA Gila, 2000, *Proof, explanation and exploration : an overview,* Educational Studies in Mathematics 44, 5-23.

HAARSCHER Guy, 1994, *Chaïm Perelman et la pensée contemporaine* Bruylant, Bruxelles.

HEMPEL Carl, 1966, *Philosophy of Natural Science,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

HEMPEL Carl, 1972, 1996, *Eléments d'épistémologie,* Armand Colin/Massson, Paris.

IREM DE BESANCON, 1989, *La démonstration mathématiques dans l'histoire,* Actes du 7ème colloque inter-IREM épistémologie et histoire des mathématiques, IREM de Besançon.

IREM DE MONTPELLIER, 1993, *Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique,* Actes de la première université d'été européenne, IREM de Montpellier.

KNUTH *Eric,* mai-juin 2000*, The rebirth of proof in school mathematics in the United-States*, in International Newsletter on the teaching and learning of mathematical proof.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE, 12 août 1999, *Mathématique 2nde,* Bulletin Officiel Hors série n°6.

MINISTERIUM FÜR KULTUS UND SPORT Baden-Würtemberg, 4/1994, *Bildungsplan für das Gymnasium,* Lehrplanheft 4/1994, Neckar-Verlag.

OLERON Pierre, 1996, *Le raisonnement,* Presses Universitaires de France, Paris.

PERELMAN Chaïm, 1952, *De la preuve en philosophie* in Mélanges G. Smeth, Librairie encyclopédique, Bruxelles.

PERELMAN Chaïm, OLBRECHTS-TYTECA Lucie, 1970, *Traité de l'argumentation, la nouvelle réthorique* Editions de l'Université de Bruxelles, 1976. 1969, Th*e New Rhetoric : A Treatise on Argumentation*, University of Notre Dame Press, London.

ROSS Kenneth, March 1998, *Doing and proving : the place of algorithms and proof in school mathematics,* American Mathematical Monthly, 252-255.

STEIN Martin, 1986, *Beweisen,* Texte zur mathematische-naturwissenschaftlich-technischen Forschung und Lehre, Band 19, Verlag Franzbecker, Bad Salzdetfurth.

TIETZE Uwe-Peter, KLIKA Manfred, WOMPERS Hans, FÖRSTER F., 2000, *Mathematiksunterrichts in der Sekundarstufe II, Band I,* Vieweg.

TOULMIN S.E., 1958, *The Uses of Arguments,* Cambridge, University Press.

TOULMIN S.E., 1993, *Les usages de l'argumentation,* (traduction), Presses Universitaires de France, Paris.

richard.cabassut@alsace.iufm.fr
IREM de Strasbourg
DIDIREM de Paris 7