KLAUS VOLKERT

FAUT-IL ÉTUDIER LA TÉRATOLOGIE ?

Abstract. Is study of monsters worth-while?
In this article I will study the role of „monsters" in the history of modern mathematics, - especially in the context of real functions and of polyhedra. We will see that the interest in monsters is a rather recent attitude and that it is related to the idea that mathematics is freely constructed by the human mind. We will ask the question whether this point of view is well adapted to pupils.

Résumé. Dans le présent article je vais analyser le rôle des « monstres » dans l'histoire des mathématiques modernes - en particulier dans le contexte des fonctions réelles et des polyèdres. Ainsi on va comprendre que l'intérêt pour les monstres est assez récent et qu'il est lié à l'idée que les mathématiques sont une construction libre de l'esprit humain. On va se demander si cette idée convient aux élèves.

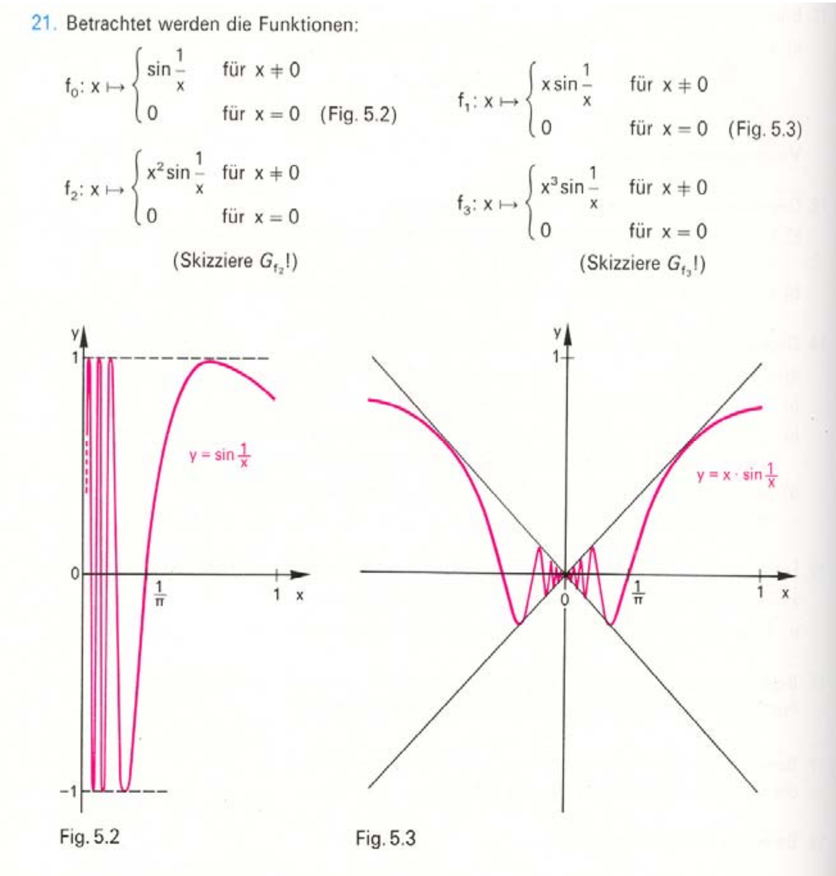
Mots-clés. Analyse historique, monstre mathématique, fonctions réelles, contre-exemple.

Introduction

Pendant le 19e siècle les mathématiciens ont pris l'habitude de construire des exemples bizarres voire des vrais « monstres »– afin de caractériser la portée d'un théorème ou d'une notion. Dans mon article, je veux esquisser l'histoire des monstruosités mathématiques et non-mathématiques, discuter les motifs et le seuil épistémologique de leurs inventions pour terminer par quelques remarques sur leurs rôles dans l'enseignement.

