

**ANNA SIERPINSKA**

**ENTRE L'IDÉAL ET LA RÉALITÉ DE L'ENSEIGNEMENT  
MATHÉMATIQUE**

**Abstract. Between the ideal and the reality of mathematics teaching.**

This paper starts from the assumption that every reform of mathematics teaching is based on an ideology, i.e. on a vision of a desirable state of this teaching contrasted with its undesirable but existing state. The question asked is: What are the obstacles to the realisation of this desirable state and what contributes to the tenacity of the non-desirable state? In the main section of the paper, I take this question to review a few idealistic postulates regarding the goals of mathematics teaching, the coordination of curricula and relevance of the mathematical content, the teaching for understanding and autonomy of thought, the problem solving approach to developing students' mathematical thinking, students' motivation, assessment and use of technology. The last section is devoted to a reflection on the possibilities of communication between ideology and theory, in spite of the important differences between the two. I propose that a didactic theory specific to mathematics could constitute a useful channel for this communication, by turning the ideological debate into a pragmatic debate, based on theoretical arguments and questions such as, what are the possible (rather than "desirable" or "good") choices or solutions of a didactic, pedagogical or institutional problem? What do we know about the possible consequences of each choice, based on the available evidence from experience and research?

**Résumé.** L'article part de l'hypothèse que toute réforme de l'enseignement des mathématiques est basée sur une "idéologie", c'est-à-dire une vision de l'état souhaitable de cet enseignement en contraste avec un état non-souhaitable, mais existant. La question posée est la suivante : Qu'est-ce qui, dans la réalité dans laquelle nous vivons, peut faire obstacle à la réalisation de cet état souhaitable, et être propice au maintien d'un statu quo non-souhaitable ? Dans la section principale de cet article, je regarde de plus près quelques postulats représentant un idéal de l'enseignement et apprentissage des mathématiques. Je discute, en particulier, des buts (idéaux) de l'enseignement des mathématiques, et des postulats sur la coordination des curriculums, les contenus mathématiques pertinents, l'apprentissage avec compréhension, le développement de la pensée mathématique à l'aide de la résolution de problèmes, le développement de l'autonomie et de la mobilité de pensée, l'évaluation des connaissances des élèves, la motivation des apprentissages, et l'utilisation de la technologie. La dernière section contient une réflexion sur les possibilités de communication entre idéologie et théorie, en dépit de différences importantes entre les deux. Je propose qu'une théorie didactique pourrait constituer un canal propice à cette communication, en remplaçant les débats idéologiques par des débats pragmatiques, basés sur des questions telles que : Quels sont les choix possibles – plutôt que 'souhaitables' ou 'bons' – de solution de tel ou tel problème didactique, pédagogique ou institutionnel ?

Quelles sont les conséquences possibles de ces choix, au vu des résultats de recherches en didactique des mathématiques et de l'expérience commune ?

**Mots clés.** Enseignement, mathématiques, curriculum, idéologie, théorie, didactique, compétences.

---

Looking at events in education over a long time period is a fascinating opportunity to chart a kind of intellectual, social and political tug-of-war in which the perspectives and theories of individuals and groups compete for influence on the goals and practices of school mathematics. The story of this struggle over the direction of curricula of teaching in elementary and secondary school mathematics has a predictable pattern of crisis-reform-reaction episodes.

*(Fey & Graeber, 2003, p. 521)*

## 1. Introduction

L'histoire de l'éducation mathématique paraît à ceux qui l'étudient comme une suite de périodes de crise, où certains groupes politiques et/ou sociaux se déclarent non satisfaits de l'état actuel de l'enseignement, suivies de périodes d'élaboration des bases d'une réforme, de son expérimentation à petite échelle, de son implémentation ensuite à une plus grande l'échelle, accompagnée, inévitablement, des manifestations publiques du doute et de l'incertitude.

Quelles sont les raisons de cette récurrence de l'insatisfaction avec les réformes scolaires ? Voilà une question qui a occupé les esprits de bien de chercheurs, en sociologie de l'éducation en général, ainsi que dans le domaine de l'éducation mathématique (p. ex., Howson, Keitel & Kilpatrick, 1981 ; Burkhardt, 1989 ; Brousseau, 1997 ; Abrantes, 2001 ; Kilpatrick, 2001 ; Garrett & Davis, 2003 ; Fey & Graeber, 2003).

Ces raisons peuvent être étudiées de différents points de vue. Par exemple – d'un point de vue historique et politique, comme l'ont fait Garrett & Davis (2003) dans leur étude des débats autour de l'enseignement des mathématiques aux États-Unis pendant la deuxième guerre mondiale. Ou encore d'un point de vue psychosocial et souligner le phénomène de l'obsolescence des situations didactiques comme motivant les « innovations » didactiques chez les enseignants (Brousseau, 1997, pp. 267-273). Les récompenses, comme l'avancement professionnel, ont aussi été mentionnées.

“The desire to change, to act as an innovator, to explore new areas is strong in most intelligent people. Many educators, then, welcome the opportunity to deviate from practices that are becoming routine. Innovation is exciting, attracts others' attention to one's work and often brings professional advancement. Moreover, the educator is attempting to solve an insoluble problem : for if a goal is attained it will almost invariably be replaced by a more ambitious one (Howson et al., 1981, p. 5)”.

Prenons un exemple extrême et hypothétique pour illustrer ce dont parlent Brousseau (1997) et Howson et al. (1981), cité ci-dessus. Une réforme visant la réussite de tous les élèves atteindrait-elle effectivement son but, les réformateurs seraient déçus et penseraient que le programme qu'ils avaient proposé et réalisé n'avait pas été suffisamment ambitieux. Ils se mettraient à réformer leur réforme.

Le point de vue commercial n'est pas à négliger, non plus : les maisons d'éditions et les auteurs des manuels scolaires perçoivent les réformes comme l'ouverture de nouveaux marchés (Howson, Keitel & Kilpatrick, 1981, p. 5).

Pour ma conférence à Mons (Colloque CREM 2005), j'ai choisi l'optique de contradiction entre « l'idéal » et la « réalité », c'est-à-dire, entre les idéologies promulguées dans les documents destinés aux enseignants et le système des contraintes culturelles, institutionnelles, didactiques, psychologiques, et autres, dans lesquelles travaillent enseignants et élèves. La question que j'ai posée, sans y répondre de façon exhaustive, était donc la suivante :

*Toute réforme de l'enseignement des mathématiques est basée sur une « idéologie », c'est-à-dire une vision de l'état souhaitable de cet enseignement en contraste avec un état non-souhaitable, mais existant. Qu'est-ce qui, dans la réalité dans laquelle nous vivons, peut faire obstacle à la réalisation de cet état souhaitable, et être propice au maintien d'un statu quo non-souhaitable ?*

Je ne prétends ni à l'originalité ni à la nouveauté de ce point de vue. De nombreuses recherches en didactique des mathématiques se sont placées dans cette optique, surtout depuis la fin des années 70. Au début des années 80 des revues ont été lancées dans le seul but d'encourager de telles recherches et de se distinguer des revues destinées à communiquer, aux enseignants, une meilleure compréhension des mathématiques, et à propager des idées, des idéologies, des pratiques pédagogiques et des activités pour élèves, conformes aux réformes consécutives<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Je pense ici, entre autres, aux revues telles que *Recherches en Didactique des Mathématiques* en France et *Dydaktyka Matematyki* en Pologne, établies toutes les deux en 1980, comme des forums des chercheurs en didactique des mathématiques. Ces revues présentaient des études de la "réalité" de l'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, contrairement aux revues destinées aux enseignants du primaire ou du secondaire publiées dans les deux pays (p. ex. les publications de

Dans la section principale de cet article, je regarde de plus près quelques postulats représentant un idéal de l'enseignement et apprentissage des mathématiques. Ces postulats proviennent d'un petit nombre de sources, tels les standards et principes de l'organisation nord-américaine des enseignants des mathématiques (NCTM, 2000), le document belge (CREM, 1995) ; un article sur une réforme récente au Portugal (Abrantes, 2001) ; le document officiel du Ministère de l'Éducation du Québec (M.E.Q., 2001), et un article sur les problèmes de l'enseignement des mathématiques aux États-Unis (Kilpatrick, 2001). Je discute, en particulier, des buts (idéaux) de l'enseignement des mathématiques, et des postulats sur la coordination des curriculums, les contenus mathématiques pertinents, l'apprentissage avec compréhension, le développement de la pensée mathématique à l'aide de la résolution de problèmes, le développement de l'autonomie et de la mobilité de pensée, l'évaluation des connaissances des élèves, la motivation des apprentissages, et l'utilisation de la technologie.

Dans la troisième et dernière section de l'article, je reviens sur la question de la récurrence des crises et des réformes, en réfléchissant sur les possibilités de communication entre idéologie et théorie, en dépit de différences importantes entre les deux. Je propose qu'une théorie didactique pourrait constituer un canal propice à cette communication, en remplaçant les débats idéologiques par des débats pragmatiques, basés sur des questions telles que, quels sont les choix possibles – plutôt que « souhaitables » ou « bons » – de solution de tel ou tel problème didactique, pédagogique ou institutionnel ? Quelles sont les conséquences possibles de ces choix, en vue des résultats de recherches en didactique des mathématiques et de l'expérience commune ?

## **2. Discussion (réaliste) de quelques postulats sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques**

J'organise la discussion des postulats dans cette section en procédant des postulats les plus généraux aux postulats plus particuliers.

### **2.1. Un enseignement des mathématiques bien justifié du point de vue des buts de l'éducation générale**

Les buts de l'enseignement des mathématiques penchent tantôt du côté de la modestie des connaissances de base utiles dans la vie et les professions les plus simples, tantôt vers l'ambition scientifique de comprendre et transformer le monde.

---

l'A.P.M.E.P. en France ou la revue *Matematyka* en Pologne) qui cherchaient surtout à présenter et soutenir un "idéal".

Par exemple,

“...the principal function of schooling should be the adjustment (preferably the happy adjustment) of individuals to the social world in which they find themselves. (Garrett & Davis, 2003, citant le credo du mouvement appelé « life adjustment education » aux États-Unis de l'après la deuxième guerre mondiale).

The all embracing common enterprise of mathematics and science is the study of an ordered universe with the aid of an ordered mind, undertaken both for its own sake and for the continuous improvement of human living (Betz, 1940).”

Dans l'optique du premier de ces points de vue, il est parfois difficile de justifier la place importante que les mathématiques veulent garder dans les curriculums d'aujourd'hui, surtout si l'enseignement insiste sur l'apprentissage des techniques arithmétiques et algébriques. Certains auteurs considèrent que, dans les pays dits « développés », ces compétences sont devenues obsolètes (p. ex. Noss, 1994 ; Zevenbergen, 2004).

“A sizeable proportion of those in work in the 'developed' world have been reduced to little more than human appendages to a computer system; shop assistants no longer need to calculate change, bank clerks need know nothing about banking..., engineering is reduced to following blueprints.... As technology invades all aspects of daily life, people actually need less, not more mathematics....” (Noss, 1994).

Plus tard, l'auteur cité a révisé son point de vue, en soulignant que la technologie ne rend pas les connaissances mathématiques inutiles, surtout aux ingénieurs, mais qu'elle exige une autre manière de penser avec les mathématiques (Noss, 2001).

