

**JEAN-CLAUDE RAUSCHER**

**ÉCRITURE REFLEXIVE ET ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE :  
LE CAS DE LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES DE PROPORTIONS**

**Abstract. Reflexive writing and mathematical activity: case of proportion problem solving.**

How can the writing of a pupil's reflections contribute to the development of his or her knowledge? This question is considered at the end of primary school in an experiment on problem solving about proportionality. The problems consist of comparing mixtures, and they are inspired by Noelting's problems (1980) about orange juices. Based on the work of Duval (1998), our observations show a conceptual obstacle when the texts written by the pupils are used in class to pass from a situation of expression to a situation of proof : the pupils consider the written texts as spoken expressions. Spontaneously, the pupils write as they speak, never going back to what they have written. Our experiment aims to lead the pupils to consider their texts really as written productions and not as simple transcriptions of oral expressions. We analyse the extent to which this aim is achieved, the consequences on the nature of the proofs produced by the pupils, and the development of their knowledge. Finally, we indicate other experiments which can be carried out with the pupils according to our observations.

**Résumé.** Quelle contribution peut apporter le recours à la production « d'écrits réflexifs » par les élèves au développement de leurs connaissances ? C'est la question qui est envisagée ici dans le cadre d'une expérimentation menée en fin d'école primaire à propos de la résolution de problèmes relevant de la notion de proportionnalité. Les problèmes considérés sont des problèmes de comparaison de mélanges inspirés de Noelting (1980). Inspirées par les travaux de Duval (1998), nos observations repèrent un obstacle dans l'exploitation des écrits des élèves en classe pour passer d'une situation de formulation à une situation de validation : une « pratique orale » de l'écrit par les élèves. Spontanément, les élèves écrivent comme ils parlent, sans retour sur ce qu'ils écrivent. Le dispositif élaboré et mis à l'épreuve a alors le but d'initier les élèves à une « pratique écrite » par l'objectivation de leurs écrits. L'écriture réflexive devient alors le centre de l'activité mathématique en cours. Nous analysons dans quelle mesure cette initiation à une posture d'écriture réflexive est réussie et quelles sont ses conséquences sur le développement des connaissances des élèves.

**Mots-clés.** Écrits réflexifs, pratique orale, pratique écrite, validation, résolution de problèmes, proportionnalité.

## Introduction

Dans le cadre d'une expérimentation menée en fin d'école primaire, nous abordons la question de la contribution au développement des connaissances apportée par des écrits produits par les élèves lors de la résolution de problèmes relevant de l'initiation à la notion de proportionnalité.

A travers les recherches et les instructions accompagnant en particulier le dernier programme de mathématiques à l'école primaire en France, on peut voir que les écrits ont une place de plus en plus reconnue dans le processus de développement des connaissances en mathématiques. Mais quel est le rôle dévolu à cette activité d'écriture ? Souvent l'écrit est envisagé en tant que production utilisable pour servir de matériau à un échange ou d'outil de mémoire à consulter. Les écrits n'interviennent alors qu'au terme ou en marge de l'activité mathématique. Dans cette perspective, c'est l'écriture en tant qu'activité d'expression spécifique et le rôle important qu'elle joue dans la prise de conscience et la réflexion qui sont ignorés. Or Vygotski (1934/1997) a été un des premiers à attirer l'attention sur les différences cognitives entre l'activité d'expression orale qu'il n'hésitait pas à qualifier d'automatique et l'activité d'expression écrite qui exige une véritable prise de conscience et une réorganisation de la part de celui qui écrit par rapport à ce dont il peut avoir conscience en s'en tenant à la seule communication orale. Sous ce point de vue, l'écriture comme activité spécifique d'expression devient un moment essentiel dans la « conceptualisation ».

Pour notre part, en nous référant aux considérations de Vygotski et aux travaux de R. Duval, nous avons été amenés à donner une place provoquée et contrôlée dans ses effets à la production et à l'observation par les élèves d'écrits. L'écriture est alors une composante essentielle de l'activité mathématique des élèves.

Quels progrès pour les élèves apporte alors la mise en place d'une telle perspective ? Tous les élèves en profitent-ils de la même façon ? Telles sont les questions que nous aurons à examiner (partie IV) après avoir présenté le dispositif initial (partie II) et la situation de réflexion finalement proposée aux élèves (partie III). Mais afin de pouvoir situer plus précisément notre travail d'un point de vue théorique, nous commencerons par poser la question des fonctions que revêt la production d'écrits par les élèves dans quelques travaux de recherche en didactique et aussi dans les indications des programmes de l'école primaire qui mettent en avant cette activité comme moyen de développement des connaissances (partie I).

## 1. La production d'écrits par les élèves : en accompagnement ou au centre de l'activité mathématique ?

La classification proposée dans la rubrique « Écrire en mathématiques » des documents d'application des programmes (Ministère de la jeunesse, de l'Éducation nationale et de la Recherche, 2002, p. 9) distingue trois types d'écrits qui peuvent étayer les apprentissages en mathématiques :

- *les écrits de type « recherche » correspondant au travail privé de l'élève pour mener sa recherche ;*
- *les écrits destinés à être communiqués et discutés qui peuvent prendre des formes diverses (affiches, transparents..). Ils doivent faire l'objet d'un souci de présentation, de lisibilité, d'explicitation tout en sachant que, le plus souvent, ils seront l'objet d'un échange entre les élèves au cours duquel des explications complémentaires seront apportées ;*
- *les écrits de référence élaborés en vue de constituer une mémoire du travail de l'élève ou de la classe.*

Cette perspective dressée par les programmes se démarque des pratiques où seuls les écrits terminaux par lesquels les élèves communiquent leurs démarches et leurs résultats à l'enseignant sont pris en considération par celui-ci. Elle prend aussi en compte tous le travail d'élaboration préalable par des écrits de recherche, des écrits intermédiaires destinés à être communiqué aux pairs de la classe pour soit relancer les recherches, soit être débattus et aussi des écrits destinés à constituer une « mémoire » de la classe considérée comme une communauté qui élabore du savoir.

En fait, dans cette présentation, on peut repérer différents moments proposés dans la théorie des situations (Brousseau, 1998) pour conduire graduellement les élèves à préciser les connaissances utilisées pour résoudre un problème au sein de la communauté que constitue la classe. Le premier type d'écrits, les écrits de type « recherche » accompagne la situation d'action où les élèves abordent individuellement le problème et sont en recherche. Les « écrits destinés à être communiqués et discutés » correspondent à une situation de formulation pour préparer une situation de validation. Enfin par « écrits de référence » on peut comprendre des phases de décontextualisation et d'institutionnalisation.

Les travaux qui prennent en considération la production d'écrits par les élèves pour développer les apprentissages en mathématiques se situent en général dans ce modèle en prenant principalement en compte l'une ou l'autre de ces phases. De ce fait les potentialités de traitement qu'offre le matériau écrit lui-même ne sont pas mis en avant. En effet, comme nous allons le voir dans les travaux considérés, les

fonctions principales qui sont attribuées aux écrits produits par les élèves sont principalement la fonction d'objectivation, la fonction de communication et la fonction de mémoire.

Ainsi dans la pratique innovante des narrations de recherche (Chevalier, 1993) c'est d'abord une fonction d'objectivation de sa propre action de recherche qui est mise en avant. Elle concerne la phase initiale de recherche dans la résolution d'un problème : « C'est l'exposé détaillé de la suite des activités qu'un élève met en œuvre lors de la recherche des solutions d'un problème ». Les écrits produits ont pour fonction pour les élèves de se convaincre eux même et convaincre un auditoire d'une idée, d'un chemin, vers une vérité (IREM PARIS 7, 2002). En second lieu, c'est donc aussi une dimension sociale qui est introduite avec une fonction de communication qui amène à développer les idées de recherche mais aussi des processus de validation de proposition au sein du groupe ou de la classe.

C'est cette perspective que l'on retrouve aussi clairement explicitée dans la brochure de l'IREM de Montpellier 2 à propos de l'enseignement de la racine carrée en troisième (Bronner, Pellequer, 2000) où les écrits des élèves à propos d'un test initial vont être confrontés et intervenir ainsi « pour modifier un milieu de façon à créer un conflit socio-cognitif » et « modifier le rapport personnel des élèves à l'objet racine carré élaboré en classe de quatrième et de construire de nouveaux savoirs sur la racine carrée ».