En 1908, Henri Poincaré constatait : « *La logique parfois engendre des monstres. Depuis un demi-siècle on a vu surgir une foule de fonctions bizarres qui semblaient s'efforcer de ressembler aussi peu que possible aux honnêtes fonctions qui servent à quelque chose. Plus de continuité, ou bien de la continuité, mais pas de dérivée etc.* » (Poincaré, 1908, p. 111) Et il se posait le problème suivant : *« C'est le débutant qu'il faut d'abord familiariser avec ce musée tératologique.* » (Poincaré, 1889, p. 129) Peut-être Poincaré a-t-il pensé à des pages comme les suivantes prises d'un manuel scolaire allemand :

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 11, p. 217 – 228.



21. Betrachtet werden die Funktionen:

$$f_0 : x \mapsto \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad \text{(Fig. 5.2)} \qquad f_1 : x \mapsto \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad \text{(Fig. 5.3)}$$

$$f_2 : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \qquad f_3 : x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

(Skizziere G_{f_2}!) (Skizziere G_{f_3}!)

Fig. 5.2 Fig. 5.3

Ces fonctions ne sont-elles pas monstrueuses ?

Dans l’article qui suit, je vais analyser :

– le développement mathématique aboutissant à la situation décrite par Poincaré ;

– le développement général de la pensée scientifique dans lequel celui des mathématiques peut se situer.

L’idée en est qu’on peut tirer d’une compréhension approfondie de la méthodologie mathématique des conséquences pour l’enseignement.

1. Les monstres dans l’histoire des sciences

L’idée qu’on peut acquérir des connaissances sur le « normal » en étudiant le « pathologique » s’est développée pendant le 18e et le 19e siècle. Auparavant on a

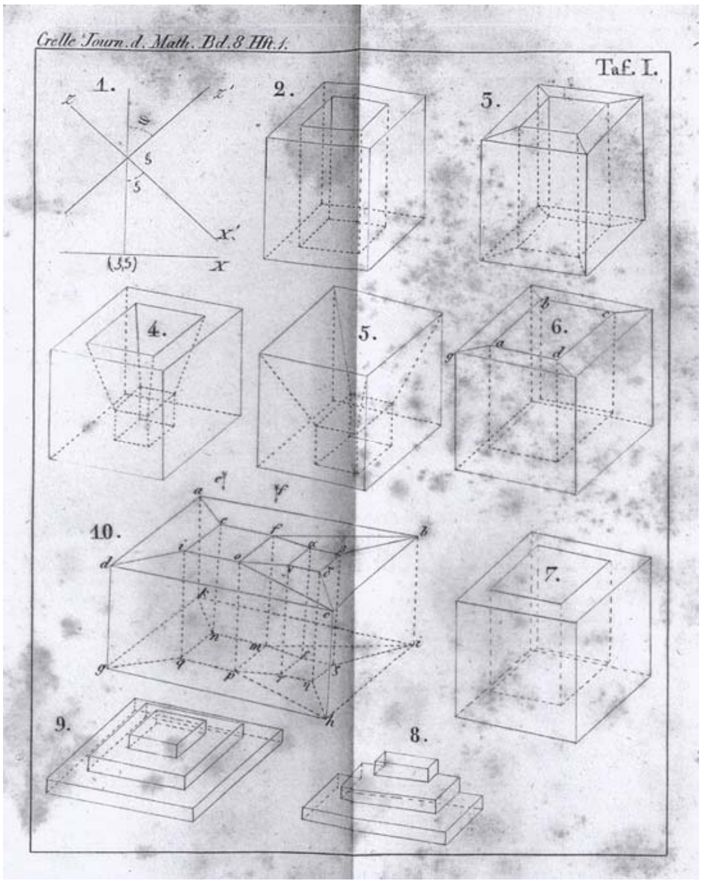
eu la forte tendance d'exclure de l'ordre naturel les « monstres » [le terme vient de « monere » c'est à dire « rappeler »] (comme par exemple. les difformités, en particulier les jumeaux siamois). Ils étaient considérés comme des interventions directes de Dieu tout à fait hors des règles normales. Par conséquent on ne pouvait rien en déduire concernant les lois naturelles. Cette idée commençait à changer pendant le 18e siècle au cours duquel on commençait à s'habituer à l'idée qu'un tel monstre peut se comprendre comme l'effet d'un développement perturbé – par exemple par un « trop » de quelque chose. Diderot dans son « Rêve de d'Alembert » a même spéculé sur les possibilités de produire des monstres d'une manière artificielle et expresse – une idée arrivée dans la littérature avec Mary Shelley et son « Frankenstein » (1817).
Le 19e siècle a connu l'introduction d'une discipline scientifique appelée « tératologie » (de « tera » qui signifie « miracle », chose monstrueuse qui sort vraiment de l'ordinaire) par les Geoffroy Saint-Hilaire (père [Etienne, 1772 – 1844] et fils [Isidore, 1805 – 1861]) et d'autres. La tératologie (cf. « Histoire générale et particulière de l'organisation chez l'homme et les animaux, des monstruosités ou Traité de la tératologie » par I. Geoffroy – Saint Hilaire [1832 – 1836]) fait partie de l'anatomie et de la physiologie. On commençait à étudier d'une manière systématique les exceptions, y compris les monstres, en espérant parvenir ainsi à la connaissance des lois qui règlent l'ontogenèse des êtres vivants. Pour nous qui sommes tout à fait habitués à cette manière de penser il est difficile de comprendre le renversement très profond décrit ci-dessus. Une étude classique en est Canguilhem 1972, on peut consulter aussi Daston/Park 2002 et Zürcher 2004.

