MICHÈLE ARTIGUE

APPRENDRE LES MATHÉMATIQUES AU NIVEAU UNIVERSITAIRE : CE QUE LES RECHERCHES RÉCENTES NOUS APPRENNENT DANS CE DOMAINE

Abstract. Learning mathematics at University level: some new insights offered by educational research.
In this text, I first evoke discussions developed in the educational community about the specificity of mathematical learning at university level or about the nature of avanced mathematical thinking. Then, to reflect on what is offered by recent didactic research carried out at university level, I focus on three dimensions which, in my opinion, evidence the potential offered by some evolutions in research approaches and interests for setting up more adequately the questions at stake, and for progressing in the knowledge of learning processes and of their . These are the followings :

- the increasing attention paid to flexibility in the study of learning processes;
- the evolution of research paradigms from constructivist approaches towards anthropological and socio-cultural approaches;
- the development of new domains for research, taking the example of research on the mathematical training of engineers.

Résumé. Dans cet exposé, après avoir évoqué un certain nombre de réflexions et débats concernant les spécificités de l'apprentissage des mathématiques au niveau universitaire et la nature d'une éventuelle pensée mathématique avancée, je me centre, pour étudier ce qu'apportent les recherches didactiques récentes à la question des apprentissages mathématiques à ce niveau, sur trois dimensions qui me semblent bien mettre en évidence les potentialités offertes par certaines évolutions des approches et travaux pour mieux poser ces questions et avancer dans la connaissance des processus d'apprentissage et de leurs déterminants. Ce sont respectivement :

- l'accent croissant porté aux flexibilités dans l'apprentissage ;
- le déplacement d'approches constructivistes à des approches anthropologiques et socio-culturelles ;
- le développement des recherches sur de nouveaux domaines ou d'autres secteurs de formation, en prenant l'exemple de la formation des ingénieurs.

Mots-clés. Mathématiques, apprentissage, pensée mathématique avancée, université, transition lycée-université, anthropologie didactique, flexibilité cognitive, formation d'ingénieurs.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 11, p. 269 – 288.

Introduction

Apprentissage des mathématiques à l'université et pensée mathématique avancée

L'objet de ce colloque est l'apprentissage des mathématiques de l'enfance à l'âge adulte. Il peut paraître a priori étonnant que la première de ses conférences, chronologiquement, concerne les mathématiques universitaires, qui sont, à n'en pas douter, des mathématiques de l'âge adulte. A travers ce choix, les organisateurs ont-ils souhaité attirer notre attention, dès le début de ce colloque, sur le fait qu'il y a, dans les processus d'apprentissage des mathématiques, des régularités qui traversent les âges, et que la distance n'est pas si grande finalement entre l'apprentissage d'un enfant et celui d'un adulte ?
De nombreux chercheurs se sont penchés sur cette question, comme sur celle de savoir s'il existe des caractéristiques qui distingueraient une pensée mathématique avancée d'une pensée mathématique élémentaire. Elle était par exemple au cœur des travaux du working group Advanced Mathematical Thinking (AMT dans la suite) de PME[1], à la fin des années 80. Dans l'ouvrage issu de ces travaux, et portant le même titre, coordonné par D. Tall (1991), la question n'est pas véritablement tranchée. D. Tall, par exemple, sans définir précisément l'AMT, écrit dans le chapitre 1 de ce livre intitulé : *The psychology of advanced mathematical thinking* (p. 20) :

> « The move from elementary to advanced mathematical thinking involved a significant transition : that from *describing* to defining, from *convincing* to *proving* in a logical manner based on those definitions. This transition requires a cognitive reconstruction which is seen during the university students' initial struggle with formal abstractionsas they tackle the first year of university. It is the transition from the *coherence* of elementary mathematics to the *consequence* of advanced mathematics, based on abstract entities which the individual must construct through deductions and formal definitions. »

Une vision qu'il précisera par exemple dans sa conférence plénière à PME en 1995 (Tall, 1995) et qui a été souvent reprise depuis dans la littérature. T. Dreyfus, pour sa part, dans le chapitre suivant, intitulé : Advanced mathematical thinking processes, souligne qu'il n'est pas facile de caractériser l'AMT car on retrouve à tous les niveaux les mêmes processus : représenter, visualiser, généraliser, catégoriser, conjecturer, déduire, analyser, synthétiser, abstraire et formaliser (p. 26) :

> « There is no sharp distinction between many of the processes of elementary and advanced mathematical thinking, even though advanced mathematics is more focussed on the abstractions of definition and deduction. Many of the processes to be considered in this chapter are present already in children thinking about elementary mathematics concepts, say

[1] PME : Psychology of Mathematics Education. PME est un des groupes affiliés à ICMI, la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique.

> number or place value. They are not exclusively used in advanced mathematics, nor, indeed, are they exclusively used in mathematics. Abstractions are made in physics, representations are used in psychology, analysis is used in economics and vizualisation in art. »

Selon lui, un trait qui peut permettre de distinguer la pensée mathématique avancée d'une pensée élémentaire est la complexité et la façon dont cette complexité est gérée (car, comme il le souligne, on peut penser de façon élémentaire à propos d'objets mathématiques avancés et de façon avancée à propos d'objets mathématiques simples). Ceci le conduit à accorder une attention toute particulière aux processus de représentation et d'abstraction :

> « The distinction is in how this complexity is managed. The powerful processes are those that allow one to do this, in particular abstracting and representing. By means of abstracting and representing, one can move from one level of detail to another and thus manage the complexity. »

Ce point de vue est à rapprocher, me semble-t-il, de celui développé dans l'article de A. Robert (1998) publié suite à un travail spécifique sur le thème de la didactique des mathématiques au niveau post-obligatoire à la 9ème École d'Été de Didactique en France. Elle souligne tout d'abord la complexité des mathématiques en jeu à ce niveau et les changements qui en résultent dans les pratiques attendues des élèves, sans cependant qu'aucune de ces pratiques ne soit entièrement nouvelle. Ces changements sont organisés autour de trois dimensions : démonstrations, connaissances et mises en fonctionnement, travail personnel, à chacune de celles-ci étant associés un certain nombre de descripteurs. De cette étude dérivent ensuite quatre dimensions d'analyse pour les contenus à enseigner qui serviront également de support à la construction de scénarios d'enseignement.