Avec les modalités d'enseignement proposées par Sensévy (1996), c'est aussi une dimension sociale qui est introduite par les écrits qui servent de support de communication pour développer un travail de réflexion et provoquer un accroissement épistémologique du travail de l'élève (Sensevy, 1996, p. 15) sur le modèle des communautés de chercheurs en mathématique. Le dispositif s'appuie sur le cahier individuel appelé « Le journal des fractions » où chaque élève d'une classe est amené à expliciter et à développer les rapports qu'il a avec certains objets d'enseignement du domaine concerné. Ce développement est provoqué par des questions comme par exemple « Qu'est-ce qui vous a semblé le plus intéressant ces derniers temps dans le domaine des fractions ? Qu'aimeriez-vous étudier, dorénavant ? » et par le traitement lors de débats organisés en classe des questions posées ou induites par les contenus de ces journaux comme par exemple « Lorsqu'on inverse le numérateur et le dénominateur d'une fraction, obtient-on le même nombre ? ». Ces écrits confrontés et discutés permettent aussi l'émergence d'une mémoire de la classe. Les écrits produits par les élèves mis en avant par Sensévy sont donc essentiellement vus comme des outils d'objectivation et de développement du savoir au sein de la communauté de la classe.

Même si les écrits collectifs produits servent moins systématiquement de support au développement de l'enseignement en cours, on retrouve ces orientations dans le cadre des « Bilans de savoir » proposés par Butlen et Pezard (2003). Les élèves

doivent régulièrement résumer ce qui a été appris d'important et ce qu'il est important de retenir lors de certaines activités mathématiques. Les écrits individuels sont soumis au débat de l'ensemble de la classe et sont éventuellement améliorés puis recopiés dans chaque classeur individuel et le classeur collectif de la classe. Le but est ainsi « d'amener les élèves, par un retour collectif et réflexif sur leurs activités, à dépasser le stade de l'action et de prendre de la distance, par rapport au contexte des activités. » (Butlen, Pezard, p. 46). Les auteurs montrent ensuite que ce dispositif agit sur le processus de conceptualisation chez les élèves dont les écrits témoignent de degrés de décontextualisation et de généralisation qui évoluent au cours du temps.

En résumé, on peut donc dire que la dimension de réflexion et d'objectivation que suscite la rédaction ou la lecture des écrits demandés aux élèves apparaît chaque fois bien nettement dans les travaux et les instructions des programmes que nous venons d'évoquer. Les écrits produits permettent aux élèves de prendre conscience et d'exprimer leur degré d'engagement, de certitudes, de doutes, de questionnement par rapport aux énoncés qu'ils avancent. L'écriture apparaît alors comme étayant une marche vers les processus de validation en classe et vers la décontextualisation des savoirs dans la communauté constituée par la classe.

Mais la nécessité d'organiser et la possibilité matérielle de réorganiser individuellement sa pensée lorsqu'on est amené à écrire ou à se relire ne sont pas mises en avant dans ces travaux comme source d'apprentissage en mathématiques. Il s'agit là d'une fonction de traitement que permet l'écrit mise en avant par Vygotski qui est ignorée. L'importance de cette fonction est soulignée par les travaux de Duval (2000, p. 135) : « Pour l'apprentissage des mathématiques, il est crucial de passer à une production écrite qui utilise les possibilités cognitives spécifiques d'organisation et de contrôle qu'offre la représentation visuelle du discours ».

Duval développe cette perspective dans la compréhension de ce qu'est une démonstration en mathématiques. Pour lui ce n'est pas dans la recherche que se nouerait et se dénouerait la compréhension de la démonstration mais dans l'écriture (Duval, 1998, p. 184). C'est parce que l'expression écrite donne accès au discours, à son organisation, à ses opérations, à la portée de ses questions ou de ses assertions, (Duval, 1998, p. 193) que les élèves peuvent comprendre la différence entre une argumentation à laquelle ils ont spontanément recours pour convaincre un interlocuteur en géométrie et une démonstration qui possède une structure sous-jacente radicalement différente et qui n'est pas subordonnée à une situation d'interaction sociale. En l'occurrence pour permettre l'accès à cette compréhension, Egret et Duval (1989) proposent une objectivation par les élèves de leurs propres discours à l'aide d'une représentation par réseau. « Je me rends compte que je n'avais pas compris ce que j'avais écrit » déclare une élève après ce

travail découvrant ainsi les secrets de la structure ternaire d'un pas de démonstration. A travers ce moyen les élèves accèdent ainsi progressivement à la compréhension de la structure d'une démonstration, compréhension qui déclenche la « jubilation » des élèves qui ont le moyen de valider de façon autonome leur raisonnement grâce au contrôle de leurs écrits en prenant appui sur une représentation du discours par un réseau.

On retrouve cette orientation qui prend appui sur les potentialités des modes de représentation pour développer la pensée dans le travail de Pressiat (2001) à propos de la résolution de problèmes de proportionnalité avec l'organisation des données en tableau. Ce travail met à l'épreuve dans des classes de sixième une stratégie d'enseignement qui « consiste à problématiser l'écrit comme partie intégrante du savoir, et en particulier comme composante des techniques de résolutions de problèmes et de contrôle de ces techniques. » (Pressiat, 2001, p. 82). La mise en tableau des données de problèmes relevant de la notion de proportionnalité y apparaît en effet comme un outil pour poser le questionnement, résoudre et contrôler les résultats des problèmes. Il n'est pas proposé d'emblée mais est découvert par les élèves eux-mêmes lorsqu'ils ont à produire et à analyser des écrits qui doivent permettre à d'autres élèves de répondre à la question de l'énoncé sans qu'ils aient cet énoncé sous les yeux.

Pour notre part, nous étions initialement dans une perspective qui utilise la production d'écrits comme un accompagnement objectivant du travail mathématique des élèves. Nous allons voir comment nous avons été amenés à mettre aussi à notre façon très radicalement le travail d'écriture et d'examen des écrits au centre de l'activité mathématique des élèves.

## **2. La perspective initiale du dispositif : des écrits réflexifs en appui à l'activité mathématique**

### **2.1. Le contexte de l'expérience**

La classe de CM1/CM2 de 24 élèves (9/11 ans) où s'est déroulée l'essai pris en considération ici était la classe de Mme Régine Baltz PEMF à l'école Karine de Strasbourg Hautepierre. L'école est située dans une « zone d'enseignement prioritaire » où des difficultés sociales dans l'environnement des élèves sont donc reconnues par l'Éducation Nationale. L'expérience s'est déroulée en novembre 2001 pendant 4 séances d'une heure chacune, espacées de 2 à 4 jours chaque fois.

### **2.2. Le contenu de l'enseignement**

Le projet visait à initier les élèves à la notion de proportionnalité. Il s'agissait ici de l'aborder par la résolution d'un ensemble de problèmes mettant en jeu des

traitements relevant de cette notion, les élèves étant pour cela libres de développer les rhétoriques qui leur semblent appropriées.

### **2.3. Un dispositif initial s'appuyant essentiellement sur les interactions sociales en classe**

En première approximation nous nous situons globalement dans un dispositif s'appuyant sur les interactions sociales en classe. En effet, la perspective dans laquelle s'inscrivait a priori notre démarche était de proposer des problèmes abordables par les élèves avec leurs conceptions initiales. Des situations de communication entre pairs au sein de la classe devaient alors permettre aux élèves d'une part de formuler leurs raisonnements, puis de remanier leurs conceptions en fonction des défaillances et des contradictions qui peuvent se révéler dans une phase de débat qui se fait classiquement à l'oral.

### **2.4. Un accompagnement par des écrits réflexifs**

Mais dans notre cas, ce dispositif s'appuyant sur les interactions sociales au sein de la classe, se spécifiait par un accompagnement explicite de la situation de formulation par des « écrits réflexifs » produits par les élèves. Nous avons déjà développé par le passé des expériences qui avaient pour but de favoriser chez les élèves la prise de conscience de leurs connaissances (Rauscher, 2001).

Dans le cas présent, nous pensions que l'étayage de la situation de formulation par des activités d'écriture réflexive permettrait de développer au sein de la classe un milieu au sens de la théorie des situations (Brousseau, 1998), un milieu qui faciliterait le passage de la situation de formulation à la situation de validation.

