JORGE SOTO-ANDRADE

UN MONDE DANS UN GRAIN DE SABLE : MÉTAPHORES ET ANALOGIES DANS L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES

Abstract. A world in a grain of sand: Metaphors and analogies in mathematics Education.
Metaphors are not just rhetorical devices, but also very powerful cognitive tools. We can check through learning experiments that they help us, not only to learn new ideas, but also that they provide very efficient means to calculate. They have a bigger cognitive thrust than analogies, which are more familiar in didactics: A metaphor is an analogy that doesn't warn you in advance! We present here concrete examples that bring grist to our mill…

Keywords: Mathematics education, metaphor, analogy, comparison, representation, cognition.

Résumé. Les métaphores ne sont pas qu'un recours rhétorique, mais aussi des outils cognitifs très puissants. On peut constater au cours d'expériences d'apprentissage, qu'elles nous aident, non seulement à comprendre des idées nouvelles, sinon qu'elles fournissent en plus des moyens de calcul fort efficaces. Elles portent un impact cognitif plus important que les analogies, plus familières en didactique : Une métaphore est une analogie qui ne crie pas gare ! Nous en présentons ici des exemples concrets, qui apportent de l'eau a notre moulin…

Mots-clés. Métaphores, analogies, comparaisons, représentations, cognition, apprentissage des mathématiques.

Introduction

Métaphores, analogies et comparaisons sont des « figures de langage », des *tropes*, comme on dit en rhétorique.

Trope (du grec *tropos* « tour ») désigne un mot ou phrase détourné de sa signification habituelle au profit d'un autre, inhabituelle. En somme, une figure de langage portée hors de sa signification littérale.

Jadis, les tropes étaient considérés comme des ornements ou des embellissements de la langue, c'est-à-dire, des artifices rhétoriques. Plus récemment, déjà au dix-huitième siècle, on a commencé à les considérer comme des modes de pensée fondamentaux, indispensables à une communication précise. À présent, ils deviennent de vrais outils cognitifs.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 11, p. 123 – 147.

Dans ce texte, après avoir survolé brièvement les maints avatars de la métaphore et ses similitudes et différences avec l'analogie, la comparaison (*simile*, en anglais) et la représentation, nous voulons présenter quelques exemples de son rôle cognitif en rapport avec l'apprentissage des mathématiques.

1. La métaphore et ses proches…

1.1. Les avatars de la métaphore

Une métaphore (du grec *metaphora*, « transfert » ou « déplacement ») désigne à l'origine une « figure de signification » par laquelle un mot se trouve recevoir dans une phrase un sens différent de celui qu'il possède dans l'usage courant (Pouilloux, 2004). Elle opère donc un transfert de sens, d'un domaine, dit domaine source, à un autre, dit domaine cible. Une métaphore est ainsi, plutôt une flèche, qui pointe d'un objet à un autre, qu'un lien entre deux objets.

Déjà Aristote l'avait dit, dans sa *Poétique* :

> « La métaphore est le transport à une chose d'un nom qui en désigne une autre, transport ou du genre à l'espèce, ou de l'espèce au genre ou de l'espèce à l'espèce ou d'après le rapport d'analogie. »

Mais bien de l'eau a coulé sous les ponts depuis :

> « La métaphore est une brebis qui broute dans le pré du voisin » propose de Vinsauf (Prandi, 2001).

« L'essence d'une métaphore est qu'elle permet de comprendre quelque chose (et d'en faire l'expérience) en termes de quelque chose d'autre », nous dit Lakoff (2003). Pour lui, une métaphore s'avère être un mécanisme neural qui nous permet d'adapter les systèmes neuraux utilisés par l'activité sensorimotrice, pour créer des formes de raisonnement abstrait.

Nous voyons ainsi apparaître un nouvel avatar de la métaphore classique, à savoir la métaphore conceptuelle. Celle-ci est une flèche d'un domaine source, plus transparent, en principe, sur un domaine cible, plus opaque, qui transporte avec elle la structure inférencielle du premier sur le second, ce qui nous permet de comprendre le domaine cible à partir du domaine source.

En même temps, le terme « métaphore », de plus en plus dans le vent, commence à être pris, en didactique et sciences cognitives, dans un sens de plus en plus large : il pourra signifier aussi bien « analogie », que « représentation », « image », « modèle », *etc*. (Parzysz B. et al., 2003). Pour ces derniers avatars, nous renvoyons aux Actes des groupes de travail sur les métaphores dans CERME 2, 2001 ; CERME 3, 2003 ; CERME 4, 2005.

Plusieurs chercheurs se penchent aujourd'hui sur les *processus métaphoriques*, qui émergeraient dès la prime enfance des systèmes sensoriels et perceptuels et seraient subordonnés aux régions du cerveau où le système moteur et le système non-moteur (cognitif) se chevauchent (Seitz, 2001).
À présent, on admet aussi qu'il n´y a pas que les métaphores verbales : il en a aussi des gestuelles, des visuelles, ainsi que de jeux d'enfants métaphoriques, comme celui de l'enfant qui prend un bâton pour un fusil, sans discours.
On commence à entrevoir le rôle fondamental du « mode métaphorique » en tant que moyen privilégié pour atteindre « l'esprit mathématique » qui sommeille dans l'inconscient de tout un chacun, en passant outre les blocages mis en place par son caractère, produit de son histoire personnelle (Pesci 2005). L'efficacité des métaphores en psychothérapie est bien connue (Pesci, 2005 ; Barker, 1987 ; Gordon, 1992).

1.2. Métaphores, analogies, comparaisons ou représentations ?

Une analogie est une comparaison entre deux choses similaires sous plusieurs rapports. Elle est aussi, en général, plus « prosaïque » que la métaphore, qui est plus poétique, et aussi plus aspectuelle que la métaphore, qui est plus holiste. Souvent, elle se rapporte à des objets qui sont sur le même pied, encore que l'on s'en sert aussi pour expliquer ce qui est non habituel par ce qui est habituel.

Il y a métaphore quand on condense l'analogie, en omettant d'exprimer certains de ses termes (Reboul, 1986).

Certains signalent, de manière plus précise, que l'analogie établit un lien entre deux concepts déjà construits, ce qui lui confère une nature symétrique, tandis que la métaphore est l'utilisation d'un concept déjà existant pour construire un nouveau concept, ce qui lui confère une nature asymétrique (Sfard, 1997).

Certains voudraient donc rapprocher une métaphore d'une représentation, ou image, d'un objet, souvent plus abstrait, par un autre, plus concret.

Par exemple, la page (http://www.plataforma.uchile.cl/fg/home_cfg.htm) de notre cours de formation générale à l'Université du Chili, intitulé « Promenades au hasard dans le pays des métaphores » (voir Annexe) s'ouvre avec une animation, où l'on voit une bille qui rebondit à l'intérieur d'un tétraèdre régulier au fur et à mesure que celui-ci tournoie sur lui-même. La première idée originelle, d'ailleurs, qui n'a pas été retenue par des raisons techniques, envisageait à la place de la bille, un papillon qui voletait aléatoirement à l'intérieur de la pyramide.

Est-ce une métaphore visuelle, une représentation ou une image du cours en tant que processus cognitif ? Peut-être toutes les trois, mais nous penchons plutôt pour la première, par des raisons d'intentionnalité et de style : la métaphore est plus poétique et percutante. Par contre, nous dirions que le modèle de N. Bohr qui décrit l'atome comme un système solaire en miniature, est plutôt une représentation qu'une métaphore.