A partir de 1998, un groupe de travail du groupe PME-NA[2] intitulé : « The Role of Advanced Mathematical Thinking in Mathematics Education Reform » s'est lui aussi intéressé à ces questions, en relation avec l'établissement des nouveaux standards NCTM (2000), se demandant quelles sortes d'expériences pouvaient aider les élèves à la transition vers les formes d'AMT que l'enseignement post-secondaire exigeait souvent de ses étudiants. Les résultats de cette réflexion ont été récemment publiés dans un numéro spécial de la revue Mathematics Teaching and Learning coordonné par J. et A. Selden (2005), on retrouve la même dualité avec d'une part de nouveaux essais faits pour caractériser la pensée mathématique avancée en la situant par rapport à une pensée mathématique élémentaire, des essais qui ne me semblent pas conduire à des définitions très convaincantes, d'autre part l'accent mis sur la continuité qui est susceptible de traverser les pratiques mathématiques des premiers apprentissages à l'âge adulte et l'intérêt, du point de vue de l'action didactique, de penser en termes d'évolution et développement

---

[2] PME-NA est la branche nord-américaine de PME.

plutôt que d'opposition et de rupture. Ceci se reflète bien dans les titres de certaines des contributions : « Advanced Mathematical-Thinking at Any Age : Its Nature and Its Development » (Harel & Sowder, 2005) ou « Advancing Mathematical Activity : A Practice-Oriented View of Advanced Mathematical Thinking » (Rasmussen, Zandieh, King, Teppo, 2005). Comme le précisent ces derniers auteurs, le choix des termes « advancing » et « activity » en lieu et place de « advanced » et « thinking » n'est en rien anodin :

> « We use the term *advancing* (versus *advanced*) because we emphazise the progression and evolution of students' reasoning in relation to their previous activity. We also use the term activity, rather than thinking. This shift in language reflects our characterization of progression in mathematical thinking as acts of participation in a variety of different socially and culturally situated mathematical practices. »

Je n'ai pas l'intention de m'engager ici dans un débat autour de la définition de l'AMT, même s'il me semble important de mentionner son existence, car je ne pense pas que ce soit aujourd'hui une question didactique essentielle. J'insisterai plutôt sur le fait que, dans cet exposé qui concerne l'apprentissage des mathématiques au niveau universitaire, il m'a semblé particulièrement important de ne pas limiter le regard à certaines formes d'apprentissage et de pensée, en fait celles qui nous sont, de par notre formation, de par nos tâches enseignantes ou de par nos pratiques mathématiques, les plus familières. Dit d'une autre façon, ce qui m'intéresse ici, c'est l'apprentissage des mathématiques au niveau universitaire, dans la multiplicité de ses facettes, qu'il s'adresse aux futurs mathématiciens ou à la grande majorité de ceux dont les rapports futurs aux mathématiques seront moins centraux, que les ambitions en soient l'accès à des mathématiques formelles ou plus largement la satisfaction des besoins mathématiques de tel ou tel secteur d'activité. Si l'on accepte de se situer dans cette perspective, alors les apprentissages universitaires, parce qu'ils ne visent plus seulement la formation d'une culture mathématique générale mais aussi la préparation de professionnels, parce qu'ils concernent des publics très différents mais qui, quel que soit leur bagage initial, doivent tous apprendre des mathématiques relativement sophistiquées, sont sans aucun doute des apprentissages particulièrement intéressants à étudier et questionner. Et l'on peut espérer que ce que nous apprendra cette étude, qui reste largement encore à mener, contribuera aussi à une meilleure connaissance des processus d'apprentissage possibles, à des niveaux plus élémentaires, ne serait-ce que pour ce qui concerne l'enseignement secondaire professionnel par exemple, objet de si peu d'attentions de la part des didacticiens jusqu'ici.

Les choix faits pour l'exposé : rendre compte d'évolutions relativement récentes et apparemment prometteuses

J'ai évoqué dans cette introduction le livre AMT paru en 1991. Mais ce qui a nourri cet exposé, outre mes travaux personnels plus récents et ceux des chercheurs qui me sont proches, c'est davantage le travail de synthèse que nous avons réalisé avec A. Schoenfeld en coordonnant la partie consacrée aux recherches de l'étude ICMI sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques au niveau universitaire (Holton, 2001), et plus encore celui que je viens d'achever en collaboration avec C. Batanero et P. Kent pour le nouveau Handbook coordonné par E. Silver pour le NCTM[3] qui devrait bientôt paraître.

