ROBERT ADJIAGE

DIVERSITÉ ET INVARIANTS DES PROBLÈMES METTANT EN JEU DES RAPPORTS

Abstract. Concerning the problem solving by 9-to-13 year-old pupils, in the case of quantity ratio and proportionality, researchers have considered numerous variables. Strangely, one of them, the physical-empirical context often referred to, is little taken into account. The goals of this paper are to better define the values of this variable and validate its pertinence. I thus first made a classification of the involved problems, providing the values of the new variable. A questionnaire was then elaborated. It presents for solution six items, one representative of each of the six problem-types of the classification. The survey was conducted with two types of population: 12-to-13 year-old pupils, and primary school teacher-trainees as a reference population. The findings show that the variations (success rate and procedures used) are important from one item to the other in the pupil group, and slight in the teacher-trainee group. These variations are attributed to the physical context, as the other variables are constant in the questionnaire. This study, along with other previous researches, allows us to draw the complexity of ratio problems closer around two principles of separation / articulation between the physical and the mathematical worlds, and between the rational registers. Furthermore, it permits to consider that the diversity of those problems lies in the physical-empirical domain, while their unity can be located in the mathematical one.

Key words. Fraction, proportionality, physical context, quantity, ratio, semiotic register.

Résumé. Nombre de variables ont été étudiées par les chercheurs qui ont tenté d'expliquer la complexité des problèmes mettant en jeu des rapports au niveau des élèves de 9-13 ans. Mais curieusement, une variable est peu examinée : il s'agit du contexte physico-empirique auquel se réfère usuellement un énoncé du type considéré. Cet article définit les valeurs de cette variable et établit sa pertinence didactique. Une classification des énoncés de problème concernés est d'abord entreprise. On dégage ainsi six valeurs, soit six problèmes-types, pour cette nouvelle variable. A des fins de validation, un questionnaire en six items, chacun représentant un des six problèmes-types, a été soumis à deux types de population : 121 élèves de cinquième (12-13 ans) et 110 étudiants en première année d'IUFM comme population de référence. Les résultats montrent que les variations d'un item à l'autre, sur le plan de la réussite comme sur celui des procédures utilisées, sont beaucoup plus importantes dans le groupe des élèves que dans celui des étudiants. Comme les autres variables ont été bloquées lors de l'élaboration des six problèmes-types, nous attribuons ces variations aux changements du contexte physico-empirique. Cette étude permet de : resserrer l'analyse de la complexité des problèmes de rapports autour de deux principes de séparation et d'articulation des univers physique et mathématique ; situer la diversité de ces problèmes dans le champ physique et leur unification dans le champ mathématique.

Mots-clés. Fraction, proportionnalité, contexte physique, grandeur, rapport, collège, registre sémiotique.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 10, p. 95 -129.
© 2005, IREM de STRASBOURG.

1. Introduction

La présente étude s'insère dans un projet de recherche plus vaste mené depuis 6 ans sur les notions de nombre rationnel et de proportionnalité, leur enseignement et leur apprentissage au niveau des élèves de 9-13 ans. Le nombre impressionnant de publications sur le sujet depuis une trentaine d'années a eu des retombées significatives sur l'enseignement, notamment par le biais des instructions officielles qui ont été amenées à préciser les acquisitions, les hiérarchiser et les étaler beaucoup plus dans le temps que par le passé. Cependant, un certain nombre de difficultés persistent. Tout d'abord au niveau des enseignants, qui ont du mal à percevoir l'unité de ces nouvelles instructions, les méconnaissent parfois, et ont tendance, en l'absence d'un modèle d'enseignement suffisamment structuré et compact – « *an overall instructional scheme* » selon Kieren (1976, p. 133) –, à se rabattre sur des modèles simplificateurs et donc peu généralisables (Adjiage, 1999, p. 204). Au niveau des élèves ensuite, tant lors des phases d'apprentissage que de résolution de problèmes. En ce qui concerne les dernières, les items des évaluations nationales à l'entrée en 6^{e} qui leur sont consacrés suscitent toujours un taux d'échec élevé. En ce qui concerne les premières, nos observations directes d'élèves nous ont permis de relever une difficulté structurelle des ingénieries issues de la recherche. Ces dernières proposent souvent de donner du sens aux notions mathématiques par des expériences physico-empiriques préalables, réelles ou évoquées, mettant en jeu des grandeurs. Kieren (1976, p. 115), par exemple, note à propos de la construction du rationnel-opérateur que : « *The obvious related instructional activity is work with similar figures* », ce qu'il illustre par l'histoire de la maison de « *Mr Smith* », « *smaller than Mr Jones' house, but [is]exactly like it* » (*ibid*, p. 116), dont les élèves doivent évaluer différentes dimensions en faisant fonctionner un modèle implicite de dilatation. Dans un tel contexte, les notions mathématiques apparaissent comme des outils (Douady, 1984, pp. 9-11) puissants pour décrire ces expériences et prédire des résultats. Certains traitements manipulatoires utiles à la réalisation de ces expériences sont supposés, quant à eux, expliquer les traitements mathématiques et particulièrement leurs « bizarreries ». Or notre constat est que les transferts entre les manipulations dans le champ physico-empirique et les traitements qui leur correspondent dans le champ mathématique ne se font pas ou se font mal. Par exemple, pour donner « donner du sens » à la fraction-mesure $\frac{p}{q}$ et à la recherche de fractions équivalentes $\frac{mp}{mq}$, l'ingénierie de Brousseau (1987, pp. 1-18) s'appuie sur la mesure de l'épaisseur d'une feuille de papier telle que q – ou mq – feuilles identiques aient une épaisseur totale de p cm – ou mp cm. Mais, dans un contexte ultérieur purement mathématique, nombre d'élèves ayant parfaitement compris et interprété ces mesures se montrent plus sensibles à l'apparence formelle des signes (« $\frac{2}{5}$ *ne peut* *pas être égal à* $\frac{40}{100}$ *car 2 est différent de 40 et 5 est différent de 100* ») qu'à leur référence (« *si 5 feuilles ont une épaisseur de 2 mm, 100 feuilles ont une épaisseur de 40 mm* »). De plus, l'évocation par l'enseignant du contexte d'apprentissage – l'épaisseur de la feuille de papier – semble à ce stade apporter plus de brouillage que d'aide.

En entamant cette recherche, notre but était de produire un modèle d'enseignement compact, articulé autour de quelques principes explicites, afin de faciliter la tâche des enseignants. Ce modèle devait prendre en compte les travaux antérieurs et tirer les conséquences des difficultés avérées. Le point de départ a été la difficulté des élèves à gérer le transfert décrit ci-dessus. Pour dépasser cette difficulté, il convenait de préciser les deux domaines situés à la source – le domaine physico-empirique – et au but – le domaine mathématique relatif aux notions et à la tranche d'âge concernées – de ce transfert, puis de s'intéresser aux articulations entre ces deux domaines.

En effet, lorsqu'on examine les études didactiques sur l'acquisition du concept de rationnel, on constate que les deux composantes, le monde physico-empirique des grandeurs et le monde mathématique des nombres purs y sont peu discernées. Toutes envisagent diverses acceptions d'un nombre rationnel via la notion de rapport de grandeurs et sa conservation sous certains types de manipulations : rationnel-mesure et rationnel-dilatation chez Brousseau (1986, pp. 87-94) ; les cinq sous-constructions (part-whole-relations, ratios, quotients, operators, measures) nécessaires à l'acquisition de la notion pour Kieren (1980, pp. 134-136) ; rapport scalaire, rapport fonctionnel[1] et rapport de mesure pour Vergnaud (1983, pp.162-166) ou Comin (2000, pp. 100-101). Dans notre tentative de clarification, nous avons décidé de séparer ce qui relevait du champ mathématique et ce qui relevait du champ physique. Ainsi, la notion de nombre rationnel serait ancrée dans le premier, ses diverses acceptions dans le second. Cette claire séparation nous a semblé être la condition nécessaire pour que les élèves puissent accepter l'existence et l'utilité d'un transfert entre les deux univers, et son rôle dans la compréhension et la mise en œuvre de la notion.

Mais quelles pouvaient être les caractéristiques d'une approche purement mathématique de la notion de rationnel ? Une deuxième préoccupation des chercheurs, régulièrement évoquée mais peu étudiée nous a fourni les premiers

---

[1] Si F et G sont deux grandeurs variables proportionnelles, donc reliées par une fonction linéaire : $G=aF$, un rapport comme $\frac{G_1}{G_2}$ ou $\frac{F_1}{F_2}$ entre deux valeurs de G ou deux valeurs de F est dit scalaire (ou interne) ; un rapport tel que $\frac{G_1}{F_1}$ ou son inverse est dit fonctionnel (ou externe).

éléments d'une réponse acceptable. Kieren (1976, p. 102) par exemple écrit à propos de l'addition des fractions : « *...[it] works the way it does mainly for axiomatic reasons and is* ***no longer natural****.* ». Plus récemment, on peut lire dans le « *2002 Yearbook* » (Smith, p. 3) : « *… numerals like* ***3/4 that represent relationships*** *between* ***two*** *... quantities, rather than a* ***single*** *(three apples)…* ». De quoi est-il question ici, sinon de la manière dont des signes renvoient à certaines facettes d'un objet mathématique et se combinent par un traitement ? Ici les **deux** signes 3 et 4 expriment **un seul** nombre, trois-quarts, dans une forme fractionnaire qui valorise son aspect rapport, là où une expression décimale (0,75) du même rationnel pourrait plutôt valoriser son insertion, en tant que nombre-mesure, entre les entiers 0 et 1. De plus le traitement évoqué par Kieren, l'addition (par exemple $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$) entre en conflit avec le même traitement effectué dans un autre système d'expression des mêmes nombres (par exemple 0,75 + 0,75). C'est dans ce sens que le traitement fractionnaire « *is no longer natural » contrairement au traitement décimal « which form a natural extension (via our numeration system) to the whole numbers* » (Kieren, 1976, 102). Cette complexité d'ordre sémiotique nous a paru le mieux rendre compte des difficultés des élèves à produire ou comprendre des traitements formels sur des nombres et à concevoir les objets mathématiques sous-jacents. La théorie de Duval (1995 ; 1996), tirant toutes les conséquences du mode d'accès essentiellement sémiotique aux objets mathématiques en général, et aux rationnels en particulier, était tout à fait adaptée à nos préoccupations. Conformément à cette théorie, un enseignement donné doit tout d'abord procéder à un repérage de différents systèmes (les registres sémiotiques) permettant d'exprimer et de traiter les objets mathématiques concernés. Lors de sa mise en œuvre, cet enseignement doit clairement séparer ces différents systèmes pour mieux les articuler. La théorie distingue bien, comme opérations cognitives différentes, les traitements (internes à un registre donné) et les conversions (entre deux registres). Cette dernière opération est essentielle, selon Duval (1995, pp. 36-44 ; 2000, pp. 63-64), pour prendre conscience de l'existence d'objets mathématiques, au-delà de la diversité de leur expression. Pour la première expérience d'enseignement des rationnels que nous avons initiée (Adjiage, 1999), nous avons retenu trois registres : les droites graduées, les écritures fractionnaires et les écritures décimales. Les élèves (une classe expérimentale suivie sur deux ans) se sont approprié ces registres dans l'environnement informatique des séries ORATIO et NovOra spécialement conçues et développées à cet égard (Adjiage et Heideier, 1998). Cette appropriation s'est faite par la mise à l'épreuve, au moyen de tâches spécifiques bien définies, du potentiel de traitement (comme comparer $\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{3}$) et de conversion (comme passer de $\frac{3}{4}$ à 0,75) des trois registres (Adjiage, 1999 à 2001b ; Adjiage et Pluvinage, 2000). Cette expérience a eu des conséquences probantes en termes d'apprentissages, attestées par les résultats des élèves concernés, comparés à ceux d'un échantillon national, aux évaluations d'entrée en 6^{e}. Mais elle a aussi fait ressortir la nécessité d'intégrer une composante physique substantielle à cet enseignement. Ce qui nous amène à évoquer le deuxième temps de notre recherche et l'objet spécifique de cet article.

