Lucia Grugnetti, Achille Maffini, Carlo Marchini
Groupe « zeroallazero »

Activités didactiques à caractère vertical pour la construction du concept de limite[1]

Abstract. "Vertical" didactical activities for the construction of the concept of limit. This paper concerns the activities of a research group in mathematics education about the concept of limit. The main characteristic of this group is that all stages in schooling (primary – 6 to 10 years; middle school – 11 to 13 years, and high school – 14 to 19 years) are represented, both within the group itself and as regards the pupils involved. This vertical cross-section is a resource which is as rare as it is precious. It allows us, indeed, to propose similar activities at different levels, check the evolution of the ideas, techniques and errors of the schoolchildren over time, and observe the effect of the teaching methods on them. With the support of research in mathematics education, we chose some issues, in particular measurement and approximation, which, in our opinion, can favour the gradual early development of the concept of limit. In this context, we would emphasise the importance of approximation as a resource for the long way to build the concept of the limit.

Résumé. Cette présentation concerne l'activité du groupe « zeroallazero[2] » qui, dans l'Unité locale de recherche en didactique des mathématiques de l'Université de Parma, s'occupe du concept de limite. La caractéristique de ce groupe est de réunir des enseignants de tous les niveaux scolaires (de l'école primaire à la fin du lycée), ainsi que quelques chercheurs en didactique des mathématiques. Cette « verticalité » se révèle très précieuse. Elle nous permet de proposer des activités similaires aux élèves de différents niveaux, de vérifier les évolutions des idées, techniques et erreurs des élèves dans le temps, et d'observer les effets des méthodes d'enseignement sur eux. Les thèmes qui nous sont apparus comme les plus riches en possibilités didactiques pour construire le concept de limite sont ceux de la mesure, des suites et de l'approximation, qui, du fait de leur caractère vertical, permettent d'être abordé à plusieurs reprises et de plusieurs points de vue à des niveaux scolaires différents. Dans ce contexte, on veut mettre en évidence l'importance de l'approximation comme une ressource dans la longue construction du concept de limite.

Mots-clés. Concept de limite, approximation, activités didactiques verticales.

---

[1] Travail effectué dans le cadre des activités de l'Unité Locale de Recherche en Didactique des Mathématiques de l'Université de Parme.

[2] Zéro puissance zéro.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 11, p. 229 – 250.

1. Cadre théorique de la recherche

Comme on le sait bien, plusieurs recherches au niveau international ont relevé de nombreuses difficultés et obstacles liés au concept de limite. Les obstacles ainsi relevés peuvent être :

- d’ordre épistémologique (Brousseau, 1998 ; Sierpinska, 1985), dus à des raisons internes aux mathématiques mêmes ;
- d’ordre didactique (Artigue, 1998 ; Brousseau, 1998 ; CREM, 1995 ; Groupe AHA, 1999), dus aux pratiques d’enseignement peu efficaces ;
- d’ordre cognitif (Cornu, 1991 ; Dubinsky, 1991 ; Sfard, 1991 ; Tall & Vinner, 1981 ; Tall, 1996), dus aux processus d’abstraction et de conceptualisation impliqués ;
- d’ordre métacognitif (Zan, 2001, 2002), dus à l’ensemble des attitudes qu’adoptent les élèves dans leur rapport au savoir mathématique.

Notre recherche se focalise sur l’interaction entre les trois derniers aspects (didactique, cognitif et métacognitif) qui, évidemment, s’influencent réciproquement. On est parti de l’hypothèse, qui est raisonnable, mais qui ne semble pas avoir de partisans dans les manuels et les curriculums, selon laquelle les concepts complexes comme celui de limite ne peuvent être compris qu’à la fin d’un long travail didactique, qui doit se baser sur les intuitions spontanées et immédiates des élèves pour leur permettre de se construire un cadre cohérent et solide d’images mentales (Dallanoce et al., 2000 ; Alberti et al., 2000 ; Grugnetti, Rizza, 2003).

On a donc estimé nécessaire de proposer des activités diagnostiques pour permettre l’explicitation des idées intuitives et déterminer des pistes d’évolution graduelle. À la suite des résultats obtenus (Falcade, Rizza, 2003 ; Grugnetti, 2004), on a décidé de proposer des activités didactiques dans un esprit de continuité et de construction des savoirs selon un processus par approfondissements cycliques. Au niveau métacognitif il s’agit d’une sorte d’approche de la construction d’un concept.

La formation des concepts peut ainsi suivre le passage naturel du concret à l’abstrait. La formalisation ne sera plus vécue comme quelque chose qu’on impose mais elle apparaîtra comme une exigence fondamentale pour les élèves aussi :

> « Il est intéressant de construire l’analyse en termes d’objets mentaux jusqu’au moment où l’on perçoit que ceux-ci ne suffisent pas et où l’on peut comprendre les raisons qui imposent la formalisation en ε et δ » (CREM 1995).

Cette évolution n’est ni simple ni naturelle et souvent il y a des conflits importants entre les intuitions naïves et les concepts mathématiques en formation. Dans ce processus, on ne peut pas ignorer la dimension métacognitive : le manque de conscience en ce qui concerne ses propres préconceptions peut devenir un obstacle supplémentaire de l'apprentissage. Il faut donc prévoir des stratégies didactiques qui puissent favoriser d'un côté la conceptualisation et de l'autre la prise de conscience de la part de l'élève de son « monde intérieur » d'idées, convictions et peurs.

On considère les mathématiques élémentaires comme très riches d'opportunités pour se familiariser graduellement avec le concept de limite et on estime que l'école obligatoire peut jouer un rôle fondamental pour le développement d'images mentales qui favorisent son apprentissage.

Par nos recherches à caractère diagnostique on a relevé la présence précoce d'idées sur l'espace, la continuité et la limite qui ne sont pas soutenues dans le parcours scolaire d'une façon adéquate ; parcours scolaire qui est, en plus, souvent axé sur des automatismes et des formules pouvant amener à des convictions erronées et durables.