Comme le montrent bien par exemple le livre AMT et les synthèses de recherches publiées dans l'ouvrage issu de l'étude ICMI citée ci-dessus (Artigue, 2001), (Dorier & Sierpinska, 2001), (Robert & Speer, 2001), les travaux sur l'apprentissage des mathématiques au niveau universitaire se sont longtemps centrés sur les enseignements de base des cursus universitaires que sont les enseignement d'Analyse ou Calculus et d'Algèbre linéaire, avec à l'esprit la formation des futurs mathématiciens et enseignants. Ils ont cherché à comprendre les difficultés rencontrées par les étudiants et, bien sûr aussi, à construire des stratégies d'enseignement susceptibles d'aider à les surmonter. Tout ceci s'est d'abord effectué en pointant le décalage entre la logique des constructions mathématiques achevées présentées aux étudiants et la logique de leur développement cognitif. Ceci a conduit à introduire un certain nombre de distinctions : distinction entre « concept définition » et « concept image » (Tall & Vinner, 1981), entre « processus » et « objet » (Dubinsky, 1991), entre « structurel » et « opérationnel » (Sfard, 1991), et à leur associer certaines hiérarchies cognitives comme la hiérarchie entre action, processus et objet à la base de l'APOS théorie (Dubinsly & Thomas, 2001) mais que l'on retrouve aussi, sous des formes voisines, dans les travaux initiaux de Tall et de Sfard (1991). Une autre des pistes suivies pour comprendre les difficultés a été celle des obstacles épistémologiques dont les travaux d'Anna Sierpinska (cf. (Sierpinska, 1994) pour une vision synthétique) constituent sans doute l'exemple le plus abouti. Ce qu'il me semble intéressant de souligner, c'est que, quels que soient les cadres théoriques qui leur ont servi de fondement, ces travaux, pour comprendre les difficultés résistantes rencontrées par les étudiants, ont d'abord mis l'accent sur les ruptures et les discontinuités de l'apprentissage. Ceci s'est aussi traduit dans les ingénieries didactiques élaborées pour faire progresser les étudiants, pensées d'abord en termes de conflits cognitifs qu'il s'agirait de mettre en scène pour

[3] Ce Handbook fait suite à une première version coordonnée par D.A. Grouws (Grouws, 1992).

pouvoir les dépasser, ou en termes de progression dans la hiérarchie action-processus-objet.

Ce ne sont pas les leçons que nous pouvons tirer de ces travaux maintenant bien connus que je voudrais discuter ici, ce qui ne veut pas dire que je reconnaisse pas tout ce qu'ils nous ont apporté, mais les apports de travaux plus récents. Même lorsqu'ils s'attaquent aux mêmes questions, ces derniers les approchent de façon renouvelée et, de plus, ils élargissent le champ d'action de la recherche à des domaines mathématiques ou des secteurs de formation jusqu'ici peu explorés. C'est en ce sens qu'ils me semblent particulièrement intéressants, nous obligeant à questionner des points de vue sur l'apprentissage qui se sont peut-être un peu trop rapidement constitués en évidences.

Dans le foisonnement des travaux qui pouvaient servir cet objectif, des choix s'imposaient et j'ai choisi d'évoquer successivement trois points :

- le dépassement des seules visions en termes de ruptures et de hiérarchies cognitives via l'accent croissant porté aux questions de flexibilité et de connections ;
- le nouveau regard sur les transitions institutionnelles permis par le déplacement des approches théoriques, des perspectives constructivistes à des perspectives socio-culturelles et anthropologiques ;
- et enfin les perspectives ouvertes par l'élargissement des recherches à de nouveaux domaines. J'ai choisi pour ce faire la formation des ingénieurs. J'aurais aussi pu prendre l'exemple des statistiques, particulièrement intéressant vu la place faite à ce domaine dans les formations où les mathématiques interviennent comme discipline de service et le foisonnement des travaux actuels pour lesquels je renvoie au chapitre (Artigue, Batanero, Kent, to appear) déjà cité ;
- j'aurais aussi aimé évoquer les travaux sur « l'embodied cognition » (Lakoff & Nuñez, 2000) qui, eux aussi, ont contribué ces dernières années à renouveler les perspectives sur l'apprentissage mais je me devais de faire des choix et j'ai pensé que David Tall ne manquerait pas d'évoquer cette perspective dans sa propre conférence.

1. L'accent croissant porté aux flexibilités dans l'apprentissage

Cet accent a permis, me semble-t-il, une vision plus équilibrée des rapports entre ce que l'on pourrait appeler une conceptualisation verticale, par abstraction, généralisation et insertion dans des structures et une conceptualisation horizontale par connections entre contextes, domaines, formes de représentation sémiotique. Il n'était pas absent des préoccupations didactiques et, pour ne citer qu'un exemple, il suffit de penser au rôle que jouent les jeux de cadres dans le cadre théorique développé par Régine Douady au début des années 80 et connu sous le nom de dialectique outil-objet et jeu de cadres (Douady, 1986)[4]. Les jeux de cadre y sont vus comme un moyen privilégié pour permettre la génération de connaissances nouvelles à partir de connaissances anciennes, le transport judicieux d'un problème posé dans un cadre dans un autre cadre mettant à la disposition des élèves, comme il le fait pour le mathématicien, des outils différents permettant d'avancer dans la résolution et d'atteindre des états a priori non directement accessibles dans le cadre initial.

Mais les questions de flexibilité ont pris, dans les quinze dernières années, une place croissante dans les recherches, soutenue d'une part par l'attention croissante portée à la dimension sémiotique des apprentissages mathématiques (cf. par exemple (Duval, 1995)), d'autre part, par une évolution technologique qui a introduit de nouvelles formes de représentation, permis de les mettre en relation de façon plus efficace, et qui de plus en plus nous incite à penser en termes de réseaux de connaissances (Hoyles & Noss, 2003).