Le concept mathématique de rationnel et la notion de proportionnalité qui lui est attachée trouvent leur origine dans la mise en relation de deux grandeurs, homogènes ou pas (Comin, 2000, pp. 96-105). Or les grandeurs et leur mise en rapport, surtout à l'âge qui nous préoccupe, sont fortement ancrées dans l'univers physico-empirique et sont l'objet d'expériences sensibles avant d'entrer en interaction avec le symbolisme mathématique (Behr et Al, 1981, pp. 206-207). Comin (2000, p. 180) tire un bilan peu glorieux des changements curriculaires des années 70-80 qui tendaient à rejeter, dans l'enseignement de la proportionnalité, la référence aux grandeurs au seul bénéfice de la fonction linéaire.

Ayant décrit le versant mathématique de la notion de rationnel à cet âge à travers une variable sémiotique, il nous restait à en étudier le versant physique à travers une variable spécifique. Rappelons que notre hypothèse majeure est que l'acquisition de la notion de rationnel dépend de la capacité à articuler ces deux versants et que, pour être à même de les articuler, il convient d'abord de bien les séparer en précisant leur nature respective.

Nous pouvons à présent résumer le but de la présente étude en trois points :

- détailler la nature de la variable physico-empirique et ses valeurs, à savoir les différents types de situations physiques mettant en jeu des rapports ;
- valider la pertinence de cette variable au moyen d'une enquête menée parallèlement sur une population d'élèves de 12-13 ans et sur une population de référence formée d'élèves professeurs des écoles, ainsi que cela sera détaillé plus loin ;
- proposer notre analyse de la complexité des notions de rapports, de rationnels et de proportionnalité et en déduire les grandes lignes d'un modèle d'enseignement « structuré et compact ».

2. Nature et valeurs des variables prises en compte dans l'étude didactique des situations mettant en jeu des rapports

Dans cette section, il sera question d'énoncés verbaux décrivant des situations mettant en jeu des rapports dans un contexte que nous qualifierons de physico-empirique. Il s'agit de situations communément désignées comme « des problèmes tirés de la vie de tous les jours ». Cette désignation est d'ailleurs parfois abusive car nombre d'élèves n'ont que rarement rencontré ou expérimenté finement les situations évoquées. Ils sont alors amenés à imaginer ou à reconstituer mentalement une expérience, et donc à traiter dans un premier temps le problème au moyen d'opérations non exclusivement mathématiques. Toutes les observations prouvent la grande sensibilité des élèves aux variations d'énoncés – ce que les enseignants appellent souvent « l'habillage du problème » – à problème mathématique sous-jacent constant, ainsi que Noelting (1980, p. 218) par exemple le laisse entendre : « *Perceptual variations in the situation, or difficulties arising from a lesser or greater familiarity with the problem, [which] can both lead to the phenomenon of horizontal decalage…* ». Ces variations dépendent à la fois de l'expérience physico-empirique évoquée et du texte – lexique, grammaire, syntaxe – qui la décrit et la transforme en problème, les deux étant fortement liés : on n'énonce pas un problème de fréquence de la même manière qu'un problème d'agrandissement. Notre modèle n'envisagera que la variation du type d'expérience physico-empirique. C'est cette variable que nous avons qualifiée de « physique » jusqu'à présent, que nous appellerons désormais variable « de contexte » et que nous allons décliner en six valeurs dans la sous-section suivante.

2.1. La variable de contexte

A cet égard, nous allons considérer des « objets » issus :

- soit de l'univers physico-empirique,
  - objets matériels (baguette, peinture…),
  - objets immatériels (tirs au but, « chances » – j'ai 3 chances sur 4 de réussir…)
- soit de l'univers mathématique (segments, surfaces…).

A chacun des objets considérés, on peut attacher une ou plusieurs grandeurs : longueur (d'une baguette, d'un segment, d'un parcours…), volume ou masse (d'un pot de peinture), réussite, échec (pour des tirs au but) …

Un même objet enfin peut être considéré dans des états différents : avant ou après agrandissement par exemple.

La classification ci-dessous part d'un rapport de deux grandeurs quelconques, $\frac{G_1}{G_2}$, et examine les circonstances (types de situations) dans lesquels ce rapport peut être mobilisé en fonction : du nombre des grandeurs en jeu, puis, le cas échéant, du nombre d'objets sous-jacents, puis, le cas échéant, de l'états dans lequel on les examine.

A. Deux grandeurs distinctes sont mobilisées

$\frac{G_1}{G_2}$ exprime le $\boxed{\text{rapport de deux grandeurs hétérogènes}}$ fonctionnellement liées parce qu'elles se rapportent à un même « objet ». C'est le cas de d'une problème de vitesse constante (ou de débit ou de rendement…) par exemple où on considère le rapport, $\frac{L}{T}$, de la longueur et de la durée d'un même parcours.

B. Une seule grandeur est mobilisée

a) Deux objets sont considérés

- **en état de dissociation** : c'est le cas d'un problème de $\boxed{\text{mesure}}$ où on considère le rapport, $\frac{L_1}{L_2}$, des longueurs de **deux** baguettes par exemple, L_2 jouant le rôle d'une unité arbitrairement choisie ;
- **en état de fusion** : c'est le cas d'un problème de $\boxed{\text{mélange}}$ où on considère le rapport, $\frac{M_1}{M_2}$ ou $\frac{V_1}{V_2}$, des masses ou des volumes de **deux** ingrédients (peinture noire/peinture blanche par exemple) fondus en **une** nouvelle entité (peinture grise) ;
- **en état de séparation** : c'est le cas d'un problème de $\boxed{\text{fréquence}}$ où on considère, par exemple, le rapport, $\frac{R}{E}$, des réussites et des échecs d'**un** lot de candidats séparés en **deux** par l'introduction des modalités *R* et *E*.

b) Un seul objet est considéré

- **dans deux états différents ou sous deux aspects différents** : c'est le cas d'un problème de $\boxed{\text{dilatation}}$ où on considère le rapport, $\frac{L_1}{L_{1'}}$, des longueurs du même côté d'une figure avant et après agrandissement .
- **dans un seul état** : c'est le cas d'un problème de $\boxed{\text{changement d'unité}}$ où on considère le rapport, $\frac{m_1}{m_2}$, des mesures du même volume de lait par exemple, au moyen de deux unités différentes.

Commentaires

1. On obtient ainsi six types de situations, mettant en jeu des rapports, parmi lesquels les situations de mesure occupent une place à part. D'une part parce que les cinq autres types de situations, au niveau de scolarité où on les examine, mobilisent des mesures ; d'autre part parce que les deux termes, L_1 et L_2, du rapport exprimant la mesure d'une grandeur variable L_1 par rapport à une grandeur unité L_2, ne sont pas fonctionnellement liés, L_2 étant arbitraire

et restant constante quand L_1 varie. Ce n'est pas le cas des autres situations où les deux termes du rapport considérés sont ou peuvent être fonctionnellement liés, (par exemple par la nuance de gris souhaitée pour un mélange de peintures noire et blanche).

2. Un problème donné peut appartenir a priori à une des six catégories recensées et, après traitement dans **l'univers physique** (reformulation du contexte ou réalisation, effective ou évoquée, de tout ou partie de « l'expérience physique » engendrant le problème), passer dans une autre catégorie. Un exemple sera donné en 5.2.

3. Enfin, il convient de mettre en parallèle ces six situations avec les cinq sous-constructions de Kieren (1980, pp. 134-136) qui font référence en la matière. Pour résumer, nous dirons que la préoccupation majeure de ce dernier est de proposer « *five **ideas** of fractional numbers… as a basis for a rational number construct* » (1980, p. 134), sans préciser la **nature** de ces « *ideas* » : si les sous-constructions « *quotient* » et « *operator* » renvoient avant tout aux mathématiques, celles de « *ratio* » (« *quantitative comparisons of two quantities* ») et de « *measure* » *(counting the number of whole units… then equally subdividing a unit…* ») se rapportent à des grandeurs physiques et aux opérations concrètes de report et subdivision ; celle de « *part-whole* » enfin est une sous-construction cognitive générale dont les quatre autres dépendent fortement. Notre préoccupation étant de séparer, pour mieux les articuler, les deux domaines mobilisés pour appréhender la complexité d'un rationnel, il importait d'ancrer délibérément les six types de situations trouvés dans le domaine physico-empirique. Ces situations s'appuient donc avant tout sur **l'évocation d'une expérience**. Elles permettent aussi de donner un contenu précis au terme de « contexte physico-empirique » relatif aux notions étudiées. Bien entendu, ces deux ensembles ne sont pas indépendants. Ainsi, nos situations « mesure », « dilatation » et « rapport de grandeurs hétérogènes » sont à rapprocher des catégories « *measure* », « *operator* » et « *ratio* » de Kieren ; une même situation de « fréquence » – ou de « mélange » – peut renvoyer à une « *part-whole relation* » (3 réussites sur un total de 7 lancers) ou à un « *ratio* » (3 lancers réussis pour 4 échecs) ; enfin, un changement d'unité peut être appréhendé par un ratio (4 bouteilles pour remplir 9 verres) ou un « *operator* » permettant par exemple de calculer la mesure V, en verres, d'un volume donné en fonction de sa mesure B en bouteilles : $V=\frac{9}{4}B$. L'exemple fourni en 5.2 devrait aider à mieux mettre en parallèle l'approche de Kieren et la nôtre.