Encore un exemple : Pour étudier le comportement d'une fonction, d'une ou deux variables réelles, disons, on dessine volontiers son graphe. Nous disons que nous avons alors plutôt une représentation, graphique, qu'une métaphore de la fonction. Par contre, quand nous regardons le graphe de la fonction comme un relief montagneux, comme une topographie, et nous parlons de côtes, de pentes, de sommets, d'un fond de vallée, ou d'un sentier ou courbe de niveau, nous sommes en pleine métaphore. Nous avons recours à une métaphore topographique, qui soutient notre intuition.

On pourrait aussi retenir qu'une représentation *tend*, ou au moins *prétend*, être « fidèle », chose que l'on ne demande pas trop à une métaphore. Par exemple, quand l'on parle de deux rangs de perles pour se référer aux dents, on est loin de la fidélité, car l'on ne tient pas compte du caractère mordant et tranchant des dents, seulement de sa couleur ou texture… C'est une métaphore, mais pas vraiment une représentation. Par contre, le modèle atomique de Bohr prétendait être fidèle, et mérite donc l'étiquette de représentation, encore que quand Bohr dit « le soleil de l'atome » pour se référer au proton, il devient métaphorique… D'autre part, c'est le point de vue de R. Núñez, par exemple, on *représente* un objet déjà existant, tandis que l'on se sert, même inconsciemment, d'une métaphore (conceptuelle) pour construire des objets nouveaux. Elles sont, toutes les deux, des flèches, mais qui pointent dans des sens opposés : la métaphore pointe du domaine source (connu ou « acquis ») vers le domaine cible (nouveau ou « étranger ») et la représentation pointe au contraire du domaine cible vers le domaine source. Si l'on envisage – à l'aide d'une métaphore spatiale - le domaine source comme étant plus « terre à terre » et le domaine cible au-dessus du premier, on peut voir les métaphores comme des flèches montantes, les représentations comme des flèches descendantes et les analogies comme des flèches horizontales.

Enfin, une comparaison est une figure de langage qui exprime explicitement la similitude entre deux objets, à l'aide des indicateurs du genre « comme », « ressemble à ». La comparaison partant « montre son jeu ».

Une métaphore relève de la comparaison, mais c'est une comparaison qui « ne crie pas gare ! ». Par exemple, si l'on dit, « cet homme est aussi rusé qu'un renard », ou « cet homme est rusé comme un renard », on fait une comparaison. Mais, si l'on lance : « cet homme est un renard », on fait une métaphore. De même, si l'on rapporte : « L'assassin blanc a envahi le jardin ! » à propos du givre….

2. Le rôle cognitif des métaphores

Les métaphores sont bien connues en tant qu'artifices rhétoriques, mais elles sont aussi des outils cognitifs, par ce que nous connaissons au travers des métaphores (Johnson & Lakoff, 2003 ; Lakoff & Núñez, 2000).

En particulier, nous pouvons apprendre et même résoudre efficacement des problèmes concrets, en mathématiques, en nous appuyant sur des métaphores…

Dans le cadre de cet article, nous distinguerons deux usages des métaphores dans l'apprentissage des mathématiques :

– des métaphores pour le processus d'apprentissage ;

– des métaphores pour les contenus et les objets mathématiques.

2.1. Des métaphores pour le processus d'apprentissage

Le plus souvent, on envisage l'apprentissage ou l'enseignement des mathématiques comme un voyage.

On voit différentes manières d'aborder, ou de s'approcher, d'un sujet. On cherche des « fils conducteurs ». On trouve plusieurs chemins qui mènent à la solution du problème, en contournant des difficultés… On parle de résultats profonds, ou de vues d'ensemble ou de panoramas.

Mais, d'autre part, on voit souvent l'apprentissage comme une transmission des connaissances, des « contenus », que les étudiants devraient recevoir, assimiler, digérer…

Nous avons donc une foule de métaphores topographiques et alimentaires dans ce domaine, qui façonnent, que nous le voulions ou pas, que nous le sachions ou pas, notre manière d'envisager et de mettre en œuvre l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Elles ne sont pas si innocentes qu'elles en ont l'air et certaines, les métaphores alimentaires, tout particulièrement, sont sûrement à la source des échecs réitérés, dans beaucoup de pays, aussi bien de l'enseignement traditionnel que de l'enseignement « moderne » des mathématiques (CREM 1995, Kahane 2001, Gardner 2005). Une conséquence de l'adhésion inconsciente à cette métaphore est la sensation d'être dupés qu'éprouvent maints étudiants au cours d'un atelier constructiviste, où ils ne reçoivent pas un « sandwich cognitif » tout fait, des mains de l'enseignant (Bills, 2003). Nous avons entendu des élèves, et aussi des enseignants en formation continue, témoigner de leur sensation d'égarement cognitif et du sentiment de « ne plus savoir où l'on va ». Après quelques séances de travail, ils commencent néanmoins à s'apercevoir qu'ils doivent fabriquer eux-mêmes leur sandwich avec les ingrédients et les moyens qui émergent au cours de l'atelier. Cela fait, bien sûr, basculer positivement leur attitude envers le travail en cours.

2.2. Des métaphores pour des objets mathématiques

Nous présentons ci-dessous quelques exemples simples de métaphores pour des objets et procédés mathématiques, qui permettent de résoudre efficacement des problèmes variés et qui ont été testés dans les cours 1 à 5 décrits en Annexe.

2.2.1. Les fréquences relatives et les probabilités sont des poids…

Après avoir entrepris l`étude statistique d'une variable aléatoire simple (par exemple, le temps d'attente du six au lancer d'un dé), les étudiants auront dressé une « photo » de cette variable, c'est-à-dire le graphe de ses fréquences relatives, issu d'un certain nombre de répétitions de l'expérience en question. Ou bien, ils auront dressé son « portrait », c'est-à-dire, le graphe de sa loi de probabilité. Aussi, ils en auront calculé la moyenne, ou l'espérance, suivant le cas.

À ce moment, s'ils ne le voient spontanément, on leur demande si ces graphes, avec leurs moyennes ou espérances, ne ressemblent pas à quelque chose de connu et quotidien. Souvent, quelques étudiants y « voient » une distribution des masses ou des poids et leur point d'équilibre. La plupart, néanmoins, ayant subi auparavant un enseignement plutôt répressif, ont besoin de se sentir autorisés et stimulés pour voir quelque chose d'autre dans leur graphe. Ils sont en général loin d'avoir fait l'expérience que les mathématiques, c'est l'art de voir l'invisible. Cette autorisation relève donc d'un contrat didactique selon Brousseau (1986).

Une fois que le déclic s'est produit, ils découvrent avec un certain émerveillement qu'ils sont transférés dans un autre domaine, celui de la mécanique, plus spécifiquement, celui de la statique, où l'on peut jouer à trouver le point d´équilibre d'un système de masses disposées sur une réglette. Dorénavant, ils peuvent se servir, avec profit, de leur intuition statique, bâtie sur les expériences de balançoire dans l'enfance, pour estimer, et ensuite calculer, une moyenne ou une espérance, et ainsi de suite… Notons que, pour un calcul précis, ils peuvent s'appuyer sur leur expérience enfantine du jeu de bascule : Où devraient s'asseoir sur la pièce de bois un garçon et une fillette, pour atteindre l'équilibre, si le garçon pèse le double de la fillette ?

En résumé, la moyenne ou l'espérance de la variable aléatoire X devient le point d'équilibre ou, si l'on préfère, le barycentre ou centre des masses de la distribution des poids qui est la métaphore statique d'une photo ou du portrait de X, suivant le cas.

Ensuite, placés devant le problème de mesurer, de manière simple, la dispersion des valeurs de X, les élèves peuvent s'apercevoir que ce problème se ramène à un problème de dynamique, grâce à notre métaphore. Pour travailler sur celui-ci, nous demandons souvent aux étudiants, comment ils pourraient ressentir, cinesthésiquement, l'éparpillement des masses en question, s'ils avaient la réglette en main, dans une chambre obscure, sans tripoter les masses une par une.