Pour cela nous ne faisons pas uniquement résoudre les problèmes proposés immédiatement. Nous avons proposé aux élèves un échantillon de problèmes et demandions aussi aux élèves de qualifier par écrit individuel, après discussion en binômes, ces exercices de « facile » ou « difficile » et de justifier leurs qualificatifs. Nous voulions ainsi créer une « distance réflexive » entre l'élève et son action qui l'amènerait à objectiver ce qu'il ferait pour résoudre certains exercices en repérant les différences et les similitudes entre les problèmes proposés. Nous savions bien que cette procédure constituait une rupture par rapport au contrat habituel où il s'agit de résoudre immédiatement le problème. Mais les expériences que nous avons développées dans des travaux précédents nous rendaient optimistes sur les potentialités réflexives de tels dispositifs. Dans une séance suivante, nous projetions de proposer un échantillon d'écrits d'élèves à toute la classe à fin de comparaison et de débats. L'échantillon sélectionné que nous envisagions devait permettre de mettre en lumière des points de vue divergents ou des procédures variées pour nourrir les échanges et le débat.

Le scénario initialement prévu au départ était donc le suivant :

	Corpus proposés à la réflexion des élèves	Tâches à effectuer par les élèves
Phase 1	Énoncés de 5 problèmes. Contenus sous jacent : la notion de proportionnalité	Après lectures individuelles et discussions par binômes, classement par écrits individuels des problèmes en facile/difficile et justifications
Phase 2 (3 jours après)	Des écrits sélectionnés de la phase 1	Comparaison et confrontation à l'oral, au sein de la classe.

### 2.5. Les problèmes choisis

Dans une séance antérieure à la phase 1 nous avons remarqué un grand engouement qui se manifestait par des discussions animées au sein des binômes pour un problème de comparaison de mélanges.

On mélange dans une grande cruche ces deux verres de sirop de grenadine avec un verre d'eau.  
N°1



On mélange dans une grande cruche ces trois verres de sirop de grenadine avec deux verres d'eau  
N°2



Quel mélange a le plus le goût de la grenadine ?

Ce genre de problèmes paraissait donc susceptible de provoquer un questionnement suffisamment riche pour que les élèves puissent adhérer à l'idée d'écrire sur leur façon de les appréhender. Ils sont construits sur le modèle des problèmes analysés par Noelting (1980) et repris par Alarcon (1982) et Adjiaje (2003).

Les réponses d'importants échantillons d'élèves devant de tels problèmes de comparaison de mélanges ont été analysées par Noelting (1980) en fonction des rapports en jeu et de l'âge des élèves. Le problème tel qu'il a été proposé ici la première fois est difficile pour des élèves de 9/10 ans car il ne peut se résoudre par la comparaison de quantités absolues mais fait intervenir de façon sous-jacente la comparaison des rapports  $1/3$  et  $2/5$ . Certains élèves qui se sont exprimés la première fois à propos de ce problème ont produit la justification erronée suivante : *«Pour la première ligne, je prends le verre d'eau et le mets dans le premier verre de grenadine pour en enlever le goût, il reste un verre de grenadine dont on n'a pas enlevé le goût. Dans la deuxième ligne, je prends les deux premiers verres*

*d'eau pour enlever le goût des deux premiers verres de grenadine, donc dans deux lignes, c'est le même goût. »*

De nombreux élèves ont été convaincus par ce raisonnement alors que d'autres sont restés bloqués. En fait une exploitation immédiate de ce problème s'est révélée impossible. Comment faire mettre en question un raisonnement erroné qui suscitait une forte adhésion ou l'incompréhension ?

Notre idée fut alors de replacer pour la phase 1 (comparaison par écrit de la difficulté de problèmes) ce problème de comparaison de mélanges dans un échantillon de problèmes de même type mais pouvant se résoudre par des raisonnements plus accessibles aux élèves. L'échantillon de problèmes choisis devaient donc offrir des possibilités de traitements variés accessibles aux élèves. Voici les problèmes proposés (le 1<sup>er</sup> nombre désigne le nombre de verres d'eau, le 2<sup>ème</sup> celui de sirop) :

	Problème n°1	Problème n°2	Problème n°3	Problème n°4
1 <sup>er</sup> mélange	1 pour 2	2 pour 1	2 pour 2	2 pour 2
2 <sup>ème</sup> mélange	2 pour 3	4 pour 2	3 pour 3	3 pour 2

Remarque : les problèmes étaient bien sûr proposés avec la présentation figurative vue précédemment.

Voici une analyse a priori des procédures possibles :

- le problème n°1 est le même que celui proposé initialement et revient en terme de rapports à comparer  $1/3$  et  $2/5$ . Dans la classification de Noelting (1980) se référant aux stades du développement logique de Piaget ce problème est placé à un niveau assez élevé (opérations formelles). Néanmoins Noelting y discerne la facilité suivante : les deux premiers termes de chaque paire sont dans un rapport entier. Cela veut dire ici que par exemple on pourrait doubler les quantités du premier mélange pour avoir deux verres d'eau dans chacun des mélanges et comparer ensuite les quantités de grenadine ;
- le problème n°2 revient à comparer  $2/3$  et  $4/6$ . Il permet a priori d'obtenir et de confronter des avis différents résultant soit de procédures multiplicatives correctes (par exemple « *prendre deux fois le premier mélange pour obtenir le deuxième mélange* »), soit de procédures additives erronées (par exemple « *au deuxième mélange il y a deux verres d'eau de plus qu'au premier mélange et seulement un verre de grenadine de plus* »). Dans la classification de Noelting, ce problème trouve sa place dans les opérations concrètes avec la spécificité de mettre en jeu des rapports équivalents ;

- Les troisième et quatrième problèmes permettent a priori aux élèves de se situer par rapport  $1/2$  à l'intérieur de chaque mélange (« *moins ou plus que la moitié* ») et le problème 4 peut à vraie dire se traiter par une procédure additive (« *il y a deux verres de grenadine dans chaque mélange mais il y a un verre d'eau de plus dans le deuxième mélange* ». Dans la classification de Noelting, ces problèmes trouvent leur place dans les opérations concrètes mais de moindre niveau que le problème 2 parce que mettant en jeu des rapports équivalents à 1.

### 3. Le remaniement du dispositif : des écrits réflexifs au centre de l'activité mathématique

#### 3.1. La posture naturelle des élèves par rapport à l'écriture : un obstacle

La phase 1 du dispositif initialement prévu a bien été expérimentée mais nous avons été amenés à reconsidérer la suite du processus prévu. En effet, la situation de formulation mise en place par la comparaison écrite des problèmes, ne permettait pas l'entrée dans une situation d'explicitation, de comparaison et de validation des traitements possibles. Nous étions devant le fait que les productions des élèves étaient trop disparates et incomplètes pour pouvoir en extraire des éléments qui permettraient d'amorcer un travail sur la comparaison des problèmes et les différents traitements possibles dans les situations de comparaison de mélanges. Dans les écrits produits, on trouvait bien quelques développements complets sur le modèle de l'exemple 1 qui suit ou quelques repérages assez précis des difficultés rencontrées comme pour l'exemple 2.

Exemple 1 : « Le problème n°4 est *plutôt facile car il y a 2 verres d'eau et 2 verres de grenadine donc on sent encore la grenadine et au 2<sup>ème</sup> mélange il y a 3 verres d'eau et 2 verres de grenadine alors maintenant on ne sent plus le goût alors c'est le premier mélange qui sent la grenadine.* »

Exemple 2 : « Le problème n°3 est *plutôt difficile parce qu'il y a le même nombre de verre de grenadine et d'eau et je n'arrive pas à comparer.* »

Ces productions auraient pu éventuellement servir de support pour amorcer une confrontation de points de vue entre élèves. Mais dans la grande majorité des cas les raisonnements et les informations sur lesquels ils étaient basés n'étaient pas décelables comme le montre les trois exemples 3, 4 et 5.

Exemple 3 : « Le problème n°4 est *le plus facile car le 1<sup>er</sup> mélange a deux verres d'eau et de grenadine* »

Exemple 4 : « Le problème n°1 est facile : parce que on a mis un peu de l'eau »

Exemple 5 : « Le problème n°4 est difficile parce qu'il faut faire un petit calcul »

En fait par leurs écritures bien incomplètes, on pouvait repérer deux faits. Le premier c'est que certains élèves étaient loin d'avoir prise sur les traitements

possibles pour réaliser ces comparaisons de mélange. Le deuxième est que les élèves, même s'ils avaient une idée de ces traitements, étaient dans une posture de communication de type orale ou de pensée pour soi qui laisse implicite des éléments de leurs raisonnements (Duval, 1998). Pour distinguer l'oral de l'écrit Vygotski (1934/1997) analyse que dans les communications orales habituelles les sous-entendus se produisent parce qu'ils s'appuient sur le contexte partagé de la conversation et qu'il y a toujours un interlocuteur qui peut demander des précisions sur ce qui a été dit. En revanche lorsqu'on écrit pour être compris il faut donner ces précisions d'emblée sans interlocuteur pour vous relancer. L'écriture a donc des exigences que l'oral n'a pas.