2.2. Les principales variables prises en compte par d'autres études

Avant de présenter l'enquête destinée à valider la variable de contexte, nous allons rappeler les principales variables prises en compte par d'autres chercheurs.

1. Variable de but (nature de la question de l'énoncé) : calculer une quatrième proportionnelle ; calculer un rapport (Brousseau, 1986, pp. 122-126) ; comparer des rapports (Noelting, 1980) ...

2. Variable de statut (statut du rapport en jeu : mesure, scalaire, opérateur fonctionnel[1] (Vergnaud, 1983, pp. 145 et 162).

3. Variable numérique (nature et taille du nombre exprimant le rapport en jeu) : entier, décimal, rationnel non décimal, appartenant à un domaine familier, non familier….

4. Variable d'expression (mode d'expression du nombre exprimant le rapport en jeu) : langue naturelle, paire d'entiers – comme dans 3 réussites pour 5 échecs –, écriture fractionnaire, écriture décimale, droite graduée, surface fractionnée…. (Adjiage, 1999, pp. 129-152 ; 2001b, pp. 11-16).

Exemple : pour illustrer la différence entre les variables 3 et 4 : 3 pour 5, $\frac{3}{5}$, 0,6 sont trois représentations différentes (variable 4) du même rapport décimal « trois-cinquièmes » (variable 3) et on sait que les énoncés mobilisant l'une ou l'autre de ces représentations n'ont pas le même taux de réussite dans une population d'élèves donnée.

Dans la suite, la **variable de contexte portera le numéro 5 et les autres variables porteront le numéro de leur introduction ci-dessus.**

3. L'enquête

Pour établir la pertinence de la variable 5, « de contexte », nous avons mené une enquête, auprès de deux populations qui seront précisées en 3.2, fondée sur un questionnaire présenté en 3.1. L'idée est de confirmer la sensibilité d'une population d'élèves de 12-13 ans aux variations du contexte physico-empirique des énoncés, donc de la variable de contexte, même lorsque le problème mathématique sous-jacent reste constant. Afin de relativiser l'impact de cette variable, nous avons interrogé sur le même questionnaire une deuxième population de référence, très différente de la première en âge et en compétences.

3.1. Le questionnaire

Le questionnaire, fourni en annexe 1, propose aux populations testées la résolution de six exercices ou items représentant chacune des six valeurs de la variable 5 (voir

2.1). Pour tester la pertinence de cette dernière, nous avons contrôlé les variables 1 à 4 en délimitant strictement leur domaine de variation. C'est ce que nous allons examiner dans cette section, en distinguant l'item 1 MES (mobilisation d'un rapport dans un contexte de mesure) des cinq derniers items (recherche d'une quatrième proportionnelle).

3.1.1. Les items 2 à 6

Au-delà de la diversité des énoncés, un seul problème **mathématique, précisé en 4.2, est sous-jacent** à chacun des items 2 à 6.

• *La variable 1 « de but »*

La question de chaque exercice est de même nature : elle porte sur la recherche d'une quatrième proportionnelle, donc le calcul d'un état. Nous avons éliminé d'autres questions comme le calcul d'un coefficient de proportionnalité ou la comparaison de rapports, car le calcul d'un état vient avant le calcul d'une transformation, et a fortiori avant la mise en relation de transformations, dans les instructions officielles. La variable 1 « de but » est donc maintenue constante.

• *La variable 2 « de statut »*

Deux types de rapport, externe ou interne[1], sont susceptibles d'être mobilisés, sans que la mobilisation de l'un ou l'autre soit privilégié par la nature des données[2] (voir ci-dessous), quel que soit l'item.

• *La variable 3 « numérique »*

Les rapports – internes et externes[1] – de chaque énoncé sont rationnels, décimaux non entiers, et prennent des valeurs de difficulté comparable.

• *La variable 4 « d'expression »*

Aucun énoncé ne mobilise explicitement des écritures fractionnaires – bien que les rapports externes et internes[1] soient des rationnels non entiers –, ceci afin d'éviter qu'un échec trop massif et/ou des refus de répondre risquent de rendre délicates les interprétations. Les rapports sont fournis au moyen de paires d'entiers naturels (exemple : réussite de 3 pour 4 et pas $\frac{3}{4}$) appartenant à un domaine numérique familier.

Traiter l'un ou l'autre de ces cinq items est donc neutre vis à vis de ces quatre variables. Aucune de ces dernières ne devrait influencer les procédures mobilisées.

[2] Ce qui ne serait pas le cas si le rapport interne par exemple était entier et le rapport externe non entier, favorisant ainsi l'usage du premier.

3.1.2. Cas particulier de l'item 1 (MES)

MES est un peu particulier. Il représente la catégorie 1 de la classification fournie en 2.1. Cet item est le seul qui ne demande pas de calculer une quatrième proportionnelle, mais seulement d'exprimer le rapport d'une grandeur[3] *B* à une unité *b*. Une recherche de quatrième proportionnelle associée à cet item comme : « 8 baguettes B ont la même longueur que 15 baguettes b. Et 17 baguettes B ? » est en fait prise en charge par CHGTU (item 5). MES vise ainsi à évaluer la capacité à mobiliser un rapport pour exprimer une mesure. Ainsi, il suppose la mise en œuvre d'une compétence implicitement requise pour résoudre les autres items. La variable 1 « de but » y prend une valeur 'calcul d'un rapport' différente de celle prise dans les autres items ; la variable 2 « de statut » prend la valeur 'rapport de mesure '; les variables 3 « numérique » et 4 « d'expression » y prennent des valeurs analogues à celles prises dans les autres items.

Précisons enfin, pour conclure la section 3.1, que l'ordre de présentation des items variait d'un groupe testé à l'autre afin de minimiser les effets d'amalgame par proximité.

3.2. Les conditions de l'enquête et le public testé

L'enquête a été réalisée au cours de l'année scolaire 2003-2004. Elle a été menée auprès de deux types de public : **121** élèves de 5^e [4] (12 ans) et **110** élèves-professeurs des écoles (désignés par PE dans toute la suite) en première année d'IUFM[5]. Le panel des classes de 5^e a été choisi dans des zones urbaines et rurales, et comprend une classe de ZEP[6]. L'étude des résultats obtenus par ces élèves aux évaluations nationales en mathématiques à l'entrée en 6^e permet de considérer cet échantillon comme représentatif.

Les notions de fraction par fractionnement de l'unité (trois fois un cinquième de tarte) et de fraction quotient de deux entiers d'une part (3 tartes à partager en cinq invités) ; l'usage de fractions comme opérateurs de proportionnalité, dans toutes sortes de situations physico-empiriques, d'autre part, figurent au programmes de 6^e [7]. Cet enseignement est repris et approfondi au cours de la 5^e. La population d'élèves testée peut donc être considérée comme outillée relativement aux contenus d'enseignement qui nous préoccupent.

---

[3] Nous noterons en caractère droit, B ou b, l'objet baguette, et en italique *B* ou *b* la longueur de cet objet.

[4] La 5^e est en France la deuxième année de l'école du second degré.

[5] Les IUFM forment l'ensemble des professeurs du premier et du second degré en France.

[6] Zone à Eduquer en Priorité. Nombre d'élèves scolarisés en ZEP sont en situation socio-économique difficile.

[7] La 6^e est l'année qui précède la 5^e.

Les professeurs des écoles enseignent toutes les disciplines à l'école primaires (3-11 ans) et ne sont donc pas, pour l'immense majorité, des spécialistes en mathématiques. Ce sont des adultes recrutés au niveau licence, certains ayant déjà une expérience professionnelle, dans l'enseignement ou ailleurs. Ils ne sont appelés à enseigner qu'une première approche des rationnels, des rapports et de la proportionnalité, cette dernière notion étant abordée dans un contexte numérique essentiellement entier. Mais la maîtrise de ces problèmes, largement requise au concours de recrutement, est considérée par les professeurs des écoles comme primordiale pour un exercice dominé de leur futur métier. Il nous a semblé pertinent de retenir cette population comme population de référence car atteindre leur niveau de compétence dans le domaine étudié nous semble être un objectif ambitieux mais raisonnable pour l'ensemble de la population scolaire.

4. Les principaux résultats de l'enquête et leur interprétation

4.1. La réussite et l'échec

Items / Population	MES Item 1		MEL Item 2		HET Item 3		FREQ Item 4		CHGTU Item 5		DIL Item 6		m
PE (effectif total **110**)	87%	96	84%	92	91%	100	90%	99	80%	88	86%	95	86%
Rang (items 2 à 6)			4		1		2		5		3		
5^e (effectif total **121**)	8%	9	12%	15	21%	25	26%	31	10%	12	14%	17	15%
Rang (items 2 à 6)			4		2		1		5		3		

Tableau 1 : réussite par item et par population ; les effectifs bruts sont en sous-colonne de droite, m est la moyenne obtenue aux six items

Comme cela était attendu, les élèves de 5^e échouent massivement alors que les PE réussissent tout aussi massivement. Dans un cas comme dans l'autre, HET et FREQ sont les items les plus réussis. En 5^e, la probabilité de réussir l'un de ces items est significativement différente de celle de réussir l'un quelconque des quatre autres items : sous l'hypothèse contraire H_0 (test de Mac Nemar dans sa version loi binomiale), la probabilité d'obtenir les résultats observés varie entre 0,01% pour FREQ vs MES et 5,77% pour HET vs DIL (seule valeur au-dessus de 5%). En revanche, le critère de la réussite ne permet pas de discerner HET et FREQ en 5° comme en PE (probabilité respective de 20,88% et 50% selon le même test).

MEL et DIL forment un deuxième groupe d'items non discernables par leur réussite en 5° et en PE (probabilité respective de 38,72% et 33,18% selon le même test).

Si l'on met MES à part, donc parmi les items 2 à 6, CHGTU est le moins réussi dans les deux cas. Il est d'ailleurs remarquable que les cinq items 2 à 6 se rangent pratiquement de façon analogue dans l'une et l'autre population, avec une inversion non significative de HET et FREQ.

MES en revanche n'occupe pas du tout la même position dans les deux populations. Il est de loin le moins réussi en 5^e^, alors qu'il occupe une position médiane supérieure en PE. Le tableau croisant, en 5^e^, la réussite à MES avec la réussite à au moins un des items 2 à 6, ne permet pas d'établir de lien entre MES et les autres items car il illustre presque une situation d'indépendance :

$$\chi^2 \approx 1.5 \; ; \; P(\chi^2 > 1.5) \approx 21\%$$

MES / Autres items	R	E	Total
R	5	39	44
E	4	73	77
Total	9	112	121

Tableau 2 : Tableau croisant la réussite à MES et à au moins un des items 2 à 5

Deux types d'interprétations peuvent être proposés.