En travaillant en groupes, ils s'aperçoivent vite qu'ils n'auront aucune chance s'ils restent statiques et qu'il faut donc faire bouger la réglette à poids. Dans chaque groupe de travail, il n'est pas rare que quelqu'un ait l'idée de faire tourner la réglette sur elle-même, autour du pivot défini par le point d'équilibre. Le problème est alors transféré au domaine de la dynamique des corps tournants, qui est aussi un terrain de jeux d'enfance. Il arrive que leurs avis soient partagés sur ce qui arrive quand quelqu'un qui tourne sur lui-même, bras écartés, avec deux briques aux mains, replie les bras. Un peu d'expérimentation, même sans tabouret tournant, leur permet cependant de conclure.

Ainsi, grâce à notre métaphore et à un travail guidé, en groupes, les étudiants arrivent à avoir l'idée d'utiliser le système de poids le plus simple qui soit, de poids total 1, susceptible de tourner autour de son centre des masses, pour mesurer le degré d´éparpillement des poids dans notre réglette. Il s'agit, bien sur, d'un haltère (avec un demi-kilo à chaque bout), équilibré sur son centre. Il leur semble d'habitude clair qu'en jouant sur la longueur du bras (distance au centre de masse) de l'haltère, on peut imiter parfaitement l'inertie giratoire (moment angulaire) de chacune de nos distributions de poids. Or, ce bras est justement l`écart-type. Il pourra être estimé avant d'être calculé, grâce à l'intuition giratoire dont la métaphore nous permet de disposer.

La formule explicite habituelle pour l`écart-type résulte de l'égalisation des moments angulaires (inerties giratoires) de la distribution de poids et de l'haltère type, une fois que l'on s'est aperçu – par une expérimentation soigneuse – que le moment angulaire d'un objet giratoire est proportionnel au produit de sa masse par le *carré* de son bras.

Ainsi, l`écart-type de X devient le bras de l'haltère qui imite parfaitement l'inertie giratoire (moment angulaire) de notre distribution de poids.

Ce cheminement cognitif, basé sur la métaphore « les probabilités sont des poids » a été mis en œuvre, avec succès, dans les cours décrits en annexe. En répondant à des questionnaires de fin de semestre, la plupart des étudiants évoquent la découverte de l`écart-type, à partir du mouvement giratoire, comme un des points forts et inattendus du cours. En voici un échantillon (témoignage de Ragnar[1], à présent étudiant d'Anthropologie, après avoir achevé le cours 1 décrit en annexe) :

---

1 « *Es decir, creo que las metáforas son un especie de "cable a tierra"* (otra metáfora) *para hacer vivible lo aún no vivido, para abrir espacios que de buenas a primeras no a*

« Je crois que les métaphores sont une espèce de “fil de terre” (encore une métaphore…) pour rendre sensible ce qu'on n'a pas encore éprouvé, pour ouvrir des espaces qui n'apparaissent pas d'emblée. Ce fil métaphorique branche une expérience nouvelle, éthérée, aérienne, abstraite, peut-être, avec notre terre sensorielle où nous sommes, ici, assis, debout, en lisant ou écoutant ceci. Je crois qu'en employant des métaphores dans le discours, on rend l'expérience cognitive plus proche, c'est-à-dire une vraie connaissance, une connaissance faite aussi avec le corps. L'un des épisodes le plus intéressants (du cours) a été quand nous avons appris l'écart-type, en nous rappelant de l'expérience de jouer avec les appareils tournants d'un square (de jeux d'enfants) ou de tourner sur nous-mêmes, avec des livres dans les mains, et (de constater) la différence dans la vitesse de nos révolutions suivant l'éloignement du poids des livres de notre centre de gravité. Nous avons compris ainsi combien est significative une donnée pour (le calcul de) l'écart-type dans la mesure où elle s'éloigne de la moyenne. » (Traduit de l'espagnol).

2.2.2. Les marches aléatoires sont des morcellements…

Les marches aléatoires, autrement dit, les « promenades au hasard », constituent un possible fil conducteur à travers plusieurs sujets mathématiques : les probabilités, la statistique, la combinatoire, l'algèbre, l'analyse… L'exemple paradigmatique de marche aléatoire est le mouvement brownien des grains de pollen en solution aqueuse, découvert en 1827 par le botaniste anglais Robert Brown.

Un « petit frère » du mouvement brownien est la marche aléatoire d'une puce qui se promène au hasard par les arêtes d'un polygone régulier, en sautant chaque fois d'un sommet à un voisin immédiat avec la même probabilité 1/2.

Si la puce part d'un sommet quelconque s, où la trouverons-nous après m sauts ?

Plusieurs métaphores émergent, au moment d'aborder « à la main » le calcul de la probabilité de présence de la puce aux différents sommets, pour *m* petit.

Dans les cours décrits en annexe, nous avons fait travailler les étudiants, en groupes autant que possible, en les autorisant et stimulant à métaphoriser. Nous cherchons donc qu'ils construisent ses propres métaphores, plutôt que leur imposer

---

aparecen. Este cable metafórico conecta una experiencia nueva etérea-aérea-tal-vez-abstracta con nuestra tierra sensorial corporal desde donde estamos aquí sentados o parados leyendo o escuchando esto. Creo que ocupando metáforas en el discurso uno hace de la experiencia del conocimiento una experiencia más cercana, es decir, un real conocimiento, un conocer también con el cuerpo.
Uno de los episodios más interesantes fue cuando aprendimos estadísticas y desviación estándar recordando la experiencia de jugar en los aparatos giratorios de una plaza, o el girar con libros en la mano y la diferencia en la velocidad de nuestras revoluciones dependiendo si teníamos el peso de los libros lejos o cerca de nuestro centro de gravedad. Así comprendimos cuánto más significativo para la desviación estándar era la importancia de un dato en medida que se alejaba del promedio. »

les nôtres. Éventuellement, avec un peu d'aide, il n'est pas rare qu'au sein des groupes, émergent certaines des métaphores suivantes.

La métaphore « salomonique »

Dans cette métaphore, on voit la puce se cassant en deux demi-puces, qui vont débarquer aux deux sommets voisins à l'issue du premier saut, et ainsi de suite…On se retrouvera donc avec de petits bouts de puce partout, que l'on pourra mettre ensemble sans difficulté, pas à pas.

Cette métaphore, qui ramène le calcul de probabilités à un calcul déterministe de fractions, est souvent la plus accessible aux étudiants. Elle leur permet de calculer de manière commode et sûre les probabilités en question, pourvu qu'ils maîtrisent suffisamment le calcul de fractions, ce qui n'est d'ailleurs pas toujours le cas…

Il est à remarquer que la métaphore salomonique nous permet de relier la marche aléatoire de la puce à l'évolution d'un marché de consommateurs en économie, par exemple : La probabilité de trouver la puce à un sommet donné devient alors la part du marché détenu par un producteur donné. Ce genre de liaison inattendue motive fort les étudiants, en général.

Nous voyons ainsi que la marche aléatoire de la puce peut apparaître comme une métaphore, utile, de l'évolution d'un marché économique. Mais, d'autre part, ladite évolution, ou encore un processus de fission d'une particule, peuvent apparaître, à leur tour, comme une métaphore de la marche aléatoire de notre puce.

La métaphore hydraulique

C'est une variante de la métaphore salomonique, où nous voyons maintenant s'écouler un fluide, par gravité, par un graphe de tuyaux, en se partageant à chaque point de bifurcation selon la loi de promenade de la puce.