2. Les monstres dans l'histoire des mathématiques

Avant 1800 environ on rencontre peu d'intérêt parmi les mathématiciens pour des exemples monstrueux. De temps en temps les mathématiciens de l'époque sont tombés sur des êtres mathématiques bizarres comme la fonction f(x) = $x^{x^{x^{\cdots}}}$ étudiée par Euler. Cette étude n'était pas l'effet d'une recherche systématique de cas extrêmes et Euler n'en tire aucune conséquence générale. Quelle en était la raison ? On peut caractériser la pensée mathématique de l'époque comme une pensée centrée sur l'essentiel donc sur les objets d'une nature paradigmatique. Si les fonctions continues sont « toutes » considérées comme différentiables, cela ne veut pas dire qu'il n'y a pas de fonctions non-différentiables, mais seulement que les fonctions continues « typiques » - comme par exemple les polynômes – le sont. Au fond, on retrouve ici une distinction nette entre le « naturel » - qui est l'objet de l'analyse – et « l'artificiel » qui ne mérite pas (ou moins) l'intérêt des mathématiciens. La pensée mathématique à l'époque d'Euler n'est pas une réflexion sur toutes les possibilités mais seulement sur ce qui est considéré comme important (c'est-à-dire ce qui est courant).

C'est tout à fait en parallèle avec le développement de la pensée mathématique de l'individu. Un jeune élève n'apprend pas la notion de « carré » par une définition abstraite mais en considérant des exemples de carrés et de non-carrés, ce qui aboutit à la formation d'un paradigme ou d'un « concept figural » (Fischbein, 1993) pour l'idée de « carré ». Il est bien connu que les jeunes élèves ont des difficultés à reconnaître un carré si la figure ne se trouve pas dans la position habituelle parce qu'ainsi elle ne correspond plus à l'exemple padotypique.
Par conséquent dans la période décrite il n'y avait pas de vrais « contre-exemples » seulement des « exceptions » qui n'infirmaient pas les énoncés « généraux » - la co-existence des deux étaient possible. C'est là un de ces aspects qui se trouvent à la racine de la critique du 19^e^ siècle disant que les mathématiques du 18^e^ siècle étaient non rigoureuses, non exactes, non générales *etc*. Une explication sociologique remarquable des changements décrits est proposée par David Bloor – (cf. Bloor, 1978).