### 3.2. Les enjeux d'un changement de posture par rapport à l'écriture

Ici, dans un premier jet, l'écrit des élèves était un reflet de leurs pensées avec toutes les incomplétudes non gênantes quand on pense habituellement pour soi mais rédhibitoires lorsqu'on veut être compris. Nous ne pouvions pas nous appuyer sur les écrits produits dans une posture orale pour faire comparer aux élèves leurs raisonnements. On peut penser que dans la plupart des cas, c'est ce qui fait que les enseignants renoncent alors à l'idée de s'appuyer sur les écrits des élèves en classe. Pour notre part nous pensions qu'abandonner le travail à ce moment là revenait à abandonner des élèves qui avaient déployé une activité d'écriture réflexive non négligeable. Certaines productions écrites laissaient apparaître un travail de réflexion et d'objectivation de la pensée de la part de ces élèves comme le montre l'exemple 6 suivant : « Le problème n°2 est plutôt difficile : ~~Parce que~~ c'est plus facile que le 4<sup>ème</sup> parce que c'est là où j'ai le mieux compris entre le 4 et le 2 il y a plus d'eau que de grenadine au 1<sup>er</sup> mélange. »

Il se dégageait alors la nécessité d'envisager une nouvelle dimension dans les activités proposées aux élèves : celle de la possibilité ou de l'initiation au passage d'une « posture orale » par rapport à l'écriture à une « posture écrite » qui permettra aux élèves de produire des écrits compréhensibles par autrui. Ecrire pour être compris dans le développement d'un raisonnement en mathématiques nécessite une prise en compte des contraintes de l'expression écrite. Mais non seulement le scénario remanié que nous avons alors élaboré allait les prendre en compte par nécessité d'être compris mais il allait en faire un point d'appui pour l'élève pour se comprendre par le contrôle de sa propre écriture. Alors que dans le dispositif initial l'écrit ne pouvait intervenir qu'en appui à l'activité mathématique comme matériau d'échanges entre élèves, cette fois ci nous faisons l'hypothèse qu'il pouvait y occuper une place centrale.

### 3.3. Le dispositif remanié

Pour passer d'une posture orale dans l'écriture à une posture d'écriture, l'idée était de faire passer les élèves d'un « j'écris » qui est équivalent au départ à un « je dis »

à un « *qu'est ce que j'écris ?* » et ceci non pas sur le fond de ce qui est dit mais sur la forme. Il s'agit de provoquer une observation réfléchie de la structure des discours produits et non pas immédiatement des contenus des discours. C'est ce travail d'observation qui devrait permettre a priori aux élèves d'avoir prise sur leurs pensées.

Pour neutraliser la question des contenus des problèmes nous avons choisi comme support d'observation les réponses des élèves relatives à un même problème qu'une grande majorité d'élèves avait qualifié de facile. Il constituait donc un bon support parce que la majorité des élèves y avait eu accès et avaient développé un raisonnement à son sujet. On pouvait donc attirer l'attention des élèves sur la structure de ce qu'ils avaient écrit. Quel était le scénario proposé aux élèves pour cela ?

Nonobstant le changement d'objet à faire observer aux élèves, il est dans la continuité du processus amorcé : il s'agissait de faire comparer six productions écrites sélectionnées par le professeur et de les comparer. Le but de la séance était annoncé aux élèves : il s'agit en fin de compte de rendre les argumentations plus compréhensibles et complètes. Le travail de comparaison a d'abord été mené par deux avec production écrite des remarques. Une mise en commun dirigée par la maîtresse au tableau a eu pour but de dégager de façon synthétique les défauts et les qualités des différentes productions soumises. A la fin de la séance, après la récréation, il a été demandé aux élèves de reprendre le plus complètement possible par binômes au problème 4.

Le scénario final complet qui a été mené à son terme était alors le suivant :

	Corpus proposés à la réflexion des élèves.	Tâches à effectuer par les élèves.
Phase 1	Énoncés de problèmes. Contenus sous jacent : la notion de proportionnalité.	Après lectures individuelles et discussions par binômes, classement par écrits individuels des problèmes en facile/difficile et justifications.
Phase 2 (quelques jours après la phase 1)	4 énoncés de problèmes de comparaison de mélanges se distinguant par des possibilités de traitements variés.	Après lectures individuelles et discussions par binômes, classement par écrits individuels des problèmes en facile/difficile et justifications.
Phase 3 (3 jours après la phase 2)	6 productions écrites relatives à l'un des problèmes jugés majoritairement faciles par les élèves. Les productions se différencient par leurs structures.	Après lectures individuelles et discussions à deux, explicitation par écrit des différences formelles entre les productions. Synthèse organisée à l'oral par la maîtresse et résumée au tableau.
Phase 4 (dans la même séance que la phase 2)	L'énoncé du problème jugé majoritairement facile.	Rédiger la solution du problème.

### 3.4. Le support de réflexion proposé aux élèves dans le dispositif remanié

Nous avons choisi comme support d'observation les réponses des élèves relatives au problème n°4 :

On mélange dans une grande cruche ces deux verres de sirop de grenadine avec deux verres d'eau

N°1 

On mélange dans une grande cruche ces trois verres de sirop de grenadine avec deux verres d'eau

N°2 

Quel mélange a le plus le goût de la grenadine ?

Notre choix des écrits initiaux (résultant de la phase 2) soumis à l'observation des élèves dans la phase 3 peut se comprendre à partir de l'analyse a priori des traitements possibles pour résoudre le problème.

Le problème présente deux mélanges (le 1<sup>er</sup> et le 2<sup>ème</sup>) et deux ingrédients (eau et grenadine). La comparaison des mélanges pour déterminer le mélange qui a le plus le goût de la grenadine demande une prise en compte organisée des ces quatre données pour pouvoir aboutir à une conclusion en passant éventuellement par des conclusions intermédiaires. Nous appelons ici « traitement » le processus qui comporte la prise en compte organisée des données, les conclusions intermédiaires et la conclusion. La prise en compte organisée est une reprise ou une réorganisation des données telles qu'elles sont présentées dans l'énoncé initial. Une présentation sous la forme d'un tableau 2x2 rend compte des données et des différentes prises en compte possibles.

	<i>Eau</i>	<i>Grenadine</i>
<i>1<sup>er</sup> mélange</i>	<i>2 verres d'eau</i>	<i>2 verres de grenadine</i>
<i>2<sup>ème</sup> mélange</i>	<i>3 verres d'eau</i>	<i>2 verres de grenadine</i>

Nous pouvons distinguer deux entrées possibles, l'une par ligne, l'autre par colonnes. Elles donnent lieu à des traitements pertinents du problème de comparaison. Nous écartons une entrée par les diagonales, formellement possible mais qui ne permet pas de déboucher sur un traitement pertinent.

1<sup>ère</sup> entrée possible par les lignes que nous appellerons « entrée par les mélanges »  
 Cette entrée reprend les données telles qu'elles sont présentées en ligne dans l'énoncé et compare les quantités à l'intérieur de chaque mélange avec des conclusions intermédiaires, avant de mettre en parallèle les conclusions intermédiaires pour conclure.

Dans le premier mélange

Rappel des données : Il y a 2 verres d'eau et 2 verres de grenadine.

Comparaison des quantités « Il y a donc autant d'eau que de grenadine dans le 2<sup>ème</sup> mélange ».

Dans le deuxième mélange

Rappel des données : « Il y a 3 verres d'eau et 2 verres de grenadine ».

Comparaison des quantités : « Il y a donc plus d'eau que de grenadine dans le 1<sup>er</sup> mélange ».

Mise en parallèle des deux mélanges

1) « Il y a autant d'eau que de grenadine dans le premier mélange ».

2) « Il y a plus d'eau que de grenadine dans le deuxième mélange ».

Conclusion :

« Le premier mélange a plus le goût de la grenadine que le deuxième ».

2<sup>ème</sup> entrée possible par les colonnes que nous appellerons « entrée par les ingrédients »

Cette entrée réorganise les données telles qu'elles sont présentées en lignes en privilégiant une lecture par colonnes (qui ne s'impose pas a priori dans la présentation du problème). Elle considère successivement chaque ingrédient en comparant chaque fois les quantités présentes.