“[T]he new roof in the British Museum in London... [is] a structure with more than 3000 tiles, no two of which are the same, consisting of some 3 kilometers of steel beams claimed accurate to within 3 mm. The design – let alone the construction – of such an edifice would, of course, have been impossible without a computer. But the key point is not only that the computer enabled a particular design : it is that the very design was shaped by the computer, the computer gave its designers a new way to think, not just a tool for calculating the details of what they had already thought “ (Noss, 2001).

C'est peut-être ce questionnement de la raison d'être des connaissances disciplinaires traditionnelles qui a mené à penser les buts de l'éducation non plus en termes des connaissances, mais en termes de *compétences*<sup>2</sup> – un mouvement qui, depuis une dizaine d'années au moins, s'est répandu dans plusieurs pays.

---

<sup>2</sup> Ce mouvement pourrait être classifié comme appartenant aux approches dites "formatives", c'est-à-dire orientées surtout vers la formation des habiletés générales cognitives et affectives telles la "créativité" ou "l'intelligence" (Howson et al., 1981, p. 116). Il peut-être aussi décrit comme valorisant les connaissances "ouvertes" (provisaires, prêtes à changer en fonction de l'expérience) plus que les connaissances "fermées" (finies, invariables, utilisées toujours de la même manière), et

Le mouvement d'organisation des curriculums autour des compétences intellectuelles générales, comme, par exemple, « observer, repérer, analyser, déduire, induire, appliquer ses connaissances dans des situations nouvelles, identifier et utiliser à bon escient le langage spécifique de chaque discipline » (CREM, 1995, p. 18), fait parfois l'impression que le choix des contenus pour l'enseignement pourrait être arbitraire. Cela suscite, naturellement, une réaction négative chez les mathématiciens, qui se sentent obligés de démontrer l'impossibilité de la dissociation des compétences et des connaissances disciplinaires précises. En réaction au document ministériel intitulé « Socles des compétences » (Mahoux, 1994), les auteurs de (CREM, 1995), écrivaient :

« Le moteur du développement de la personne, c'est le désir de comprendre le monde, de partager ses interrogations avec d'autres, d'entrer dans une culture. L'enfant... mobilise ses compétences et ses connaissances pour acquérir de nouvelles connaissances. Et ce faisant, il améliore ses compétences et en développe de nouvelles... [P]lus l'élève a de connaissances et mieux il est armé pour résoudre des problèmes... Qu'on le veuille ou non, pour être bien faite, la tête doit être raisonnablement pleine. » (CREM, 1995, p. 18).

D'autre part, le langage des « compétences » est apparu comme utile dans la « guerre » idéologique aux États-Unis (*math wars*) entre différents points de vue sur les buts et les moyens de son enseignement. Pour le comité engagé par le *National Research Council* aux États-Unis en 1999, pour préparer un rapport sur l'enseignement des mathématiques au primaire (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001), la formulation des buts de l'enseignement des mathématiques en termes de cinq composantes de la compétence mathématique (« *strands of mathematical proficiency* ») semblait fournir un cadre conceptuel commun qui permettait de focaliser l'attention des parties engagées dans le débat sur l'essentiel et éviter ainsi « les positions extrêmes vis-à-vis des buts de l'apprentissage des mathématiques » (Kilpatrick, 2001).

“The five strands of mathematical proficiency are (a) *conceptual understanding*, which refers to the student's comprehension of mathematical concepts, operations, and relations; (b) *procedural fluency*, or the student's skill in carrying out mathematical procedures flexibly, accurately, efficiently, and appropriately; (c) *strategic competence*, the student's ability to formulate, represent, and solve mathematical problems; (d) *adaptive reasoning*, the capacity for logical thought and for reflection on, explanation of, and justification of mathematical arguments; and (e) *productive disposition*, which includes the student's habitual inclination to see mathematics as a sensible, useful, and worthwhile subject to be learned, coupled with a belief in the value of diligent work and in one's own efficacy as a doer of mathematics”. (Kilpatrick, 2001).

---

les connaissances "génératives" – c'est-à-dire permettant de créer d'autres connaissances – plus que les automatismes (Morf, 1994).

Dans les programmes présentement en force au Québec (M.E.Q., 2001), le langage des compétences apparaît comme un élément unificateur du curriculum, un « axe fédérateur » (Tardiff, 2001). Une compétence est définie comme « un savoir-agir fondé sur la mobilisation et l'utilisation efficaces d'un ensemble de ressources » (M.E.Q., 2001, p. 8). Cette définition, inspirée des travaux de Perrenoud (1997), n'oppose pas les compétences et les connaissances, mais rend les connaissances (qui font partie des ressources) indispensables au développement des compétences.

Malgré les précisions sur le sens du terme, la légalisation du programme au Québec a suscité beaucoup de doute. Le reproche qu'on soulevait souvent était que la notion de compétence n'était qu'un « leurre », une illusion qui ne peut pas être réalisée en pratique (voir Tardiff, 2001).

La situation était semblable au Portugal (Abrantes, 2001). Le public ne voulait pas que les enseignants « expérimentent » sur les enfants ; on exigeait que les curriculums soient bien définis, indépendants des habiletés individuelles des enseignants, et bien testés avant d'être disséminés dans toutes les écoles. L'opinion publique avait du mal à accepter l'idée même d'organiser un curriculum autour d'une notion aussi vague que celle de compétence. Surtout les compétences comme la *disposition* à penser mathématiquement, le *plaisir* à développer des activités intellectuelles et la *tendance* à chercher des régularités dans une structure abstraite, ont soulevé beaucoup de discussions. Un des arguments importants était la difficulté d'opérationnaliser de telles compétences pour des fins d'évaluation des enseignements et des apprentissages.

## 2.2. Un curriculum coordonné

La notion de compétence et les listes de compétences transversales ou générales apparaissent aux idéologues de ce mouvement comme un moyen de coordination des curriculums (« axe fédérateur » pour Tardiff, 2001 ; « socles de compétences » chez Mahoux, 1994).

Les auteurs de l'ouvrage (CREM, 1995), didacticiens des mathématiques, ont interprété l'idéologie des « socles des compétences » comme un défi de construire un « cadre global » pour l'enseignement de leur discipline de la maternelle à l'âge adulte, basé sur une philosophie cohérente et une vue claire de l'enchaînement des matières et de la maturation des compétences. Ce groupe d'auteurs a refusé de rester au niveau des généralités quant aux contenus mathématiques. Pour eux, ce n'est pas la formulation des objectifs d'enseignement des mathématiques en termes de compétences « transversales » qui va l'unifier. Il faut trouver des *connaissances* unifiantes, spécifiques aux contenus mathématiques. Ils ont proposé d'assurer cet « enchaînement des matières et la maturation des compétences » par l'organisation des contenus mathématiques autour de quelques « fils conducteurs », c'est-à-dire, des idées mathématiques profondes, qui peuvent être développées dans leurs

aspects de plus en plus sophistiqués depuis la maternelle jusqu'à l'université (p. ex. la notion de nombre, la notion de linéarité, celle de relation fonctionnelle, *etc.*).

Ce projet est élaboré soigneusement jusqu'aux moindres détails mathématiques en ce qui concerne les situations d'enseignement liées aux différents fils conducteurs. Mais, pour une fois, le diable n'est pas dans les détails (mathématiques et didactiques). Il est dans les aspects de la réalité qui ne sont pas sous le contrôle des didacticiens et des professionnels de l'enseignement des mathématiques. Je pense, par exemple, aux phénomènes tels que le manque de coordination dans la formation des enseignants, l'ignorance, la migration des populations, l'échec scolaire, manque de coordination entre les contenus des cours des mathématiques à l'université et l'orientation professionnelle des étudiants. J'en dis quelques mots de plus dans ce qui suit.

### ***2.2.1. Manque de coordination dans la formation des enseignants***

Dans beaucoup de pays, les enseignants des niveaux élémentaire, secondaire, supérieur sont formés dans des institutions différentes, avec des philosophies de mathématiques différentes et des compétences mathématiques différentes. La coordination de l'enseignement pré-universitaire ne peut pas se faire sans la coordination de la formation des enseignants de tous les niveaux à l'université. Les universités ont longtemps résisté à mettre en place une telle coordination, avec les départements des mathématiques s'opposant à prendre en compte des questions pédagogiques et didactiques dans leurs cours de mathématiques pour les futurs enseignants du secondaire, et les départements d'éducation – manquant de développer des cours de didactique des mathématiques au primaire (surtout dans les centres sans une masse critique de chercheurs spécialisés dans ce domaine). Prenons l'exemple canadien :

“The issue of teachers' knowledge has been a prominent one for several decades now. However, little progress has been made toward a consensus on the question of what they need to know. At the University of Alberta, for example, teacher candidates in the secondary route (Grades 7-12) require a minimum of twelve 3-credit courses in mathematics. A few are designed specifically for teachers, but the bulk is drawn from 'stock' listings that include introductory calculus, linear algebra, discrete mathematics and introductory statistics. This is not atypical. In most English Canadian universities, prospective secondary teachers are required to take similar (i.e. generic) courses and most elementary education programs require only one 3-credit course, usually specially designed, that focuses on process rather than any particular content. These practices seem to be held in place by an assumption that courses in formal mathematics are vital to effective teaching. [But research has] demonstrated at best a weak relationship between generic courses taken by teachers and their students' performances on standard examinations. Such results have prompted a belief that more mathematics in teacher education programs may be



inappropriate. It might be that teachers require more nuanced understandings of the topics in the conventional curriculum". (Barbeau, 2005).

### ***2.2.2. Ignorance du futur et du passé intellectuel des élèves***

Même si les programmes sont bâtis sur l'évolution en spirale des idées générales, appelées « fils conducteurs », comme, par exemple, la notion de linéarité, ou celle de la relation fonctionnelle, les enseignants de l'école élémentaire, ne possédant pas les connaissances mathématiques au-delà d'un certain seuil, ne sont pas capables de comprendre que telle ou telle activité fasse partie d'un tel fil conducteur et ne voient pas comment elle est reprise plus tard pour être généralisée ou autrement transformée. Soit l'activité n'a pas de sens pour eux et ils la rejettent, soit ils l'interprètent de façon qui la prive des aspects généralisables. Le fil conducteur est ainsi coupé et il n'y a, pour ainsi dire, plus de courant dans le circuit : plus de coordination, plus de cohérence. D'autre part, les enseignants du niveau secondaire et, encore plus, ceux du tertiaire, ignorent tout du passé mathématique de leurs étudiants et ne reprennent pas les fils conducteurs là où ils étaient terminés au niveau précédent. Ils essaient de construire un circuit tout neuf, mais, encore une fois, le courant ne passe pas, car il n'y a rien pour l'alimenter dans les connaissances des élèves.

### ***2.2.3. Migration***

Un système éducatif basé sur l'idée de coordination est très exigeant vis-à-vis de la « mémoire didactique », tant de l'enseignant que de l'élève (voir, p. ex., Flückiger, 2005). Cette mémoire n'est cependant pas accessible au nombre croissant d'élèves qui arrivent d'autres systèmes scolaires en cours de scolarité.