Au début du 19^e^ siècle on peut constater un intérêt croissant des mathématiciens pour les exceptions. Je veux ici citer deux exemples : le premier en est le théorème d'Euler sur les polyèdres (s – a + f = 2). A un certain moment – après l'exposé important du sujet donné par Legendre dans ses « Eléments de géométrie » (1794) – on commençait à se demander : pour quels polyèdres le théorème d'Euler est-il vrai ? On a rencontré des « exceptions nombreuses » (en reprenant une expression de Lhuilier) et de types très divers – par conséquent l'énoncé paradigmatique était vraiment menacé. « Rencontrer » doit se prendre ici dans le sens littéral du mot parce que certaines des exceptions se présentaient d'elles- mêmes dans la nature (cf. les articles de Lhuilier et de Hessel). Le petit cube dans un grand cube se présentait par exemple si un cristal cubique noir se trouve à l'intérieur d'un cristal lucide ; l'escalier n°8 (dans la figure ci-dessous) est proposé à partir des idées de Haüy sur la composition des cristaux. L'histoire du théorème d'Euler a été utilisée par I. Lakatos dans son ouvrage « Proofs and refutations » (1976) bien connu pour illustrer ses idées sur le développement des mathématiques. Il semble paradoxal que Lakatos n'ait pas souligné l'historicité de sa propre méthode – la méthode des preuves et des réfutations.



Les numéros pairs désignent les « bons » polyèdres – c'est à dire les polyèdres qui sont Euleriens [s – a + f = 2]) – par contre les numéros impairs plus grand que 1 sont des « mauvais » polyèdres. Le numéro 2 est remarquable parce c'est un polyèdre Eulerien bien que ses faces ne soient pas simplement connexes.

L'autre exemple est fourni par les fonctions réelles. A mon avis ce n'est pas par hasard que la nouvelle méthodologie s'est développée dans les deux domaines cités. Ce sont typiquement des disciplines qui connaissent beaucoup d'entités d'une grande « individualité », un fait qui est selon Poinsot à l'origine des difficultés rencontrées dans la théorie des polyèdres (cf. Poinsot, 1809, p. 45) : « On comprend ici pourquoi les recherches de ce type sont tellement difficiles. Dans la théorie des polyèdres comme dans la théorie des nombres, on n'est pas autorisé à

faire des inductions d'un cas particulier à un autre. La plupart des qualités sont individuelles et n'obéissent pas à une loi. ».
A partir de 1800 environ, on aperçoit un intérêt croissant pour les fonctions non-usuelles. On peut citer dans ce contexte les travaux de Fourier sur les séries trigonométriques. Un autre exemple en est fourni par Cauchy, en particulier, par son introduction à son « Cours d'analyse algébrique » (1821) – une introduction qui est marquée par le nouveau discours de la rigueur. Des termes comme rigoureux, exact, général, précis… sont souvent utilisés par Cauchy. Une des sources d'erreur selon Cauchy est fournie par « les raisons tirées de la généralité de l'algèbre » (Cauchy 1821, ii), c'est à dire des énoncés qui ne font pas attention au domaine de validité éventuellement restreint des formules. Ainsi Cauchy voulait « apporter des restrictions utiles à des assertions trop étendues » (Cauchy, 1821, V).

Un exemple cher à Cauchy est la fonction

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (x \neq 0) \text{ et } f(0) = 0$$

qui montre qu'il existe des fonctions ayant une série de Taylor convergente et qui pourtant ne sont pas représentée par cette série en un certain point (ici l'origine). Donc, le développement en série n'est pas donné. L'attitude choisie par Cauchy dans le cas de cette exception ressemble à celle de Lhuilier et de Hessel : l'exception est là – la seule chose qu'il faut faire, c'est l'apercevoir. Pour être complet, je signale qu'il y a un autre mémoire de Cauchy intitulé « Sur les fonctions continues » dans lequel il manifeste une autre attitude. Ce mémoire date de 1844 et est consacré à la critique de la notion de continuité dans le sens d'Euler. Ici, Cauchy construit d'une manière expresse un exemple ; par conséquent on peut parler dans ce cas là d'un vrai contre-exemple !
On sait bien que Niels Henrik Abel a beaucoup appris des travaux de Cauchy qu'il a beaucoup estimé comme mathématicien (non pas comme personnage). Comme Dirichlet, Abel a passé un séjour à Paris (en 1826). Donc ce n'est pas un hasard, si l'on rencontre aussi chez lui l'attitude du jeune Cauchy : dans son fameux mémoire sur la série