Les thèmes qui nous sont apparus comme les plus riches en possibilités didactiques sont ceux de la mesure[3], des suites et de l'approximation, qui, du fait de leur histoire complexe et captivante et de leur caractère vertical, permettent d'être abordés à plusieurs reprises, de plusieurs points de vue et à des niveaux scolaires différents.

2. Activités didactiques à caractère vertical

Dans l'esprit de construction à longue échéance, de l'analyse en termes d'objets mentaux, nous avons conçu des activités didactiques à caractère vertical autour de l'approximation dans ses deux aspects relevants : comme une importante catégorie mathématique en soi même et comme un moyen de « dominer » l'infini, passage nécessaire pour arriver à comprendre le concept de limite *« ... dans le champ de l'analyse, l'approximation devient un élément-clef de la conceptualisation*. (...) *Son statut est cependant souvent mal perçu par les étudiants, y compris les étudiants relativement avancés. »* (Kahane, 2002).

Pour chacune de ces activités nous avons défini un projet de recherche. Un de ces projets concerne seulement les élèves des dernières classes de l'école secondaire de deuxième degré pour arriver enfin au concept de limite.

2.1. Les projets

Le projet « Zénon » : vertical.
Le projet « Menon » : vertical.

---

[3] Voir aussi, comme référence concernant le concept de mesure, Brousseau, 2000.

Le projet « Ça casse ou ça passe » (Simulation éducative d'un jeu peu éducatif) : terminale

Pour le caractère spécifique de la rencontre du CREM, nous présentons ici les activités des deux premiers projets.

Le premier se base sur le problème que Socrate propose à son esclave, décrit dans le *Menon* de Platon, mais proposé d'une manière différente en fonction de l'âge des élèves.

Le deuxième se base sur le paradoxe de Zénon « Achille et la tortue » (AT) et sur un problème ayant comme titre « La Ferrari » (F), avec des énoncés qui changent en fonction de l'âge des élèves.

Par ces activités, nous voulons agir sur différents niveaux :

1) Introduire très tôt le thème de l'approximation ;
2) Développer les perceptions des limitations (même pratiques comme le sont les instruments de mesure dont on dispose en ce moment là) du milieu où l'on opère ;
3) Étudier comment l'évolution des instruments (théoriques et pratiques) utilisables dans un contexte « plus riche en connaissances » peut opérer dans la construction de nouvelles connaissances.

2.2. La méthodologie du travail en classe

Suivant les principes du socio-constructivisme nous sommes intéressés aux choix des élèves lorsqu'ils cherchent à résoudre les problèmes proposés et à leurs difficultés, plutôt qu'aux solutions elles-mêmes.

Chaque activité de chacun des projets est proposée en classe par deux enseignants, dont l'un a le rôle d'observateur.

Les catégories d'enseignants concernés font référence à deux macros distinctions : Chercheurs/non chercheurs licenciés en mathématiques/non licenciés en mathématiques.

Il y a donc quatre catégories de référence et nous prenons en compte ce paramètre dans l'analyse du déroulement des activités en classe, comme le dit Roditi (2005) « *Dans une situation d'enseignement, le professeur s'engage personnellement. Des logiques inconscientes s'y manifestent nécessairement. (...) Dans une classe de Sixième, les interactions entre le professeur et les élèves comportent nécessairement une dimension affective qui n'est pas négligeable* ».

Chaque enseignant a une épistémologie implicite de référence qui induit certaines « convictions » qui, évidemment, ont une influence sur l'activité en classe (voir par exemple aussi Thompson, 1992 ; Ernest, 1989 ; Zan, 2003).

Nous essayons donc d'organiser notre recherche et notre travail sur deux niveaux : l'un qui concerne les apprentissages des élèves à partir d'une activité ayant les caractéristiques d'une situation-problème et l'autre qui concerne le déroulement de cette activité dans une pratique de classe, et tout ceci également en vue d'une formation en service.

2.3. Le projet « Zénon »

Les énoncés du problème de la Ferrari

La Ferrari (F1 : 5e primaire)

Le 1er janvier 2005 Cirillo a fêté son anniversaire et il a reçu 50 €. Depuis longtemps il rêve d'acheter la maquette de la Ferrari qui coûte 100 € ; il décide alors de mettre cette somme de côté pour l'achat de la voiture de ses rêves et d'ajouter 25 € l'an prochain, 12,50 en 2007 et ainsi de suite. Il ajoutera ainsi chaque année la moitié de la somme économisée l'année précédente.

Cirillo arrivera-t-il à acheter la maquette de la Ferrari ? Et après combien d'années ?

La Ferrari[4] (F2 : collège[5] et deuxième année du Lycée)

Depuis longtemps, Cirillo et Antonio rêvent chacun de s'acheter une belle Ferrari rouge. Mais cette voiture coûte 100000 € et ils n'ont pas l'argent nécessaire. Nous sommes en l'an 2000. Cirillo vient d'hériter 50000 €. Il décide de mettre cette somme de côté pour l'achat de la Ferrari, d'y ajouter 25000 € l'an prochain, 12500 € en 2002 et, ainsi de suite. Il ajoutera ainsi chaque année la moitié de la somme économisée l'année précédente. Antonio n'a pas fait d'héritage, mais il décide d'épargner 30000 € en 2001, il ajoutera la moitié de cette somme en 2002, le tiers en 2003, le quart en 2004, le cinquième en 2005 et ainsi de suite. Chaque année, il ajoutera donc une somme équivalente à 30000 € divisé par le nombre formé des trois derniers chiffres de l'année.

Qui arrivera à acheter la Ferrari ? Et quand ? Donnez les détails de vos calculs.

---

[4] Un énoncé semblable du problème à été utilisé dans le RMT 2000.

[5] En Italie le Collège concerne les trois années qui suivent les cinq ans d'école primaire.