### ***2.2.4. Échec scolaire***

L'échec scolaire, l'abandon des études ou, tout simplement, le changement de direction d'études, ne semblent pas être pris en compte par les réformes. Les réformateurs croient toujours que la réforme va prévenir les échecs et les abandons et que, cette fois, tout le monde sera satisfait et les étudiants seront convaincus de la pertinence des mathématiques dans leur vie et profession future. Les réformateurs ont tort à tous les coups ; il y a toujours des étudiants qui dérapent et tombent dans des secteurs parallèles d'enseignement, oubliés des réformes depuis des décennies : des cours de rattrapage, des cours pour des adultes, des cours de niveau pré-universitaire offerts dans des universités comme condition d'admission dans des programmes universitaires...

### 2.2.5. Manque de coordination entre les contenus des cours des mathématiques et l'orientation professionnelle des étudiants adultes

Dans ces cours de niveau pré-universitaire, offerts dans les universités, les jeunes adultes ont parfois l'impression que les mathématiques ne servent à rien d'autre que sélectionner les candidats aux programmes populaires comme les écoles de commerce (Sierpiska, 2005). Les contenus, en particulier, des cours de calcul différentiel et intégral, leurs semblent avoir peu à faire avec ce qu'ils pensent qu'ils vont étudier dans les programmes universitaires auxquels ils aspirent.

“Math is good to develop our analytic skills. However, in my case, I am taking up bachelor's degree in commerce, major in accountancy and am already an accountant from another country. I don't think MATH 209 - Calculus is useful to this program. But I really work hard in it because I need to proceed with my accountancy. There are some [students] who failed and got discouraged and will rather not proceed with the program, which is not really reasonable because calculus is not helpful for accountancy. I'd rather spend my time studying something that is related or in preparation to accounting courses. Calculus is good for engineering and math major [programs], I think. But that's the university requirement, so I just have to abide in order for me to have a diploma in accountancy.” (Réponse d'une étudiante au questionnaire sur les raisons de la frustration des étudiants forcés de prendre des cours des mathématiques comme condition d'admission à l'université<sup>3</sup>).

Il y a, bien sûr, différentes approches de l'enseignement des mathématiques pour les étudiants d'économie et de commerce. Une approche formelle ou « structuraliste » (pour une définition, voir CREM, 1995, p. 35) des mathématiques peut sembler totalement inappropriée, mais elle est toujours utilisée, car elle est, ironiquement, plus économique, comme l'ont remarqué les auteurs de la pétition suivante :

« L'usage instrumental des mathématiques semble nécessaire. Mais le recours à la formalisation mathématique, lorsqu'elle n'est plus un instrument, mais devient une fin en soi, conduit à une véritable schizophrénie par rapport au monde réel. La formalisation permet par contre de construire facilement des exercices, de 'faire tourner' des modèles où l'important est de trouver 'le bon' résultat (c'est-à-dire le résultat logique par rapport aux hypothèses de départ) pour pouvoir rendre une bonne copie. Ceci facilite la notation et la sélection, sous couvert de scientificité, mais ne répond jamais aux questions que nous nous posons sur les débats économiques contemporains. » (Pétition des étudiants en économie à l'ENS, publiée dans *Le Monde*, le 20 juin 2000 ; reproduite dans Chevallard, 2005).

---

<sup>3</sup> Le questionnaire est accessible au <http://alcor.concordia.ca/~sierp/>.

### 2.3. Des contenus mathématiques pertinents

Les auteurs de (CREM, 1995) ont estimé important que « le système d'enseignement a[it] la responsabilité d'apprendre à tous les jeunes les mathématiques pertinentes et utiles aujourd'hui » (p. 29). Cette pertinence doit être appréciable par les apprenants ici et maintenant : « il n'est pas acceptable que, sous prétexte de préparation à la vie et aux professions, l'école transmette des savoirs dont le plein sens ne puisse apparaître qu'après l'école » (p. 30).

Il y a des postulats semblables dans d'autres documents destinés aux responsables de l'enseignement des mathématiques. Par exemple, un des principes du conseil NCTM aux États-Unis, dit que le curriculum doit être fondé sur les mathématiques « importantes ». Au Québec, le document (M.E.Q., 2001, Chapitre 6) propose que les élèves conçoivent « les connaissances comme des outils à utiliser dans la vie de tous les jours ». Mais le document CREM rend la condition de pertinence *hic et nunc* plus explicite et ne met pas l'accent sur la pertinence pour la vie de tous les jours comme c'est parfois le cas. La pertinence peut être intrinsèque aux mathématiques.

La pertinence ici et maintenant est cependant difficile à obtenir aux niveaux post-primaires. Les mathématiques un peu plus avancées demandent l'apprentissage de beaucoup de techniques et de concepts préparatoires et cela prend pas mal de temps. Par exemple, dans mon université, les cours de première année d'algèbre linéaire introduisent les concepts d'espace vectoriel, d'application linéaire, de valeur propre, d'espace invariant, pour arriver, à la fin du cours, aux théorèmes sur les formes canoniques (Jordan, rationnelle). Les étudiants peuvent voir comment tous les concepts convergent vers la conceptualisation des formes canoniques, mais il ne reste plus de temps pour leur donner l'occasion d'apprécier la pertinence de ces formes, leur utilité dans la résolution de problèmes (autres que des exercices d'application simple des théorèmes) qui seraient accessibles aux étudiants. Dans les cours, on ne fait rien avec ces formes : on ne fait qu'exposer l'astuce nécessaire pour démontrer les théorèmes correspondants.

À part cette pertinence locale, intrinsèque à la théorie mathématique, il y a aussi la pertinence des savoirs mathématiques du point de vue des professions visées par les étudiants. J'en ai déjà parlé dans la sous-section précédente. Nous ne pouvons pas continuer à enseigner les mathématiques à l'université comme si les étudiants se préparaient tous aux études de maîtrise et de doctorat dans ce domaine. D'après les statistiques compilées dans mon université, seulement 36% des étudiants des universités canadiennes considèrent la préparation aux études de ces niveaux avancés comme une raison importante pour entrer à l'université ; 81% sont entrés à l'université pour augmenter leurs chances d'obtenir un bon emploi. Heureusement (pour les professeurs de mathématiques), pour 66% d'étudiants, développer une meilleure connaissance d'un domaine académique demeure une raison importante.

#### **2.4. Apprentissage avec compréhension, sans négliger les compétences procédurales**

La question de l'apprentissage des mathématiques « avec compréhension » comme s'opposant à l'apprentissage des « règles sans raisons » revient souvent dans les débats pédagogiques. Mais, selon les critiques, les réformes qui visent le développement d'une compréhension des mathématiques chez les élèves insistent trop sur la créativité en mathématiques et pas assez sur l'apprentissage des savoirs conventionnels. On les blâme pour ne pas apprendre aux élèves les compétences et les connaissances mathématiques de base (calcul arithmétique et algébrique et résolution d'exercices typiques, connaissance des formules fondamentales). Ceci donne lieu à des contre-réformes de type « back-to-basics ».

“The dominant themes of back-to-basics rhetoric in the 1970s were emphasis on the procedural skills of arithmetic and algebra, definition of curricula in terms of behavioral objectives, direct instruction aimed at developing students' mastery of these objectives, and extensive use of locally and nationally standardized testing to assess the effectiveness of curricula, teaching and schooling in general.” (Fey & Graeber, 2003, p. 541).

Ces mouvements rencontrent, à leur tour, la résistance de ceux qui argumentent qu'un apprentissage des opérations et des manipulations sans compréhension ne sert à rien : il ne produit pas de citoyens capables d'appliquer les mathématiques dans leur vie et leurs professions (p. ex. Bishop, 1991 ; von Glasersfeld, 1995 ; Abrantes, 2001).

Certains chercheurs ont fait l'effort d'aller au-delà des disputes idéologiques et politiques en prenant le temps de faire des études à long terme pour comparer l'influence, sur les connaissances mathématiques des élèves, des approches « traditionnelles » et « progressistes » (Boaler, 1997).

Mais il semble que le système d'éducation ait tendance à converger vers un enseignement centré sur l'apprentissage des procédures, parce que celui-ci est plus facile à évaluer, donc plus économique en termes du temps du personnel enseignant. Brousseau (1988) explique ce phénomène par le fait que l'enseignement dit traditionnel distingue et met en opposition l'enseignement visant « l'acquisition des savoirs institutionnalisés tels que les algorithmes de calcul, les définitions canoniques et les propriétés fondamentales » et celui qui vise « la compréhension et l'usage de ces savoirs » (Brousseau, 1988, p. 48). Ces deux types d'enseignements sont considérés comme devant suivre des contrats didactiques différents et des modes d'administration différents, les uns étant plus faciles à gérer que les autres. Les activités de compréhension occupent une place à part dans le temps et l'espace consacré aux mathématiques à l'école. Et elles peuvent avoir un statut différent vis-à-vis de l'institution : par exemple, des questions sur la compréhension ne vont pas figurer sur les tests ou ne vont pas compter pour

beaucoup dans l'évaluation. Elles vont donc être les premières à être sacrifiées si le temps manque. Pour Brousseau, cette opposition n'est pas nécessaire et elle nuit à l'apprentissage des mathématiques : il n'y a pas, pour lui, d'apprentissage des techniques mathématiques sans l'apprentissage de leur compréhension ; l'un doit venir simultanément avec l'autre, dans le cadre d'un même type de contrat didactique (qui, cependant, doit être différent de celui de type : présentation par l'enseignant, exemple au tableau, exercices pratiques par imitation de l'exemple).

« Plus qu'une simple distinction, on rencontre une opposition : La société voudrait bien que l'enseignement obtienne des élèves la compréhension *en plus* de l'apprentissage des savoirs institutionnalisés. Des efforts répétés sont tentés dans ce sens (chaque « réforme » vise, en fait, ce but) mais en l'absence d'une solution « évidente », qui, pour l'instant, devrait respecter la technique basique, toute modification finit par échapper au « contrôle » social ; la recherche de la compréhension se trouve alors directement opposée à celle de l'apprentissage des savoirs institutionnalisés qu'elle est accusée d'abandonner. Ces deux activités ne sont pas logiquement ou techniquement contradictoires, mais apparaissent comme telles, dans le modèle culturel qui régit le contrat didactique. Chaque réforme s'achève par un écrasement plus pesant de l'enseignement élémentaire sur les pratiques dogmatiques et la visée d'objectifs formels. Obligés de « défendre » un minimum d'objectifs de compréhension, les enseignants répondent par des procès contre le formalisme, le dogmatisme... et par un éloge de leurs « antagonistes » (supposés par définition être, de plus, adaptés aux élèves) sans parvenir à produire sinon des méthodes, du moins des contrats didactiques satisfaisants. » (Brousseau, 1988, pp. 48-49).

Dans les discussions sur l'opposition entre un enseignement « mécaniste » et un enseignement « réaliste » (pour les définitions, voir, p. ex. CREM, 1995, p. 35), l'apprentissage des algorithmes standard des opérations arithmétiques est d'habitude classé du côté des apprentissages mécanistes. Par exemple,

“[T]he topic of long division has been enshrined by law in the curriculum of England and Wales at precisely that point in human development when the ubiquity of the calculator and the computer has made that skill completely redundant. Would not a generation schooled in the repetitive and mathematically useless skills of long division have some qualities which the society of the recession-laden nineties would value?” (Noss, 1994, p. 8.)