On pourrait proposer à des élèves du secondaire, comme défi, de mettre au point, artisanalement, un réseau de tuyaux, qui donnerait une résolution analogique de la promenade aléatoire de la puce par les sommets du triangle équilatéral.

Une activité plus simple, qui a été réalisée par des enseignants du secondaire avec leurs élèves, dans des écoles socio-économiquement défavorisées de Santiago du Chili, consiste à décrire la marche aléatoire symétrique d'une puce par les entiers (visualisés par la droite numérique).

La puce part, disons, de l'entier 0, et saute à n'importe lequel de deux voisins immédiats, 1 et –1, dans ce cas, avec égale probabilité, et ainsi de suite. Les étudiants pourront alors assigner, de proche en proche, les probabilités de présence de la puce à chaque entier, en laissant s'écouler notre fluide probabiliste, par gravité, à partir du plus haut sommet de la grille triangulaire de tuyaux de la Fig. 1.

Bien sûr, ils retrouveront ainsi, à l'aide d'une métaphore hydraulique, le célèbre triangle de Pascal et la loi de probabilité du nombre de piles obtenues en lançant *n* fois une pièce. Mais, on aurait pu, aussi bien, les retrouver avec notre métaphore pédestre, par exemple…

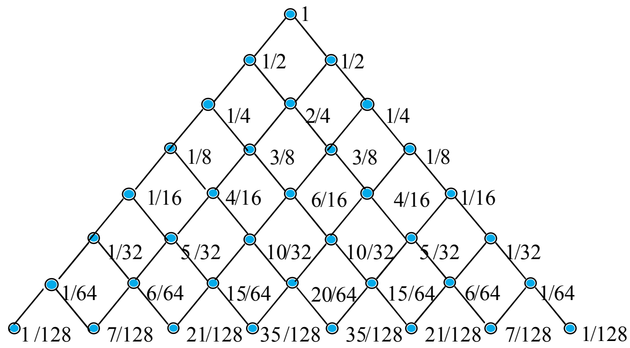


Figure 1 : Diagramme pour la métaphore hydraulique.

La métaphore généalogique

Une variante de la métaphore hydraulique est la métaphore généalogique, où l'on voit maintenant un arbre généalogique, dont le patriarche (ou la matriarche), qui est la racine de l'arbre, distribue son héritage à ses descendants. Elle le fait de manière équitable, dans notre cas, et tous ses descendants font de même…

La métaphore pédestre

Nous essayons de motiver les groupes qui n'aiment pas du tout le calcul des fractions, à chercher d'autres métaphores qui l'évitent autant que possible…, au moins jusqu'au dernier pas. Il arrive souvent que quelqu'un songe à lâcher, à la racine, un nombre convenable de puces qui se partageront en moitiés égales, et qui feront de même à partir de chaque sommet où elles arrivent. Pour $m = 10$, disons, les étudiants s'aperçoivent vite que 1024 puces conviennent, car elles auront à se partager 10 fois de suite. Il leur suffira de faire le compte des puces débarquées à chaque sommet, juste après le 10^{e} partage, et de calculer le pourcentage respectif, pour trouver les probabilités cherchées. Nous laissons aux étudiants la possibilité de découvrir par eux-mêmes, au moment d'aborder d'autres situations problématiques, la portée fort générale de ce type de métaphore.

2.2.3. Les équations sont des balances en équilibre

Comment un petit enfant pourrait-il résoudre l'équation

$$3x +2 = x + 10 ?$$

En s'appuyant sur des métaphores statiques du genre « balance en équilibre» !

Il travaille au début avec du matériel concret, avec une vraie balance, où se trouvent en équilibre trois boîtes inconnues identiques et deux boîtes unités sur l'un des plateaux et une autre boîte inconnue identique aux précédentes et 10 boîtes unités sur l'autre plateau. En manipulant ces objets et en veillant à préserver l'équilibre, l'enfant arrive à équilibrer la boîte inconnue avec 4 boîtes unités. Il a donc trouvé $x = 4$ et résolu l`équation ! Après cette première étape concrète, on a même observé des enfants qui arrivent à résoudre l'équation mentalement (Araya 2000), en s'appuyant sur des métaphores gestuelles (Edwards 2005). Cette activité, fondée sur la métaphore de la balance en équilibre, fait partie des expériences pilotes que nos étudiantes du cours 2, décrit dans l'Annexe, testent ensuite, avec succès, en salles de classe, lors de leurs pratiques pédagogiques.

2.2.4. Métaphores pour la multiplication

Nous nous appuyons sur la métaphore des nombres comme des quantités d'objets regroupés. On demande aux élèves comment ils représenteraient 2×3. Le plus probable est qu'ils songent a regrouper 2 fois 3 jetons en forme de rectangle. Le professeur suggère d'adopter une convention fixée, pour cette représentation. Après discussion, on tombe accord sur une convention : soit 2 files de 3 jetons chacune ou 3 files de 2 jetons chacune. Si l'on choisit la représentation « rectangle de m files de n jetons» pour m x n , alors *la commutativité de l 'adition se voit comme un simple quart de tour du rectangle 2x3, qui était « couché », et se met donc « debout »,* son « aire », restant bien sûr la même (Figure 2). Il est a remarquer qu'il n'est pas nécessaire de conter ni de savoir que l'on a 6 jetons en tout, pour « voir » que ce nombre reste le même, et que l'on a donc bien 2 fois 3 égal 3 fois 2. Nous sommes donc bien à la hauteur des aborigènes amazoniens étudiés récemment par Dehaene (2004), qui ne savent pas compter ni nommer des nombres plus grands que 5 mais qui se débrouillent fort bien en arithmétique estimative, métaphorique, en mode cognitif non verbal et non séquentiel. Ceci montre bien la puissance cognitive des métaphores !

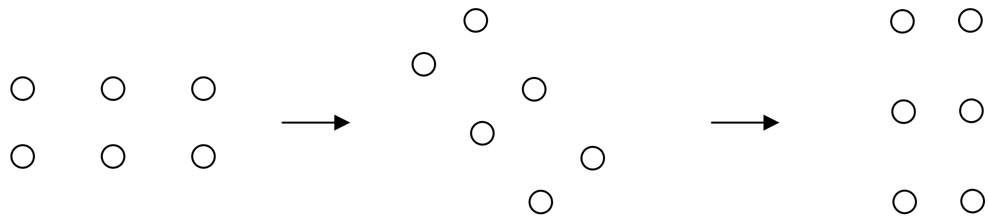


Figure 2 : « 2 fois 3 égale 3 fois 2 ».

Notons que l'on pourrait envisager cet exemple comme une transition entre la représentation et la métaphore. En effet, quand les élèves groupent leurs jetons en 2 files de 3 jetons, ils sont plutôt en train de construire une représentation de 2×3. Mais quand ils réalisent la commutativité : $2 \times 3 = 3 \times 2$, comme une rotation de leur rectangle en un quart de tour, nous dirions plutôt qu'ils sont en pleine métaphore…

Or, on pourrait aussi représenter la multiplication de *2* par *3*, par un arbre, en adhérant – par exemple – à la convention de choisir l'arbre à *2* branches qui se bifurquent en *3* sous branches (Figure 3). Si l'on convient donc que m x n correspond à un arbre à m branches et n sous branches, nous aurons un arbre à 3 branches, à 2 sous branches chacune, à la place de 3×2, comme dans la Figure 3.