On pourrait s'attendre à ce que j'illustre ce point en prenant des exemples dans le domaine des fonctions car la vision de l'apprentissage de ce concept a justement été influencée par cette double évolution. Mais, me situant au niveau universitaire, je préfère prendre un autre exemple, moins souvent considéré mais qui me semble tout particulièrement intéressant : celui de l'algèbre linéaire.

On a dans les débuts de la recherche en algèbre linéaire insisté sur l'abstraction des concepts, les problèmes posés par le formalisme, sur les problèmes aussi posés par des stratégies d'enseignement qui imposaient d'emblée aux étudiants, sans la motiver, la définition formelle d'une structure : celle d'espace vectoriel. Historiquement, on le sait, l'intérêt de celle-ci ne s'est pas imposée immédiatement aux mathématiciens, et les problèmes qui ont fini par assurer son acceptation, ceux liés aux développements de l'analyse fonctionnelle et des espaces de Banach, ne sont pas directement utilisables avec des étudiants débutants. Les difficultés qui en résultaient ont, à juste titre, mobilisé l'attention des chercheurs (cf. en particulier l'ouvrage coordonné par J.L. Dorier (2000)).

Mais l'algèbre linéaire est aussi un domaine où les difficultés d'apprentissage sont liées à la multiplicité des flexibilités en jeu. De ce point de vue, des recherches comme celles menées par A. Sierpinska et J. Hillel au Canada ou K. Pavlopoulou et M. Alves Dias en France rapportées dans (Dorier, 2000) sont tout particulièrement intéressantes.

---

[4] Une réflexion sur la notion de cadre, son usage par les didacticiens, ainsi que sur ses rapports avec des notions comme celle de registre sémiotique est développée dans les actes du colloque sur ce thème organisé à Paris en l'honneur de R. Douady en (Perrin-Glorian & Robert, 2001).

L'algèbre linéaire c'est en effet un mélange explosif de langages, cadres et systèmes de représentation : le langage géométrique des droites, plans et hyperplans, le langage algébrique des équations linéaires, des n-uplets et des matrices, le langage abstrait des espaces vectoriels et applications linéaires. Ce sont les représentations multiples de ses objets : représentations graphiques, tabulaires ou symboliques. C'est le jeu entre points de vue cartésien et paramétrique, algorithmisable en dimension finie et fonctionnant de façon plus métaphorique en dimension infinie. Et c'est la diversité des modes de raisonnement associés. A. Sierpinska, par exemple, identifie, en s'appuyant sur une analyse historique, trois modes de raisonnement : le « synthétique-géométrique » où les objets mathématiques sont en quelque sorte directement donnés à l'esprit qui essaie de les appréhender et les décrire, « l'analytique-arithmétique » où ils sont donnés indirectement par le biais de formules et équations qui rendent le calcul possible, « l'analytique-structurel » enfin où ils sont donnés indirectement aussi mais cette fois à travers un ensemble de propriétés qui les caractérisent. Et elle souligne que (p. 232) :

> « While these modes of thinking appeared in the history of mathematics in a sequential manner, it did not happen that one of them eliminated the other two. The development of algebra owes a lot to their constant interaction ; from the analytic geometry of Descartes to the geometric intuitions underlying the theory of Banach spaces. Indeed the story of linear algebra can be told so as to illustrate this continuous activity of change in perspective, done in the hope of gaining a better and deeper understanding of the domain. »

Mais ce que montre sa recherche, comme les autres citées, c'est la complexité des jeux associés à ces changements de perspectives et des jeux entre langage et représentations qui leur sont associés, et la difficulté pour les étudiants de développer la flexibilité nécessaire à leur maîtrise. C'est aussi la faible sensibilité des enseignants universitaires à cette complexité constitutive de la puissance de l'outil linéaire qu'ils maîtrisent parfaitement. Les observations faites montrent qu'ils sautent en permanence d'un langage ou d'un système de représentation à un autre, faisant jouer l'un pour contrôler ou interpréter le travail effectué dans un autre, et ceci sans précautions particulières comme si cela devait aller de soi. Or cela ne va pas de soi.

Tout autant que la progression dans des niveaux croissants d'abstraction, la progression dans la connexion entre contextes, cadres, registres sémiotiques … essentielle à l'apprentissage, est délicate et doit être organisée dans la durée par l'enseignement.

2. Le déplacement d'approches constructivistes à des approches anthropologiques et socio-culturelles

Ce déplacement s'est opéré à travers différentes constructions théoriques selon les cultures didactiques (Lermann & Sierpinska, 1996) mais ce que ces approches partagent c'est le fait que les objets mathématiques y sont vus comme émergeant de pratiques humaines, ces pratiques étant des pratiques institutionnelles et socio-culturelles. Il s'ensuit logiquement que les rapports mathématiques que nous développons avec tel ou tel domaine sont façonnés par les pratiques des institutions où nous les rencontrons et les valeurs et normes que ces institutions leur associent. Dans une telle perspective, pour espérer comprendre les processus d'apprentissage individuels, il faut d'abord élucider les pratiques institutionnelles qui les façonnent. La complexité en quelque sorte est déplacée du sujet connaissant à l'institution. L'image souvent utilisée de la fourmi peut éclairer cette affirmation et le renversement de position qu'elle induit. Supposons que l'observation du déplacement d'une fourmi nous renvoie l'image d'un trajet complexe. Faut-il nécessairement rechercher la cause de cette complexité dans un fonctionnement cognitif supposé complexe de la fourmi ? Cette même complexité du trajet ne peut-elle résulter d'un fonctionnement cognitif relativement simple mais opérant dans un environnement qui serait, lui, complexe ?