Mais il n'y a pas de nécessité épistémologique à classer ainsi les contenus des savoirs. N'importe quel contenu peut être enseigné et appris de manière mécaniste, empiriste, structuraliste ou réaliste (CREM, 1995, p. 35). Pour reprendre la question de l'enseignement de l'algorithme standard de la division, soulevée par Noss dans la citation ci-dessus, il se peut que la valeur de son apprentissage repose dans les processus cognitifs qui y sont impliqués et non pas dans l'habileté de trouver rapidement une réponse. Cette réponse peut effectivement être trouvée plus vite avec une calculatrice. Mais la compréhension de l'algorithme de la division

mets en jeu les conceptions des autres opérations arithmétiques et de la représentation décimale des chiffres. Elle permet d'engager les élèves dans des raisonnements riches qui exigent une synthèse de leurs connaissances arithmétiques et, suivant le contrat didactique engagé avec les élèves, les amener à poser des questions mathématiques profondes dépassant le contexte de l'application simple d'une routine. Par exemple, une séquence de leçons sur la division dans une classe de 5<sup>e</sup> (élèves de 11 ans), qui a commencé sans un enseignement explicite de l'algorithme standard, a amené les élèves à se poser des questions sur l'existence, la pertinence et la grandeur du couple diviseur-reste, et à distinguer entre un diviseur entier et un diviseur décimal (Flückiger, 2005).

“[T]he question of the remainder gradually took over in the classroom debates. This question was first brought up by a newcomer in the class who had already studied the traditional division algorithm. He declared that the answer to “6 divided by 5” was “1 remainder 1”. At the time, the class was unable to decide between the two answers proposed: “1 remainder 1” and “1 point 2”.... This became the topic of some highly interesting and heated debates in subsequent sessions. The existence, relevance, and magnitude of the remainder with respect to the divisor are mathematical questions that supply the grounds for differentiating between the integer quotient and the decimal quotient. Associating a single quotient number to the dividend–divisor pair, or associating the quotient–remainder pair, is a choice which, in the absence of a concrete context, raises touchy questions like the uniqueness of the quotient–remainder pair, the nature of the numbers studied (integers or decimals), etc. These questions ended up leading the class to say to the teacher, 'You have to tell us what set of numbers we're working in, N or R.' Remember that this is grade 5 of elementary school!” (Flückiger, 2005).

La littérature sur l'enseignement des mathématiques est pleine de lamentations sur l'incapacité des étudiants à résoudre des problèmes « non-routiniers », suggérant parfois que la résolution des problèmes « typiques » n'exige pas de compréhension mais seulement l'application des procédures ou de formules. Je ne suis pas tout à fait d'accord avec cette supposition. Reconnaître un problème comme typique et reconnaître le type exige pas mal de connaissances et de compréhension de ce dont on parle dans le problème. Et n'est-ce pas la première chose qu'une personne intelligente ferait en face d'un nouveau problème ? N'est-ce pas une des « heuristiques » de Polyá ? Un problème que j'ai, cependant, avec les problèmes typiques, est qu'ils peuvent assoupir la vigilance des étudiants quant à la validité de leurs réponses, à cause de leur familiarité et caractère répétitif. C'est pourquoi je pense que les problèmes typiques doivent être arrangés en séquences où il y a une variation intentionnelle des variables de façon à mettre en valeur leur caractère essentiel ou non et, en même temps, à maintenir l'esprit éveillé aux pièges possibles.

## 2.5. Développement de la pensée mathématique par des situations-problèmes

Depuis un certain temps, le but traditionnel de l'enseignement des mathématiques – « apprendre à penser mathématiquement » (CREM, 1995, p. 29) – a été relié aux activités d'étude des « situations-problèmes ». Ces activités sont censées provoquer les élèves à s'engager, entre autres, dans les démarches de preuve, sans que celles-ci soient réduites à la production d'un genre de discours en réponse à des exercices de type : *Démontrer que...* Elles comprennent une intégration des domaines et des compétences impliquées dans des activités d'exploration des contextes mathématiques et non-mathématiques, de formulation de problèmes, de conjectures, d'explications, de justification, et parfois de construction d'un modèle mathématique. Il s'agit de développer une « disposition à penser mathématiquement » (Abrantes, 2001) dans des situations-problèmes diverses. D'après Kilpatrick (2001), les recherches montrent, effectivement, que les situations de résolution de problèmes aident à développer tous les aspects de la « compétence mathématique ».

L'approche privilégiée est donc « réaliste » et non « mécaniste », « empiriste » ou « structuraliste » (CREM, 1995, p. 33). Au CREM, l'organisation des apprentissages autour des situations-problèmes est une solution du dilemme de l'opposition entre l'enseignement magistral des théories mathématiques où les élèves peuvent admirer les constructions mais ne peuvent pas faire beaucoup par eux-mêmes, et un enseignement où les élèves s'exercent à appliquer des techniques et des formules dont l'enseignant connaît peut-être le contexte théorique et les raisons, mais n'en fait pas part aux élèves.

« [I]l existe une troisième façon d'enseigner, dans laquelle professeurs et élèves travaillent des mathématiques, où chacun se pose des questions et apprend à penser. Dans cette optique, les grandes théories ne sont pas abandonnées : elles sont reconstruites pour répondre à des questions. » (CREM, 1995, p. 16).

Les auteurs de (CREM, 1995) ne se font pas d'illusion : cet idéal n'est pas facile à atteindre.

« [C]e type d'enseignement... n'est encore pratiqué que par une minorité. Il ne faut d'ailleurs jeter la pierre à personne, car il est vraiment difficile de donner aux élèves la part d'autonomie intellectuelle la plus favorable à leur formation, et cela ne s'apprend pas en un tour de main. C'est d'autant plus difficile que les cours universitaires, qui par leur position contribuent à donner le ton, se font le plus souvent sur le modèle de la science achevée, déductive. Les cours de ce type, parce qu'ils sont si soigneusement construits, ne communiquent pas aux étudiants la pensée vivante des chercheurs qui les ont écrits. » (CREM, 1995, p. 16).

Pour changer les pratiques des enseignants dans la direction voulue, il ne suffit pas, disent les auteurs de CREM (1995), de produire des présentations idéologiques des buts de l'enseignement ; il faut construire,

... des recueils de situations-problèmes... accompagnés... d'une argumentation critique, d'exemples vécus dans les classes, de commentaires mathématiques et épistémologiques et d'indications méthodologiques, ainsi que des recommandations pour l'évaluation. (CREM, 1995, p. 22).

L'analyse des situations-problèmes et plus généralement, des tâches offertes aux étudiants, ne semble pas être, en ce moment, un sujet de recherche très populaire. J'ai pu le constater lors d'une étude d'un échantillon de rapports de recherche présentés dans les actes de PME (Sierpinska, 2004). De telles analyses existent, bien sûr. Un bon exemple est celui du travail de Brousseau & Gibel (2005) et autres articles publiés dans le volume 59, en juillet 2005, d'*Educational Studies in Mathematics*.

Ce travail montre que les situations-problèmes tendent pas mal de pièges aux enseignants. Elles se réfèrent à un contexte ouvert ; si on laisse aux élèves la liberté d'interpréter le contexte comme ils veulent, on risque le dérapage de la discussion en dehors des mathématiques. Si l'enseignant intervient en imposant une interprétation mathématique, la situation n'est plus une situation-problème ; si le modèle mathématique est trop difficile pour les élèves, l'enseignant devra intervenir dans la résolution et l'activité deviendra un travail dirigé ou exercice de calcul.

Il est possible qu'en pratique, le travail en classe sur des situations-problèmes converge toujours vers le « point fixe » des situations typiques. Dans les années 1950, au Royaume-Uni, c'étaient des problèmes d'échelles appuyées contre les murs, des projectiles lancés des avions, de collision des balles, *etc.* (Burkhardt, 1989). Aujourd'hui, on a ajouté des problèmes sur les ventes des CD ou de téléphones mobiles, l'organisation d'une fête à l'école, ou des problèmes environnementaux. Mais dans ces situations standard, toute discussion sérieuse des relations entre la réalité et le modèle mathématique serait tout aussi absente. Car une telle discussion demande des connaissances non-triviales mathématiques, physiques, économiques et des contextes de la vie réelle, qu'il n'est pas réaliste d'assumer chez les enseignants.

Burkhardt (1989, p. 2) raconte l'histoire du projet USMES aux États-Unis, inspiré par Henry Pollak et qui a bien marché tant que les activités dans les écoles étaient supervisées par les mathématiciens. Laissés à eux même, les enseignants n'ont pas pu continuer ce type d'enseignement.

"The USMES project (Unified Sciences and Mathematics in Elementary Schools)... introduced real problem solving to the elementary school classroom on the basis of substantial six-week projects carried through on a whole class basis. Each project was based on a challenge which had been shown to lead to rich and tractable classroom activities and to decisive conclusions.... It remains an outstanding achievement. Its weakness was in the high demands it made upon the teachers



involved, both in terms of commitment and the range of skills that were necessary. The great majority of teachers are accustomed to working with detailed guidance and support, even in familiar areas of the curriculum. I do not think the level of support offered would have been adequate for most teachers.” (Burkhardt, 1989, p. 2).

Burkhardt (ibid.) a souligné que lorsque les applications des mathématiques ou la modélisation mathématique ne font pas l'objet d'une évaluation directe dans les examens, cette partie du curriculum risque fort d'être « diluée » ou « corrompue » dans la pratique. Il est probablement de même pour la résolution de problèmes en général.

Les situations-problèmes sont souvent vues, par les enseignants, comme un loisir ou un luxe dans la chronogénèse et la topogénèse des savoirs scolaires (Sensevy et al., 2005). Ce que les élèves apprennent dans ces situations ne se prête pas à une évaluation directe ; il peut même être difficile de décrire ce qu'ils apprennent. Les enseignants peuvent juger qu'ils ne peuvent pas se permettre ce luxe, vu le temps qu'ils ont à leur disposition et la place de ce qui, idéalement, pourrait être appris, dans la structure des objectifs d'enseignement.

## **2.6. Développement de la pensée autonome**

Pour les auteurs de (CREM, 1995) l'apprenant idéal est autonome dans sa pensée, c'est-à-dire, « prend des initiatives, ... agit et réfléchit avec une intention personnelle » (p. 29) au lieu de « chercher l'unique bonne réponse par l'unique bonne méthode, celle que le professeur a exposée » (p. 41). L'apprenant idéal a aussi confiance en sa capacité de raisonner de façon autonome.

Certains problèmes, tâches ou situations didactiques donnent plus d'autonomie aux apprenants que d'autres. Cela dépend des caractéristiques mathématiques de ces problèmes, mais aussi du contrat didactique établi dans la classe. La recherche et l'expérimentation des problèmes permettant à l'élève de penser et agir de façon autonome est, en fait, l'objectif principal de beaucoup de recherches en didactique des mathématiques. Cela a certainement été la préoccupation principale des travaux de Guy Brousseau et une des sources de sa théorie des situations didactiques.