Comparaison des quantités d'eau

Rappel des données : « Il y a 2 verres d'eau dans le premier mélange et 3 verres d'eau dans le deuxième mélange ».

Comparaison des quantités « Il y a donc moins d'eau dans le 1<sup>er</sup> mélange que dans le 2<sup>ème</sup> ».

Comparaison des quantités de grenadines

Rappel des données : « Il y a 2 verres de grenadine dans le premier mélange et 2 verres de grenadine dans le 2<sup>ème</sup> mélange. »

Comparaison des quantités : « Il y a autant de grenadine dans chaque mélange »

Mise en parallèle des deux mélanges

1) « Il y a plus d'eau dans le 2<sup>ème</sup> mélange que dans le 1<sup>er</sup> ».

2) « Il y a autant d'eau que de grenadine dans chaque mélange ».

Conclusion :

« Le premier mélange a plus le goût de la grenadine que le deuxième ».

Il est à remarquer que même si les élèves peuvent utiliser le rapport  $\frac{1}{2}$  dans chacun des deux raisonnements, ils peuvent s'en tirer en comparant uniquement des quantités absolues (plus, moins, autant). Nous avons donc bien un problème qui est accessible aux élèves. Cela peut expliquer qu'une majorité d'élèves ait qualifié ce problème de « facile » et ait produit des amorces de raisonnements corrects pour le justifier. Néanmoins la mise en parallèle des deux mélanges en tenant compte des deux ingrédients est nécessaire car sinon on peut arriver à une conclusion correcte avec un raisonnement faux si l'on ne tient compte que d'un seul des deux ingrédients : « *Il y a plus d'eau dans le 2<sup>ème</sup> mélange que dans le 1<sup>er</sup> donc il a plus le goût de l'eau* » ou encore « *Il y a autant de grenadine dans chacun des mélanges donc ils ont le même goût* ». La mise en parallèle des deux mélanges en tenant compte des deux ingrédients est donc nécessaire pour produire un traitement pertinent complet. Or les productions écrites des élèves étaient souvent incomplètes sur ce point essentiel dans la compréhension et la maîtrise du problème.

Les six textes constituant l'échantillon proposé à l'observation des élèves ont alors été choisis parce qu'ils se différencient sur les aspects suivants qui déterminent le degré d'explicitation de ces traitements :

- *nombre de mélanges évoqués ;*
- *répétition des données ou non ;*
- *présence d'arguments ou non ;*
- *présence d'une conclusion ou non.*

Voici l'échantillon d'écrits initiaux proposés à l'observation des élèves :

**Le problème 4 est :**

**Réponse 1 :** *plutôt facile car il y a trois verres d'eau et deux verres de grenadine au 2<sup>ème</sup> mélange, tandis qu'au 1<sup>er</sup> mélange, il y a deux verres d'eau et 2 verres de grenadine donc c'est sûr.*

**Réponse 2 :** *plutôt facile car le 1<sup>er</sup> mélange est égaux, ça a le même goût.*

**Réponse 3 :** *le plus facile car le 1<sup>er</sup> mélange a deux verres d'eau et de grenadine.*

**Réponse 4 :** *plutôt facile car il y a 2 verres d'eau et 2 verres de grenadine donc on sent encore la grenadine et au 2<sup>ème</sup> mélange il y a 3 verres d'eau et 2 verres de grenadine alors maintenant on ne sent plus le goût alors c'est le premier mélange qui sent la grenadine.*

**Réponse 5 :** *le plus facile parce qu'au 1<sup>er</sup> mélange, il y a deux verres d'eau et deux verres de grenadine. Au 2<sup>ème</sup> il y a trois verres d'eau et deux verres de grenadine.*

**Réponse 6 :** *le plus difficile car il y a moins de grenadine que de l'eau alors plus d'eau.*

Voici alors les profils des six textes :

Aspects repérés	Rép. 1	Rép. 2	Rép. 3	Rép. 4	Rép.5	Rép.6
Qualificatif du problème 4	Facile	Facile	Facile	Facile	Facile	Difficile
Nb. de mélanges évoqués	2	1	1	2	2	0
Répétition des données	oui	non	non	oui	oui	non
Présence d'arguments	non	oui	non	oui	non	oui
Présence d'une conclusion	non	oui	non	oui	non	non

Le dispositif proposé aux élèves les appellent à objectiver et à contrôler la structure de leurs écrits. Il reste maintenant à savoir quels effets il a eu sur la forme de leurs écrits mais aussi sur la découverte et la compréhension des traitements en jeu dans les problèmes de comparaison des mélanges.

#### **4. Les écrits réflexifs au centre du dispositif : évaluation des effets**

##### **4.1. L'objet et la méthode d'évaluation**

Pour évaluer les effets du dispositif, nous nous poserons deux questions. D'une part peut-on constater un travail de reprise et de réorganisation par les élèves de leurs propres pensées initiales ? D'autre part peut-on constater une avancée dans l'appréhension des traitements possibles dans les problèmes de comparaison de mélanges ?

Au cours du déroulement des trois séances nous avons recueilli les écrits produits par les élèves. A savoir, successivement, les écrits obtenus lors de la comparaison par les élèves des quatre problèmes de comparaison de mélanges, puis les écrits obtenus lors de la comparaison par les élèves des six raisonnements relatifs au problème n°4 et enfin les écrits obtenus lors de la reprise par les élèves du problème n°4. Nous pouvons donc repérer les évolutions des élèves à partir de là.

Nos observations ont porté sur deux points qui permettent de voir dans quelle mesure il y a un travail de réorganisation de la pensée et une acquisition de connaissances à travers la procédure expérimentée :

1) Peut-on repérer des évolutions dans les traitements mathématiques effectuées pour comparer les mélanges ? En particulier voit-on des abandons de traitements

erronés ? Des amorces de traitements corrects ? Des acquisitions de traitements corrects ?

2) Peut-on repérer des postures réflexives dans les écrits produits ? Il s'agit pour cela de repérer des indices de prise en charge par les élèves de leurs propres discours, par exemple des verbes conjugués à la première personne ou encore des connecteurs logiques qui indiquent un retour sur ce qui vient d'être écrit. Si oui, il s'agit de signes qui montrent qu'un processus de compréhension ou une tentative de validation interne sont en cours.

#### 4.2. Les profils de progressions repérés

Après examen de l'ensemble des productions nous distinguons trois groupes d'élèves qui se différencient par des points de départ différents et des évolutions différentes. Nous allons globalement caractériser ces groupes pour ensuite présenter les productions de quatre élèves et les analyses que nous en avons faites.

**Un premier groupe d'élèves pour qui le problème était d'emblée à portée.** Ces élèves se caractérisent par des écrits qui témoignent d'emblée d'un traitement pertinent et repérable de la situation de comparaison de mélanges proposée même si des parties de leurs raisonnements restent implicites. Ce groupe compte 4 ou 5 élèves de la classe. Les progrès qu'ils ont réalisés résident dans un contrôle affirmé des traitements qu'ils ont effectués. Nous analyserons plus précisément le cas d'**Anna** représentatif de ce groupe.

**Un deuxième groupe d'élèves pour qui le problème était difficile au départ mais qui ont progressé.** Beaucoup d'élèves étaient au départ dans des dispositions a priori défavorables dans la compréhension et le traitement du problème. Il s'agissait alors de repérer si parmi ces élèves certains feraient des progrès importants ainsi que la nature de ces progrès. Le cas d'**Hassan** est représentatif d'un groupe non négligeable de tels élèves (une dizaine) qui progressent sur la compréhension et le traitement du problème par une activité réflexive de reprise et de réorganisation de leurs pensées à travers l'examen des textes produits.

**Un troisième groupe d'élèves pour qui le problème était difficile au départ mais pour lesquels les changements observés ne témoignent pas réellement de progrès.** Nous retrouvons dans ce groupe à peu près une dizaine d'élèves qui sont en majorité, mais pas exclusivement, des élèves de CM1. Comme représentatif de ce groupe, nous présenterons le cas de **Steve** qui au départ ne donne aucune indication sur des traitements possibles. En fin de travail, il apparaît nettement que lire et écrire reste pour lui des actes formels qui ne permettent pas encore d'avoir prise sur sa pensée.

### 4.3. Anna, Hassan et Steve : trois exemples représentatifs d'évolutions observées

Pour chaque cas d'élève, nous présentons en encadré ses écrits, à savoir successivement les écrits produits lors de la phase 2 (comparaison des 4 problèmes), puis de la phase 3 (comparaison des raisonnements relatifs au problème n°4) et enfin de la phase 4 (reprise du problème n°4). Nous procédons ensuite à l'analyse de ces écrits. Nous n'avons jamais effectué de correction aux écrits des élèves et nous les rapportons dans leur intégralité.