Pour illustrer les potentialités ouvertes par ce changement de perspective, je prendrai un exemple, celui de la transition lycée-université. Cette transition est perçue de plus en plus comme problématique pour des raisons que je n'ai pas ici le temps d'analyser, renvoyant le lecteur à (Holton, 2001) par exemple puisque c'était une des questions qui ont motivé le lancement de cette étude ICMI. Les universitaires se lamentent de voir arriver des étudiants qui, selon eux, ne savent à peu près rien. Les approches socio-culturelles et anthropologiques nous amènent à voir cette transition comme une transition entre des cultures et à essayer d'évaluer la distance qui sépare ces cultures, à étudier ce qui est prévu par les institutions en présence pour aider les étudiants à apprécier cette distance et s'y adapter, et ce qui est laissé complètement à leur charge dans cette adaptation. Je prendrai, pour illustrer cette approche l'exemple de la thèse d'un de mes étudiants, F. Praslon (2000) consacrée à l'analyse et plus particulièrement à la notion de dérivée et à son environnement. L'analyse qu'il fait à l'aide de très nombreuses sources montre, contrairement à ce qui est souvent affirmé, que, d'une part, les connaissances attendues à la fin du lycée en France sur ce domaine, dans la filière scientifique S, constituent déjà un corpus important (cf. la visualisation proposée pages et de la thèse), d'autre part que la transition entre lycée et université n'est pas aujourd'hui la transition entre une analyse intuitive qui serait celle du lycée et une analyse formelle qui serait celle de l'université. La rupture n'est pas aussi radicale. En revanche, la grille d'analyse qu'il a élaborée lui permet de mettre en évidence une accumulation de micro-ruptures dont la conjonction induit un saut cognitif auquel les enseignants universitaires sont insuffisamment sensibles. Citons-en quelques unes :

– un renouvellement plus rapide des objets d'enseignement qui oblige à une assimilation plus rapide ;

– un éventail beaucoup plus large de tâches qui rend bien sûr la routinisation beaucoup plus difficile ;

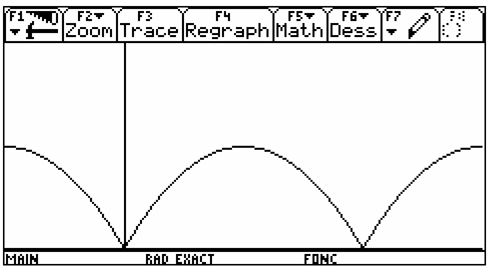
– une autonomie plus grande dans la résolution : des exercices sur suites et fonctions par exemple qui avaient des analogues au lycée sont proposés mais avec une question intermédiaire ou sans question intermédiaire là où il y en avait au lycée 4 ou 5 ;

– un nouvel équilibre entre particulier et général qui donne une autre fonction au travail sur les énoncés : il ne suffit pas de mémoriser quelques énoncés pour pouvoir les invoquer dans des cas particuliers où tout marche bien, il faut aussi s'interroger sur la validité de tel ou tel énoncé et, pour cela, envisager au-delà des exemples familiers les situations moins banales qui peuvent les invalider ;

– des résultats démontrés plus systématiquement et des démonstrations qui fournissent des méthodes alors qu'au lycée leur rôle opératoire était très faible et qu'elles pouvaient être davantage vécues comme une cerise sur le gâteau, l'important étant le résultat lui-même, ce nouvel outil mis à la disposition des étudiants.

Et pour sensibiliser étudiants et enseignants à ces différences, il va construire un ensemble de tâches qui selon lui se situent, en ce qui concerne la notion de dérivée, dans un trou entre ces deux cultures : a priori accessibles mais extraordinaires au lycée, supposées maîtrisées à l'université. En voici un exemple :

On considère la fonction f d'une variable réelle périodique de période 1 définie par :
f(x)=x.(1-x) sur l'intervalle [0, 1[(une représentation graphique analogue à celle ci-après est donnée)



Q1 : On demande si cette fonction est continue, dérivable.
Q2 : On introduit la notion de dérivée symétrique et on demande de calculer les dérivées et dérivées symétriques si elles existent en ½, ¼ et 0 et de les comparer.

Q3 : On demande de statuer sur les trois conjectures suivantes :
- C1. Toute fonction paire définie sur IR admet une dérivée symétrique en 0.
- C2. Toute fonction paire définie sur IR admet une dérivée en 0.
- C3. Si une fonction définie sur IR admet une dérivée en a, elle admet aussi une dérivée symétrique en a et les deux sont égales.

Cette tâche ne nécessite a priori pas d'autres connaissances que celles du lycée pour être résolue et pourtant elle est clairement hors de la culture du lycée. On y définit par exemple une fonction par morceaux et il faut comprendre que l'expression algébrique donnée n'est valable que sur un intervalle. De telles fonctions ne sont que marginalement présentes au lycée. On pose des questions sur la continuité et la dérivabilité. Ces questions ne sont pas complètement nouvelles, surtout avec l'aide fournie par la représentation graphique, mais elles concernent au lycée presque toujours des fonctions définies par une formule unique, somme, produit, quotient ou composées simples de fonctions connues pour être continues ou dérivables. Les techniques à développer ici, si l'on veut gérer le problème de façon analytique et non graphique, ne sont pas de même nature. On introduit ensuite, avec la question Q2, une nouvelle notion, celle de dérivée symétrique par une définition formelle et il s'agit d'exploiter cette définition. Ceci aussi est non usuel, tout comme les trois conjectures générales qui sont soumises aux étudiants, même s'ils disposent, du fait des questions précédentes, des réponses à certaines d'entre elles.