### ***2.6.1. Manque de souci pour la validité de leurs réponses chez les étudiants***

L'autonomie de l'apprenant n'est pas facile à obtenir. Pour être autonome dans sa pensée, il faut avoir un tant soit peu de contrôle sur la validité de ses résultats. Parfois les étudiants n'ont pas de moyens théoriques ou techniques de vérifier leurs résultats (par exemple, lorsqu'il s'agit d'une démonstration dans une théorie qu'ils connaissent à peine ; voir Durand-Guerrier & Arzac, 2005). Mais, même lorsqu'ils ont la possibilité de vérifier leur résultat, ils ne sont pas nombreux à le faire. Ils croient que ce n'est pas leur affaire, mais celle de l'enseignant, de décider si la

solution est correcte ou non. Une solution, pour eux, n'est pas vraie ou fausse; sa validité se mesure en pourcentage du nombre de points assigné à la question.

Dans une étude sur le phénomène de frustration parmi les étudiants de mon université obligés à prendre des cours des mathématiques de niveau pré-universitaire comme condition d'admission dans un programme académique de leur choix (p. ex., psychologie, études commerciales), presque deux tiers des répondants (N=96) ont admis qu'ils ont besoin que l'enseignant leur dise si leur solution est correcte ou non. Ils ont aussi massivement choisi comme celle qu'ils préfèrent une solution incorrecte d'une inéquation avec valeur absolue (Figure 1).

**74.** Given a problem: Solve  $|2x - 1| < 5$ . Which solution do you like better?

*Solution a*

$$|2x - 1| < 5$$

$$2x - 1 = 5 \quad \text{neg. } 2x - 1 = -5$$

$$x = 3 \quad \quad \quad x = -2$$

$$\text{Answer: } -2 < x < 3$$

*Solution b*

We use the theorem :  $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$

$$|2x - 1| < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x - 1 < 5 \Leftrightarrow 2x - 1 > -5 \text{ and } 2x - 1 < 5 \Leftrightarrow$$

$$x > -2 \text{ and } x < 3$$

$$\text{Answer: } -2 < x < 3$$

Why?

**75.** Given a problem: Solve  $|2x-1| > 5$ . Which solution do you like better?

*Solution a*

$$|2x - 1| > 5$$

$$2x - 1 = 5 \quad \text{neg. } 2x - 1 = -5$$

$$x = 3 \quad \quad \quad x = -2$$

$$\text{Answer: } 3 > x > -2$$

*Solution b*

We use the theorem:  $|a| > b \Leftrightarrow a < -b \text{ or } a > b$

$$|2x - 1| > 5 \Leftrightarrow 2x - 1 < -5 \text{ or } 2x - 1 > 5 \Leftrightarrow x < -2 \text{ or } x > 3$$

$$\text{Answer: } x < -2 \text{ or } x > 3$$

Why?

**Figure 1** : Deux items d'un questionnaire adressé aux étudiants des cours de niveau pré-universitaire.

Quand on leur a demandé laquelle des solutions, (a) ou (b), à l'inéquation  $|2x - 1| < 5$  (item 74 dans la Figure 1) ils préfèrent, 69% (66 des 96) ont répondu qu'ils préfèrent (a) et seulement 19% (18) ont choisi (b). Pour l'item 75, seulement 20% (19) ont choisi (b) et 62% ont choisi (a) sans remarquer que cette solution est

fausse. Très peu d'étudiants ont justifié leur préférence par la validité de la solution. Dans l'item 75, seuls 2 répondants ont mentionné que (a) est fausse. Un étudiant a choisi 74(b) pour sa « plus grande généralité », mais il a opté pour 75(a) parce qu'il n'était pas « satisfait » avec le connecteur *or* dans (b) :

“I prefer (a). The OR in (b) is not quite satisfying. I believe there will always be a part of the disjunction that is going to be false. The biconditional holds in 75(b), but theorem 74(b) is much better”. (Étudiant adulte, qui a pris un cours d'algèbre exigé pour admission en Psychologie).

Une étudiante qui a choisi la solution 75(b) a donné l'explication suivante :

“In solution [75]b you just follow the rule. However, it is important to understand the concept of absolute value, so that you can see that the theorem makes sense. [This is] my least favorite type of problem because I have to think the absolute value concept through every time. The inequality makes it even more complicated.” (Étudiante adulte, se préparant pour admission aux études commerciales).

Cette étudiante a appris à résoudre les inéquations à valeur absolue par référence à la définition de la valeur absolue. Cette approche est rare dans les écoles secondaires au Canada ; l'approche par résolution de deux équations, avec des règles de dérivation de la solution est plus commune. Les étudiants choisissent l'approche qui leur est la plus familière. Ils ne songent pas à vérifier la solution.

Les raisons le plus souvent mentionnées pour justifier le choix étaient : *clearer, simpler*. Mais il y avait aussi des justifications comme : *not so cluttered, less silly symbols, less steps, easier to understand, the theorem is difficult to remember*. Une répondante a choisi les solutions (a) parce qu'elles étaient écrites de haut en bas et non pas en une seule ligne. L'un des deux étudiants qui ont remarqué que 75(a) est fausse, a justifié son choix non seulement par le fait que 75(a) était fausse, mais aussi parce que la solution 75(b) était claire et simple : « Clear and simple and the only correct answer ».

### ***2.6.2. La dépendance de l'enseignant comme une caractéristique de l'apprentissage des mathématiques***

La dépendance à l'enseignant qu'éprouvent les apprenants des mathématiques est reconnue dans les recherches. Par exemple, Stodolsky et al. (1991), qui ont étudié les différences entre les attitudes de 60 élèves du secondaire face aux mathématiques et aux sciences sociales, ont constaté que 50% d'entre eux se trouvaient incapables d'apprendre les mathématiques par eux-mêmes ; 38% ont dit qu'ils étaient incapables d'apprendre les sciences sociales par eux-mêmes. A la demande faite aux étudiants d'indiquer ce que leur donne l'école qu'ils ne pourraient pas faire à la maison en mathématiques, un étudiant a répondu : « L'enseignant me dit si ma solution est incorrecte ; il me donne la bonne réponse ».

Il se peut que la dépendance à l'enseignant soit spécifique aux mathématiques, non pas *de fait*, mais *en principe*. En mathématiques, plus qu'en d'autres sujets, il y a beaucoup plus de connaissances et de compétences qui ne sont pas communicables par écrit, par des textes, par des figures et des images. Il est difficile d'apprendre les mathématiques avec seulement un manuel à sa disposition. Il y a, en mathématiques, des techniques (Castela, 2004 ; Mamona-Downs & Downs, 2004) qui sont difficilement apprises sans interaction avec un « maître ».

### **2.7. Les changements dans les curriculums devraient être reflétés dans les moyens et méthodes d'évaluation**

La condition de représenter les changements des programmes scolaires dans les moyens et méthodes d'évaluations des élèves est considérée comme nécessaire à tout projet d'institutionnalisation de ces changements (cf. Burkhardt, 1989). Mais elle n'est pas suffisante pour éviter la corruption de ces changements, comme le démontre, p. ex., la recherche de Schörr, Bulgar & Firestone (2002). Ces auteurs ont observé les pratiques de 63 enseignants impliqués dans la réalisation d'un programme basé sur les standards et principes NCTM dans un état des États-Unis où les tests étaient adaptés à ces standards et principes. Dans les entrevues, les enseignants déclaraient qu'ils étaient motivés par les tests à changer leurs pratiques, mais les observations ont révélé que ces changements étaient très superficiels, touchant surtout l'organisation de la classe (travail en petits groupes, manipulation d'objets concrets) mais pas les aspects conceptuels des contenus enseignés et l'engagement des élèves dans la pensée mathématique.

Il est peut-être vrai que la plupart des enseignants ne font que préparer les élèves aux examens. Mais ils ne le font pas toujours avec succès. Et alors ce n'est pas l'enseignement qui s'ajuste aux examens, mais les examens – à l'enseignement. Si trop d'élèves échouent à l'examen, la prochaine fois, on va modifier l'examen. L'examen est plus facile à changer que les enseignants (Sierpiska, 2004).

Ce phénomène risque de créer un obstacle important à la réalisation des programmes formulés en termes de compétences, qui, par définition, ne se laissent pas mesurer par des tests à temps limité, composés de petits exercices. C'est de cet obstacle que parle Abrantes (2001) quand il discute de l'incompatibilité entre un enseignement centré sur les compétences et les pratiques traditionnelles de l'évaluation des élèves en termes de marques, mieux adaptées à l'enseignement par objectifs définis par des actions concrètes (p. ex., savoir résoudre une équation de premier degré).

“Assessment of the development of mathematical competence requires observation in different situations and confidence in the teacher's professional judgments, while the central role of standardised tests and exams may become a strong obstacle to flexibility, adequacy and diversity. A wider range of assessment modes and

instruments – for example students' written productions – has begun to be increasingly accepted and used in the last years but the recent influence of the way in which international comparative studies tend to be interpreted and used has a powerful effect against educational change.... In Portugal, while the movement of curriculum innovation tries to emphasise flexibility and adequacy of teaching methods to students' characteristics and consideration of their social and cultural backgrounds, the 'societal' values of competitiveness and standardisation – of guidelines, methods and 'objective' results – tend to favour the reinforcement of a technique-oriented curriculum. The Ministry of Education is strongly criticised for not organising rankings of schools based on students' scores in national tests. A popular argument is that everybody has the right to know what are the 'best schools', the 'best teachers' and the 'best teaching methods'. The need to compete with other countries is generally added as well, together with the argument of 'globalisation' ". (Abrantes, 2001).

Tout cela ne veut pas dire qu'une réflexion profonde sur l'évaluation des élèves ne peut pas mener à l'amélioration des pratiques enseignantes (Kraemer, 2002). Il n'en reste pas moins que les moyens et méthodes alternatives d'évaluation sont très coûteux en termes du temps des enseignants. Ceci est aussi vrai pour les enseignants d'écoles secondaires que pour les professeurs des départements des mathématiques, qui ont normalement beaucoup moins de copies à corriger et moins souvent. Mais ils défendent jalousement le temps qu'ils ont pour leurs recherches. Ils aiment parfois enseigner – au sens d'aller dans la salle du cours et parler de leur sujet préféré pendant une ou deux heures – mais je n'en connais pas beaucoup qui aimeraient corriger les examens et surtout les problèmes de démonstration. Ils trouvent le travail d'essayer de comprendre la pensée de leurs étudiants d'un ennui insupportable.

## **2.8. Maintien de la motivation à apprendre les mathématiques**

Qu'est-ce qui peut motiver les élèves à apprendre les mathématiques ?

### **2.8.1. Besoins militaires**

Parfois, ce sont des situations politiques extrêmes. En racontant l'histoire des discussions autour des curriculums aux États-Unis au temps de la deuxième guerre mondiale, Garrett (2003) disait qu'il y avait une pression sociale pour mettre plus d'accent sur les mathématiques à l'école et surtout sur l'enseignement des applications. Il s'agissait de permettre à plus de jeunes d'être admis aux écoles d'officiers de marine et d'aviation, ce qui exigeait de passer un examen de mathématiques. La question de savoir si les étudiants seront mieux préparés à utiliser la haute technologie des armes et des moyens de transport tels les avions et les sous-marins en travaillant sur les problèmes typiques sur les projectiles, était un peu secondaire et plus idéologique que réelle.