1. Problèmes de formulation

Dans la phrase « Exprimer la longueur d'une baguette B par rapport à la longueur d'une baguette b » les termes « Exprimer » et « rapport » ont-ils été compris par les élèves de 5^e^ ? Une formulation alternative comme « Quelle est la longueur de B avec *b* comme unité » aurait-elle été mieux comprise ? le problème aurait-il été mieux réussi ? Nous ne le pensons pas. Pour nous, le problème majeur serait plutôt un problème de référence.

2. Problèmes de références

A côté d'un fort pourcentage (48%) d'absence de réponses, on trouve 33% d'élèves de 5[e] qui cherchent à calculer explicitement *B* **et** *b* au moyen d'une unité, par une expression comme « $B = 15$mm et $b = 8$mm ». Ces élèves n'ont donc pas compris que *B* et *b* ne sont déterminables qu'à une homothétie près, ou encore que seul le rapport $\frac{B}{b}$ est calculable et pas *B* et *b* séparément, ce qui n'est pas le cas des autres items ou chaque terme des rapports envisagés est soit donné, soit calculable au moyen d'une unité appropriée. Ceci est à rapprocher de ce que Vergnaud (1990, p. 29) appelle le « *detour behaviour* », qui consiste, pour un sujet donné, à accepter qu'un calcul puisse servir à relier des quantités inconnues ($8B = 15b$) au lieu de fournir tout de suite l'inconnue ($B =$…). Vergnaud considère que c'est un des plus « *important aspects of the jump between arithmetic and algebra* ». Les élèves examinés n'ont pas encore accompli ce saut, à ce moment de leur scolarité où l'étude explicite de l'algèbre n'a pas commencé. Ils ne sont donc pas outillés, ne serait-ce que pour entrer dans ce problème. A l'inverse les PE, qui ont bien intégré le calcul algébrique, n'éprouvent pas de difficulté conceptuelle. Leur réussite à cet item dans des proportions comparables aux autres items est donc bien interprétable.

Conclusion du paragraphe 4.1

En résumé, ces premiers résultats font apparaître : un gros décalage de réussite entre les deux populations alors qu'elles sont toutes deux outillées pour la résolution de ces problèmes ; une première différenciation entre les items, suivant le type physico-empirique de ces derniers[8] ; une distribution des rangs de réussite quasi identique entre les deux populations en ce qui concerne les items 2 à 6, signalant une permanence de certaines difficultés et réussites, selon le contexte physico-empirique[8], pour le calcul d'une quatrième proportionnelle ; un item 1 atypique dans le lot, parce que structurellement différent des autres, mais aussi par les références algébriques qu'il suppose. En tout état de cause, il convient d'examiner de plus près les procédures, soit les moyens de réussir ou d'échouer, pour compléter nos interprétations.

4.2. Les procédures observées (Items 2 à 6)

Dans cette section, nous nous limitons à l'étude des items 2 à 6 qui sont des variations physico-empiriques d'un même problème mathématique, dont nous rappelons les principales caractéristiques :

Données : une fonction linéaire *f*, trois entiers *a, b, c* tels que : $a < b < c$, $a \in \{4 ; 5\}$; $b \in \{3 ; 5 ; 7 ; 8 ; 9\}$; $c \in \{9 ; 11 ; 13 ; 25\}$; (les rapports

---

[8] N'oublions pas que les autres variables sont bloquées.

externe, $\frac{b}{a}$, et interne, $\frac{c}{a}$, sont décimaux et supérieurs[9] à 1) ; $c = ka+1$, $k \in \{2 ; 3 ; 6\}$.

Question : sachant que $f(a) = b$, calculer $f(c)$.

Pour notre propre relevé des procédures présenté dans le Tableau 3 ci-dessous, nous nous référons principalement à la classification établie par Vergnaud (1983, p.148) dans un but différent du nôtre[10]. Ainsi, parmi les procédures exactes, COEF, MULT, UNIT, XPRO, désignations mises à part, ont été prises en compte et distinguées par Vergnaud. En revanche, nous séparons en deux procédures, ADD et LICO, l'unique catégorie « *Scalar Decomposition* » de Vergnaud, parce que la multiplication est mobilisée dans la deuxième et seulement l'addition dans la première. L'usage explicite de fractions équivalentes, FRAC, non retenu par Vergnaud, est ici considéré comme une procédure distincte, conformément à l'analyse de Kieren (1976, p.102-103) pour qui l'interprétation d'un rationnel comme classe d'équivalence de fractions diffère, d'un point de vue didactique, de son interprétation comme ratio ou opérateur.

Parmi les procédures incorrectes, Nous distinguons ADIN et ADEX, comme Vergnaud l'a fait sous les désignations de « *Erroneous Scalar and Erroneous Function* ». Enfin, nous considérons qu'APPRO est une procédure distincte des deux précédentes à cause de la relation qui lie a et c dans les items 2 à 6 : $c = ka + \mathbf{1}$. La présence du terme 1 dans cette relation amène nombre d'élèves à démarrer correctement leur raisonnement en utilisant le scalaire multiplicatif k, mais à le finir de façon erronée en ajoutant 1, au lieu de $f(1)$, au résultat intermédiaire.

Naturellement, les formules mathématiques spécifiées dans le Tableau 3 en colonne 2 ne sont que rarement explicitées par l'une ou l'autre des populations testées. Elles sont en revanche fort utiles pour interpréter leur démarche en actes et les classer.

Code	**Formule mathématique**	**Exemple pour l'un ou l'autre item**
COEF	$f(x) = mx$	DIL : Le coeff. d'agr. est de $\frac{7}{4}$, le pont agrandi mesure donc en *cm* : $9\times\frac{7}{4}=\frac{63}{4}$

[9] Sauf pour FREQ où $\frac{b}{a} < 1$, vu qu'il s'agit d'une fréquence.

[10] Vergnaud a surtout cherché à interpréter les différences de fréquence de mobilisation de ces procédures en termes d'isomorphisme de mesures. Il insiste ainsi sur la difficulté des élèves à mobiliser certaines procédures qui n'ont du sens que si on comprend qu'elles portent sur des nombres et pas sur des grandeurs.

MULT	$f(kx) = kf(x)$	CHGTU : 13 ÷ 4 = 3,25. Donc nombre de verres : $9{\times}3{,}25{=}29{,}25$
ADD	$f(\Sigma x_i) = \Sigma f(x_i)$	CHGTU : 4 + 4 + 4 + 1 = 13, donc avec 13 bouteilles, on remplit: 9 + 9 + 9 + 2.25 = 29.25 verres
LICO	$f(\Sigma\lambda_i x_i) = \Sigma\lambda_i f(x_i)$	FREQ : $25{=}6{\times}4{+}1$, donc en 25 lancers il réussit : $6{\times}3{+}0{,}75{=}18{,}75{\approx}19$
XPRO	$ax = bc$	MEL : $11{\times}8{=}5{\times}x$ donc $x{=}\frac{11{\times}8}{5}{=}17{,}6$. Donc pour 11p. peint. noire, il faut 17.6 p. peint. blanche
UNIT	$f(c) = cf(1)$	HET : 1*l* de miel pèse $\frac{5}{4}kg$, donc 9*l* de miel pèsent en *kg* : $\frac{5}{4}{\times}9{=}\frac{45}{4}$
FRAC	$\frac{b}{a}=\frac{kb}{ka}$	FREQ : $\frac{3}{4}{=}\frac{6}{8}{=}\frac{18}{24}$, donc à peu près 18 réussites sur 25 lancers
ADEX	$f(x) = x + b$	DIL : le mât est agrandi de 3 cm (7-4), donc le pont aussi, soit en cm : 9 + 3 = 12
ADIN	$f(x + b) = f(x)+ b$	MEL : 6 p. de peint. noire de plus, donc 6 p. de peint. blanche de plus, soit 8 + 6 = 14
APPRO	$f(ax + 1) = af(x) + 1$	HET : $9{=}2{\times}4{+}1$, donc 9*l* pèsent en *kg* : $2{\times}5{+}1{=}11$
ALEA		Combinaison des données sans logique apparente
0		Absence de réponse
ELSE		Autres réponses

Tableau 3 : codage des procédures observées

4.2.1. Les constats

Nous avons relevé, individu par individu, le nombre de procédures différentes mobilisées (parmi les 13 procédures décrites en 4.2). Par exemple, un individu qui utilise : {COEF, COEF, MULT, COEF, ADD} ou {ADEX, UNIT, ADIN, UNIT, ADIN} pour résoudre les problèmes 2 à 6 aura mobilisé trois procédures différentes.

Les tableaux qui suivent synthétisent les observations.

PE						Total
Nombre de procédures différentes mobilisées	1	2	3	4	5	
Effectifs (données brutes)	40	38	27	3	2	110

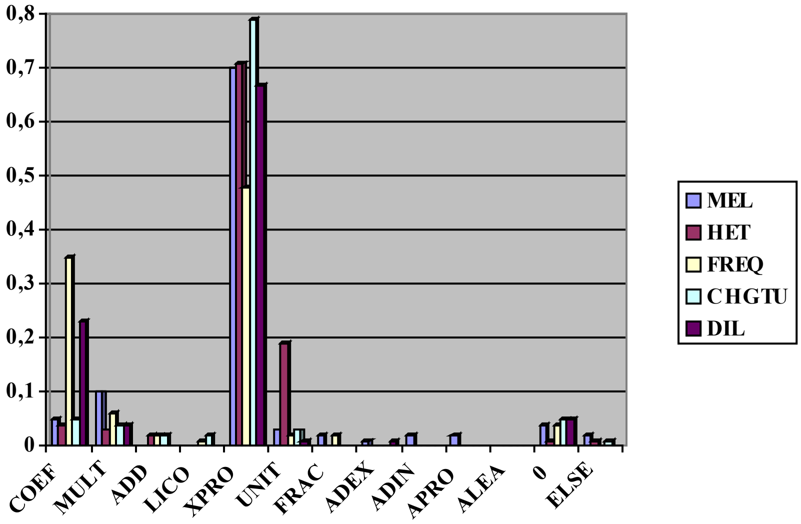
Effectifs (pourcentages p_i)	**36%**	**35%**	**24%**	**3%**	**2%**	**100%**