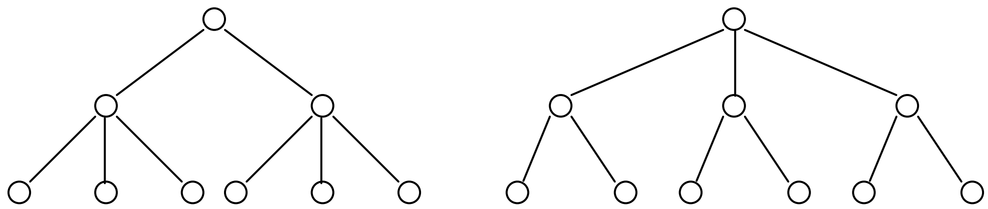


Figure 3 : Arbres multiplicatifs.

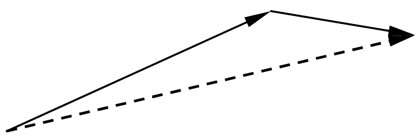
Traduit en langage généalogique :

Ève eut deux filles, et chacune d'elles, trois filles à son tour. Pour sa part, Lilith eut trois filles et chacune d'elles eut 2 filles à son tour. Combien de petites filles ont eu Ève et Lilith ?

Nous sommes ici à mi-chemin entre la représentation et la métaphore : on pourrait aussi bien dire que notre premier arbre est une représentation de la multiplication de 2 par 3, ou qu'il est une métaphore de celle-ci. Peut-être Lakoff et Núñez diraient-ils que nous avons ici une métaphore « forestière », ou « généalogique » de la multiplication, ou bien que le branchement est une métaphore de la multiplication (des entiers positifs).

Il est à remarquer, en tout cas, que nous trouvons ici une *limitation* de la métaphore forestière : on voit moins bien, en termes d'arbres, la commutativité de la multiplication : $2 \times 3 = 3 \times 2$, même si elle y est, implicitement. Cependant, si l'on se range au point de vue de R. Núñez, cette « limitation » de la métaphore n'en est pas une, au contraire, car elle fait ressortir le fait que la multiplication n'est pas « foncièrement commutative » comme l'addition. Autrement dit, elle n'est pas a priori commutative, elle ne l'est qu'après coup (dans le cas des nombres) !

Ce fait apparaît très naturellement si l'on s'appuie sur une troisième métaphore pour la multiplication : « multiplier, c'est accoler des flèches ». Il s'agit en fait de la métaphore sous-jacente à la composition d'applications ou des transformations (figure ci-contre).



Pour retrouver nos « 2 fois 3 » et « 3 fois 2 », il faudrait donc songer à : « tripler », puis « doubler » d'une part, et « doubler », puis « tripler », de l'autre. Autrement dit, voir 2 et 3 comme les opérateurs, qui doublent et triplent une grandeur quelconque.

On remarque que nos étudiants ont très souvent besoin de se sentir autorisés, en plus d'encouragés, pour entreprendre cette recherche. Aussi, il est fréquent qu'ils demandent au professeur sa permission pour faire ceci ou cela. On constate, en premier cycle universitaire, que presque aucun n'oserait se servir d'une métaphore ou une représentation convenable pour résoudre un problème concret. On peut imaginer quel type d'enseignement ils ont reçu.

2.2.5. Des métaphores animistes

Certains mathématiciens, en essayant de communiquer leurs idées, utilisent volontiers des métaphores, de manière spontanée et fort créative. Ils emploient même des métaphores animistes, comme René Thom, quand il écrit :

> « …On tue la topologie de la variété en l'appliquant sur l'axe réel, mais la topologie résiste, elle « crie », et ses cris se manifestent par l'existence de points critiques » (Thom, 1989).

La grande majorité des enseignants des mathématiques élémentaires, cependant, ne suivent pas, malgré les efforts des ministères concernés pour mettre en œuvre la réforme de l'enseignement à l'école.

En effet, ils ont le sentiment que le fait de s'appuyer sur des métaphores, pour enseigner des concepts mathématiques, ce n'est pas sérieux. Et les mathématiques, pensent-ils, c'est quelque chose de sérieux…

Nous avons pu constater, au cours de maints ateliers avec des instituteurs et professeurs, que c'est surtout le cas des enseignants de l'école secondaire, dans beaucoup de pays ; les instituteurs et institutrices de la maternelle et l'école primaire ont, par contre, une attitude beaucoup plus réceptive envers les métaphores et perçoivent mieux leur rôle cognitif.

2.3. La dynamique des métaphores

2.3.1. Comment interagit l'apprenant avec les métaphores ?

Dans l'enseignement traditionnel des mathématiques il n'y a pas de mention explicite des métaphores. Il y a néanmoins des métaphores implicites ou inconscientes, que l'enseignant transmet, ou impose même, à l'apprenant. Beaucoup d'entre elles sont des métaphores consacrées par la pratique mathématique : « la droite numérique », le graphe d'une fonction en tant que trace d'un mouvement fictif (Acevedo, 2005), etc. D'autre part, l'apprenant n'ose surtout pas « métaphoriser » quand il aborde un problème posé par l'enseignant. En plus, il a le sentiment que les métaphores sont quelque chose d'illégal, qui n'est pas dans les règles. C'est ce qu'avouent les étudiants des cours décrits en Annexe, que nous avons interviewés. En outre, les plus éveillés disent préférer créer leurs propres métaphores, avec un peu d'aide, à la rigueur, plutôt que les recevoir toutes faites de l'enseignant. Partant, un point fondamental concernant l'opération des métaphores est d'*autoriser* explicitement les étudiants à s'en servir. En plus, il faudra les stimuler et les aider à construire leurs propres métaphores, au lieu de toujours leur proposer des métaphores toutes faites.

Une condition nécessaire au succès cognitif d'une métaphore auprès d'un étudiant est un haut degré de familiarité de celui-ci avec le domaine source de la métaphore. Autrement, nous aurions des métaphores qui « tombent dans le vide ». Bien sûr, l'enseignant devrait être au courant du vécu préalable de l`étudiant, mais en même temps la participation des étudiants à la construction des métaphores à employer tend à assurer un degré de familiarité plus élevé. Ensuite, une fois la métaphore en place et le transfert de sens opéré, l'apprenant peut travailler dans le domaine source de la métaphore, en y puisant dans sa propre expérience.

2.3.2. Encore un exemple : Le système binaire fait chair

Notre métaphore de base est ici celle de l'arithmétique comme manipulation des ensembles finis d'objets.

Nous l'avons employée avec les instituteurs-élèves du cours 5, décrit en Annexe, qui n'avaient que des idées vagues sur le système binaire de notation des nombres et le voyaient surtout comme un artifice gratuit concocté par les mathématiciens.

Activité : Tous les élèves du cours se mettent debout et forment autant de couples (sans regard au sexe) que possible. On note s'il reste ou non un élève solitaire. Ensuite, les couples se regardent et se mettent ensemble, par paires, pour former des quadruplets. On note s'il reste un couple solitaire. En suite, les quadruplets de regardent et se mettent ensemble, deux par deux, pour former des octuplets, *etc*. Quand le processus s'arrêtera, l'ensemble des élèves sera partagé en une collection de groupes, tous de tailles différentes, où il y aura, *peut-être*, un groupe d'un élève, *peut-être* un groupe de 2 élèves, *peut-être* un groupe de 4 élèves, etc. Par exemple : 1, 8, 32. De cette manière, la classe trouve la décomposition binaire de son cardinal (le nombre des instituteurs en formation) sans l'avoir même compté au préalable. Ils trouvent, par exemple

$$1 + 2^3 + 2^5 = 1 + 8 + 32 = 41.$$

En notant par 1 et 0, respectivement, la présence ou l'absence d'un groupe solitaire de 1, de 2, de 4, etc. dans le regroupement binaire de leur nombre, et en écrivant de droite à gauche, on trouve l'écriture binaire du nombre total d'instituteurs : 101001.