### 2.8.2. *Sauvegarde de la dignité humaine*

Les raisons sociales et politiques d'enseigner les mathématiques aux jeunes Polonais pendant cette même guerre étaient assez différentes. Les changements d'approche pédagogique vers un enseignement très individualisé et en petits groupes étaient forcés par les circonstances. Le pays était sous l'occupation allemande, les écoles étaient fermées et tout enseignement en polonais était interdit sous peine de mort ou de déportation dans des camps de concentration<sup>4</sup>. L'enseignement se poursuivait donc en clandestinité, dans les appartements privés. Il n'y avait pas de manuels et cela changeait le rapport au savoir aussi bien de l'enseignant que de l'élève. Il s'agissait, dans ce cas, non pas de permettre au plus grand nombre de jeunes de passer les examens des académies militaires, mais de maintenir une dignité humaine en dépit des efforts de l'occupant pour réduire la race slave à constituer les esclaves de la race germanique.

### 2.8.3. *Le plaisir*

Dans les temps de paix, dans certaines sociétés occidentales, le plaisir est souvent évoqué comme un facteur de motivation. Une des compétences mentionnées par Abrantes était « plaisir et confiance en soi dans le développement des activités mathématiques impliquant le raisonnement mathématique » (Abrantes, 2001).

Depuis les années 1960, l'apprentissage à l'école primaire devait surtout amuser les enfants qui étaient censés d'apprendre en manipulant des objets de plastique à couleurs vives et en jouant à toutes sortes de jeux (logiques ou autres). Les livres de mathématiques n'étaient plus des recueils sobres de problèmes, mais se sont remplis de graphiques, d'images, de photos. Aussi les situations proposées par Brousseau avaient souvent comme base un jeu, une activité amusante avant de devenir un travail sérieux de développement d'une connaissance et d'un savoir institutionnalisé. En comparant l'enseignement basé sur « l'apprentissage de bonnes réponses » avec un enseignement guidé par l'épistémologie constructiviste, von Glasersfeld (1995, p. 4), a, lui aussi, utilisé l'argument du plaisir :

“From the constructivist perspective, learning is not a stimulus-response phenomenon. It requires self-regulation and the building of conceptual structures through reflection and abstraction. Problems are not solved by the retrieval of rote-learned "right answers". To solve a problem intelligently, one must first see it as one's own problem. That is, one must see it as an obstacle that obstructs one's progress toward a goal. The desire to reach what one believes to be at the end of an effort is the most reliable form of motivation. To have searched and found a path to

---

<sup>4</sup> Pour ceux qui lisent le polonais, un exemple de l'histoire de l'enseignement clandestin en Pologne pendant la deuxième guerre mondiale : <http://www.romer.region-rabka.pl/historia.htm>. A participé à cette histoire Mme Zofia Krygowska, connue pour son rôle dans le développement des recherches en didactique des mathématiques en Pologne dans les années 1950 - 80.

the goal provides incomparably more pleasure and satisfaction than simply to be told that one has given the right answer.” (von Glasersfeld, 1995, p. 15).

L'apprentissage peut-il être motivé le plaisir ? C'est comme cela qu'on entraîne les animaux : lorsqu'un chien a fait ce qu'on demandait de lui, on le récompense avec quelque chose qui lui fait plaisir et on peut être sûr qu'il va recommencer. Est-ce pareil pour les humains ? Le plaisir d'avoir résolu un problème de mathématiques ne dure qu'un instant. Combien sont prêts à le payer avec l'effort parfois énorme du processus de résolution ?

#### **2.8.4. La joie du travail**

Qu'est-ce qui caractérise ces étudiants, que nous avons parfois le bonheur de rencontrer, qui ne cherchent pas à minimiser leurs efforts dans nos cours de mathématiques ? Ils veulent savoir si telle ou telle chose est vraie et non si tel ou tel type de problème risque de tomber à l'examen final. Ils ont soif de savoir. C'est ce que m'a dit une étudiante adulte revenue aux études après quelques années de travail comme serveuse : « I am hungry for knowledge ». J'ai parfois l'impression que ce qui motive ces étudiants à chercher, à explorer les questions qu'ils se posent eux-mêmes, ce n'est pas le *plaisir* d'obtenir une récompense mais la *joie du travail*. Ce sont deux choses très différentes. Mais ce que je comprends par « joie du travail » n'est pas, pour autant, au même pôle que le triste sérieux et l'amertume du travail forcé évoqué par certains auteurs en parlant de l'apprentissage des mathématiques en Chine. Par exemple, Leung (2001) mentionne un slogan qu'il a vu sur les murs d'une classe en Chine rurale : « Les racines du savoir sont amères, ses fruits sont doux. »

“Pleasurable learning has been a slogan in a number of Western countries. Western educators in general consider it important that learning should be a pleasurable experience for the child.... Also, they believe that pleasurable learning is effective learning.... Unfortunately, for some countries, pleasurable learning is equated with merely simplifying what is to be learned... or introducing different sorts of activities to make the learning more fun. Students are enjoying activities while learning mathematics rather than enjoying the activities in the learning of mathematics. In contrast, the traditional view in East Asian countries, especially in China, has been that studying is a serious endeavour. Students are expected to put in hard work and perseverance in their study and are not supposed to "enjoy" the study.... [E]very Chinese is familiar with the many ancient Chinese folk stories about famous figures having had a hard time studying and eventually becoming successful.... During a visit to a school in rural Beijing, [I] observed the following poster on the wall of a junior secondary classroom: "the root of knowledge is bitter; its fruits are sweet".” (Leung, 2001, p. 41).

### 2.8.5. *Les mathématiques ouvrent les portes*

Parfois, on veut inciter les jeunes à étudier les mathématiques en leur disant que les mathématiques « ouvrent les portes ». Malheureusement, les mathématiques sont plus souvent perçues comme une clé qui ferme la porte de l'autre côté. Voici ce que nous a écrit une étudiante adulte revenant aux études, forcée à prendre des cours de mathématiques pour être admise aux études commerciales :

“Math is extremely discouraging when you are forced to take it as a prerequisite. If I was going for a major in math, then I would understand that the course is necessary. However, in the commerce program, there is nowhere near as much or as difficult math as I have just taken. I also have another year of math prerequisites to take in order to get into the program I want. If I fail math, I don't get into commerce. So I feel math is the only thing that's stopping me from getting into the program I want. I can't imagine the number of people who have dropped out of their dream just because of one subject that got in their way. I am currently spending 20 hours of studying math outside of class and I got 30% on my midterm. I'm starting to think that I'm the problem, and that's very discouraging. Hopefully math 208 and 209 will be a little less stressful.” (étudiante adulte).

Et voici ce qu'a écrit Bourdieu, à propos de la pratique d'utiliser les mathématiques comme instrument de sélection :

« [I]l faudrait aussi examiner le lien entre la nouvelle délinquance scolaire... et la logique de la compétition forcée qui domine l'institution scolaire et surtout l'effet de destin que le système scolaire exerce sur les adolescents : c'est souvent avec une très grande brutalité psychologique que l'institution scolaire impose ses jugements totaux et ses verdicts sans appel qui rangent tous les élèves dans une hiérarchie unique des formes d'excellence – dominée aujourd'hui par une discipline – les mathématiques. Les exclus se trouvent condamnés au nom d'un critère collectivement reconnu et approuvé, donc psychologiquement indiscutable et indiscuté, celui de l'intelligence : aussi n'ont-ils souvent pas d'autre recours, pour restaurer une identité menacée, que les ruptures brutales avec l'ordre scolaire et l'ordre social (on a observé, en France, que c'est dans la révolte contre l'école que se façonnent et se soudent nombre de bandes de délinquants) ou, comme c'est aussi le cas, la crise psychique, voire la maladie mentale ou le suicide. » (Bourdieu, 1994, pp. 49-50).

## 2.9. **Utilisation raisonnable des outils de calcul et de l'informatique**

Un des principes de la NCTM déclare : « Technology is essential in teaching and learning mathematics, it influences the mathematics that is taught and enhances students' learning ».

Mais les recherches empiriques sur l'utilisation des calculatrices dans l'enseignement ne permettent pas, pour le moment, de prendre de telles déclarations pour acquises.



“[T]here is an enormous body of research on the use of calculators by children in elementary and middle school. The great bulk of that work, however, has been devoted primarily to demonstrating that children’s learning is not harmed, and may be enhanced in some ways, when they use calculators. Relatively few studies have addressed issues of when and how calculators actually assist in the learning of specific mathematical concepts and operations. It is clear that the question is no longer whether calculators should be used but how. But researchers have just begun to address questions of the effectiveness of various uses of calculators. When should they first be introduced? How should young children use them? How much time needs to be spent on written algorithms when calculators are available? These questions themselves are not research questions, but they are the sorts of questions that teachers and others are asking. So far, the research literature offers little assistance in resolving them.” (Kilpatrick, 2001).

Les recherches offrent des théories raffinées et des conclusions nuancées qui ne se traduisent pas en réponses claires aux questions posées dans la citation ci-dessus (p. ex. Guin & Trouche, 1998 ; Zevenbergen, 2004).

Dans ce vide, les voix des enseignants du niveau collégial et universitaire contre l'utilisation de la technologie dans l'enseignement des mathématiques résonnent très fort. Par exemple, Wilson & Naiman (2004), suggèrent, par les résultats d'une petite étude statistique, que les étudiants qui ont beaucoup utilisé des calculatrices à l'école réussissent moins bien dans les cours de calcul différentiel et intégral au collège que ceux qui les ont utilisés moins ou pas du tout. Cette étude a plusieurs faiblesses méthodologiques et d'interprétation (Ruthven, 2005), mais son message est simple et, par ce fait, il risque d'être plus facilement repris dans les débats politiques et idéologiques autour de la prochaine réforme, que les considérations subtiles des recherches.

### **3. Quelques réflexions sur les possibilités de communication entre l'idéal et la réalité**

Les textes des programmes scolaires et les articles de recherche utilisent parfois les mêmes expressions techniques ou termes théoriques. Nous ne savons pas si ces éléments du discours passent de la théorie aux programmes scolaires par un processus de vulgarisation dans les écrits destinés aux enseignants ou si, inversement, les chercheurs reprennent les idées populaires et les slogans pédagogiques et en font l'objet de leurs études. Il s'agit, probablement, d'une « osmose » culturelle des deux côtés.

Les recherches, cependant, ne vont pas aussi vite que les mouvements idéologiques et les décisions politiques. En plus, ce que les recherches produisent a tendance à s'éloigner des questions que se posent les enseignants et d'autres responsables de l'enseignement mathématique. Les programmes scolaires auraient besoin de

théories didactiques, alors que les théorisations des chercheurs vont dans la direction d'études fondamentales dans les domaines de sociologie, psychologie ou philosophie.

Les théories spécifiquement centrées sur la didactique des mathématiques sont rares ; surtout si nous ne confondons pas théorie et idéologie et cherchons des théories didactiques qui prendraient en compte les conditions de la réalité physique, matérielle, culturelle, *etc.*, dans lesquelles l'enseignement se déroule. La théorie des situations didactiques (Brousseau, 1997), la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999) et leurs multiples applications (voir, p. ex. Arsac & Mante, 1997 ; Laborde & Perrin-Glorian, 2005), la construction et l'étude des « substantial learning environments » (Wittmann, 1995, 2002 ; Steinbring, 2005) ou le champ de recherches et développement appelé « Realistic Mathematics Education » (p. ex. Presmeg & van den Heuvel-Panhuizen, 2003), témoignent de l'effort dans cette direction. Les résultats de cet effort ne se traduisent pas directement, eux non plus, en principes ou méthodes d'enseignement de contenus mathématiques précis ; loin de là. Mais ils avertissent, au moins, de l'extrême difficulté de la réalisation des postulats qui paraissent, sur papier, tellement justes.