La Ferrari (F3 : quatrième année de lycée)

Antonio veut acheter une Ferrari qui coûte 100000 €. Il décide qu'en 2005 il mettra sur son compte en banque 40000 €, en 2006 il ajoutera la moitié de cette somme, en 2007 un tiers, en 2008 un quart, en 2009 le cinquième et ainsi de suite. Chaque année il ajoutera donc une somme équivalente à 40000 divisé par le nombre qui correspond au nombre de dépôts bancaires effectués. Mais, pendent ce temps, la Ferrari a subi chaque année une augmentation de prix de 3% par rapport a l'année précédente (taux composé).

Antonio arrivera-t-il à s'acheter la Ferrari ? Et après combien de temps ?

Et si l'augmentation avait été de 2%? Est qu'il y a un taux maximal qui permet à Antonio de s'acheter au moment donné la Ferrari avec son plan d'épargne ?

Les énoncés du paradoxe « Achille et la tortue »

Achille et la Tortue (AT1 : 5e primaire et première année du collège)

Achille (A) (bien connu pour sa rapidité) et une Tortue (T) (manifestement lente) décident de faire une course. Achille est généreux et accorde à T un avantage de 20 m. En outre A est si sûr de soi qu'il décide de courir seulement deux fois plus vite que T (c'est-à-dire que, pendant que T parcourt un mètre par seconde, A en parcourt 2). Pendant qu'A parcourt les 20 m qui le séparent de T, combien de mètres a parcouru T ?
Combien de temps utilisera maintenant A pour aboutir au nouveau point occupé par T ? Et pendant ce temps, combien de mètres a parcouru T ?
Est tu capable de prévoir le résultat de la course ? Sur qui paries-tu, pourquoi ?

Achille te la Tortue (AT2 : deuxième et troisième année du collège et première année du Lycée)

Achille (A) (bien connu pour sa rapidité) et une Tortue (T) (manifestement lente) décident de faire une course. Achille est généreux et accorde à T un avantage de 20 m. En outre A est si sûr de soi qu'il décide de courir seulement deux fois plus vite que T (c'est-à-dire que, pendant que T parcourt un mètre par seconde, A en parcourt 2).
Pendant qu'A parcourt les 20 m qui le séparent de T, combien de mètres a parcouru T ?
Combien de temps utilisera maintenant A pour aboutir au nouveau point occupé par T ? Et pendant ce temps, combien de mètres a parcouru T ?
En continuant de cette façon, qu'est que lui peut arriver ? A pourra-t-il rattraper T ? Si oui, combien de mètres aura-t-il parcouru ? Si non, pourquoi ?
Donne une représentation (à l'échelle) de la situation, en utilisant des segments pour indiquer les parcours de A et de T.

Achille et la Tortue (AT3 : deuxième année du Lycée)

Une Tortue, qui en a assez d'être considérée comme un animal lent, décide de démystifier ce ragot en défiant Achille, bien connu pour sa vélocité. Dans ce but, elle propose à Achille un pari : « Tout le monde sait que tu es l'homme le plus rapide au monde. Mais je te promets que si tu me donnes un très petit avantage dans une course, moi, je gagnerai toujours car tu ne pourras jamais me rattraper. J'en suis tellement sûre que je suis disposée à parier n'importe quelle somme».
Achille éclate de rire et lui répond : « Tu bats breloque, mais si tu as de l'argent à perdre, faisons ce pari pour 100.000 deniers. Je te donnerai 100 m d'avance et je suis tellement sûr de gagner que je ne m'appliquerai pas trop : ma vitesse ne sera que le double de la tienne ».
« Ça va bien » répond la Tortue «je sais que j'ai déjà gagné, si tu veux, je t'explique pourquoi, comme ça, tu pourras me donner tout de suite l'argent et éviter de faire piètre figure (et aussi une fatigue inutile) »
Achille, plus intrigué qu'inquiet, accepte que la Tortue lui explique son idée. « Pendant que tu parcourras les 100 m que tu me donne comme avantage, moi je parcourrai 50 m ; mais quand tu en auras parcouru ces 50 m, moi j'en aurai parcouru 25, ...».
Achille commence être inquiet et il pense qu'il a choisi une vitesse trop faible. La Tortue ajoute : « Et même si tu allais 10 fois plus vite que moi, rien ne changerait. En effet, pendant que tu parcourras les 100 m que tu me donnes comme avantage, moi je parcourrai 10 m ; mais quand tu auras parcouru ces 10 m, moi j'en parcourrai 1, ... ».

Selon toi, convient-il à Achille de faire la course ?
Et s'il accepte, qui gagnera le pari ?
Y a-t-il quelque chose qui change si le rapport entre la vitesse d'Achille et celle de la Tortue varie ? Et si c'est l'avantage initial de la Tortue qui varie ?
Toi, sur qui parierais-tu ?
Comment ferais-tu pour savoir qui gagne la course ?

Analyse a priori des deux activités

Le paradoxe « Achille et la tortue » (AT) convient au développement de nos buts du point de vue de l'éveil de la curiosité des problématiques concernées. L'activité didactique basée sur le problème de la Ferrari (F), implique des aspects similaires mais avec des particularités différentes :

– en ce qui concerne F, il y a un point d'arrivée statique (le montant nécessaire à l'achat de la Ferrari, comme on verra plus loin) et une modalité dynamique pour l'atteindre. Le fait de travailler dans un domaine discret induit des questions sur la difficulté d'un partage (infini) en plus du sens de ce partage infini.