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^2 + \ldots$$

il critiquait son maître : « Mais il semble que ce théorème admet des exceptions. Par exemple la série

$$\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \ldots.$$

est discontinue pour toute valeur $(2m+1)\pi$ de x, m étant un nombre entier. Il y a, comme on sait, beaucoup de séries de cette espèce. » (Abel, 1826, 224sv note *). En passant, je note que la série citée était déjà connue d'Euler (Euler, 1783, 448sv) et de Fourier (Fourier, 1822, § 222). Il est remarquable qu'Abel parle ici

d' « exceptions » ; pour lui – comme pour Cauchy – ces exceptions marquent les bornes de la validité d'un théorème dont la vérité n'est pas mise en doute. L'attitude prise par Abel est celle d'un naturaliste qui ne modifie pas son énoncé général s'il rencontre quelques exceptions. Une seule hirondelle ne fait pas encore le printemps. Nous avons déjà rencontré cette attitude chez Lhuilier et Hessel.
En conclusion, l'idée qu'une proposition générale du type « Tous les S sont P » soit infirmée par un seul contre-exemple n'est pas effective dans les mathématiques jusqu'au 19e siècle. On avait tendance à tolérer des exceptions, à accepter qu'il y ait un énoncé et en même temps des exceptions – le pire de ce qui pouvait arriver était la nécessité de déterminer le domaine de validité encore une fois.

La situation s'est modifiée trois ans après Abel. En 1829, Gustav Lejeune-Dirichlet publiait son mémoire sur la représentation des fonctions par des séries trigonométriques. C'est un mémoire rédigé avec le nouvel esprit de rigueur dont son auteur a fait connaissance pendant son séjour à Paris. Dans son mémoire, Dirichlet donne des conditions sous lesquelles une fonction peut se représenter par une série trigonométrique. Afin de démontrer que sa dernière condition est nécessaire, Dirichlet construit un exemple célèbre :
« *On aurait un exemple d'une fonction qui ne remplit pas cette condition, si on supposait f(x) égale à une constante déterminée c lorsque la variable x prend une valeur rationnelle, et égale à une autre constante d, lorsque cette variable est irrationnelle.* » (Dirichlet, 1829, p. 132) Plus tard Poincaré a commenté l'innovation de Dirichlet comme suit : « *Il y a cent ans [c'est-à-dire en 1800 environ] eut été regardée une telle fonction comme un outrage au sens commun*. » (Poincaré, 1898, page 5). Et : « *Autrefois, quand on inventait une fonction nouvelle, c'était en vue de quelque but pratique ; aujourd'hui on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères*. » (Poincaré, 1908, p. 111). Les nouvelles fonctions sont artificielles et inutiles à des buts pratiques – en opposition aux vieilles fonctions qui se présentaient naturellement. Cette distinction entre mathématiques naturelles et mathématiques artificielles était très caractéristique de la pensée de Poincaré et d'autres mathématiciens de son époque – pour cette raison H. Mehrtens les appelle des mathématiciens « anti-modernes ».

3.2.2. Unstetigkeit einer Funktion an einer Stelle x_0

Eine Funktion f heißt an der Stelle x_0 *unstetig*, wenn x_0 im Inneren von D_f liegt und f dort nicht stetig ist.

Bemerkung:
Die Funktionen $f_1: x \mapsto \frac{x}{x}$; $D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f_2: x \mapsto \frac{1}{x}$; $D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind an der Stelle 0 nicht definiert, dort also weder stetig noch unstetig.

1. Beispiel: f: $x \mapsto f(x)$ mit $x \in \mathbb{R}_0^+$ und

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{für } x = 1 \\ 4 - x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Die Funktion f ist an der Stelle 1 unstetig und hat dort eine *endliche Sprungstelle* (Fig. 3.15).

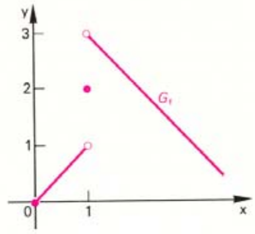


Fig. 3.15

2. Beispiel: f: $x \mapsto f(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

f ist an der Stelle 0 unstetig und hat dort eine *unendliche Sprungstelle* (Fig. 3.16).