Nous ne devons pas nous faire des illusions sur le rôle que pourrait jouer une ou des théories didactiques dans la construction d'un programme scolaire. Les curriculums sont construits par des groupes unis par une même « philosophie » d'enseignement, une même « idéologie », et dont les membres possèdent une certaine expérience de la réalité scolaire ou une connaissance des contenus disciplinaires. Les décisions sont prises au cours des sessions de brainstorming et de discussion ; l'argument est gagné non pas parce qu'il a pu être justifié au sein d'une théorie ou par une expérimentation, mais parce qu'il a été convaincant depuis la perspective des valeurs, partagées par les membres du groupe. La construction du curriculum ne se fait pas, d'habitude, à partir d'un cadre théorique commun. En particulier, le curriculum pour l'enseignement des mathématiques à un niveau donné ne se fait pas à base d'une théorie didactique spécifique aux mathématiques. Bref, ce qui oriente la construction d'un curriculum, c'est l'idéologie et non pas la théorie.

Une idéologie n'est pas une théorie ; une théorie postule et démontre ce qui est, ou est possible, sans, en principe, y attacher de jugement de valeur. Une idéologie postule ce qui est bon ou important, et utilise des moyens rhétoriques pour en convaincre le public. Elle ne se vérifie pas, non plus, comme une théorie pourrait, en principe, l'être. En fait, une idéologie ne se *vérifie* pas ; elle se *défend* contre des critiques avec des arguments basés sur des jugements de valeur. Une idéologie est faite des déclarations à propos de ce qu'il « faut » faire : « pour enseigner l'addition aux jeunes enfants, il faut le faire dans le contexte des objets concrets qu'on ajoute ou met ensemble ». Par contre, une théorie est faite d'énoncés conditionnels de

forme telle que, p. ex. : si l'enseignant fait telle ou telle chose dans tel ou tel contexte, la majorité des enfants va réagir de telle ou telle manière. Ces énoncés peuvent être justifiés ou discutés sur un plan non seulement idéologique des valeurs, mais aussi par des moyens théoriques (relations conceptuelles entre les termes, cohérence, complétude logique) et empiriques.

Une théorie précise son objet, son point de vue sur cet objet et les paramètres en termes desquels cet objet va être décrit. Elle décrit les domaines de valeurs de ces paramètres, assume certaines relations entre ces paramètres et en déduit d'autres, par des moyens théoriques ou empiriques. Elle ne déclare pas, a priori, quels choix de valeurs des paramètres sont « bons » ou plus souhaitables que d'autres, comme le ferait une idéologie.

Une théorie *didactique*, donc, pourrait indiquer à quoi l'on va penser en préparant l'enseignement d'un sujet, quels sont les choix qu'on pourrait faire, et quelles seraient les conséquences possibles de ces choix.<sup>5</sup>

J'aimerais croire que si un projet de curriculum était, résolument, basé sur une théorie didactique plutôt qu'uniquement sur une idéologie, ses chances d'échec causé par les pressions politiques et sociales seraient moindres : on perdrait moins de temps et d'énergie dans des luttes idéologiques inutiles. Déjà, distinguer les sens intrinsèques des concepts mathématiques de leurs sens idéologiques<sup>6</sup> faciliterait beaucoup de choses, comme Noss (1994) a essayé de démontrer.

Au début des années 1990, les « éducateurs des mathématiques » en Amérique du Nord étaient engagés dans un débat autour de la question de la transposition de l'épistémologie constructiviste en une théorie didactique (p. ex. Steffe & Gale, 1995 ; Larochelle & Bednarz, 1994). Dans le cadre de cette discussion, Morf (1994) a mis en évidence les différences entre un constructivisme épistémologique (existant) et un constructivisme didactique (à construire) et, ce faisant, a esquissé le cadre général d'une théorie didactique, comme il la comprenait. Ma description, plus haut, de ce que pourrait être une théorie didactique est inspirée de son travail.

Pour Morf, l'objet central d'une théorie didactique sont les connaissances, leurs transformations et les conditions ou facteurs de ces transformations, indépendamment des caractéristiques individuelles du sujet connaissant, qui, elles, pourraient intéresser un psychologue. Le but de la théorie est de dériver une action

---

<sup>5</sup> Mon avis, dans cet article, sur le caractère et les tâches d'une théorie didactique, peut paraître réducteur à certains lecteurs. Mais mon intention n'est pas de définir une théorie didactique ; je veux seulement souligner ce qui l'oppose (en principe!) à une idéologie didactique.

<sup>6</sup> Exemples des sens "idéologiques" de la notion de preuve en mathématiques : "la preuve est l'essence même des mathématiques" ; "la preuve mathématique présente un type de raisonnement qui est supérieur au raisonnement de tous les jours".

résolue sur les connaissances (i.e. une « didactique ») à partir de l'analyse des connaissances et des modèles de leurs transformations (ces modèles peuvent être provisoires). Les connaissances sont considérées comme des « potentiels d'action issus de l'expérience »<sup>7</sup> dont l'origine est aussi l'action volontaire du système cognitif sur ses objets ; ce n'est que dans l'action que les connaissances peuvent se manifester et devenir observables et transformables.

Morf a distingué les paramètres d'une connaissance tels que :

- son degré de stabilité : les chances de la connaissance de ne pas être oubliée ;
- son degré d'ouverture ou de flexibilité ; une connaissance peut être ouverte, provisoire, prête à changer en fonction de l'expérience ou fermée dans une forme définitive et ne pouvant être utilisée que telle quelle ;
- le niveau et type d'organisation de la connaissance (plus ou moins concret, abstrait, informel, formel, *etc.*) ;
- le potentiel d'association : les connaissances peuvent se consolider en formant des liens avec d'autres connaissances, ou par application répétée tout en restant relativement autonomes ;
- sa générativité : la connaissance peut avoir la capacité de provoquer la recherche et l'invention pour produire de nouvelles connaissances dans certaines situations ou elle peut être utile que dans un nombre restreint de contextes.

Morf a proposé quelques exemples de postulats sur la transformation des connaissances. Par exemple : les connaissances fermées ou à faible niveau de générativité « se développent par un processus additif et peuvent résulter en une nouvelle connaissance préadaptée à une situation précise ». C'est le cas des procédures automatisées, qu'on peut appeler « assemblages de connaissances fermées ». Les résultats du développement par assemblage sont déterminés, prévisibles. « [E]n revanche, des connaissances de type génératif se développent par un processus de croissance, soit par l'incorporation d'expériences nouvelles et par différenciation », mais ce développement est incertain, imprévisible (Morf, 1994, pp. 37-38).

Une théorie didactique pourrait aussi énoncer des lois d'économie :

---

<sup>7</sup> Cette notion de connaissance en tant qu'objet d'une théorie didactique n'est pas loin de celle de Wittmann (1995), pour qui, l'objet de la pensée didactique est "mathematical activity in social contexts".

« [U]ne habitude limitée et fermée est plus facile à former, moins coûteuse..., qu'une connaissance qui permet l'invention plutôt que l'automatisme... [I] est plus économique, à court terme, d'informer que d'expliquer.... [C]ertains assemblages de connaissances fermées (ensembles de procédures et d'algorithmes, ou discours qui simulent la connaissance scientifique) sont économiques à court terme (rentables scolairement) mais coûteux à long terme parce qu'ils ne résistent pas aux changements de conditions et sont réfractaires aux modifications.... La croissance des [connaissances] de type génératif apparaît coûteuse... parce qu'elle est lente dans ses phases préparatoires, alors que les assemblages de connaissances fermées manifestent des performances dès le départ. » (Morf, 1994, pp. 38-39).

Brousseau a aussi beaucoup réfléchi sur les principes d'économie qui gèrent les apprentissages et déterminent quelles connaissances vont être mises en jeu par l'élève. Ce sont ces principes qui orientent les choix des valeurs des variables d'une situation didactique. Par contre, cette réflexion est absente dans beaucoup d'analyses des situations d'enseignement faites de nos jours dans les articles des journaux consacrés aux questions de l'enseignement des mathématiques.

Par exemple, Forman & Ansell (2001), analysent en détail une leçon sur la multiplication de nombres naturels en une classe de 3<sup>e</sup> année de scolarité, où l'enseignante (« Mrs Porter ») a proposé le problème suivant aux élèves : « Vous lisez 15 minutes chaque jour. Combien de temps aurez-vous passé à lire dans une semaine ? » La grande majorité des élèves ont inventé des stratégies personnelles pour faire ce calcul (additionner 15 cinq ou sept fois étant la plus populaire) et deux élèves seulement ont utilisé l'algorithme standard (qu'ils ont appris à la maison). Lorsque les enfants présentaient leurs solutions au tableau, Mrs Porter accueillit avec sympathie et bienveillance les solutions « inventées » ; elle s'assura que chacun dans la classe comprenne ces stratégies et soit capable de les utiliser. Mais elle n'a pas accueilli avec la même bienveillance les solutions par l'algorithme standard, et elle n'a pas essayé de les faire comprendre aux autres élèves. Elle a seulement commenté :

“[Mrs Porter:] "That's the way a lot of your parents would do. Because that's the only way we were allowed to do it in school. That doesn't mean it's the right way. And it's a very confusing way to a lot of people. Especially for people for whom regrouping is difficult. So, if you want to do it because you understand it and it's a good way for you, great. If not, do it a way that makes sense to you." ” (Forman & Ansell, 2001, p. 128).

L'analyse que font Forman & Ansell de cette leçon est de nature purement psychosociale ; en fait, comme le disent les auteures, le cadre théorique utilisé est celui de « cultural psychology » (Forman & Ansell, 2001, p. 117). Il n'est pas question, dans cette analyse, de la variable didactique *grandeurs des nombres* dans le problème donné aux enfants et de son rôle dans la réalisation des objectifs didactiques que l'enseignante voulait atteindre dans sa leçon. Si l'enseignante

demandait aux enfants de calculer le temps passé à lire au cours d'un mois ou d'un an, elle ne pourrait pas ignorer l'importance des algorithmes standards. Son objectif, dans cette leçon, devait donc être différent de celui d'inciter les enfants à dépasser la stratégie d'addition répétée, car elle a choisi (plus ou moins consciemment) des nombres suffisamment petits pour que la multiplication par addition répétée soit possible.

Mais la question des objectifs didactiques de l'enseignante n'occupe pas une place importante dans l'article ; elle apparaît seulement dans une citation de la lettre de celle-ci, écrite en réaction à la lecture de l'analyse de sa leçon faite par les chercheurs (p. 137-8). Les actions de l'enseignante et les productions des élèves ne sont pas discutées en tant qu'une réalisation de son projet didactique ; en fait, ce projet didactique n'est pas, ici, l'objet d'étude. L'objet d'étude est la personne psychologique de Mrs Porter en tant que produit d'une culture et membre d'une communauté.