La question posée aux élèves est donc centrée sur l'atteinte d'un but (l'achat de la voiture), mais le problème demande, d'une façon implicite, l'analyse du processus nécessaire pour l'atteindre[6]. Il s'agit d'une occasion significative pour un examen des « conditions complémentaires » d'un problème. En particulier, on peut mettre en évidence deux questions concernant le montant peu à peu mis de côté : Cirillo et Antonio arriveront-ils à mettre de côté un montant déterminé ? Et dans ce cas, lequel ? Cet aspect du problème induit, d'un point de vue théorique, deux questions cruciales : Est-ce que la somme d'un nombre infini de termes peut exister ? Et, dans ce cas, comment peut-on la déterminer ? En ce qui concerne Cirillo, la réponse peut être déstabilisante. En effet, dans les activités à caractère diagnostique dont on a parlé auparavant, des difficultés à imaginer un résultat fini d'un processus infini sont apparues ;
- en ce qui concerne AT, il y a un point d'arrivée dynamique dans un contexte dynamique et cette composante augmente la complexité du problème, qui, en même temps, devient plus significatif, en entraînant des activités de mouvement qui sont plus proches de la réalité des élèves.

Il vaut la peine de souligner que dans ce cas, à cause de la typologie du problème, ce qui dans la Ferrari était un sous-problème possible (l'existence et la détermination de la possible limite finie de la série correspondante), représente ici la question essentielle.

En définitive, c'est comme si le dynamisme du problème pouvait aider à déplacer l'attention sur le processus et sur le comportement relatif, et aider ainsi, par l'interprétation sémantique de la suite des sommes partielles, la construction des images mentales essentielles au développement du concept de limite.

2.4. Le projet Menon

Les énoncés du problème de Menon

M1 (5e primaire)

(A) Vous avez un carré blanc et 4 paires de carrés en couleur. Les carrés sont tous égaux entre eux. Vous devez construire un carré dont l'aire est le double du carré blanc.

---

[6] Nous pensons qu'il est utile souligner la distinction entre ce qui arrive et la façon d'y arriver. Par exemple, le plan d'épargne choisi permettra à Antonio d'acheter la voiture (but), justement parce qu'il ne produit pas une série convergente.

Pour y arriver utilisez tout le carton d'une des paires de carrés en couleur, qu'il faut couper et coller sur une feuille de papier blanc.

Si vous n'y arrivez pas, essayez avec une autre paire de carrés en couleur

(B) Vous avez un carré blanc et 4 paires de carrés en couleur. Les carrés sont tous égaux entre eux. En utilisant 2 carrés de la même couleur, est-ce que vous arriverez à en construire un autre, dont l'aire est le double de celle du premier (en coupant et en collant les différentes pièces sur une feuille de papier blanc) ?

Si vous pensez que vous pouvez y arriver, mais que vous vous êtes trompés, essayez avec une autre paire de carrés de la même couleur.

On donnera aux élèves, qui doivent travailler en groupe, des carrés isométriques au premier carré (par exemple de 10 cm de côté), une règle non graduée, un crayon et des ciseaux. Les élèves peuvent couper les carrés de manière variée et recomposer les parties comme ils veulent pour résoudre le problème.

Quand ils auront collé les parties sur une feuille de papier, ils recevront une règle graduée et l'on demandera qu'ils mesurent le coté du carré qu'ils ont obtenu.

M2 (collège)

Un carré de côté 2 est donné. Trouve la mesure du côté d'un carré ayant l'aire double de celle du carré donné).

On propose de parcourir les phases du dialogue de Platon. L'enseignant assume le rôle de Socrate et la classe entière celui de l'esclave. Les élèves ne connaissent pas ce dialogue.

M3 (Lycée)

Lecture du dialogue de Platon.

La lecture du dialogue de Platon est faite sur deux niveaux : épistémologique et « technique ».

Analyse a priori de l'activité

Dans son développement vertical, l'activité permet :

- la construction de carrés par manipulation et la détermination d'informations qui viennent des carrés eux-mêmes ;
- la construction de suites d'approximations. La construction de telles suites, basée sur des méthodes adaptées à la réalité scolaire où on les a proposées, a été vue comme modalité de travail et comme moyen pour approximer. Le but est aussi de voir les approximations successives comme outil (mathématique) qui met en évidence l'inadéquation de la règle comme

instrument (physique) pour déterminer la mesure de la diagonale. La construction des suites d'approximation se présente ainsi comme un premier pas vers le passage du processus à l'objet en ce qui concerne le concept de limite. L'aspect physique de l'objet demandé, met en deuxième plan la question de l'existence de la limite. Mais cet aspect sera opportunément repris au cours de la phase suivante.

- la conjecture d'impossibilité et la preuve de l'impossibilité d'avoir une réponse à ce problème sous forme de nombres rationnels ;
- le passage des nombres rationnels aux nombres réels comme domaine où l'on peut trouver la solution du problème sur un plan théorique (de l'infini potentiel a l'infini en acte) ;
- le retour aux nombres rationnels comme domaine de réponse (en termes de réalité) au problème ; le rôle de l'approximation.

2.5. Les variables didactiques et « de contexte »

En ce qui concerne le problème de la Ferrari :

	5e Primaire	*Collège et deuxième année du Lycée (2)*	*Quatrième année de Lycée (3)*
Variables	– Un seul personnage pour un seul achat : « convergence » ; – le prix de la Ferrari : maquette pour 100 € (pour l'école primaire).	– Deux personnages pour deux situations d'achats différentes : « convergence » et « divergence » ; – le prix d'une Ferrari : 100000 €	– Un seul personnage pour un seul achat, mais avec des pourcentages d'augmentation : « convergence », « divergence », « indétermination » séries géométriques et séries harmoniques

Les raisons des variables choisies :

(1) On pense qu'au niveau primaire des nombres trop grands peuvent démotiver ou bloquer les élèves.

(2) En introduisant le « problème d'Antonio » on permet la comparaison entre deux modalités différentes (deux séries différentes).
En demandant de « montrer les calculs » on propose aussi une procédure opératoire.
L'éventuel usage de l'ordinateur devrait porter l'attention sur la construction des deux séries.

(3) Le prix visé n'est plus fixe, mais variable et le modèle devient plus complexe : comparaison avec une fonction exponentielle. Les changements du taux conduisent à des réponses différentes en relation avec l'existence d'une solution.