Tableau 4 : effectif des PE ayant mobilisé 1,2, 3, 4, 5 procédures différentes

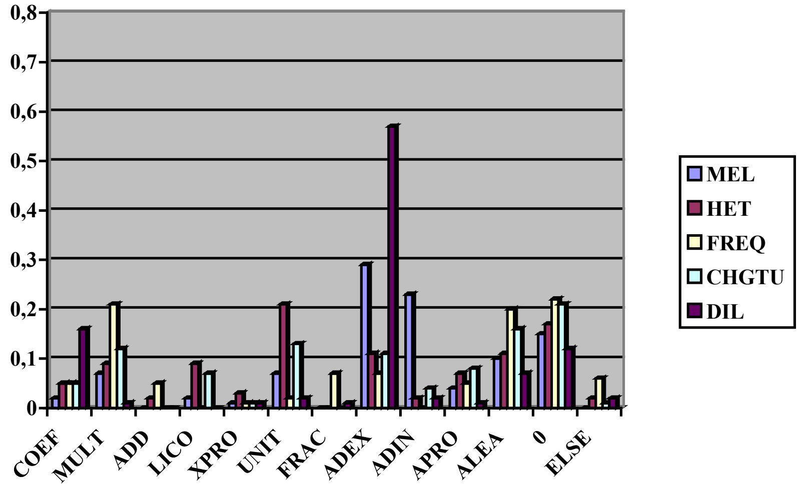
5^e						Total
Nombre de procédures différentes mobilisées	1	2	3	4	5	
Effectifs (données brutes)	1	21	35	44	20	121
Effectifs (pourcentages)	**1%**	**17%**	**29%**	**36%**	**17%**	**100%**

Tableau 5 : effectif des élèves de 5^e ayant mobilisé 1,2, 3, 4, 5 procédures différentes

Un examen de ces tableaux fait apparaître que 82% des élèves de 5^e ont mobilisé trois procédures différentes ou plus, alors que 71% des PE ont mobilisé 1 ou 2 procédures différentes. Par ailleurs, l'examen comparé des Graphique 1 et Graphique 2, ou des Tableau 7 et Tableau 8 fournis en annexe 2, fait apparaître pour les PE une procédure, XPRO, mobilisée préférentiellement **quel que soit l'item** considéré. Une telle procédure élective n'existe pas en 5^e (ADEX est surtout associée à DIL et dans une moindre mesure à MEL). On notera aussi que l'item traité influe fortement sur la fréquence de choix d'une procédure en 5^e : au-dessus d'une procédure donnée du Graphique 2, lorsque la couleur change, la longueur de la barre a tendance à changer.



Graphique 1 : effectif des PE (%) selon les procédures (items 2 à 6)



Graphique 2 : effectif des élèves de 5e selon les procédures (items 2 à 6)

L'examen des fréquences de mobilisation de deux procédures par les PE : COEFF (surtout pour FREQ et DIL) ; UNIT (surtout pour HET) relativise un peu le constat de leur choix massif pour XPRO. Cela peut s'expliquer par l'existence, dans la langue naturelle, de désignations standard comme : « le coefficient de réussite » (dans FREQ, l'expression « 3 paniers sur 4 » invite à la prise en compte du coefficient de réussite $c = \frac{3}{4}$) ou « le coefficient d'agrandissement » ($c = \frac{7}{4}$ dans DIL), fréquemment utilisées et renvoyant à des observations courantes. Ce qui n'est pas le cas pour les autres items. En ce qui concerne HET, le choix assez fréquent de UNIT peut s'expliquer par le recours, très répandu, à des références unitaires dans les situations de la vie courante mettant en jeu des grandeurs comme les masses, les volumes, les durées, la monnaie… (masses spécifiques, prix unitaires….). On constatera d'ailleurs, en ce qui concerne DIL et HET, que l'usage de COEF et UNIT se distingue déjà en 5^e de l'usage des autres procédures.

En ce qui concerne les élèves de 5^e on observera, sur un fond prédominant de fortes variations déjà relevé plus haut, l'existence d'une ou deux procédures privilégiées par item, se détachant nettement des autres procédures : ADEX et ADIN pour MEL ; UNIT pour HET ; MULT pour FREQ ; UNIT pour CHGTU, (mais nettement moins détachée des autres procédures que dans HET, puisque talonnée par MULT et ADEX) ; ADEX pour DIL. On relèvera dans ce dernier cas le score très élevé de la procédure fausse ADEX, significativement plus élevé que pour tous les autres items : « agrandir » reste toujours très lié à « ajouter » à cet âge !

4.2.2. L'interprétation

Des variations significatives observées chez les élèves de 5^e ne se retrouvent pas, ou très peu, chez les PE. Les premiers ont tendance à changer de procédure en changeant d'item, n'ont pas de procédure élective quel que soit l'item, sont influencés par l'item dans leur choix de procédure exacte ou erronée. Examinons la variation la plus significative, à savoir la tendance très nette des élèves de 5^e à changer de procédure en changeant d'item et tentons de l'expliquer à partir des cinq variables que nous avons repérées (cf 2). Un changement de procédure est souvent associé à une adaptation à un changement de valeur d'une variable didactique. Par exemple, dans les problèmes de comparaison de mélanges (jus de fruit, eau) de Noelting (1980, pp. 244-245), une élève testée utilise, selon notre codage, COEFF pour comparer les mélanges (2,1) vs (4,3) : « On the left...two times more juice than water, while on the right … one glass of water too much to keep the same proportion ». Pour comparer les mélanges (5,2) vs (7,3), la même élève utilise FRAC, en considérant les relations partie-tout (jus de fruit/mélange) exprimées par les fractions $\frac{5}{7}$ et $\frac{7}{10}$: « On the left… $\frac{50}{70}$ juice while on the right… $\frac{49}{70}$ only… ». La prise en compte du rapport entier 2 pour 1, suffit en effet à traiter le premier cas, alors qu'aucun rapport entier ne permet de traiter le deuxième. Dans ce cas, c'est la variable 3, « numérique » qui rend bien compte du changement de procédure constaté. Mais dans notre questionnaire nous avons strictement contrôlé cette variable, de telle sorte qu'elle ne peut être liée au choix d'une procédure. Comme de la même manière nous avons contrôlé les variables 1, 2, 4, seule la variable « de contexte », parmi les cinq variables retenues, semble susceptible d'expliquer les variations observées. Ce qui est un argument de poids en faveur de la pertinence de cette dernière.

On peut certes tenter d'expliquer les phénomènes constatés au moyen d'autres variables. Par exemple, la longueur ou la lisibilité des énoncés. Les items les mieux réussis en 5° ne sont-ils pas FREQ et HET, dont les énoncés sont les plus courts ? Mais CHGTU, dont l'énoncé est à peine plus long que celui de FREQ, est le moins bien réussi. On peut cependant envisager, malgré ce contre-exemple, que la complexité des énoncés ait un certain impact sur la réussite. Mais on voit mal comment elle pourrait influencer le choix des procédures. Nous avons retenu, pour chaque item, la formulation juste suffisante à sa compréhension. Or, il se trouve que la formulation est fonction du contexte physico-empirique auquel on se réfère : on ne décrit pas une expérience de fréquence comme une expérience d'agrandissement. Il n'y a pas moyen d'échapper à des variations dans la longueur et la lisibilité des énoncés, sauf à recourir à des artifices de langage qui risqueraient d'apporter plus de brouillage que de transparence. La complexité d'un énoncé est donc une variable dépendante de la variable de contexte. Cette dernière reste donc, en l'état de nos recherches, celle qui nous semble le mieux rendre compte des variations observées dans le choix des procédures.

4.3. Expressions numériques et changements de registres

Ce paragraphe vise à déterminer les observables susceptibles d'expliquer certains facteurs de la réussite des PE. On peut bien sûr évoquer un plus grand achèvement dans l'appropriation du champ conceptuel (Vergnaud, 1991) de la proportionnalité : une meilleure identification des divers types de problèmes qui en relèvent et une meilleure expertise du modèle mathématique linéaire sous-jacent. Mais ce constat ne nous ouvre pas de nouvelles voies d'enseignement à destination des élèves du collège. Ce que nous recherchons, ce sont les moyens qui permettent de transformer des données verbales décrivant une expérience (l'énoncé) en écritures arithmétiques ou algébriques résolvantes et les moyens de traitement de ces dernières. Julo (1995, p 29) décrit trois phases entre la lecture de l'énoncé d'un problème et sa résolution : interprétation et sélection des données ; structuration ; opérationnalisation. Le passage d'une phase à l'autre suppose des réorganisations, des changements de représentations et donc de l'expression du problème et des moyens de traitements qu'elle autorise. « *Or, si les élèves ont beaucoup de mal à changer de registre* », selon Duval (2001, p 91), les mathématiciens professionnels passent continuellement du rhétorique au formel, c'est même ce qui distingue le fonctionnement cognitif du mathématicien du fonctionnement commun…. Ou encore « *L'activité mathématique…. nécessite des changements de direction de la pensée qui apparaissent comme des ruptures…. Tout se passe comme s'il fallait brusquement changer la manière de représenter les données, ou penser à autre chose, à l'encontre du déroulement spontané du jeu d'associations qui a été induit par la première compréhension du problème ou les premiers traitements engagés.* » (Duval ; 2001, p 85). On doit donc retrouver des traces de cette mobilité inter-registres, ou de cette absence de mobilités entre les productions des PE et celles des élèves.

Or, du côté des moyens d'expression, deux phénomènes d'importance séparent les PE et les élèves de 5^{e} :

- Usage massif des fractions pour exprimer les rapports chez les PE1, usage très limité de ces dernières par les élèves de 5^{e} ;
- Changements de registres[11] fréquents chez les PE1 et totalement anecdotiques chez les élèves.

Les deux traitements suivants de FREQ, extraits de deux copies différentes, l'une d'un PE l'autre d'un élève de 5^{e}, sont deux manières très différentes de réussir. Ils vont illustrer, le premier comme exemple et le deuxième comme contre-exemple, les deux points ci-dessus.

Copie 1 : 4 essais pour 3 réussites. Pour 24 essais (6 × 4) on a 18 (6 × 3) réussites. Le 25^{e} essai peut être réussi ou pas. En 25 lancers, le joueur peut donc réussir 18 ou 19 paniers.

Copie 2 : $25\times\frac{3}{4}=\frac{75}{4}$, $\frac{75}{4}=18.75$; le joueur peut espérer réussir 18 ou 19 paniers.

Dans la copie 1, la réussite est obtenue en suivant une logique quasi physique et séquentielle de déroulement de partie. Dans la copie 2, l'étudiant interprète mathématiquement l'énoncé physique en termes de rapport dont il mobilise une expression fractionnaire ($\frac{3}{4}$). Il utilise ensuite cette fraction comme un opérateur linéaire pour calculer la réussite. Il est capable d'effectuer un produit (traitement interne au registre fractionnaire), puis d'accepter comme équivalentes l'expression d'un rapport valorisant les deux termes rapportés (75 et 4) et une expression du lien entre ces deux termes, au moyen d'un nombre (18.75)[12], le tout finalisé par la

[11] Nous avons comptabilisé comme changement de registre tout passage d'une écriture fractionnaire à une écriture décimale, entière ou non entière, (ou vice versa).