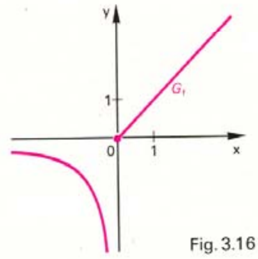


Fig. 3.16

3. Beispiel: Die in 1.7.4. eingeführte Gaußsche Klammerfunktion (INT) $x \mapsto [x]$ ist an jeder ganzzahligen Stelle unstetig, denn es gilt z. B. für $x_0 = 2$ und ein beliebiges h mit $0 < h < 1$: $[2 + h] = 2$, es ist also $\lim_{h \to 0+0} [2 + h] = 2 = [2]$.
Für die Annäherung von links mit $-1 < h < 0$ gilt dagegen $[2 + h] = 1$, also $\lim_{h \to 0-0} [2 + h] = 1 \neq [2]$ (vgl. Fig. 1.40).
Gelegentlich sagt man hier auch, die Funktion $x \mapsto [x]$ sei zwar an der Stelle 2 nicht stetig, aber immerhin *rechtsseitig* stetig.

Ces fonctions ne sont – elles pas artificielles ?

Dirichlet a créé le premier vrai monstre dans l'histoire des mathématiques : sa fonction n'a pas d'application, elle n'est plus susceptible d'une représentation sensible comme une courbe et elle est le produit d'une pensée libre et autonome qui ne s'occupe pas du tout des motifs en dehors des mathématiques elles-mêmes. A l'occasion de l'enterrement de Jacobi, Dirichlet a évoqué l'idée qu'on pratique les mathématiques exclusivement pour « l'honneur de l'esprit humain ». Cette citation formule pleinement l'idée des mathématiques acceptée au cours de la réforme dite néo-humaniste du système d'enseignement supérieur prussien dans le 19e siècle L'auto-réflexion et l'autocritique sont les traits les plus caractéristiques des mathématiques modernes et les monstres en sont un outil favorisé. Donc, on peut dire que 1829 était l'année de la naissance des mathématiques modernes. On comprend bien ici pourquoi les mathématiques modernes sont si opposées aux attentes des élèves : l'ordre naturel est renversé par elles – l'autocritique et l'auto réflexion sont mises au début et non pas à la fin.

En 1837, Dirichlet a formulé sa fameuse définition d'une fonction « arbitraire » - cette définition peut se comprendre comme le cadre théorique de ce que Dirichlet a fait huit ans avant : « *Cette définition ne prescrit pas une loi commune aux différentes parties de la courbe [sic !] ; on peut imaginer qu'elle soit composée de parties très différentes ou qu'elle soit complètement arbitraire. Il s'ensuit que l'on peut considérer une telle fonction comme complètement déterminée dans un intervalle si elle est donnée par un graphe ou si ses différentes parties sont soumises à des lois mathématiques.* » (Dirichlet, 1837, 135sv)

Le 19e siècle a connu une discussion importante sur la notion de fonction arbitraire qui s'est continuée même au 20e siècle (par exemple entre Baire, Lebesgue, Borel et d'autres).

La méthode des monstres, c'est-à-dire de la construction expresse de fonctions avec des qualités inhabituelles, fut reprise par Riemann dans sa thèse d'habilitation (écrite en 1853/54). Riemann a passé la période décisive de ses études à Berlin où il a rencontré Dirichlet. Riemann justifie la nouvelle méthode par deux remarques : les fonctions bizarres peuvent servir à rendre les principes du calcul infinitésimal plus clair et ces fonctions sont appliquées dans d'autres domaines des mathématiques, en particulier dans la théorie des nombres (Riemann n'en cite aucun exemple !).

L'exemple le plus connu construit par Riemann est une fonction intégrable (dans le sens établi par lui-même) qui n'est pas continue sur un ensemble dense. La technique utilisée par Riemann a été souvent reprise après – par. ex. par H. A. Schwarz qui est ainsi arrivé à une fonction continue non-différentiable sur un ensemble dense.