Les instituteurs ont témoigné qu'ils n'avaient jamais vu « se faire chair » le système binaire, de cette façon ou d'une autre. En répondant à des questionnaires, ils ont signalé qu'ils s'étaient sentis beaucoup plus concernés et engagés que d'habitude au cours de cette expérience, difficile à oublier. Leur compréhension opérationnelle du système binaire a fait un bond en avant, ou plutôt, un saut quantique. Ils ont pu découvrir naturellement comment additionner en système binaire, par exemple. En même temps, on constate qu'ils ont compris qu'ils peuvent « faire de même » pour d'autres bases que la base 2. Et ils l'ont fait !

2.3.3. Les métaphores, nous sauvent-elles la vie ?

On a constaté maintes fois, avec inquiétude, l'insuccès de l'enseignement, traditionnel ou « moderne », des mathématiques, surtout dans le cas des étudiants qui n'ont pas de vocation mathématique particulière, et qui subissent donc un enseignement qui les repousse et les démotive (CREM 1995, Comission Kahane, 2001).

Or, dans les approches habituelles, on se méfie des métaphores, en allant même jusqu'à les bannir (Detienne, 2005 ; Molino, 1979) :

> « La lumière de l'esprit humain, ce sont des mots clairs, épurés, en premier lieu, et purgés de toute ambiguïté, par des définitions exactes. (…) les métaphores, les mots ambigus ou qui ne veulent rien dire, sont comme des feux follets ; s'en servir pour raisonner, c'est errer parmi d'innombrables absurdités », prêchait Hobbes (1971).

> « Une science qui accepte les images est, plus que tout autre, victime des métaphores. Aussi l'esprit scientifique doit-il sans cesse lutter contre les images, contre les analogies, contre les métaphores » enjoignait Bachelard (1975).

À l'opposé de ce discours, nous avançons que les métaphores « nous sauvent la vie ». En effet, le fait de les mettre au premier plan, et de s'appuyer sur elles, permet de lancer des processus cognitifs d'apprentissage fort différents des processus habituels.

Dans nos cours (cf. Annexe), qui s'adressent surtout à des non mathématiciens, soit à des élèves à vocation humaniste, non scientifique « dure », soit à des professeurs en formation continue, nous avons pu constater qu'une approche métaphorique a des effets très encourageants sur l'apprentissage des élèves et la qualité des compétences acquises.

Les métaphores mettent les mathématiques à la portée de tout le monde, au lieu de rester l'apanage d'une élite. Elles seront peut-être inventées par les plus doués, mais elles pourront être utilisées par tous.

Une enseignante, qui venait de faire avec nous l'expérience de résoudre aisément un problème probabiliste à l'aide de la métaphore pédestre, l'a exprimé de façon fort spontanée, bien que péjorative : « Ce n'est pas mal ! Comme ça, même le plus grand âne comprend ! »

Bien entendu, une métaphore donnée sera didactiquement utile pour tous ceux qui ont assez de familiarité avec le domaine source de la métaphore. On peut espérer néanmoins que si l'on met en œuvre un éventail assez large de métaphores relatives a un thème mathématique donné, on pourra « toucher » pratiquement tout le monde. Le défi reste ouvert, cependant, de créer des métaphores de tous bords qui pourraient rendre accessibles des sujets complexes même aux élèves (apparemment) moins doués.

L'ampleur de l'éventail de métaphores disponible est important, aussi bien parce qu'elles s'adressent à des apprenants qui risquent d'avoir des domaines d'expérience variés, que parce que souvent une métaphore ne capture pas toutes les facettes possibles d'un objet mathématique; il vaut donc mieux avoir plus d'une flèche dans son carquois.

3. Récolte didactique

Puisque les métaphores transfèrent des objets d'un domaine à un autre, elles nous permettent de tirer profit de notre intuition dans un domaine, pour travailler dans un autre et transférer même notre compréhension, d'une science à une autre. On peut le voir dans nos exemples, où émergent des métaphores relevant de l'hydraulique, de la statique, de la dynamique, de l'économie, entre autres, qui nous aident a découvrir et a appréhender des concepts tels que la moyenne ou l`écart-type d'une variable aléatoire, par exemple.

Les métaphores fournissent souvent des réalisations concrètes des concepts ou des procédés mathématiques, à la portée même des petits enfants. Il s'avère ainsi fécond de leur proposer, de bonne heure, un éventail de jeux, avec du matériel concret, basés sur ces métaphores, qui prépareront le terrain pour un emploi cognitif efficace de celles-ci, ultérieurement.

Les métaphores ont besoin d´un terrain fertile pour pousser… Or, ce terrain est fourni, dans une grande mesure, par les expériences psychomotrices de la prime enfance. On voit ainsi l'intérêt d'un jeu de bascule, par exemple, à la lumière de nos métaphores statiques, en probabilités et statistique.

Nos métaphores, qui ont poussé dans ce terrain, sont en fait des « met-befores » au sens de Tall (2006). Nous prétendons que ces expériences préalables de l'enfance seront déterminantes, plus tard, quand l'étudiant rencontrera des concepts mathématiques comme la moyenne ou l'écart-type d'une variable aléatoire, ou d'un ensemble de données, par exemple.

Nos métaphores se rattachent à la pensée commune, au sens de Rouche (2006), car elles poussent dans un terrain commun. En plus, la pensée commune ignore les frontières disciplinaires, que nos métaphores traversent sans peine.

En somme, notre proposition didactique pourrait s'exprimer ainsi : « Pour monter, il faut d'abord descendre ». En effet, si nous voulons aider un apprenant à « monter », du point de vue cognitif, nous ne pouvons que difficilement le « hisser » jusqu'au niveau souhaité, si d'abord nous ne descendons pas, creusons même, jusqu'à trouver un sol ferme d'expérience préalable, foncièrement psychomotrice, où des métaphores efficaces, pour ce sujet, puissent pousser et soutenir son ascension cognitive.

Pour conclure, en nous rappelant qu'aussi bien la mathématique que la poésie voient ce qui est invisible, nous proposons une lecture cognitive de ce poème de William Blake :

To see a world in a grain of sand
And a heaven in a wild flower
Hold infinity in the palm of your hand
And eternity in an hour

(Voir un monde dans un grain de sable
et un paradis dans une fleur sauvage,
tenir l'infini dans la paume de ta main
et l'éternité dans une heure)

Annexe : Quelques évidences expérimentales

L'approche métaphorique de l'apprentissage des mathématiques que nous avons ébauchée ici a été mise en œuvre lors de plusieurs cours de mathématiques générales, faits majoritairement à des étudiants de filières non scientifiques, et à l'occasion de nombreux ateliers de formation continue et recyclage pour des professeurs de l'enseignement secondaire et primaire.

Plus précisément, il s'agit des cours suivants :

1. Un cours de Mathématiques Générales, semestriel, donné depuis 2001, à une quarantaine d'étudiants de la filière Sciences Sociales et Humanités, du programme de « Baccalauréat » de l'Université du Chili (analogue d'un DEUG français, option Sciences Humaines et Sociales, ou d'un « Bachelor » anglo-saxon). Ces étudiants, au nombre de 30 a 50 par an, s´orientent vers les sciences humaines et sociales, mais aussi vers la Faculté de Droit, par exemple.