[12] Voir dans : Adjiage, 1999, pp. 19 et 135-137, en quoi les écritures fractionnaires et décimales constituent deux registres différents. Le passage de l'une à l'autre est une

recherche d'un nombre entier de paniers (retour à la nécessité physique) mieux appréhendé par une expression décimale que fractionnaire du rapport obtenu.

Dans le premier cas, on a une procédure très contextualisée, dont on ne peut prédire qu'elle sera généralisable. Dans le deuxième, on a une modélisation très maîtrisée et finalisée, dont on peut penser qu'elle sera mobilisable dans des circonstances très différentes.

Les deux tableaux qui suivent permettent de mesurer l'ampleur du phénomène à l'échelle des deux populations observées.

PE (110)	MES		MEL		HET		FREQ		CHGTU		DIL	
a/b	85%	94	74%	81	78%	86	77%	85	84%	92	71%	78
α.βγ̃	11%	12	74%	81	85%	94	63%	69	75%	82	81%	89
Chgt Reg	10		88		81		140		105		69	

5^e (121)	MES		MEL		HET		FREQ		CHGTU		DIL	
a/b	2%	2	0%	0	0%	0	10%	12	5%	6	2%	3
α.βγ....	19%	23	15%	18	45%	54	11%	13	26 %	31	17%	21
Chgt Reg	0		1		0		14		9		3	

Tableau 6 : Examen comparé de modalités de l'expression dans le traitement des six items.

a/b : usage d'écritures fractionnaires ; α.βγ.... : usage d'écritures à virgule ; Chgt Reg : usage d'un changement de registre

Les sous-colonnes de gauche proposent les effectifs en pourcentage, les sous-colonnes de droite les effectifs bruts (sur un total de 110 étudiants en PE et de 121 élèves en 5^e). Les totaux dépassent parfois 100% car certains élèves et étudiants, qui changent de registres, utilisent des fractions **et** des nombres à virgules.

La disponibilité des écritures fractionnaires pour exprimer le rapport de *B* à *b* est sans doute déterminante dans la réussite à MES (87% en PE), tant l'énoncé est congruent à l'équation : $8B = 15b$, équation qui se résout à moindre coût au moyen d'une fraction (l'expression décimale du rapport est bien sûr envisageable, mais est simplifiée par le détour fractionnaire). Sur les 96 PE (87%) qui posent cette équation, 90 réussissent en utilisant des fractions pour leur résolution, 1 seul

opération (conversion) en général plus coûteuse sur le plan cognitif qu'un traitement interne à un registre donné comme : $25\times\frac{3}{4}=\frac{75}{4}$ (Duval, 1995, pp. 40-42).

réussit en n'utilisant pas de fraction (en fait un décimal), et les qui 5 échouent sont ceux qui n'ont pas réussi à mobiliser de fraction.

En 5^e^ en revanche, c'est l'item le moins réussi (8%) avec un taux d'utilisation de fractions réduit à 2%. Cette expression fractionnaire est à ce point adaptée au résultat que seuls 11% des PE utilisent un autre mode d'expression, en l'occurrence décimal, ce qui explique le taux de changement de registres le plus faible de la série.

En ce qui concerne FREQ, le passage par l'écriture fractionnaire est un excellent intermédiaire car $\frac{3}{4}$ est très congruent à l'énoncé : « 3 paniers sur 4 ». Le résultat fractionnaire $25\times\frac{3}{4}=\frac{75}{4}$ est en revanche peu satisfaisant car on cherche un résultat entier. D'où l'importance de savoir changer de registre pour passer de $\frac{75}{4}$ à son expression décimale, exacte puis/ou approchée, ce qui suppose que $\frac{75}{4}$ soit reconnu comme un nombre, situé entre deux entiers consécutifs. Les procédures choisies par 92 PE (83%) sont XPRO et COEF. Sur ces 92 PE, 82 réussissent en utilisant des fractions pour leur résolution, 6 réussissent en n'utilisant pas de fraction (en fait un décimal), 1 échoue sans utiliser de fraction, 3 échouent en utilisant les fractions. On notera par ailleurs qu' en 5^e^ cet item est le plus réussi (26%) et que c'est aussi celui où les écritures fractionnaires ont été le plus mobilisées (10%).

Avec un taux de mobilisation des fractions (84%) supérieur au taux la mobilisation d'un décimal (75%), CHGTU est aussi l'item le plus traité en PE au moyen de la procédure XPRO ($13\times9=4\times x$), facilitante lorsqu'on dispose des écritures fractionnaires. HET et DIL en revanche ont un taux de mobilisation des fractions (respectivement 78% et 71%) inférieur au taux de mobilisation des décimaux (respectivement 85% et 89%) en PE. Ce n'est pas très surprenant, vu que ces items requièrent des unités usuelles (kg, l, cm) du système métrique, très associé au système décimal, particulièrement en France. Ce qui peut expliquer les occurrences de changement de registres les plus faibles (respectivement 81 et 69) après MES. MEL occupe une position médiane en termes de changements de registres et mobilise autant les écritures fractionnaires et décimales (74%). Ce qui le différencie nettement de CHGTU avec qui il a pourtant en commun le recours à des unités hors système métrique (pots, bouteilles et verres).

5. Ce qu'apporte cette étude à l'analyse de la complexité des notions de rapport, de rationnel et de proportion et à leur enseignement

Cette enquête établit que les PE réussissent la modélisation et le traitement de problèmes physico-empiriques mettant en jeu des rapports, dans le cas de l'expression d'un rapport de mesure et dans celui de la recherche d'une quatrième proportionnelle. Pour cela, ils ont réussi à :

- Appréhender chaque situation physique particulière ;
- Reconnaître un même problème mathématique sous-jacent au-delà des habillages physico-empiriques différents (usage massif de XPRO[13]) des items 2 à 6 ;
- Traiter l'ensemble des items en faisant preuve de flexibilité inter-registres, ce qui permet de rester congruent à l'énoncé et donc de le résoudre sans détour piégeant, puis d'interpréter et de contrôler, dans les termes appropriés au contexte, la solution mathématique.

Les cinquièmes y sont peu parvenus, faute de maîtriser suffisamment toute la complexité des notions de proportionnalité et de nombre rationnel. Nous allons donc résumer, dans les sections qui suivent, notre modélisation de cette complexité et quelques conséquences sur l'enseignement des notions concernées.

5.1. La complexité des notions de rationnel et de proportionnalité simple[14]

Nous prenons acte de l'existence d'une variable physico-empirique didactiquement pertinente en déclinant cette complexité sur deux univers séparés et articulés :

1. Un univers physico-empirique représenté par six types de situations présentées en 2.1 ;
2. Un univers mathématique comprenant un **seul type d'objets**, les nombres rationnels, auxquels on accède et que l'on traite (mise en relation de ces nombres) au moyen de divers registres d'expression (Adjiage, 2003, pp. 130-132 ; pp. 134-137).

Un deuxième niveau de séparation et d'articulation apparaît à l'intérieur de chacun de ces univers, entre les six situations physico-empiriques d'une part, et entre les divers registres d'autre part.

Dans cette approche, la diversité – par exemple au sens où Kieren (1980, p. 134) évoque « *five separate fractional or rational number thinking patterns* » – de la notion se situe du côté de l'univers physico-empirique, l'unicité du côté de

[13] Il n'est pas question de dire que l'usage massif de XPRO par les PE est un exemple à suivre. Pour une analyse détaillée de l'algébrisation de la proportionnalité, voir Comin (2000, pp. 123-149). La stabilité de cette procédure (mais toute autre procédure aurait convenu), malgré la diversité des situations, est seulement un indicateur pertinent pour notre étude.

[14] Au sens de Vergnaud (1983, pp. 129-140) qui distingue en outre, dans le champ conceptuel de la proportionnalité, les catégories « produit de mesures » (pp. 134-138) et « proportion multiple » (pp. 138-140) qui n'entrent pas dans notre étude.

l'univers mathématique. L'appréhension de cette unicité, au-delà des diverses formes d'expression sémiotique des rationnels, permet le repérage de structures mathématiques communes à des classes de **situations** physico-empiriques, donc la modélisation. Enfin, pour parcourir toute la diversité de ces situations, il y a lieu de conjuguer la variable 5, « de contexte », avec les quatre autres variables décrites en 2.2. On transformera notamment ces situations en problèmes en jouant sur la variable 1 « de but », relative à la question posée (calcul d'une quatrième proportionnelle, calcul d'un rapport, comparaison de deux rapports…).

Le Schéma 1 qui suit illustre cette complexité au moyen de deux situations physico-empiriques cognitivement fort **différentes**, que l'on peut néanmoins appréhender par un **unique** objet mathématique (par exemple le rationnel « trois-cinquièmes »), admettant lui-même des expressions cognitivement très **différentes**. Le niveau principal de séparation/articulation entre les univers physique et mathématique est représenté par la double flèche épaisse ; le niveau secondaire par les doubles flèches minces.