Finalement, par le taux de 2% on voudrait mettre en évidence qu'Antonio arrive au montant demandé (entre la 17e et 21e année), mais que s'il ne profite pas « de l'instant qui passe », il ne peut plus acheter (problème d'intersection).

En ce qui concerne le problème d'Achille et la Tortue :

	5e Primaire et première année du Collège (1)	*Deuxième et troisième année du Collège et première année du Lycée (2)*	*Deuxième année du Lycée (3)*	*Quatrième année de Lycée (4)*
Variables	– Vitesse de A double de celle de T	– Vitesse de A double de celle de T ; – représentation graphique demandée	– En forme de dialogue avec un défi	– Formulation d'Aristote

Les raisons des variables choisies :

(1) - (2) Avec ces donnés-là, les distances parcourues par Achille ne sont pas soumises à des approximations successives. En plus, par ces données, chaque valeur calculée se termine par le chiffre 5 et l'on facilite ainsi la conjecture selon laquelle les décimales ne finissent jamais, même si on peut « quantifier » le parcours en 40 m (en particulier au collège).

(3) La modalité du dialogue devrait permettre le passage de la problématique « rattrapage » à celle des raisons du rattrapage.

(4) Le problème passe à un niveau plus abstrait, sur les modalités de résolution (et non sur la solution)

En ce qui concerne Menon :

	5e Primaire	*Collège*	*Lycée*
Variables	– Construction par manipulation du carré d'aire double d'un carré donné ; – Deux énoncés différents : dans le premier l'on tient pour sûr que la solution existe, dans l'autre on demande si elle existe *(1)*.	– On parcourt les phases du dialogue de Platon *(2)*.	– Lecture du dialogue de Platon *(3)*.

Les raisons des variables choisies

(1) La manipulation, très utilisée (en Italie) dans ce niveau scolaire, devrait permettre une entrée plus simple.
Les choix des mesures des côtés ont été faits pour éviter que le modèle proportionnel ne conditionne trop les réponses (sans passer par les rapports).
Les deux versions différentes (existence de la solution donnée ou existence non donnée) sont proposées dans des classes différentes, mais « parallèles », pour vérifier si et comment cette variable a de l'effet sur les réponses et la mise en commun.

(2) On veut vérifier si, dans le milieu « classe », il est possible de reconstruire les problématiques et les conceptions erronées proposées par Socrate dans le dialogue : la variable « dialogue » devrait induire un parcours « déductif » dans lequel il faut faire des vérifications sur des hypothèses.

(3) Par la lecture directe du dialogue, on essaye de faire apparaître les deux registres : épistémologique et « technique », pour arriver à construire des suites d'approximations.

3. Quelques résultats

Jusqu'à maintenant, les activités didactiques ont été proposées dans des classes d'école primaire et du Collège. En ce qui concerne l'école secondaire supérieure, on n'a pu travailler que sur le projet Menon et dans une seule classe de troisième année de lycée (élèves de 16 ans). On compte poursuivre la recherche en présentant les projets dans d'autres classes durant l'année scolaire 2005/06.

Bien que les résultats soient provisoires et incomplets, nous signalons ici ceux qui nous semblent déjà importants comme indicateurs significatifs de la direction à suivre dans la suite du travail.

3.1. Modifications de la part des élèves

Les élèves proposent de modifier les conditions posées par les problèmes pour se les approprier dans leur réalité car, autrement, les réponses seraient difficiles à trouver. Dans cette façon de procéder on peut relever, comme on le mettra en évidence dans l'analyse spécifique des activités, des attitudes de type métacognitif.

Menon : Voir dans la figure obtenue un carré même s'il y a des approximations évidentes dans la construction : souvent il n'y avait pas l'égalité des côtés. Les élèves réalisent ainsi un processus d'abstraction : les propriétés qu'ils « voient » dans la figure « la ramènent à un carré », malgré des erreurs évidentes de construction. Il nous semble que cette attitude montre que l'approche manuelle (empirique) de la question peut être « surmontée » par l'approche mentale, en se rendant compte ainsi, implicitement, des limitations de la première.

Ferrari : Le rôle du temps (on veut encore acheter la voiture après de nombreuses années ?), du vendeur et du rabais. Tendance à mettre des conditions pour que l'on puisse procéder à l'achat.

> *« Il la réserve et il la paye quand il y aura les soldes. »* (École primaire)
>
> *« Quand il n'y a plus que 3 centimes à payer, il est plausible que quelqu'un les lui prête sans en faire d'histoires. »* (Collège - III)
>
> *« Le vendeur pourrait faire un rabais. »* (École primaire)

À propos du rabais, il faut souligner qu'il a été utilisé (en prévoyant ce rôle dans le projet de l'activité) comme un instrument pour la formalisation du concept de limite «selon le modèle de Weierstrass ». En effet, lorsqu'on fixe le rabais (qui correspond à l'analogue de ε sur la variable dépendante), il s'agit d'établir l'année (minimale) à partir de laquelle il sera possible pour Cirillo d'acheter la voiture.

Bien loin de vouloir introduire très tôt ce genre de formalisation, notre but est plutôt celui d'habituer les élèves à considérer d'abord la variable dépendante, dans la tentative de favoriser l'acquisition successive du concept de limite. L'espoir est celui d'induire une attitude[7] qui puisse être utile à comprendre la définition de la limite de Weierstrass.

Nous avons mis en évidence, dans ce même paragraphe, le rôle que le rabais a eu dans le déroulement de l'activité car dans la plupart des cas, les élèves mêmes l'ont posé comme condition.

> *« C'est évident que le vendeur fera un rabais. Si on pense qu'il ne manque que très peu de centimes... »* (Collège-III)

Selon nos intentions, le rabais, au niveau du collège, avait aussi la tâche d'activer, d'un point de vue métacognitive, des conditions de choix responsable ; le prix avec le rabais pouvait être considéré comme une approximation du prix de la voiture, et ainsi le choix du rabais aurait pu devenir un choix d'approximation.