Que font les étudiants interrogés à qui il propose ces tâches dans un test en début d'année universitaire ?
A la question Q1, un tiers environ des étudiants ne perçoit pas qu'il y a un problème : la fonction est définie par une expression polynomiale donc pour eux continue et dérivable, ou elle est continue et dérivable sur [0,1[pour cette même raison et par périodicité continue et dérivable sur IR tout entier ; un quart environ repère la non-dérivabilité en 0 et/ou en 1 et essaie de la justifier de façon algébrique ou graphique. La nécessité d'une étude locale est visiblement davantage perçue en 1 qu'en 0 et l'on peut sans doute relier ce phénomène au fait que, dans la définition de f donnée, l'intervalle est ouvert en 1 et non en 0. Cette marque symbolique est sans doute attachée pour eux aux cas où les choses ne vont pas de soi. Les arguments de ceux qui repèrent la non-dérivabilité sont du type : « f n'est pas dérivable en 0 car la courbe admet deux demi-tangentes distinctes (respectivement un point anguleux, un pic) », pour les justifications graphiques. Pour les justifications algébriques, les plus élaborées reposent en général sur l'argumentation suivante : f est dérivable si et seulement si $f(0)=f(1)$ et $f'(0)=f'(1)$, puis, en utilisant l'expression donnée $f(x)=x(1-x)$, ils concluent que la seconde condition n'est pas vérifiée puisque $f'(x)=-2x+1$. On constate de plus un cloisonnement des réponses suivant les registres utilisés : graphique ou algébrique.

La question Q2, contrairement à ce que l'on aurait pu penser, montre que l'introduction formelle d'une nouvelle notion ne provoque que peu de blocages. Les calculs des dérivées et dérivées symétriques en 1/2 et 1/4 donnent respectivement 95% (dérivée) et 75% (dérivée symétrique) de réponses correctes, tandis qu'au point 0, l'existence et le calcul éventuel ne sont gérés correctement que dans 14% et 3% des cas respectivement. Les étudiants utilisent l'expression algébrique donnée pour f(x) pour mener les calculs et, même lorsque le résultat obtenu est en contradiction avec leur réponse à Q1, ils ne le repèrent pas.

Il y a peu de réponses à la question Q3 et ce n'est pas la fonction f qui est en général utilisée comme contre-exemple à C2 mais la fonction valeur absolue qui est l'une des fonctions de référence au lycée.

On le voit donc, les étudiants ne sont d'une part pas bloqués face à ces questions non usuelles mais ils sont très peu outillés pour les résoudre. Encore une fois, l'enseignement universitaire a du mal à prendre la mesure de cette distance et à aider les étudiants à la franchir. Des travaux comme ceux de V. Durand-Guerrier (cf. (Durand-Guerrier, 2005) pour une synthèse) montrent bien en particulier comment, au delà des seuls contenus conceptuels évoqués ici, les difficultés de nature logique qui se posent sont elles aussi insuffisamment prises en compte et, quand elles le sont, souvent de façon inappropriée.

Avant de passer au troisième point envisagé dans cet exposé, je voudrais souligner que la recherche de F. Praslon, évoquée ci-dessus, n'est pas la seule recherche à avoir utilisé l'approche anthropologique chevallardienne pour étudier les questions d'apprentissage des mathématiques à l'université ou à la transition lycée/université. C'est aussi le cas par exemple de la thèse récente d'A. Bergé (2004), soutenue à l'université de Buenos Aires. Dans cette thèse, A. Bergé se propose d'étudier comment se construit le rapport des étudiants à la notion de complétude au fil des études de mathématiques au sein de son université. Après un travail de nature historique et épistémologique lui permettant de préciser un cadre de référence pour cette étude et une revue de la littérature didactique existante sur les nombres réels et la droite numérique, elle étudie d'abord quels sont les rapports institutionnels à la complétude qui sont développés dans les quatre enseignements où cette notion est principalement engagée : Analyse pré-universitaire, Analyse I, Compléments d'Analyse II, Analyse avancée. Elle montre les continuités et ruptures existant en chacun des enseignements, vus comme des institutions distinctes, selon les axes définis dans son cadre d'analyse : compétences techniques et niveaux de connaissances en jeu dans les tâches proposées, rapports entre perspectives outil et objet sur la complétude, formes de validation, flexibilité entre les différentes expressions de la complétude. Elle met ensuite en regard ces rapports institutionnels et leur évolution avec l'étude des rapports personnels développés par les étudiants suivant ces enseignements, par le biais de questionnaires et d'entretiens, montrant comment les faiblesses repérées au niveau institutionnel se reflètent chez les étudiants. Beaucoup de ceux interviewés à la fin de leurs études ont, en dépit de leurs multiples rencontres avec cette notion, encore des difficultés à distinguer complétude et densité de l'ordre sur le réels, et à comprendre le rôle que cette propriété de l'ensemble des réels joue dans des théorèmes fondamentaux de l'analyse comme le théorème des valeurs intermédiaires.