Un élève de Riemann – Hermann Hankel – a publié en 1870 une méthode systématique qui sert à engendrer des fonctions bizarres : c'est son principe de la condensation des singularités. L'idée en est assez simple : prenez une fonction avec une singularité en 0. A l'aide d'une série, on va reproduire cette singularité sur tous les nombres rationnels. Il y a là des difficultés techniques dont l'étude fut un des points de départ des travaux de Cantor sur la théorie des ensembles. Sa compréhension moderne est formulée par Hankel d'une manière assez claire :

« *Pour y arriver [à la clarté sur la nature des fonctions] il faut avant tout analyser la multiplicité des relations possibles de deux variables qui sont contenues dans la notion de fonction de Dirichlet ; au cours de cette analyse il faut consacrer une attention particulière aux fonctions illégitimes qui jusqu'à aujourd'hui n'étaient point ou seulement peu étudiées.* » (Hankel, 1870, p. 68). C'est l'extrême qui nous donne l'idée d'une notion générale ! En passant je note qu'en allemand « illégitime » à cette époque qualifie la naissance dite « naturelle » en français (cf. l'expression française « enfant naturel ») – donc les fonctions citées sont une conséquence peu désirée de la notion générale de la fonction. Par conséquent

Hankel raisonne sur la possibilité d'exclure les êtres illégitimes par une définition restreinte de la notion de fonction.
Cinq ans après Hankel un autre mathématicien allemand, Paul du Bois-Reymond (le frère du fameux physiologue qui a lui même commencé sa carrière dans cette discipline), est arrivé à trouver un ordre dans toutes ces déviations : il décrit le système des fonctions réelles qu'on utilise jusqu'à nos jours. Il y a les fonctions générales (sans qualités explicites), les fonctions intégrables, les fonctions continues et les fonctions différentiables. Afin de démontrer que les deux dernières classes ne sont pas identiques, du Bois-Reymond se sert d'un exemple célèbre. C'est la fonction continue différentiable en aucun point, trouvée par Weierstrass en 1872.
Après 1870 l'activité dans le domaine des fonctions bizarres s'est accélérée. Même aujourd'hui, on trouve des articles contenant un exemple simple d'une fonction du type de Weierstrass. Donc surpasser les frontières apparentes imposées par l'intuition est resté une activité fascinante.

3. Faut-il familiariser le débutant avec le musée tératologique ?

J'espère que ma petite analyse historique a montré que la réponse à la question posée par Poincaré, est non, si on veut s'orienter selon le développement historique – c'est à dire si on se décide pour la méthode génétique. La pensée mathématique a longtemps fonctionné sans recours au musée tératologique en réfléchissant sur les cas paradigmatiques. On peut attendre le moment où les exceptions se présentent d'elles mêmes, au lieu de les introduire sans nécessité tout au début. (Cf. le bon mot de Poincaré : « *Il faut traiter les problèmes, qui se posent, et non pas les problèmes, qu'on se pose* ».) Une telle pensée peut se qualifier comme une pensée intensionnelle parce qu'elle fait attention à l'intension des concepts. L'orientation vers les énoncés généraux dans le sens qu'ils sont vrais dans un domaine sans exception – la pensée ensembliste ou extensionnelle parce qu'elle s'oriente vers l'extension des concepts – est un produit assez moderne. Si l'un opte pour un enseignement qui s'accorde aux standards des mathématiques contemporaines il n'y a pas de doute que le musée tératologique est à visiter tôt. Donc, la réponse à la question de Poincaré dépend d'un choix ou d'une décision qui n'est pas une question interne à la didactique. Mais, même si on veut suivre les idées modernes, une analyse historique aide à comprendre les difficultés éprouvées par les élèves de nos jours à s'habituer à la pensée mathématique moderne.

Bibliographie

ABEL N.H. (1826) Untersuchung über die Reihe
$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^2 + \cdots$, *Journal für die reine und angewandte Mathematik 1*, 311-339).