Malgré cette orientation psychologique, la théorie didactique aurait quelque chose à apprendre de cette recherche. Elle pourrait nous rendre plus conscients des risques de corruption de nos idéaux, et suggérer d'autres lois de la théorie didactique. Par exemple – une loi qu'on pourrait appeler *la loi d'exagération*, ou *la loi de radicalisation*. Nous énonçons le postulat d'autonomie des élèves ; nous suggérons, à titre d'exemple, que les enseignants n'imposent pas *tout de suite* les algorithmes standards dans leurs classes et laissent les élèves inventer leurs propres stratégies. Les enseignants réagissent en *éliminant* l'enseignement de ces algorithmes ou, au moins, en les dénigrant aux yeux des élèves. Nous recommandons, « les stratégies de solution sont aussi importantes que trouver la bonne réponse ». Les enseignants traduisent cela en, par exemple, « la validité de la réponse n'est pas importante ; il est important de laisser les enfants expliquer leurs stratégies ». La recommandation, « ne faites pas seulement X, comme vous l'avez toujours fait ; faites aussi Y », devient : « il n'est pas correct de faire X, il est correct de faire Y ».

Il est possible que les recherches existantes sur l'enseignement des mathématiques, lorsqu'elles contiennent des descriptions détaillées des situations de classe, même si elles sont théorisées depuis des perspectives psychologiques ou sociales et font peu attention aux contenus mathématiques, puissent servir au développement de la théorie didactique en mathématiques. Ce sont des documents de la réalité de l'enseignement des mathématiques, qui peuvent être utilisés par d'autres chercheurs.

Je vais terminer ici, avant que cette petite lueur d'espoir ne s'éteigne devant mes yeux.

Mon discours à Mons (qui était une version très abrégée de ce que viens de dire dans cet article) a paru très pessimiste et sombre aux participants. Pendant la période de discussion, on m'a posé la question : « Alors quoi, il faut baisser les bras ? » Mais ce n'est pas le message que je voulais communiquer. Je voulais dire, qu'au contraire, il faut arrêter de rêver, retrousser les manches et se mettre au travail sans avoir peur de se faire des ampoules aux mains au contact avec la réalité.

## Bibliographie

- ABRANTES P. (2001) Mathematical competence for all: Options, implications and obstacles, *Educational Studies in Mathematics*, **47(2)**, 125-143.
- ARSAC G. & MANTE M. (1997) Situations d'initiation au raisonnement déductif, *Educational Studies in Mathematics*, **33.1**, 21-43.
- BARBEAU E. (2005) Education Notes: Annual Greetings, *CMS Notes*, **37.5**, 15-18.
- BETZ W. (1940) The present situation in Secondary Mathematics with particular reference to the new national reports of the place of mathematics in education, *Mathematics Teacher*, **33**, 339-360.
- BISHOP A. (1991) *Mathematical Enculturation*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- BOALER J. (1997) *Experiencing School Mathematics. Teaching Styles, Sex and Setting*, Open University Press, Buckingham.
- BOURDIEU P. (1994) *Raisons pratiques*, Éditions du Seuil, Paris.
- BROUSSEAU G. & GIBEL P. (2005) Didactical handling of students' reasoning processes in problem solving situations, *Educational Studies in Mathematics*, **59**, 13-58.
- BROUSSEAU G. (1988) Représentations et didactique du sens de la division, dans G. Vergnaud, G. Brousseau, M. Hulin (éditeurs), *Didactique et Acquisition des Connaissances Scientifiques. Actes du Colloque de Sèvres, Mai 1987*, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble, 47-64.
- BROUSSEAU G. (1997) *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- BURKHARDT H. (1989) Mathematical modelling in the curriculum, in W. Blum et al., (eds), *Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics*, John Wiley & Sons, New York, 1-11.
- CASTELA C. (2004) Institutions influencing students' private work: A factor of academic achievement, *Educational Studies in Mathematics*, **57(1)**, 33-63.
- CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **19(2)**, 221-266.
- CHEVALLARD Y. (2005) L'homme est un animal didactique. La théorie des situations et les progrès de l'instruction publique, in M.-H. Salin, P. Clanché, B. Sarrazy (éd.), *Sur la théorie des situations didactiques. Questions, réponses, ouvertures. Hommage à Guy Brousseau*, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble, 81-90.



- CREM (1995) *Les mathématiques de la maternelle de la maternelle jusqu'à 18 ans. Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques*, Nivelles, Belgique.
- DURAND-GUERRIER V. & ARSAC G. (2005) An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule, *Educational Studies in Mathematics*, **60(2)**, 149-172.
- FEY J.T. & GRAEBER A.O. (2003) From the New Math to the Agenda for Action, in G.M. Stanic & J. Kilpatrick (eds), *A History of School Mathematics*, **I**, NCTM, Reston, VA, 521-557.
- FLÜCKIGER A. (2005) Macro-situation & numerical knowledge building: The role of pupils didactic memory in classroom interaction', *Educational Studies in Mathematics*, **59**, 59-84.
- FORMAN E. & ANSELL E. (2001) The multiple voices of a mathematics classroom community, *Educational Studies in Mathematics*, **46**, 115-142.
- GARRETT A.W. & DAVIS O.L. jr. (2003) A time of uncertainty and change: School mathematics from World War II until the New Math, , in G. M. Stanic & J. Kilpatrick (eds), *A History of School Mathematics*, **I**, NCTM, Reston, VA, 493-519.
- GLASERSFELD E. von (1995) A constructivist approach to teaching, in L. P. Steffe & J. Gale (eds), *Constructivism in Education*, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hillsdale, NJ, 3-16.
- GUIN D. & TROUCHE L. (1998) The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **3(3)**, 195-227.
- HOWSON A.G., KEITEL C. & KILPATRICK J. (1981) *Curriculum Development in Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
- KILPATRICK J., SWAFFORD J., FINDELL B. (eds) (2001) *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*, National Academy Press, Washington, D.C.
- KILPATRICK J. (2001) Understanding mathematical literacy: the contribution of research, *Educational Studies in Mathematics*, **47(1)**, 101-116.
- KRAEMER J.M. (2002) Évaluer pour mieux comprendre les enfants et améliorer sa pratique, *Educational Studies in Mathematics*, **51(1-2)**, 95-116.
- LABORDE C. & M.-J. PERRIN-GLORIAN M.-J. (eds) (2005) *Teaching Situations as Object of Research : Empirical Studies Within Theoretical Perspectives*, Special Issue of Educational Studies in Mathematics, Springer, New York, Heidelberg.
- LAROCHELLE M. & BEDNARZ, N. (1994) À propos du constructivisme et de l'éducation, *Revue des Sciences de l'Éducation*, **20(1)**, 5-20.

- LEUNG, F.K.S. (2001) In search of an East Asian identity in mathematics education, *Educational Studies in Mathematics*, **47(1)**, 35-51.
- M.E.Q. (2001) *Programme de formation de l'école québécoise. Education préscolaire. Enseignement primaire*, Gouvernement du Québec, Ministère de l'Éducation 01-00374.
- MAHOUX P. (1994) *Socles de compétences dans l'enseignement fondamental et au premier cycle de l'enseignement secondaire*, Cabinet du Ministre de l'Éducation, Bruxelles.
- MAMONA-DOWNS J. & DOWNS M. (2004) Realization of techniques in problem solving: The construction of bijections for enumeration tasks, *Educational Studies in Mathematics*, **56(2-3)**, 235-253.
- MORF A. (1994) Une épistémologie pour la didactique : spéculations autour d'un aménagement conceptuel, *Revue des Sciences de l'Éducation*, **22(1)**, 29-40.
- NCTM (2000) *Principles and Standards for School Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.
- NOSS R. (1994) Structure and ideology in the mathematics curriculum, *For the Learning of Mathematics*, **14(1)**, 2-10.
- NOSS R. (2001) For a learnable mathematics in the digital cultures, *Educational Studies in Mathematics*, **48(1)**, 21-46.
- PERRENOUD PH., 1997, *Construire des compétences dès l'école*, ESF, Paris.
- PRESMEG N. & van den Heuvel-Panhuizen M. (Guest Editors) (2003) Realistic Mathematics Education Research: Leen Streefland's work continues. A PME Special Issue, *Educational Studies in Mathematics*, **54(1)**, 2003.
- RUTHVEN K. (2005) Short Communication: Alternative interpretation of the Dataset on K-12 calculator usage and college grades as analysed by Wilson and Naiman (2003, 2004), *Educational Studies in Mathematics*, **60(3)** (à paraître bientôt).
- SCHÖRR R. BULGAR S. & FIRESTONE W.Y. (2002) Testing and fourth grade teaching, in *Proceedings of the 26<sup>th</sup> Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 21 – 26 July 2002, Norwich, U.K., **4**, 193-200.
- SENSEVY G., SCHUBAUER-LEONI M-L., MERCIER A., LIGOZAT F., PERROT G. (2005) An attempt to model the teacher's action in the mathematics class, *Educational Studies in Mathematics*, **59** (à paraître).
- SIERPINSKA A. (2004) Research in mathematics education through a keyhole: task problematization, *For the Learning of Mathematics*, **24(2)**, 7-15.

SIERPINSKA A. (2005) "Papa veut que je raisonne". Quelques réflexions sur la valeur du raisonnement mathématique dans la formation de futurs citoyens et professionnels. *Colloque GDM 2005, Montréal, Mai 4-5*. Accessible au <http://alcor.concordia.ca/~sierp/>.

STEFFE L.P. & GALE J. (1995) *Constructivism in Education*, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hillsdale, NJ.

STEINBRING H. (2005) *The Construction Of New Mathematical Knowledge In Classroom Interaction, An Epistemological Perspective*, Springer, New York & Heidelberg.

STODOLSKY S.S., SALK S., GLAESSNER B. (1991) Student views about learning math and social studies, *American Educational Research Journal*, **28(1)**, 89-116.

TARDIFF J. (2001) Les compétences dans le programme de formation: fantaisie, leurre ou axe fédérateur de l'ensemble des apprentissages ?, dans B. Côté, C. Lajoie, J. Portugais, S. René de Cotret (éditeurs), *La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation*, in Actes du Colloque GDM – 2001, 7 au 9 mai 2001, Université de Montréal, 28-55.

WILSON W.S. & NAIMAN D.Q. (2004) K-12 calculator usage and college grades, *Educational Studies in Mathematics* **56(1)**, 119-122.

WITTMANN E. CH. (1995) Mathematics education as "design science", *Educational Studies in Mathematics*, **29(3)**, 355-374.

WITTMANN E. CH. (2002) Developing mathematics education in a systemic process, *Educational Studies in Mathematics*, **48**, 1-20.

ZEVENBERGEN R. (2004) Technologizing numeracy: Intergenerational differences in working mathematically in New Times, *Educational Studies in Mathematics*, **56(1)**, 97-117.

### Remerciements

La recherche sur la frustration des étudiants adultes dans les cours préparatoires de mathématiques a été subventionnée par l'organisme Canadien SSHRC, fonds no. 410 2003 0799.

**ANNA SIERPINSKA**

Concordia University, Mathematics & Statistics – 7141 Sherbrooke St. W.  
Montréal, QC – H4B 1R6 Canada  
[sierpan@alcor.concordia.ca](mailto:sierpan@alcor.concordia.ca)