Et c'est aussi le cas des travaux conduits actuellement en Espagne sur le thème de la transition lycée-université par M. Bosch, C. Fonseca et J. Gascon (2004). Ces derniers, soulignons-le, se situent dans une perspective beaucoup plus résolument anthropologique que ceux précédemment cités qui, tout en se situant dans une perspective globale anthropologique, conjuguaient des outils d'analyse divers pour exploiter les résultats des recherches menées depuis de nombreuses années en didactique de l'analyse. La dé-personnalisation de l'analyse didactique induite par l'approche anthropologique y est tout particulièrement revendiquée, dans l'opposition entre ce que les auteurs qualifient le *Programme cognitif* qui considèrerait que les phénomènes relatifs à l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques, et en particulier ceux indésirables et problématiques, peuvent être expliqués à partir de caractéristiques individuelles des sujets, et que c'est à ce niveau qu'il faut engager l'action didactique, et ce qu'ils qualifient le *Programme épistémologique*, dans lequel ils se situent qui considère que la clef de la compréhension des phénomènes didactiques n'est pas dans le sujet mais dans les pratiques mathématiques des institutions scolaires. Ceci les conduit à étudier, en employant les outils conceptuels de l'approche anthropologique, les caractéristiques des organisations mathématiques vivant au lycée et à l'université et à chercher à identifier les ruptures existantes entre les organisations existant dans ces deux institutions. Ce qui est pointé c'est la prédominance au niveau secondaire d'organisations mathématiques ponctuelles ou locales incomplètes et rigides, l'accent étant mis sur le bloc practico-technique des praxéologies, tandis qu'au niveau universitaire, on tend à se situer d'emblée au niveau d'organisations mathématiques régionales, en mettant l'accent sur le bloc technologico-théorique des praxéologies[5]. Ici aussi, des questionnaires sont élaborés et proposés aux

---

[5] Dans l'approche anthropologique chevallardienne (Chevallard, 1992, 1999), les pratiques mathématiques sont décrites en termes de praxéologies. Une praxéologie est un quadruplet (T,τ,θ,Θ), T désignant un type de tâche, τ une technique c'est à dire un moyen de réaliser la tâche, θ une technologie c'est à dire un discours permettant d'expliquer et justifier la technique et Θ une théorie au sein de laquelle s'inscrit la technologie. Une organisation mathématique est dite ponctuelle si elle est générée par un seul type de tâche (soit peut s'analyser via une praxéologie unique), locale si elle résulte de l'intégration de divers organisations ponctuelles autour d'un discours technologique commun, régionale si elle résulte de l'intégration de diverses organisations locales autour d'une théorie commune. Les auteurs, à partir des ces notions définissent ce qu'ils entendent par organisation mathématique locale relativement complète en imposant à sa construction institutionnelle la satisfaction de 6 critères qui précisent ce qui doit être permis dans cette construction par les différents

étudiants mais, comme le soulignent les auteurs, ce n'est pas dans le but d'analyser les connaissances mathématiques des étudiants (p. 227) :

> « Nuestro objetivo principal consiste en utilizar las respuestas de los estudiantes como indicadores de algunas de las características de las OM (Organizaciones Matemáticas) que se estudian en S (Secundaria) y poner de manifiesto la existencia y la naturaleza de determinados obstáculos epistemológicos y didácticos que dificultan el desarrollo del proceso de estudio de las matemáticas en el paso de Secundaria al primer ciclo de la Universidad. »

La mise en regard, avec les mêmes outils d'analyse, des réponses des étudiants au questionnaire et des caractéristiques des tâches proposées dans un échantillon de manuels de fin de secondaire sert alors à mettre en évidence la correspondance étroite existant entre ce que donnent à voir les réponses au questionnaire d'une part et l'analyse des manuels d'autre part, une correspondance confortant la position avancée par les auteurs.

Je suis restée jusqu'ici dans le cadre des mathématiques « classiques », en montrant comment certaines évolutions didactiques pouvaient nous amener à questionner nos points de vue sur l'apprentissage. Dans le troisième et dernier point abordé, le questionnement va lui sortir d'un élargissement du domaine d'enquête, en nous faisant sortir du cadre de ces mathématiques classiques.

3. Les perspectives ouvertes par les recherches sur de nouveaux domaines ou d'autres secteurs de formation : la formation des ingénieurs

La formation des ingénieurs est de ce point de vue intéressante car l'évolution des pratiques d'ingénierie liée à l'évolution technologique y questionne sérieusement les visions usuelles d'apprentissage en mathématiques et la façon dont ces visions se réfléchissent dans l'enseignement. Comme le souligne P. Kent, dans le chapitre mentionné au début, en prenant l'exemple de l'analyse de structures dans la formation des ingénieurs civils, longtemps cette formation a consisté en une solide dose de présentation théorique et d'apprentissage de diverses techniques pour le calcul et le contrôle de structures, en papier-crayon, utilisant en particulier l'algèbre matricielle. Si l'utilisation de logiciels était intégrée à l'enseignement, c'était dans une seconde phase, lorsque la théorie et les techniques associées étaient censées être suffisamment comprises et maîtrisées, les logiciels étant réduits au statut d'auxiliaires de calcul. De plus en plus, souligne-t-il, ce genre de formation fourni par les mathématiciens, considéré comme inadéquat et inefficace, est remis en question. S'il y a apprentissage mathématique et il y en a sûrement un, les futurs ingénieurs n'en perçoivent visiblement plus l'intérêt et c'est un apprentissage dont,

moments de l'étude : première rencontre, exploration, travail de la technique, questionnement technologique, institutionnalisation et validation.

très vite, on ne trouve plus trace dans leurs pratiques effectives comme si les logiciels disponibles rendaient tout cela inutile.