Achille et la Tortue : certains groupes modifient la consigne, en rendant « indépendants[8] » les mouvements de A et de T, en trouvant ainsi 40 m comme

---

[7] Le domaine de référence est le domaine métacognitif.

[8] En effet, les mouvements d'Achille et de la Tortue sont indépendants, mais c'est bien quand on pense au mouvement d'Achille comme « relatif » a celui de la Tortue (c'est comme si Achille avait des buts successifs) que le paradoxe surgit. Le problème philosophique se déplace ainsi sur les différentes modalités par lesquelles on regarde la réalité.

distance parcourue par A pour rattraper T. Le problème n'est plus dynamique mais statique : Est-ce que A réussira à parcourir 40 m en continuant à partager en deux l'espace parcouru ? Le problème, de cette façon, se réduit à celui de la Ferrari.

> *« Le problème ressemble à celui de la Ferrari car on doit toujours diviser par 2. »* (École primaire)

3.2. Instruments inadéquats

Les élèves entrevoient que les instruments dont ils disposaient jusqu'à ce moment-là et qu'ils utilisent pour essayer de donner une réponse ne sont plus adéquats. Et cela rend possible l'introduction de nouveaux registres de représentation, « plus efficaces ».

Menon : La tendance générale, bien que les consignes l'interdisent, consiste à utiliser la règle graduée. Ceci met en évidence une tendance à identifier le segment (le côté du carré) avec sa mesure.

> *« Il s'agit d'une longueur, donc il [le côté] existe : Nous pouvons le mesurer à la règle. »* (Collège-II)

> *« Le nombre doit forcément exister, autrement il y aurait un trou dans la ligne des nombres. »* (Collège-II)

Il est aussi intéressant d'observer que les premières tentatives, en particulier en cinquième primaire, consistent à découper les carrés en rectangles (ou en carrés). Une première motivation de cette attitude doit être recherchée dans une « analogie » avec la figure du départ (on part d'un carré et l'on pense que le découpage doit être en carrés ou rectangles). Mais un enfant a aussi observé qu'il a utilisé une figure carrée comme essai pour trouver l'unité de mesure adéquate car il a pensé qu'il aurait été suffisant de couper des carrés « assez petits ». À la question : mais comment fais-tu pour savoir quel est le carré d'aire double, si tu ne connais pas la mesure du côté ? Il a répondu « mais comment je peux connaître le côté si je n'avais pas le carré et si je n'ai pas la mesure ? » Dans ce genre de réponse, il est intéressant de remarquer l'attitude « philosophique » de l'enfant : Quelle est la priorité, dans la construction de la connaissance, des problèmes d'existence des figures ? Les figures sont-elles construites (selon une conception euclidienne) ou existent-elles déjà et, dans ce cas, en déduit-on les éléments spécifiques ?

Un autre aspect à prendre en considération, dans le cas des élèves plus âgés (12 ans[9]) concerne l'usage de la calculatrice : le passage de la confiance dans l'instrument quand on cherche la solution (c'est-à-dire la mesure du côté du carré d'aire double de celle du carré de côté 2, exprimée par √8) à la mise en discussion de sa validité. Ce passage a permis de reconnaître l'inadéquation de l'instrument du point de vue pratique et aussi conceptuel ; c'est aussi une manière d'induire les élèves à observer d'une façon critique les résultats obtenus. Le problème de l'existence de « l'irrationnel » devient avant tout un problème de « non-existence » du rationnel ; la non-existence demande une quantification universelle sur les nombres rationnels[10]. Lorsqu'on peut aborder la preuve de la non-rationalité, celle-ci est perçue comme une condition d'économicité et de certitude.

À ce propos, on présente des réponses des élèves :

> *« Bien que le résultat s'approche beaucoup de 8, la mesure du côté n'est pas précise[11]. »* (Collège-II)
>
> *« Mais avec les instruments qu'on avait nous n'arrivions pas à calculer le côté et, en continuant à faire de nombreux essais nous nous demandions si le nombre existait vraiment. »* (Collège-II)
>
> *« Le professeur nous a prouvé que le nombre n'est pas rationnel ».* (Collège-II)
>
> *« ... on n'arrive jamais à la fin, alors nous nous sommes demandé : mais ce nombre existe-il vraiment ?* (Collège-II)
>
> *« Selon moi, la racine n'existe pas car on peut trouver une infinité de chiffres je m'approche, mais je ne la trouve pas. »* (Collège-II)
>
> *« En continuant comme ça[12] je trouve des valeurs toujours plus près de 8 par défaut ou par excès. »* (Collège-III)

Achille et la Tortue : Difficulté « physique » à voir des « petits » écarts et difficulté à raccorder un processus infini (l'addition des espaces parcourus par Achille) avec un résultat fini (la somme).

---

[9] Des réponses de ce genre ont été données aussi au niveau du lycée. L'analyse de l'expérience à ce niveau scolaire fera l'objet d'une autre publication.

[10] En effet, les termes des suites sont des nombres rationnels qui semblent « ne pas arriver » au résultat.

[11] L'élève fait référence à l'essai qu'elle a fait avec la calculatrice et à l'élévation au carré.

[12] C'est à dire, en partageant en deux l'intervalle des valeurs qui donnent des approximations par défaut et par excès.

« Comment peut-on mettre en évidence l'écart entre A et T quand il s'agit de millimètres ou d'encore moins ? » (École primaire)

« Mais comment puis-je faire pour être sûr que la somme de toutes les parties soit vraiment 4 m ? » (Collège-I)

« Il n'est rien arrivé de plus par rapport à ce qu'on avait trouvé en classe[13]*.»* (Collège-I)

« En considérant la réalité, certainement A rattrapera T car les nombres décimaux sont très petits et ils sont impossibles à mesurer. » (Collège-I)

« Cette distance devenait peu à peu toujours plus petite, mais elle y était toujours. » (Collège-I)

3.3. Hypothèse d'approximation

Les élèves font des hypothèses d'approximation et ça peut être surprenant car l'école, en général, ne traite pas ces aspects mathématiques. On passe de cette façon au domaine subjectif de chaque élève. Ces hypothèses d'approximation sont en effet le noyau de base des activités que nous proposons qui se rattachent préalablement plus à des intuitions et à des préconceptions plutôt qu'aux habilités mathématiques acquises à l'école.