   Ce cours traite, à un niveau introductif, les sujets suivants : Probabilités, Statistique, Combinatoire, Séries, Géométrie Fractale, Trigonométrie et Nombres Complexes, Calcul Infinitésimal, Théorie des Systèmes. Ces sujets sont articulés par un fil conducteur qui démarre avec le hasard (motivé par les variables aléatoires quotidiennes et les promenades aléatoires), s'enfuit à l'infini (l'attente de « pile » lors du lancer d'une pièce…), découvre et somme les séries géométriques à l'aide des arbres probabilistes, dissipe les Paradoxes de Zénon, explore les formes limites à l'infini, telles que les fractales, rencontre la dérivation comme procédé limite motivé par des problèmes d'optimisation, explore les formes des graphes des fonctions, ondes en particulier, découvre le lien entre dérivation et intégration, explore les états limites du devenir de systèmes simples, déterministes ou stochastiques, découvre comment les nombres complexes nous simplifient la vie à ce sujet.

2. Un cours de Cognition Mathématique, annuel, pour de futures institutrices et instituteurs, qui enseigneront à la maternelle et au premier cycle de l'école élémentaire. Ce cours a été donné en 2004 et 2005, avec une vingtaine d'élèves en moyenne.

   On y traite les nombres, leurs différents rôles, leurs systèmes d'écriture, dont le système binaire, les opérations, les formes géométriques, leurs rôles et fonctionnalité, en 2D et 3D, les symétries, la géométrie grecque versus la géométrie fractale. Pendant le cours, on mène en parallèle une réflexion didactique, où les étudiants pratiquent métaphores et modes cognitifs et s'interrogent, devant chaque concept ou méthode, sur les questions auxquelles les concepts ou méthodes fournissent des réponses. Elles se demandent donc : À quoi ça sert ? Dans quelles situations quotidiennes cela peut émerger ? Ce cours se situe en dernière année d'études, quand les étudiants sont déjà engagés dans des pratiques pédagogiques périodiques dans les écoles, où ils peuvent essayer de mettre en œuvre les idées et stratégies didactiques qu'ils sont en train de découvrir.

3. Un cours de Formation Générale semestriel, optionnel, intitulé « Promenades au hasard au pays des métaphores », qui s'adresse aux étudiants de l'Université du Chili, toutes filières confondues. Ce cours a été donné depuis 2003, avec une soixantaine d'élèves en moyenne chaque semestre. La page du cours <**http://www.plataforma.uchile.cl/fg/home_cfg.htm**> s'ouvre avec une animation, où l'on voit une bille qui rebondit à l'intérieur d'un tétraèdre régulier au fur et à mesure que celui-ci tournoie sur lui-même. Une métaphore visuelle donc, plutôt qu'une représentation du cours en tant que processus cognitif.

   Les 4 facettes du tétraèdre, et du cours, sont respectivement nommées : Le hasard et la nécessité, la fuite à l'infini, les symétries, la vision systémique. Il n´y a pas d'ordre naturel entre ces facettes, qui ensemble constituent un objet cohérent : le tétraèdre régulier. Le déroulement du cours lui-même, est conçu comme un cheminement aléatoire entre ces 4 grands thèmes.

   Un parcours typique démarre avec une discussion sur le hasard et la nécessité, des exemples de hasard et non hasard, le mouvement brownien et ses petits frères, continue avec le saut à l'infini, la dissipation des paradoxes de Zénon, les sommes géométriques, les limites de toutes sortes, les formes fractales en tant que formes limites, la dichotomie « géométrie lisse –géométrie fractale », les symétries en géométrie et ailleurs, le point de vue systémique, le devenir des systèmes et leur destin ultime, l'autoréférence…

   L'évaluation du cours se fait d'après les exercices et problèmes que les étudiants abordent pendant le semestre, en choisissant dans une liste proposée à la page du cours. Il y en a pour tous les goûts, en allant des plus techniques aux plus « humanistes ». Par exemple : Comment faisaient les franciscains de l'Italie du XII^e^ siècle pour choisir « au hasard » une route chaque fois qu'ils arrivaient à un carrefour, au cours de leurs pèlerinages ?

4. Un cours semestriel d'Algèbre Linéaire et Calcul Vectoriel, pour des étudiants de Licence ès Sciences, mention Biologie et Chimie. Ce cours a été donné depuis 2004, avec une soixantaine d'élèves en moyenne. Il prend comme fil conducteur les systèmes et leur devenir, en se concentrant sur le cas linéaire, bien sûr, où la diagonalisation est un outil de choix. Ensuite, on transite vers l'univers non linéaire, où l'on se ramène localement au cas linéaire. On développe ainsi le calcul différentiel de fonctions à plusieurs variables, que l'on représente par leurs graphes et que l'on étudie avec l'aide des métaphores topographiques (surtout en dimension 2 et 3 à la source). Enfin on explore la

théorie du potentiel, intégrant le long des chemins, pour aboutir au théorème de Green.

5. Un Certificat annuel de formation continue adressé à des instituteurs et institutrices en exercice qui veulent parfaire leur formation mathématique. Ce cours, de 30 étudiants, boursiers du Ministère de l'Éducation Nationale, traite des nombres et leurs systèmes de notation, opérations numériques, géométrie élémentaire en 2 et 3 dimensions, statistique élémentaire, informatique éducative, résolution de problèmes. Les contenus disciplinaires et les méthodologies didactiques y sont traités de façon intégrée, en évitant les cloisonnements. On pratique les différents modes cognitifs (Flessas & Lussier, 2005) à propos des notions mathématiques fondamentales et leur transposition didactique (Chevallard, 1985). Les approches métaphoriques y trouvent, bien sûr, une place de choix.

Même si des études quantitatives plus poussées restent à faire, nous avons pu faire, jusqu'à présent, les constatations suivantes.

Des étudiants de vocation humaniste, comme ceux du cours 1, pas spécialement doués pour les mathématiques, en principe, sont arrivés à résoudre des problèmes non triviaux et mathématiquement intéressants, en s'appuyant sur des métaphores convenables. Certains ont découvert qu'ils avaient des aptitudes mathématiques remarquables, ignorées jusqu'alors. Ils sont arrivés aussi à manier métaphoriquement des concepts et des méthodes mathématiques plus avancés, que l'on aurait cru hors de leur portée. Par exemple, calculer à l'aide d'une métaphore hydraulique adéquate, des espérances données par des séries (apparemment) non géométriques. En plus, chez les futurs biologistes, par exemple, on a trouvé des étudiants qui se sont avérés fort doués pour les mathématiques et qui ont beaucoup profité de l'approche métaphorique. Notamment, celle-ci leur a permis de transférer des intuitions biologiques (spécialement, de la biologie systémique) au domaine mathématique.

Les étudiants qui ont suivi ces cours ont témoigné, presque unanimement, une fois le semestre achevé, combien l´expérience cognitive vécue a été marquante pour eux, et comment elle a bouleversé leurs idées reçues et l'expérience des mathématiques qu'ils avaient eue auparavant.

Parfois nous avons demandé aux élèves du Baccalauréat, s'ils voyaient un rapport quelconque entre le cours qui venait de s'achever et l'extrait du poème de William Blake ci-dessus. La plupart ont très bien vu le rapport, et ont donc fait une lecture cognitive spontanée du poème.

Ils ont perçu l'identité entre les courts-circuits et les rapprochements inattendus qu'expriment les métaphores en poésie et en mathématiques. Ils ont bien vu tout le parti que l'on peut tirer d'un modeste « exemple bébé », qui s`avère, après coup, une métaphore de beaucoup d'autres choses. Certains ont même expliqué pourquoi, pour eux, ce poème était une métaphore du cours.

Ces idées ont aussi été mises en œuvre dans la rédaction des textes édités et distribués par le Ministère de l'Éducation chilien pour l'enseignement secondaire en mathématiques, suite à des appels d'offres, entre 2000 et 2005 (cf. González & Soto Andrade 2003, 2004a, 2004b, 2005). Ces textes ont encouragé un certain nombre d'enseignants du secondaire (encore minoritaire, hélas…) à employer des approches métaphoriques dans sa pratique, avec des résultats fort positifs.