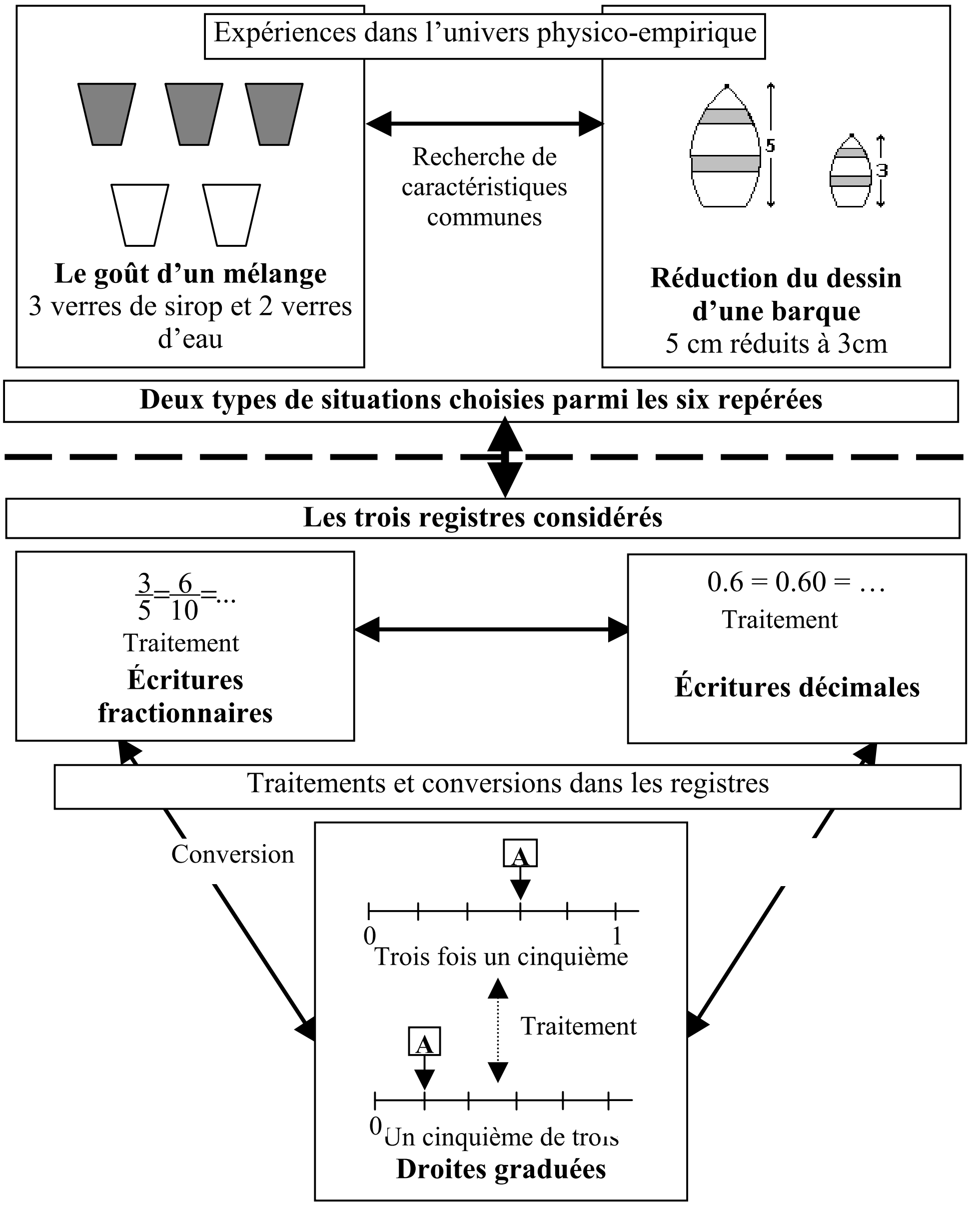


Schéma 1 : complexité de la notion de rapport

5.2. Un exemple de séquence d'enseignement prenant en compte cette complexité

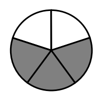
On a tout à gagner en ne rabattant pas, dans l'enseignement, l'univers physico-empirique et l'univers mathématique l'un sur l'autre, tant ils diffèrent par : les modalités envisageables de leur investigation (approche multi-sensorielle et/ou instrumentée réelle ou évoquée pour l'un, mobilisation d'une sémiotique spécifique pour accéder aux objets mathématiques de l'autre) ; la nature des traitements et preuves qu'il est légitime d'y mener (mesures répétées et comparées par exemple pour le premier, théorèmes et règles formelles pour le second).

La question principale est : comment mener concrètement un enseignement qui organise les différents niveaux de séparation et d'articulation évoqués en 5.1 et aboutisse à la reconnaissance, par les élèves, d'un modèle mathématique, la linéarité, permettant d'unifier des classes entières de problèmes ? Un traitement approfondi de cette question sera l'objet d'un autre article. Il nous a paru cependant judicieux de proposer ici, à titre d'exemple, une séquence-type de résolution de problèmes qui devrait apporter quelques éclaircissements sur les contenus et méthodes d'un tel enseignement.

Soit le problème suivant, tiré de Brissiaud (2000, p.48) : Cinq personnes décident de se partager équitablement trois pizzas. Une d'entre elle étant pressée, on décide de faire chauffer la part qui lui revient au four. Quel morceau de pizza doit-on découper ?

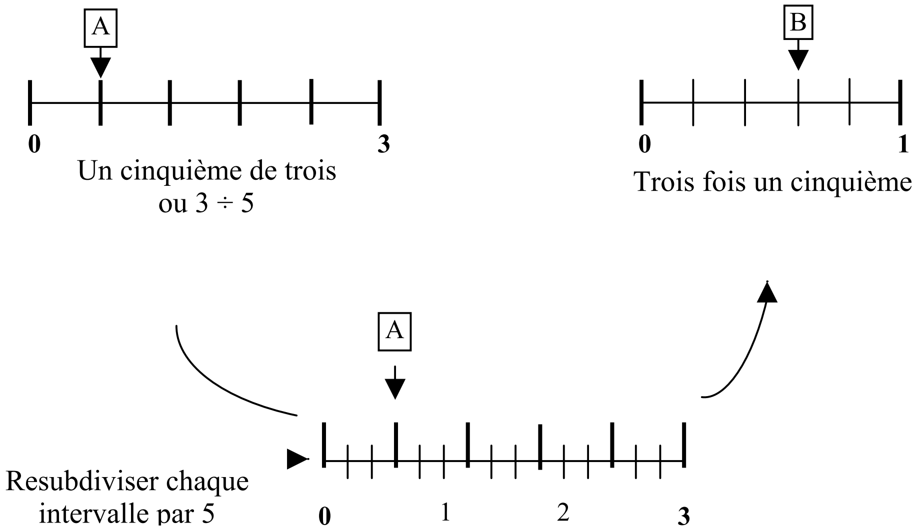
Selon l'analyse de Kieren (1980, p. 122), il s'agit d'un problème de quotient, l'évaluation du résultat dépendant d'une relation partie-tout : 3 parts d'un tout découpé en 5 parts. Mais concrètement, lorsque l'on pose ce problème à des enfants, la plupart découpent des pizzas dessinées en morceaux, par exemple :

Trois pizzas, cinq invités (3 ÷ 5)



Part d'un invité $\frac{3}{5}$

Les gestes de découpage en morceaux et de « recollement » qui sont ici évoqués mettent en jeu plus un sens pratique qu'une pure notion mathématique comme celle de quotient. Selon notre analyse, cette manipulation est un traitement dans l'univers physico-empirique qui permet de reformuler un problème de rapport de deux grandeurs hétérogènes (Quantité de pizzas / Quantité de personnes) en un problème de mesure (mesurer la part d'un invité avec une pizza comme unité). Du point de vue adopté dans cet article, la notion de quotient appartient à l'univers mathématique. Elle peut être abordée, dans un premier temps, indépendamment du problème ci-dessus (principe de séparation), par exemple comme traitement, dans le registre des droites graduées, du problème mathématique suivant : « Compare les deux nombres A et B ci-dessous » :



A et B ont la même position dans [0 ; 1], donc A = B

Ce problème est effectivement posé dans NovOra (Adjiage & Heideier, 1998). Il peut se résoudre en ne recourant qu'aux ressources du registre des droites graduées, ainsi qu'il est suggéré ci-dessus.

On pourra enfin conclure cette séquence en ouvrant avec les élèves un « *débat scientifique* » au sens de (Legrand, 2000) : « En quoi les deux problèmes 'parts de pizzas' et 'traitement de 3 ÷ 5 sur droite graduée' sont-ils les mêmes ? En quoi sont-ils différents ? » (principe d'articulation). On peut à présent institutionnaliser puis réinvestir, au sens de Douady (1984, p.16), la modélisation par un quotient d'un problème de partage.

6. Conclusion

Nous nous sommes avant tout attaché dans cette étude à **objectiver** la complexité des rationnels, en tant que savoir à enseigner et à apprendre. C'est la raison pour laquelle nous avons peu « visité » l'univers **mental** des élèves, nous bornant à traiter des données d'observation, rapportées par d'autres chercheurs ou par nous-même, et à en déduire la pertinence de certaines variables. Ceci nous a permis d'élaborer des **objets** d'enseignement et de conjecturer l'importance de leurs interrelations. Nous espérons que la prise en compte de ces produits de la recherche par l'enseignement permettra aux élèves de se construire des « *thinking patterns* » au sens de Kieren (1980, p. 134) pertinents. Seul l'examen de productions d'élèves nous permettra d'apprécier le degré de notre réussite.

Nous avons déjà évalué la mise en œuvre des produits de cette recherche par une expérience d'enseignement qui a duré deux années scolaires consécutives (6^{e} puis 5^{e}). Le tout est décrit dans un article actuellement en phase de révision après soumission à « Educational Studies in Mathematics » (ESM). Cet article compare l'évolution des élèves d'une classe dite « partiellement expérimentale » (contenus et méthode d'enseignement usuels mais stricte délimitation du corpus de problèmes physico-empiriques aux six types décrits ici, environnement papier/crayon) à celle des élèves d'une classe dite « pleinement expérimentale » (mise en œuvre systématique des résultats de la présente étude, environnement ORATIO et NovOra pour l'étude des trois registres). Notre hypothèse est que les productions des élèves de la classe « pleinement expérimentale » devraient se rapprocher quantitativement et qualitativement de celles de la population de PE, alors que celles de la classe « partiellement expérimentale » devraient rester plus proches de celles de la population des élèves de 5^{e} étudiée dans le présent article.

L'exemple proposé en 5.2 permet d'envisager les grandes lignes du protocole d'enseignement de la classe « pleinement expérimentale ». Il repose non sur des injonctions à séparer et articuler, mais sur des confrontations de problèmes, de méthodes de résolution spontanées ou provoquées, de prises de conscience suscitées par des débats scientifiques entre les élèves arbitrés par le professeur, d'institutionnalisations. La droite graduée, avec échelle simple ou double, est centrale dans cet enseignement. Grâce à l'environnement informatique, nous avons pu la munir de ressources qui en font un véritable registre sémiotique au sens de Duval (1995, p 21; 2000, pp. 62-66). La droite graduée ainsi équipée fonctionne à la fois comme registre de transition entre les univers physique et mathématique d'une part, entre les registres fractionnaire et décimal d'autre part. Mais c'est aussi un moyen puissant d'interpréter et de traiter tout problème appartenant à une des six catégories que nous avons décrites, ainsi que l'exemple 5.2 le laisse entrevoir. C'est peut-être enfin un moyen de « réconcilier » la mise en rapport des grandeurs (Euclide utilisait une représentation linéaire des grandeurs) et la fonction linéaire, ce qui est un objet de débat depuis les années 80 (Vergnaud, 1983, pp. 142-149 ; Brousseau, 1986, pp. 39-62 ; Comin, 2000, p. 180…).