BLOOR D. (1978) Polyhedra and the Abonomination of Leviticus, *The British Journal for the History of Science,* **11**, 245-272.

CANGUILHEM G. (1972), *Le normal et le pathologique*, Presses Universitaires Françaises, Paris.

CAUCHY A.L. (1821) *Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique. 1ère partie. Analyse algébrique* – cité selon Œuvres complètes, IIe. Série, tome 3 (1897).

DASTON L. & PARK C. (2002) *Wunder und die Ordnung der Natur*.

DIRICHLET G. (1829) Sur la convergence des séries trigonométriques, *Journal für die reine und angewandte Mathematik 4*, 157-169.

DIRCHLET G. (1837) Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen, *Repertorium der Physik 1*, 152-174 - cité selon Werke, Tome 1 (Berlin, 1889), 133-160.

DU BOIS-REYMOND P. (1875) Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen…, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **79**, 21-37.

EULER L. (1783) *De eximio usu methodi interpolationum in serium doctrina* – cité selon Opera omnia, series primis, **15** (Berlin und Leipzig, 1927), 435-497.

FISCHBEIN E. (1993) The theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics*, **24**, 13-162.

HANKEL H. (1882) Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen, Gratulationsprogamm der Universität Tübingen 1870? *Mathematische Annalen,* **20**, 63-112.

HESSEL J.F.C. (1832) Nachtrag zu dem Eulerschen Lehrsatze von Polyedern, *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* **8**, 13-20.

LAKATOS I. (1976) *Proofs and Refutations*,Cambridge university Press, Cambridge.

LHUILIER S. (1813) Démonstration immédiate d'un théorème fondamental d'Euler sur les polyèdres, et exceptions dont ce théorème est susceptible, *Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg,* **4**, 271-301.

MEHRTENS H. (1990) *Moderne – Sprache – Mathematik,* Suhrkamp Verlag, Frankfurt a. M.

POINCARÉ H. (1889) La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement, *L'enseignement mathématique 1* – cité selon Œuvres tome 11 [Paris, 1953]), Gallimart, Paris.

POINCARÉ H. (1998/99) Les définitions mathématiques et l'enseignement, *Science et Méthode*.

POINSOT L. (1809) *Abhandlung über die Vielecke und Vielflache* – cité selon „Abhandlungen über die regelmäßigen Sternkörper" (1906).

RIEMANN B. (186x) Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 13*, 87 – 132 cité selon Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass" (1892 – réimpression New York 1953).

WEIERSTRASS K. (1895) Über continuirliche Functionen eines reellen Argumentes, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotient besitzen, *Matheamtische Werke.Tome 2* (réimpression Hildesheim/New York sans date), 71-74.

ZÜRCHER U. (2004) *Monster oder Laune der Natur*, Campus Verlay, Frankfurt/Main.

VOLKERT K. http://www.uni-koeln.de/ew-fak/Mathe/volkert/index.shtml, *Seminar für Mathematik und ihre Didaktik*, Universität zu Köln, Gronewaldstraße 2, 50931 Köln.

Remerciements

Les thèses proposées ici ont été développées pendant un séjour à Paris dans le cadre de l' « International program of advanced study » organisé par la Maison des Sciences de l'Homme (MSH) en collaboration avec Reid Hall (University of Columbia at Paris).
Je suis très reconnaissant à mes collègues Ph. Nabonnand (Nancy) et D. Flament (Paris) qui ont organisé ce stage et aux institutions mentionnées pour l'accueil si aimable. Pour des informations plus complètes on peut consulter l'article « Essai sur la tératologie mathématique » (à paraître dans un ouvrage collectif par le groupe cité ci-dessus). Le présent auteur veut aussi remercier Jean-Pierre Friedelmeyer (IREM de Strasbourg) pour son assistance dans des questions diverses en particulier de la langue française, Nicole Bopp (Directrice de l'IREM de Strasbourg), A. Kuzniak et F. Pluvinage rédacteurs en chef).

KLAUS VOLKERT
Université de Cologne
k.volkert@uni-koeln.de