#### 4.3.1. L'évolution d'Anna (CM2) représentative du groupe 1

##### Les écrits d'Anna

##### Comparaison des 4 problèmes

Le problème n°4 est facile : *car dans les deux lignes il y a deux verres de grenadine mais dans la première ligne il y a deux verres d'eau et dans la deuxième 3 verres d'eau, donc il est simple.*

Le problème n°1 est difficile : *car dans la première ligne il y a deux verres de grenadine et 1 verre d'eau ; dans la deuxième 3 verres de grenadines et 2 d'eau. C'est trop dure à comparer.*

Le problème n°2 est plutôt : *facile car 1 : il a un verre de grenadine et 2 d'eau. 2 : 2 grenadine et 4 d'eau.*

Le problème n°3 est plutôt : *dure car je n'arrive pas à comparer.*

##### Comparaison des raisonnements relatifs au problème n°4

Ce qui manque à la réponse 1 : *il n'a pas dit la réponse.*

*donc c'est sûr que c'est le 1<sup>er</sup> mélange qui a le plus le goût de la grenadine.*

Ce qui manque à la réponse 2 : *il a oublié de d'écrire le 2<sup>ème</sup> mélange.*

*...et le 2<sup>ème</sup> mélange à 2 verres de grenadine et 3 d'eau, donc c'est le 1<sup>er</sup> mélange qui a le plus de goût.*

Ce qui manque à la réponse 3 : *il a pas dit la réponse et de décrire le 2<sup>ème</sup> mélange.*

Ce qui manque à la réponse 4 : *il a tout dit*

Ce qui manque à la réponse 5 : *il a oublié de décrire qu'elle cruche à le plus de goût.*

Ce qui manque à la réponse 6 : *il a pas dit le premier mélange et la réponse.*

##### Reprise du problème n°4

*C'est le premier mélange qui a le plus le goût de la grenadine car dans le premier mélange il y a deux verres d'eau et deux de grenadine ; et dans le 2<sup>ème</sup> mélange il y a trois verres d'eau et deux de grenadine, donc il y a pareille de grenadine, mais dans le 2<sup>ème</sup> mélange il y a plus de verres d'eau que dans le premier ; et comme ça se mélange donc c'est le 1<sup>er</sup> qui a le plus le goût de la grenadine.*

## Analyse du travail d'Anna

### 1<sup>ère</sup> étape

#### Traitements

Entrée par les ingrédients au mélange 4 : mise en parallèle des quantités d'eau avec les quantités de grenadine. Anna repère qu'il y a deux verres de grenadine dans chacun des mélanges et met en parallèle ce fait avec les quantités différentes d'eau qu'il y a dans les deux mélanges. Pour le problème n°1 : elle met en parallèle les deux mélanges cette fois-ci. Mais le fait qu'elle souligne le 2 d'eau laisse supposer qu'elle essaye d'appliquer la même stratégie et se heurte au fait qu'il n'y a pas de quantités communes de grenadine. Pour le problème n°2 : ce problème est qualifié de facile. Mais le traitement qu'elle applique n'est pas explicite. Le fait qu'elle souligne le 4 d'eau laisse imaginer qu'elle a repéré un coefficient multiplicateur. Nous pencherions par le repérage en colonne car dans le problème n°3 qui prête à un traitement accessible en ligne, elle déclare forfait. Il est vrai que 3 n'est pas un multiple de 2.

#### Indices d'une posture réflexive

On peut repérer des expressions qui indiquent une implication personnelle d'Anna dans son écrit. Elles témoignent d'une objectivation de sa posture réflexive : « *je n'arrive pas* », « *c'est trop dure* ».

### 2<sup>ème</sup> étape

#### Traitements

Anna fait une analyse très minutieuse des éléments formels qui manquent pour que les traitements indiqués par les six productions soient complets.

#### Indices d'une posture réflexive

Le constat est énoncé en rapportant les manques à un « *il* » qui désigne l'élève dont on examine la production : « *il a* », « *il n'a pas* ».

### 3<sup>ème</sup> étape, la production finale

#### Traitements

L'écrit final est très complet du point de vue du traitement qu'il expose. On peut observer une modification formelle par rapport à sa première référence au problème n°4 : alors que la première fois, Anna se focalisait sur les quantités de grenadine, cette fois-ci elle reproduit fidèlement la description des deux mélanges comme ils sont présentés dans l'énoncé, à savoir « en lignes ». On peut imaginer qu'il s'agit là d'un effet de la prise en compte du cahier de charge formel élaboré par la classe en synthèse de la 2<sup>ème</sup> étape. Mais ce changement n'entraîne pas de changement de traitement puisque Anna se focalise à nouveau très vite sur un traitement en colonnes : « *donc il y a pareille de grenadine, mais dans le 2ème mélange il y a plus de verres d'eau que dans le premier* ». Il y a donc stabilité dans le traitement qu'applique Anna au cours de ce travail pour résoudre le problème 4.

### Indices d'une posture réflexive

Si le traitement du problème 4 était déjà visible au début, l'écrit final apparaît plus étoffé par des conclusions intermédiaires, et des expressions qui témoignent de reprises par Anna de son propre discours : « *donc il y a* », « *et comme ça se mélange* »... Cela donne à cet écrit final un aspect de discours très cohérent.

### En conclusion pour le cas d'Anna

Anna savait déjà traiter le problème n°4 au début du scénario. On peut alors se demander quel est le bénéfice qu'elle retire à propos de cette situation, au-delà d'une amélioration formelle de son écrit. On peut estimer que ce progrès est assez minime et qu'il n'était pas nécessaire de déployer tout ce dispositif pour cela. Nous ne le pensons pas car on peut constater que sa prise de distance réflexive lui a permis d'affirmer davantage encore sa conviction en explicitant et en contrôlant complètement son raisonnement en bout de course. Elle est entrée dans une posture écrite par rapport à l'écriture qui lui sera utile pour aborder des problèmes plus difficiles pour elle. La question qui subsiste néanmoins est de permettre à Anna de trouver d'autres traitements possibles pour résoudre les trois autres problèmes qui dans un premier temps lui résistent. Nous émettrons à ce sujet quelques hypothèses en conclusion de notre étude.

#### 4.3.2. L'évolution d'Hassan (CM2) représentative du groupe 2

##### Les écrits de Hassan

##### Comparaison des 4 problèmes

Le problème n°1 est facile : *car il y a deux verres de grenadine et un verre d'eau alors on prend la moitié du verre et on le met dans le premier verre de grenadine et on prend l'autre moitié et on le met dans l'autre verre de grenadine.*

Le problème n°2 est difficile : *car il y a 4 verre de grenadine et deux verres d'eaux, avec les deux verres d'eau grenadine on prend le premier verre et on prend la moitié et on le met dans le premier verre d'eau ensuite*

Le problème n°3 est plutôt : *facile car ils sont égaux*

Le problème n°4 est plutôt : *moyen car parfois il faut faire la moitié de la moitié*

##### Comparaison des raisonnements relatifs au problème n°4

Ce qui manque à la réponse 1 :

*C'est que le premier mélange a le plus de goût. Au deuxième goût il y a 3 verres d'eau et 2 vers de grenadine c'est évident et y il y aura plus de gout d'eau.*

Ce qui manque à la réponse 2 :

*Ce que j'ai compris c'est que il y a deux verres d'eau et deux verres de grenadine ça va donner le même gout, mais c'est avec des chiffres père c'est pour cela qu'il a dit que ça va donner le même gout.*

Ce qui manque à la réponse 3 :

*C'est la même chose que la réponse 2 sauf c'est mieux expliqué, que la réponse 2.*

Ce qui manque à la réponse 4 : *bien expliqué*

Ce qui manque à la réponse 5 :

*Le premier mélange est la même chose que la n°2 réponse 2 et 1. Au deuxième mélange il y a trois verres d'eau et deux verres de grenadine alors l'eau est supérieur au verre de grenadine on a plus du goût d'eau.*

Ce qui manque à la réponse 5 :

*Je l'ai pas bien compris car il y a combien de verre d'eau et de grenadine "on le c'est pas"*

#### **Reprise du problème n°4**

*Quel mélange a le plus le goût de la grenadine ? Le mélange qui a le plus de la grenadine est le premier mélange. Pourquoi ? Car il y a deux verres de grenadine et de verres d'eau c'est égaux car ça va donner le même goût et que le 2ème mélange plus d'eau que le premier mélange alors il y aura plus du goût d'eau »*

### **Analyse du travail d'Hassan**

#### **1<sup>ère</sup> étape**

Remarque préalable. Hassan trouve que le problème le plus facile est le n°1 et le plus difficile le n°2. Il considère ensuite les problèmes 3 et 4. On peut penser qu'il les a considérés dans l'ordre ce qui laisse planer un doute sur les qualificatifs (imprimés) attribués aux deux premiers problèmes. En revanche on peut être sûr qu'il a lui-même choisi les qualificatifs pour les deux derniers problèmes.