Nous pouvons à présent préciser ce que nous entendons par un modèle d'enseignement des rapports, des rationnels et de la proportionnalité « structuré et compact » (voir l'introduction). Les deux axes physique et mathématique, eux-mêmes spécifiés au moyen de six types de problèmes et trois registres, permettent de structurer l'enseignement concerné. La droite graduée introduit de la cohésion à l'intérieur de chaque axe et crée du lien entre les deux axes. Elle peut fonctionner comme « point de compactification » de l'univers des rapports, qu'on l'observe du point de vue de l'enseignement ou de l'apprentissage.

Signalons enfin pour terminer que nos travaux sur la modélisation des problèmes verbaux ne se restreindront pas au domaine de la proportionnalité. Nous entamons actuellement un nouveau cycle de recherche, exploitant des hypothèses analogues, sur la mise en équation de problèmes du premier degré.

Annexe 1 : Le questionnaire de l'enquête

Pour chaque exercice, écrire les calculs, explications et dessins aux endroits prévus.

Item1 : MES

En mettant bout à bout 8 baguettes identiques B, j'obtiens la même longueur qu'en mettant bout à bout 15 baguettes identiques b. Exprimer la longueur d'une baguette B par rapport à la longueur d'une baguette b.

Item2 : MEL

Pour obtenir un gris foncé, un fabricant recommande de mélanger dans un seau 5 pots de peinture noire avec 8 pots de peinture blanche. J'ai versé 11 pots de peinture noire dans le seau. Combien de peinture blanche dois-nous verser pour obtenir le même gris foncé ?

Item3 : HET

4 litres de miel pèsent 5 kg. Combien pèsent 9 litres de miel ?

Item4 : FREQ

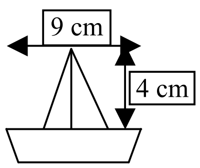
Un joueur de basket réussit en moyenne 3 paniers sur 4. Combien de paniers peut-il espérer réussir en 25 lancers ?

Item5 : CHGTU

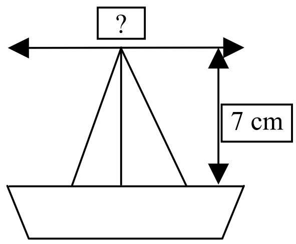
On verse du lait dans des verres identiques. Avec 4 petites bouteilles de lait, on remplit exactement 9 verres. Et avec13 petites bouteilles de lait ?

Item6 : DIL

J'agrandis le dessin d'un voilier en le passant dans un photocopieur. La hauteur du mât est de 4 cm sur l'original. Elle est de 7 cm sur la photocopie. Le pont a une longueur de 9 cm sur l'original. Quelle est sa longueur sur la photocopie ?



Original



Photocopie

Annexe 2 : Effectifs d'étudiants ayant mobilisé telle procédure pour tel item

PE	MEL	HET	FREQ	CHGTU	DIL	Total
COEF	6	4	39	6	25	80
MULT	11	3	7	4	4	29
ADD	0	2	2	2	0	6
LICO	0	0	1	2	0	3
XPRO	77	78	53	87	74	369
UNIT	3	21	2	3	1	30
FRAC	2	0	2	0	0	4
ADEX	1	0	0	0	1	2
ADIN	2	0	0	0	0	2
APPRO	2	0	0	0	0	2
ALEA	0	0	0	0	0	0
0	4	1	4	5	5	19
ELSE	2	1	0	1	0	4
Total	110	110	110	110	110	550

Tableau 7 : Effectif des PE ayant mobilisé telle procédure pour tel item (se rapporte à Graphique 1)

5^e	MEL	HET	FREQ	CHGTU	DIL	Total
COEF	2	6	6	6	19	39
MULT	9	11	25	15	1	61
ADD	0	3	6	0	0	9
LICO	3	11	0	9	0	23
XPRO	1	4	1	1	1	8
UNIT	8	26	2	16	2	54
FRAC	0	0	8	0	1	9
ADEX	35	13	9	13	69	139
ADIN	28	3	0	5	2	38
APPRO	5	8	6	10	1	30
ALEA	12	13	24	19	8	76
0	18	21	27	26	15	107
ELSE	0	2	7	1	2	12
Total	121	121	121	121	121	605

Tableau 8 : Effectif des élèves de 5^e ayant mobilisé telle procédure pour tel item (se rapporte à Graphique 2)

Bibliographie

ADJIAGE R., & HEIDEIER A., 1998, *Didacticiels de la série Oratio*, éditions Pierron, 57206 Sarreguemines.

ADJIAGE R.**,** 1999, *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial*, thèse, IREM, ULP Strasbourg 1.

ADJIAGE R. et PLUVINAGE F., 2000, *Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des rationnels*, RDM, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble, Vol.20.1, 41-88.

ADJIAGE R**.,** 2001a, *Fondements théoriques et présentation des logiciels de la série ORATIO,* Actes du XXVII[e] colloque de la COPIRELEM, 309-317, IREM de Grenoble, 100 rue des Mathématiques BP-41, 38402 Saint Martin d'Heres cedex.

ADJIAGE R.**,** 2001b, *Maturations du fonctionnement rationnel. Fractions et décimaux : acquisitions d'une classe, projets de* ***programme 2000*** *pour l'école élémentaire*, Annales de didactique et de sciences cognitives, IREM de Strasbourg, **7**, 7-48.

ADJIAGE R.**,** 2003, *Registres, grandeurs, proportions et fractions*, Actes du colloque Argentoratum 2002, Annales de didactique et de sciences cognitives, IREM de Strasbourg,, **8**, 127-150.

ADJIAGE R., 2004, *Rationnels, proportionnalité et double échelle dans un environnement informatique*, Actes du XXX[e] colloque de la COPIRELEM, 249-270, 19-21 mai 2003, Avignon.

BEHR M., POST T., LESH R, 1981, *Construct analyses, Manipulative aids, Representational Systems and the Learning of Rational Numbers*, In Proceedings of the fifth conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 203-209, Grenoble, France : PME.

BRISSIAUD R., 2000, *J'apprends les maths*, manuel scolaire CM2, RETZ (éd), Paris.

BROUSSEAU G., 1981, *Problèmes de didactique des décimaux*, RDM, Vol 2.1, 37-128, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble.

BROUSSEAU G., 1986, *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, thèse, Bordeaux.

BROUSSEAU G. et N., 1987, *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, IREM de Bordeaux.

BROUSSEAU G., 1998, *Théorie des situations didactiques*, La Pensée sauvage, éditions,Grenoble.

COMIN E., 2000, Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire, thèse, Université de Bordeaux 1.

DOUADY R., 1984, *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques, une réalisation de tout le cursus primaire*, Doctorat d'état, Université de Paris VII, Paris.

DOUADY R. et PERRIN M.J., 1986, *Nombres décimaux*, liaison école-collège, IREM, Université de Paris VII, Paris.

DUPUIS C et PLUVINAGE F., 1981, *La proportionnalité et son utilisation*, RDM Vol. 2, pp. 166-212, La Pensée Sauvage (éd.), Grenoble.

DUVAL R., 1993, *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol. 5, pp. 37-65, IREM de Strasbourg.

DUVAL R., 1995, *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Bern.

DUVAL R., 1996, *Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?* RDM, Volume 16-3, 349-382, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble.

Duval R., 1998-1, *Signe et objet, trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, **6**,. 139-163, IREM de Strasbourg.

DUVAL R., 1998-2, *Signe et objet, questions relatives à l'analyse de la connaissance*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, **6**, 165-196, IREM de Strasbourg.

DUVAL R., 2000, *Basic Issues for Research in Mathematics Education*, Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), Vol 1, 55-69, July 23-27, 2000, Hiroshima-Japan.

DUVAL R., 2001, *Comment décrire et analyser l'activité mathématique ? Cadres et registres*, Actes du colloque « Journée en hommage à Régine Douady », 83-105, IREM Paris 7.

FIGUERAS O., FILLOY E. et VALDEMOROS M., 1987, *Some Difficulties which Obscure the Appropriation of the Fraction Concept*, PME XI, vol.1, 366- , Montréal.

HART K. & SINKINSON A., 1989, *They're useful - Children's view of Concrete Materials*, PME XIII vol. 2, 60- 66, Paris.

JULO J., 1995, *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*, Presses Universitaire de Rennes.

JULO J., 2000, *Aider à résoudre des problèmes, Pourquo ? comment ? quand* ? Actes du XXVII^e Colloque Inter-IREM des formateurs chargés de la formation des maîtres, 9-28, IREM de Grenoble.

KIEREN T.E., 1976, *On the mathematical, cognitive, and instructional fondations*, in Lesh R.A. & Bradbard D.A. (eds), *Number and Measurement*, ERIC/SMEAC, 101-144, Columbus.

KIEREN T.E., 1980, *The rational number construct - its elements and mechanism*, in T.E. Kieren (ed), Recent Research on Number Learning, ERIC/SMEAC, 125-150, Columbus.

LEGRAND M., 2000, *Sciences, Enseignement, Démocratie et Humanisme*, Actes du XXVII^e Colloque Inter-IREM des formateurs chargés de la formation des maîtres, 9-28, IREM de Grenoble.

NOELTING G., 1980, *The development of proportional reasoning and the ratio concept*, Educational Studies in mathematics, Vol. 11, 217-253, Cambridge.

PITKETHLY A. & HUNTING R., 1996, *A Review of Recent Research in the Area of Initial Fraction Concepts*, ESM vol. 30 N° 1, 5-37 , Cambridge.

PLUVINAGE F., 1998, *La nature des objets mathématiques dans le raisonnement*, Annales de didactique des mathématiques, **6**, 125-138, IREM de Strasbourg.

SMITH J. P. III, 2002, *The development of Student's Knowledge of Fractions and Ratios*, 2002 Yearbook, 3-17, NCTM, Reston Virginia.

STREEFLAND L., 1993, *The Design of a Mathematics Course, a Theoretical Reflection*, Educational Studies in Mathematics, Vol. 25, 109-135, Dordrecht, Holland.

VERGNAUD G. et Laborde C., 1994, *Apprentissages et didactiques, où en est-on ?*, Hachette Education (ed), 57-93, Paris.

VERGNAUD G., 1991, *La théorie des champs conceptuels*, RDM vol. 10/2.3, 133-169, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble.

VERGNAUD G. et al., 1990, *From Arithmetic to Algebra: negotiating a jump in the learning process*, Proceedings of the Fourteenth PME Conference, 27-34, Mexico.

VERGNAUD G., 1983, *Multiplicative Structures*, in R. Lesh and M. Landau (eds), Acquisition of mathematics concepts and processes, Academic Press, 127-174, New York.

ROBERT ADJIAGE
IUFM d'Alsace - 1 rue de Neuvic - 67100 Strasbourg
robert.adjiage@alsace.iufm.fr