Bibliographie

ACEVEDO I. (2005) *Metaphors in mathematics classrooms: Analysing the dynamic process of teaching and learning to graph functions,* http://fractus.mat.uson.mx/Papers/CERME4/Papers%20definitius/1/acevedo.pdf

ARAYA R. (2000) *La inteligencia matemática,* Editorial Universitaria, Santiago, Chili.

BACHELARD G. (1975) *La formation de l'esprit scientifique*, Vrin, Paris.

BARKER P. (1987) *Using Metaphors in Psychotherapy*, Brunner/Mazel Publishers, New York.

BILLS C. (2003) *Metaphor in young children's mental calculation* http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG1/TG1_bills_cerme3.pdf

BROUSSEAU G. (1986) "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", *Recherche en didactique des mathématiques*, **72**, 33-114. http://fractus.mat.uson.mx/Papers/Brousseau/Didactica1.pdf

CERME 2 (2001) *Proceedings of the Second Conference of the European Research in Mathematics Education (CERME)*, Mariánské Lázně, République Tchèque, http://fractus.mat.uson.mx/Papers/CERME/cerme2procee.pdf

CERME 3 (2003) *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, Bellaria, Italie, http://fractus.mat.uson.mx/Papers/CERME/TG1_draft/index.htm

CERME 3 (2003) *Proceedings, Thematic working group 1, Role of metaphors and images in learning and teaching mathematics, Introduction,* Bellaria, Italie, http://fractus.mat.uson.mx/Papers/CERME/TG1_draft/index

CERME 4 (2005) *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* Sant Feliu de Guíxols, Espagne, http://fractus.mat.uson.mx/Papers/CERME4/

CHARBONNEL N. (2005) *Métaphore et philosophie moderne,* http://www.info-metaphore.com/articles/pdf/charbonnel-metaphore-et-philosophie-moderne-tache-aveugle-rhetorique.pdf

CHEVALLARD Y., JOSHUA M.A. (1985) *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné,* La Pensée Sauvage, Grenoble.

CREM (1995) *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans, Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques,* Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, Belgique.

COMISSSION KAHANE (2001) *Présentation des rapports et recommandations*, http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/RapportsCommissionKahane.pdf

DEHAENE S. (2004) Cognition et capacités arithmétiques : Ce que nous apprennent les indiens Mundurucu, http://www2.cnrs.fr/presse/communique/566.htm?debut=24

DETIENNE C. (2005) *La métaphore dans le discours scientifique*, http://www.info-metaphore.com/articles/epistemologie.html

DUBINSKY E. (1999) *Review of Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*, L. English (Ed.), in Notices of the Amer. Math. Soc., **46**, 5, 555-559, http://www.ams.org/notices/199905/rev-dubinsky.pdf

EDWARD L. (2002), *The nature of Mathematics as viewed from Cognitive Science*, Proc. CERME 3, Bellaria, Italie, http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG1/TG1_list.html

EDWARD L. (2005), *Metaphors and Gestures in Fraction Talk*, Working Group 1, Proc. CERME 4, Sant Feliu de Guixols, Espagne, http://fractus.mat.uson.mx/Papers/CERME4/Papers%20definitius/1/edwards.pdf

FERRARA F. (2003) Bridging perception and theory: What role can metaphors and imagery play?, WG 1 , Proc. CERME 3, Bellaria, Italie, http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG1/TG1_ferrara_cerme3.pdf, http://fractus.mat.uson.mx/Papers/CERME/TG1_draft/TG1_ferrara_draft.pdf

FLESSAS J. & LUSSIER F. (2005) "*La neuropsychologie de l'enfant*", Dunod, Paris.

GARDNER H. (2005) *Las cinco mentes del futuro: Un ensayo educativo*, Paidós, Buenos Aires, http://www.pz.harvard.edu/PIs/HG_Multiple_Lenses.pdf

GONZALEZ P. & SOTO ANDRADE J. (2003) *Matemática Activa, Primer Año Medio*, Editorial Marenostrum, Santiago du Chili.

GONZALEZ P. & SOTO ANDRADE J. (2005) *Matemática Activa, Cuarto Año Medio*, Editorial Marenostrum, Santiago du Chili.

GONZALEZ P. & SOTO ANDRADE J. (2004a) *Matemática Activa, Segundo Año Medio*, Editorial Marenostrum, Santiago du Chili.

GONZALEZ P. & SOTO ANDRADE J. (2004b), *Matemática Activa, Tercer Año Medio*, Editorial Marenostrum, Santiago du Chili.

GORDON D. (1992) *Therapeutic Metaphors: Helping Others Through the Looking Glass*, Meta Publications, Cupertino, California, 1978.

HOBBES Th. (1971) *Léviathan*, Sirey.

JOHNSON M. & LAKOFF G. (2003) *Metaphors we live by,* The University of Chicago Press, New York (version française : *Les métaphores dans la vie quotidienne*, Editions de Minuit, Paris).

LAKOFF G. & NUÑEZ F. (2000) *Where Mathematics comes from?,* Basic Books, New York.

MOLINO J. (1979) *Métaphore, modèles et analogies dans les sciences*, Langage, **54** : la métaphore, 83-102, Larousse, Paris.

PARZYSZ B. et al. (2003) *Introduction to Thematic Working Group 1, Role of metaphors and images in learning and teaching mathematics,* Proc. CERME 3, Bellaria, Italie,
http://fractus.mat.uson.mx/Papers/CERME/TG1_draft/TG1_introduction_corr2.pdf

PESCI A. (2005) *Mediation of metaphorical discourse in the reflection on one's own individual relationship with the taught discipline: an experience with mathematics teachers***,** WTG1, Proc. CERME 4, Sant Feliu de Guíxols, Espagne,
http://fractus.mat.uson.mx/Papers/CERME4/Papers%20definitius/1/pesci.pdf

POUILLOUX J-Y. (2004) *Article sur la Métaphore*, Encyclopædia Universalis.

PRANDI M. (2001) *Grammaire philosophique de la métaphore*, Paris.

PRESMEG N.C. (1997) *Reasoning with metaphors and metonymies in mathematics learning*, dans L. D. English (Ed*.), Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*, 267-279, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, New Jersey.

REBOUL O. (1986) *La figure et l'argument*, dans *De la métaphysique à la rhétorique*, M. Meyer (éditeur), Eds. de l'Université Libre de Bruxelles.

REDDY M.J. (1979) *The Conduit Metaphor: A Case of Frame Conflict in our Language About Language,* dans A. Ortony (Ed.), *Metaphor and Thought*, Cambridge University Press, Cambridge.

ROUCHE N. (2006) Sur la nécessité des lignes conductrices pour l'apprentissage des mathématiques de la prime enfance à l'age adulte, à paraître aux *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* **11** supplément spécial colloque de Mons.

SEITZ J. (2001) *The biological and bodily basis of metaphor,*
http://philosophy.uoregon.edu/metaphor/neurophl.htm

SFARD A. (1994) Reification as the birth of metaphor, *For the Learning of Mathematics,* **141**, 44-54.

SFARD A. (1997) *Commentary: On metaphorical roots of conceptual growth.* dans L. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*, 339-371, Erlbaum, London.

TALL D. (2006) A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* **11**.

VARELA F., THOMPSON E. & ROSCH E. (1991) *The embodied mind: Cognitive science and human experience,* MIT Press, Cambridge.

JORGE SOTO-ANDRADE
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile
Casilla 653
SANTIAGO, CHILI
sotoandr@uchile.cl