#### **Traitements**

Hassan expose une manipulation à répéter : un demi-verre d'un des ingrédients à verser dans un verre contenant l'autre ingrédient (« *instsuite* » comme il écrit). Mais chaque fois qu'il fait cela, il ne considère que le premier des deux mélanges sans apporter de conclusion. On peut alors se poser des questions sur sa représentation du problème (Julo, 1995). Le fait qu'il pense que le problème n°3 est facile parce qu'il y a égalité ne nous éclaire pas davantage. Ni sa remarque pour le problème n°4 où il envisage la nécessité de faire évoluer sa procédure.

#### **Indices d'une posture réflexive**

Dans la première étape, il n'y a pas trace de personnalisation de l'écrit.

#### **2<sup>ème</sup> étape**

#### **Traitements**

Dans cette étape, Hassan effectue un repérage très minutieux des défauts et des manques dans les six productions qu'il a à examiner.

Manque d'arguments qu'il ajoute (pas toujours judicieusement) : « *mais c'est que avec des chiffres pére c'est pour cela qu'il a dit que ça va donner le même goût.* »

Manque d'indication de données : « *il y a combien de verre d'eau et de grenadine "on le c'est pas" ».*

Il repère le manque d'évocation des deux mélanges : cela n'apparaît pas dans l'examen des réponses 2 et 3 où il se laisse emporter dans la focalisation sur un seul des mélanges mais dans l'examen de la réponse 5 où il marque le point commun avec les réponses 2 et 3 mais complète par l'évocation du deuxième mélange et conclut globalement pour l'ensemble de la comparaison des mélanges.

#### **Indices d'une posture réflexive**

Si dans la première étape, il n'y a aucune trace de personnalisation de l'écrit. En revanche dans la deuxième étape les « *il y a* » et « *on* » très neutres de la première étape laissent place à des expressions plus personnelles. On voit petit à petit comment il objective les éléments des textes : « *ce que j'ai compris* » « *je l'ai pas bien compris* » « *c'est mieux expliqué* ». On voit le travail de compréhension et de contrôle qu'il fait par là en reprenant les six productions pour en pointer les manques. Il prend à cœur ce travail, essaye de se convaincre à partir des écrits de ses camarades.

#### **3<sup>ème</sup> étape, la production finale**

##### **Traitements**

Dans la dernière étape en revanche il présente un traitement complet de la situation avec une entrée par les mélanges : comparaison des ingrédients à l'intérieur de chaque mélange et mise en parallèle des deux mélanges avec des conclusions intermédiaires pertinentes même si elles sont maladroitement exprimées : « *sa va donner le même gout.* » ; « *il y aura plus du goût d'eau* »

##### **Indices d'une posture réflexive**

Alors que dans la première étape, il n'y avait qu'une description neutre de manipulations, les connecteurs logiques (« *car* » ; « *alors* ») indiquent ici un discours réfléchi.

#### **En conclusion du cas d'Hassan**

Avec Hassan, on a l'exemple d'un élève qui a progressé sur la compréhension du problème : à la fin il prend en compte les deux mélanges et les deux ingrédients. Il a aussi progressé sur la coordination de ces données pour effectuer un traitement assumé du problème. Il nous semble que le moment-clé qui lui a permis de progresser ainsi est la deuxième phase du dispositif où on voit qu'il exerce un travail de réorganisation de sa pensée à partir de l'examen des productions écrites des autres élèves du point de vue de leur forme. De la forme au fond, il franchit le pas pour arriver à ce qu'on peut considérer un processus de validation interne.

### 4.3.3. L'évolution de Steve (CM2) représentative du groupe 3

#### Les écrits de Steve

##### Comparaison des 4 problèmes

Le problème n°3 est facile : *parce que y a le même goût.*

Le problème n°1 est difficile : *car il faut faire un petit calcul. .*

Le problème n°4 est plutôt : *facile car il faut faire un petit calcul.*

Le problème n°1 est plutôt : *facile car il faut faire un petit calcul.*

##### Comparaison des raisonnements relatifs au problème n°4

Ce qui manque à la réponse 1 : *vous diser pas quel est la deuxième réponse.*

Ce qui manque à la réponse 2 : *mais il a pas mit le deuxièmes.*

Ce qui manque à la réponse 3 : *mais il a pas mis le deuxièmes.*

Ce qui manque à la réponse 4 : *il est bien il a mis le deuxièmes est le premier*

Ce qui manque à la réponse 5 : *il est bien car il a mis le premier et le deuxièmes.*

Ce qui manque à la réponse 6 : *il a pas pas mis la réponse du deuxièmes.*

##### Reprise du problème n°4

« *C'est le premier qui a le plus le goût parce-que le premier a deux verres d'eau et deux verre de grenadine et le deuxièmes a trois verre d'eau et deux verre de grenadine* ».

#### Analyse du travail de Steve

##### 1<sup>ère</sup> étape

##### Traitements

Steve qualifie de facile l'exercice 3 et justifie son appréciation de façon succincte : « *parce qu'il y a le même goût* ». Il n'explicite pas les caractéristiques qui permettent cette conclusion. Aucun mélange, ni ingrédient n'est indiqué. On peut supposer qu'il a remarqué les équilibres qui caractérisent chacun des mélanges. Dès qu'on n'est plus dans ce cas de figure, il évoque la nécessité d'un « *petit calcul* ». A part cela, il n'y aucune amorce de présentation d'un traitement à effectuer.

##### Indices d'une posture réflexive

Dans la première étape, il n'y a pas trace de personnalisation de l'écrit.

##### 2<sup>ème</sup> étape

##### Traitements

Steve signale de façon très formelle la présence ou la non présence de l'évocation de certains éléments dans les textes. Mais dans la plupart des cas on ne sait pas s'il parle d'un mélange ou d'une conclusion : « *il a pas mis le deuxièmes* ».

##### Indices d'une posture réflexive

Dans cette étape, il semble entrer dans une posture dialogique. Dans sa première remarque il s'adresse à l'élève qui a écrit le texte : « *vous diser pas..* ». Il revient ensuite à une position plus distanciée en utilisant ensuite la 3<sup>ème</sup> personne du singulier : « *il a pas mis..* ». Mais il en reste à un constat très formel sans jamais dire ses difficultés de compréhension et sans jamais reprendre un traitement comme ont pu le faire Anna ou Hassan.

### **3<sup>ème</sup> étape, la production finale**

#### **Traitements**

Il y a un changement important par rapport aux écrits de la première étape : les deux mélanges et les deux ingrédients sont évoqués. Mais il n'y a pas de conclusions intermédiaires qui indiqueraient un traitement de ces données.

#### **Indices d'une posture réflexive**

Aucun connecteur logique, aucune expression personnelle ne laisse supposer qu'il y a production d'un discours réfléchi.

#### **En conclusion du cas de Steve**

Steve fait partie des élèves chez lesquels on ne peut pas déceler d'indices d'un véritable travail de reprise et de réorganisation des écrits initiaux : il apparaît nettement que lire et écrire reste pour lui des actes formels qui ne permettent pas encore d'avoir prise sur sa pensée. Le fait que plusieurs élèves de CM1 fassent partie de cette catégorie d'élève pose question. S'agit-il d'une question de développement logique de ces élèves ? Ou d'un développement trop rudimentaire encore des capacités d'écriture et de lecture ? En tout cas ces élèves nous interrogent sur la pertinence de notre dispositif à leur égard.

### **Conclusion**

Avec le projet remanié nous avons été amenés à mettre le travail de comparaison et de contrôle de la structure des écrits produits au premier plan de l'activité. Pour ce travail de contrôle de la structure des écrits, nous avons choisi de centrer les élèves sur un problème qui ne présentait pas de difficulté pour être résolu et, qu'à juste titre, les élèves estimaient « facile ». De ce fait, il n'y avait pas de travail heuristique trop important à la charge des élèves.