Menon : comme on l'a dit dans le paragraphe précédent, on peut entrevoir de la part des élèves, la nécessité de l'approximation comme une façon de gérer pratiquement la situation.

« Selon moi la racine n'existe pas car on peut trouver un nombre infini de chiffres, je m'approche, mais je ne la trouve pas. » (Collège-II)
« Rapport égal à environ 1,41. On peut l'accepter car si j'y mets des morceaux plus petits, on ne les voit même pas. » (École primaire)

Ferrari : Le contexte « euro » et la gestion des décimaux : dans ce cas-là les hypothèses d'approximation sont gérées sur un plan sémantique. Les choix que les élèves font sont strictement liés aux objets et aux valeurs (discrets) qui sont concernés.

« On doit arrondir, c'est-à-dire joindre les décimaux... peut être, il y a un euro et 99 centimes et alors il en a deux. » (École primaire)

Achille et la Tortue : différence entre le domaine conceptuel et le domaine physique.

---

[13] La référence est à un essai fait dans la cour de l'école qui avait le but de simuler, par deux enfants, la course de A et T.

« Théoriquement, A devrait rattraper T, mais si on continue les décimaux, ça sera très difficile. » (Collège-I)

3.4. Idées de limite et d'infini

D'une manière plus au moins consciente, des références à l'idée d'infini (potentiel et en acte) et à l'idée de limite apparaissent.

Menon : Premières allusions aux « conditions de complétude » pour un ensemble de nombres et au « concept de limite ». Ce dernier, en particulier, n'est pas seulement vu et vécu du point de vue technique, mais il doit d'abord être « pensé » en relation avec les présupposés culturels sur lesquels le concept s'appuie; ceci vaut aussi et surtout sur le plan didactique pour comprendre la nécessité de faire des choix du genre « philosophique », qui font référence à des formes en acte plutôt que potentiels d'infini par rapport à sa représentation. Il nous semble que les résultats obtenus renforcent notre idée de la présence, déjà à partir de l'école primaire, des présupposés philosophiques qui sont à la base des concepts mathématiques complexes tels le concept de limite.

« Les valeurs du tableau s'approchent toujours plus, donc il y aura bien le nombre auquel ils arrivent. » (Collège-II)

« Enseignant : selon vous, les valeurs continueront-elles à « sautiller » ainsi ?

Élève : Elles tendent ...à faire comme ça. Elles tendent à s'approcher de celle qui devait être la mesure. » (Collège-III)

Ferrari : Dans le procédé, on entrevoit une conclusion « en acte » possible dans une optique « limite »

« A1 : selon moi, il n'arrive jamais à zéro.

A2 : Oui, il y arrive.

A1 : Non, il n'y arrive pas : si tu divises toujours par 2, le dernier chiffre est toujours 5, jamais zéro. » (Collège-III)

Achille et la Tortue : Le traitement de l'activité a été fait en construisant aussi des tableaux sur lesquels les espaces parcourus par Achille et la distance d'Achille de la Tortue étaient représentés. L'analyse des tableaux a mis en évidence l'usage de termes qui font référence au concept de limite : par exemple, par leur tableau, les élèves se rendent compte que, une fois fixée une différence « petit », il existe une « étape » à partir de laquelle la différence entre Achille et la Tortue est plus petite de ce qu'il avait été fixé. Ils font aussi référence au concept d'infini, considéré comme « le responsable » des difficultés relevées dans ces problèmes-là.

> *« À partir d'un certain point, la différence peut être négligée. »* (Collège-III)

> *« Dans la réalité, les différences peuvent être considérées comme nulles, même quand elles ne le sont pas. Par contre, au niveau théorique, nous devrons nous heurter contre cette augmentation de chiffres décimaux qui amène...à l'infini ![14]»* (Collège-III)

> *« Le paradoxe de A et T est difficile car il cache l'infini ! »*(Collège-III)

> *« Cette distance devenait de plus en plus petite, mais elle y était toujours... c'est vrai car l'écart se réduit toujours de la moitié et il n'arrive jamais à zéro, mais les distances deviennent très petites, même non-mesurables. »* (Collège-I)

4. Un premier bilan

Comme on l'a déjà souligné, notre recherche expérimentale, qui concerne l'introduction précoce et « en verticale » de la pensée en termes d'approximation, que l'on considère être un élément-clé dans la construction du concept de limite n'est qu'à son début. Tout de même, quelques résultats non négligeables commencent à apparaître, comme le montrent, par exemple, les hypothèses d'approximation que font les élèves, même très jeunes. Et, par rapport au premier but de la recherche : « introduire très tôt le thème de l'approximation » (voir § 2) on a là une première réponse.

De même, en ce qui concerne le deuxième but : « développer les perceptions des limitations (même pratiques comme le sont les instruments de mesure dont on dispose en ce moment là) du milieu où l'on opère ».

Par contre, dans cas du troisième but : « étudier comment l'évolution des instruments (théoriques et pratiques) utilisables dans un contexte « plus riche en connaissances » peut opérer dans la construction de nouvelles connaissances », il faudra attendre la suite de l'expérimentation dans les classes de lycée, qui sera mise en place, comme on l'a dit plus tôt, au cours l'année scolaire 2005/06. Finalement, dans les réponses et commentaires des élèves auxquels les activités des projets « Zénon » et « Menon » ont été proposées, on retrouve aussi des traces de comportements du type métacognitif lorsqu'ils proposent de modifier les conditions posées par les problèmes pour se les approprier dans leur réalité.