Au moment de la conclusion on peut alors se poser deux questions. La première se rapporte aux bénéfices qu'ont tiré les élèves des activités proposées. L'autre est de savoir si en centrant l'attention des élèves sur un problème facile nous avons permis aux élèves de progresser sur les apprentissages mathématiques.

Une observation nous donne d'emblée une indication : l'engouement des élèves que nous avons noté initialement à propos du problème des mélanges avec des

proportions difficiles à comparer ne s'est pas démenti lors du travail d'observation de la structure des écrits produits à propos du problème plus facile. Tant dans la phase individuelle d'examen des productions des camarades que dans la synthèse des remarques et la réécriture du raisonnement, ces élèves qui a priori pouvaient éventuellement rechigner à « écrire » ont pleinement été concentrés, actifs et intéressés. Libérés de la charge heuristique, ils ont pu pleinement se concentrer sur le travail d'analyse de leurs écrits initiaux pour les améliorer à partir de l'observation des écrits des autres élèves. Et de fait, les évolutions des écrits d'Anna et d'Hassan montrent qu'un véritable travail de réflexion s'est développé. Ils ont quitté une posture d'écriture « pour dire » pour entrer véritablement dans une posture d'écriture pour « contrôler et développer leurs pensées ». En outre, même si dans la majorité des cas le problème facile était déjà résolu implicitement, on peut voir qu'un travail de repérage et d'appropriation de traitements s'est effectué. La majorité des élèves qui au départ avaient une mauvaise représentation du problème ou entamaient des traitements erronés ont rejoint des élèves qui dès le départ avaient une bonne représentation du problème et des idées de traitements pertinents.

Néanmoins, évoquons une limite de ce travail et les précautions à prendre pour attirer l'attention sur le cas des élèves du groupe 3 (comme Steve) qui ne sont pas entrés dans un travail de reprise et de réécriture assumées de leurs écrits et qui de ce fait ne progressent pas dans l'appréhension et a fortiori dans le traitement du problème. Nous émettons l'hypothèse qu'a priori ils ont une maîtrise insuffisante de l'écrit pour pouvoir s'exprimer par écrit dans une « posture orale » qui est de dire ce qu'ils pensent. Ils sont encore trop accaparés par l'effort que constitue l'écriture.<sup>1</sup>

En revanche, l'ensemble des élèves qui sont entrés dans le travail de reprise et de réorganisation des écrits ont eu l'occasion de développer et de s'assurer de la validité de leurs rhétoriques de façon personnelle. Ils ont appris à expliciter, à développer et à conforter leurs raisonnements sur un cas sur lequel ils ont pu s'exercer. On peut faire l'hypothèse que cet apprentissage leur sera utile par la suite pour développer et contrôler leurs idées lorsque les difficultés heuristiques et les notions en jeu seront plus complexes.

Nous sommes par ailleurs convaincus que ce genre de travail qui s'appuie sur le potentiel de traitements que permet l'écriture dans sa matérialité horizontale et verticale prépare bien les élèves à entrer dans les apprentissages en mathématiques. Il les prépare bien sûr à la maîtrise ultérieure de la notion de proportionnalité où les

---

<sup>1</sup> La prise en compte de différentes façons de représenter les données peuvent à ce propos donner des pistes de travail avec les élèves en difficulté de lecture et d'écriture comme le montrent les travaux de François Pluvinage (1998) et Florence Fauvet (2003).

différents modes de représentation des données permettent de projeter, d'effectuer et de contrôler les traitements à effectuer. Mais il les prépare aussi à entrer par la suite dans des domaines comme l'algèbre ou la géométrie hypothético-déductive où la seule appréhension linéaire et unidirectionnelle des expressions ou des écritures ne suffit pas pour comprendre les traitements en jeu.

Nous pensons ainsi avoir mis en évidence un aspect important du développement des capacités d'écriture et de lecture des élèves, un aspect qu'il est important à prendre en compte dans l'enseignement proposé aux élèves dès l'école primaire.

## Bibliographie

ADJIAGE R. (2001) Maturations du fonctionnement rationnel, Fractions et décimaux : acquisitions d'une classe, projets de programme 2000 pour l'école élémentaire, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **7**, 7-48.

ALARCON J. (1982) *L'appréhension des situations probabilistes chez des élèves de 12-14 ans résultats d'une enquête proposée à des élèves de 4<sup>ème</sup> et de 5<sup>ème</sup>*, thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, IRMA, ULP de Strasbourg.

BELMAS P. (2003) Apprentissage de la notion de proportionnalité et symbolisations chez des élèves en échec scolaire, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **8**, 167-190.

BRONNER A., PELLEQUER S. (2000) *Fonctions de l'écrit dans la classe de mathématiques*, Étude dans le cas de l'enseignement de la racine carrée et de la reprise de la géométrie en classe de 3<sup>ème</sup>, *IREM de Montpellier*.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des Situations Didactiques*, La pensée sauvage, Grenoble.

BUCHETON D., CHABANNE J-C. (2002) Parler et écrire pour penser, apprendre et se construire ; l'écrit et l'oral réflexifs, *Éducation et Formation*, Presses Universitaires de France, Paris.

CHEVALIER A. (1993) Un nouveau type d'exercices scolaire, *Petit x*, **33**.

DUVAL R., EGRET M.A. (1989) L'organisation déductive du discours, Interaction entre structure profonde et structure de surface dans l'accès à la démonstration, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **2**, 25-40.

DUVAL R., EGRET M.A. (1989) Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **2**, 41-64.

DUVAL R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Berne.

DUVAL R. (1998) *Écriture et compréhension : pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves*, Actes du colloque : *Produire et lire des textes de démonstration*. 23-24 janvier 1998, Laboratoire de Didactique des Mathématiques, Université de Rennes 1, 79-98.

DUVAL R. (2000) Écriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, **20**, 135-170.

ERMEL (équipe de didactique de mathématiques), DOUAIRE Jacques (Dir.), HUBERT Christiane (Dir.) (1999) *Vrai ? Faux ?... On en débat ? De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3*, INRP, Paris.

FAUVET F. (2003) Traitement de pathologies de l'apprentissage : démarches issues de la didactique des mathématiques, étude d'un cas, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **8**, 151-165.

JULO J. (1995) Représentation des problèmes et réussite en mathématiques, *Presse Universitaire de Rennes*.

Ministère de la jeunesse, de l'Éducation nationale et de la Recherche (2002) « *Mathématiques cycle des approfondissements (cycle3)* », Collection École, Documents d'application des programmes, CNDP.

NOELTING G. (1980) The Development of Proportional Reasoning and the Ratio Concept, *Educational Studies in Mathematics*, 217- 253.

PLUVINAGE F. (1998) Mathématiques et communication, ressources en cas de difficulté. Quand l'écrit se distingue de la reproduction de l'oral dans la situation d'enseignement standard, *entretiens d'orthophonie 1998*, 121-127, Paris, Expansion Scientifique Française, Entretiens de Bichat.

PRESSIAT A. (2001) *L'écrit en mathématiques au collège*, in Colomb J. et Martinand J-L. (eds), *Éléments pour une didactique comparée. Langue écrite, graphismes et constructions des savoirs*, INRP, collection Documents et travaux de recherche en éducation, Paris, 61-95.

RAUSCHER J-C. (2001) Une production écrite des élèves au service des apprentissages dans le domaine numérique *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **7**, 49-76.

RAUSCHER J-C. (2003) Mise à l'épreuve de l'accompagnement d'activités mathématiques par des écrits réflexifs au cycle 3 et en début de collège, in Cédérom *Actes du colloque « Constructions des connaissances et langage dans les disciplines d'enseignement » Université Victor Segalen Bordeaux 2, avril 2003*, IUFM d'Aquitaine-Université Bordeaux 2.

RAUSCHER J-C (à paraître 2006) *Écrire en mathématique pour situer et négocier les écarts. Un outil d'évaluation partagé*, in « *Écarts de langue, écarts de culture : à l'École de l'autre* » Peter Lang, Hambourg.

VYGOTSKI L. (1934/1997) *Pensée et langage*, La Dispute, Paris.

**Jean-Claude RAUSCHER**

Institut Universitaire de Formation des Maîtres d'Alsace  
200 Avenue de Colmar, 67100 Strasbourg  
LISEC EA2310 ULP Strasbourg ; IREM de Strasbourg  
[Jc.Rauscher@Wanadoo.fr](mailto:Jc.Rauscher@Wanadoo.fr)