Ces premiers résultats partiels nous offrent quand même la possibilité de comprendre sur quelles variables il faut intervenir de façon à rendre les activités

[14] Les élèves sont arrivés à cette conclusion après avoir fait des comptes sur les distances qu'on peut considérer nulles, sur la base des temps qu'on peut relever dans les concours sportifs.

plus efficaces du point de vue de leur exploitation didactique aussi dans un but de « continuité ». En effet, parmi les aspects qu'on a observés en travaillant avec les trois projets dans différentes classes, il faut souligner le fait qu'il y a eu des réactions et des observations communes à des élèves de niveaux scolaires différents. Nous nous sommes donc demandés quels résultats on aurait obtenus si on avait proposé les activités à des mêmes classes au cours d'années successives de leur parcours scolaire. Cet aspect aussi sera une des conditions à vérifier à partir de la prochaine année scolaire.

Le parcours qu'on a initié est certainement long et, d'un certain point de vue, ambitieux, mais on est convaincu que pour construire un concept aussi complexe et, en même temps aussi important, que celui de la limite, il faut une structuration « dynamique » qui permet de s'approcher du concept, en faisant continuellement appel aux connaissances contingentes des élèves. Le prix à payer, si l'on veut mener une telle recherche, est celui d'avoir toujours des résultats partiels à montrer, qui deviennent peut-être définitifs … à la limite.

Bibliographie

ALBERTI N., ANDRIANI M. F., BEDULLI M., DALLANOCE S., FALCADE R., FOGLIA S., GREGORI S., GRUGNETTI L., MARCHINI C., MOLINARI F., PEZZI F., RIZZA A., VALENTI C. (2000) Sulle difficoltà di apprendimento del concetto di limite, *Riv. Mat. Univ. Parma*, **(6) 3***, 1-21.

ANDRIANI M.F., DALLANOCE S., FALCADE R., FOGLIA S., GREGORI S., GRUGNETTI L., MAFFINI, A., MARCHINI C., RIZZA A., VANNUCCI V. (2005) *Oltre ogni limite: percorsi didattici per insegnanti spericolati*, Pitagora Editrice, Bologna.

ARTIGUE M. (1998) L'évolution des problématique en didactique de l'analyse, *RDM*, **18 (2)**, 231-262.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G. (2000) Les différents univers de la mesure et leurs situations fondamentales. Un exemple d'utilisation de la théorie des situations pour l'ingénierie, *Quaderni di ricerca didattica del GRIM*, Palermo, **9**, 125-133.

CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) (1995) *Les Mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans*, Edizione italiana a cura di L.

CORNU B. (1991) Limit, *Advanced Mathematical Thinking*, D. Tall (ed.), Kluwer Academic Publisher, 153-166.

DALLANOCE S., GRUGNETTI L., MOLINARI F., RIZZA A. et al. (2000) A cognitive co-operation across different sectors of education, en Ahmed, Kraemer,

WILLIAMS (eds.) *Proceedings of CIEAEM 51*, Chichester, Horwood Publishing, 297-303.

DAUMAS D. (1990) *Sur la démonstration de l'irrationalité chez les grecs, en La démonstration mathématique dans l'Histoire*, in Actes du 7e Colloque Inter-IREM Histoire et Épistémologie des Mathématiques, Besançon, mai 1989, 389-423.

DUBINSKY E. (1991) Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, en D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical thinking, 95-126*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

DUVAL R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Sciences Cognitives et Didactique*, **5**.

ERNEST P. (1989) The impact of beliefs on teaching. In Ernest P., *Mathematics Teaching: The state of the Art*, Falmer press, London.

FALCADE, R., RIZZA A. (2003) Approche intuitive du concept de limite, *Comptes rendus du colloque « Regards et perspectives sur l'enseignement de l'Analyse »*, Mulhouse, mars 2002 et *L'educazione Matematica* anno XXIV-serie VII-Vol.**1**, 15-37.

GRUGNETTI L., VILLANI V. (trad. S. GREGORI) (1999) *La matematica dalla scuola materna alla maturità*, Pitagora, Bologna.

GRUGNETTI L. (2004) Acquis et applications de la didactique des mathématiques, du point de vue des élèves, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **9**, 45-59.

GRUGNETTI L., RIZZA A. (2004) A lengthy process for the establishment of the concept of limit, in *Proceedings of the Third Conference of the European Society for research in Mathematics Education* CERME 3, 28 February-3 March 2003, Bellaria, Italia.

KAHANE J-P. (Sous la direction de) (2002) *Enseignement des sciences mathématiques*, (Rapport au ministre de L'Education nationale), Editions Odile Jacob, Paris.

RODITI E. (2005) *les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique*, L'Harmattan.

SFARD A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: reflexions on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics,* **22**, Kluwer Academic Publisher, Netherlands, 1-36.

SIERPINSKA A. (1985) Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, *Recherches en didactique des mathématiques*, La pensée sauvage, Grenoble, **6(1)**, 5-67.

TALL D., VINNER S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, **12**, 151-169.

TALL D. (1996) Functions and Calculus, in A. J. Bishop et al. (eds), *International Handbook of Research in Mathematics Education,* Kluwer Academic Publishers, 289-325.

THOMPSON A.G. (1992) Teachers' Beliefs and Conceptions: a Synthesis of the Research, in Graws D., *Handbook of Research on Mathematics Learning and Teaching*, Macmillan Publishing Company, New York.

ZAN R. (2001) Metacognizione e difficoltà in matematica, *La matematica e la sua didattica*, **2**, 174-212.

ZAN R. (2002) Verso una teoria per le difficoltà in matematica, *Seminario Nazionale Italiano di Didattica della Matematica 2002*, Pisa.

ZAN R. (2003) Formazione insegnanti e ricerca in didattica, *La matematica e la sua didattica*, 4-2003, Bologna, Pitagora.

LUCIA GRUGNETTI
lucia.grugnetti@unipr.it

ACHILLE MAFFINI
a.maffini@inwind.it

CARLO MARCHINI
carlo.marchini@unipr.it