Selon lui, ce qui est donc demandé aujourd'hui aux mathématiciens assurant ces cours de service, c'est de mettre en place des stratégies d'apprentissage où la maîtrise théorique et technique ne soit plus considérée comme un préalable mais où, au contraire, les pratiques professionnelles expertes instrumentées par les logiciels soient le cadre servant à motiver les besoins mathématiques et à les satisfaire de façon appropriée, ce qui n'est pas le cas aujourd'hui. Plus précisément :

> « What users of mathematics such as engineers are wanting however, and it seems that mathematicians will increasingly need to provide is a form of pull-based mathematics where the use of mathematical software makes mathematical ideas usable. It seems that carefully-designed use of IT can make it possible for students to use mathematical ideas before understanding techniques, and to make this part of a genuinely rounded mathematical experience (a few examples are given in Kent & Noss, 2003). »

Il y a là un renversement par rapport au rôle généralement attribué aux outils technologiques dans les apprentissages mathématiques tout à fait intéressant. Les outils technologiques sont en effet généralement vus comme de simples adjuvants pédagogiques, non comme des éléments constitutifs de l'apprentissage, contribuant à en déterminer les besoins et les formes. C'est oublier que ce que nous apprenons, au-delà de la façon dont nous l'apprenons, dépend des outils dont nous disposons pour l'apprendre. Les formations professionnelles universitaires, en rejetant de plus en plus les modèles d'enseignement traditionnels, nous le rappellent.

Une autre évolution intéressante dans ce domaine des formations d'ingénieurs est l'importance croissante prise par la modélisation, mais non pas une modélisation où, comme c'est souvent le cas dans les enseignements de mathématiques, le passage d'une situation physique au modèle mathématique est court-circuité au profit du travail dans le modèle, mais au contraire une modélisation où ce passage est considéré comme réellement problématique et d'une importance cruciale. Car, du fait de l'évolution technologique, ce qui prend de plus en plus d'importance dans les compétences qu'on demande à l'ingénieur de développer, c'est justement la capacité à construire, via des langages appropriés, l'interface entre la situation physique ou autre qu'il étudie et les outils de traitement informatisés dont il dispose, puis la capacité à analyser, discuter, interpréter les données issues du traitement informatisé. Ceci passe de plus en plus par des dispositifs d'apprentissage différents des dispositifs traditionnels, avec une grande importance accordée à la réalisation de projets professionnels, en groupes, des projets où les connaissances mathématiques ne peuvent fonctionner de façon isolée mais doivent s'articuler avec les autres connaissances qui interviennent dans l'ingénierie. Ceci est, semble-t-il, d'autant plus nécessaire que la multiplication des domaines de connaissances qui rentrent dans la formation d'un ingénieur aujourd'hui rend impossible un apprentissage qui fonctionnerait sur la base d'enseignements séparés. Comme le souligne P. Kent, « l'engineering design » devient un principe organisateur and motivationnel de la formation en ingénierie, ceci incluant la formation mathématique.

Quels sont les apprentissages mathématiques susceptibles d'être engendrés par ces dispositifs qui se veulent proches des pratiques professionnelles et très contextualisés ? Quelles en sont les potentialités et les limites ? Et par quels processus s'effectuent ces apprentissages ? Ces questions sont aujourd'hui largement ouvertes malgré l'existence de quelques travaux pionniers, comme ceux de Kent & Noss déjà cités, mais elles ne sont pas sans intérêt pour une réflexion plus générale sur l'apprentissage mathématique plus généralement, à l'heure où, à tous niveaux, dans de nombreux pays, on met l'accent dans les curricula sur le renforcement des liens entre mathématiques et autres disciplines, mathématiques et société, à travers des dispositifs de projets pluridisciplinaires et des activités de modélisation[6]. Ces questions sont aussi, il ne faut pas le cacher, difficiles. Les mathématiques qui vivent dans les pratiques professionnelles ou dans celles qui se veulent proches de ces pratiques professionnelles, en formation, sont des mathématiques difficiles à mettre à jour (Bessot & Ridgway, 2000). Souvent imbriquées dans d'autres disciplines, portées par un langage spécifique, encapsulées dans des logiciels sophistiqués qui fonctionnent comme des boîtes noires pour leurs utilisateurs, elles nécessitent pour être appréhendées et analysées par les chercheurs des connaissances qui vont bien au-delà des seules connaissances mathématiques et didactiques, et elles varient de plus considérablement d'un secteur professionnel à un autre. Elles nécessitent aussi un contact étroit et prolongé avec des terrains nouveaux, comme cela a été le cas par exemple de C. Hoyles et R. Noss pour le secteur bancaire (Noss & Hoyles, 1996), A. Bessot & C. Laborde (2005) pour le secteur du bâtiment. Elles nécessitent enfin un questionnement sérieux de systèmes de valeurs concernant les mathématiques et la formation mathematique, que, parce qu'ils sont naturalisés dans la culture, nous avons tendance à ne pas suffisamment questionner. On comprend bien, dans ces conditions, la tentation qu'a pu avoir la recherche didactique pendant trop longtemps de se tenir à l'écart de domaines de recherche aussi exigeants et perturbants.

Conclusion

Cet exposé ne reflète que très partiellement et très superficiellement ce que les travaux de recherche menés au niveau de l'enseignement supérieur peuvent apporter à la réflexion sur les apprentissages mathématiques. J'ai essayé d'y mettre

[6] Ceci est bien mis en évidence dans l'Etude ICMI 14 en cours intitulée : « Applications and Modelling in Mathematics Education » (Henn & Blum, 2004).

l'accent sur quelques grandes tendances des travaux qui se développent actuellement et me semblent prometteuses car d'une part, elles peuvent renouveler au moins partiellement notre façon de penser la question des apprentissages mathématiques au niveau universitaire, la question des difficultés rencontrées par les étudiants et de l'action didactique que nous pourrions mettre en œuvre pour aider ceux-ci à les surmonter, d'autre part elles montrent que des secteurs essentiels comme ceux des formations mathématiques pour les non-mathématiciens sont encore pour la recherche des continents quasiment inexplorés et nous incitent à nous lancer dans cette exploration.

J'espère aussi vous avoir convaincus que les questions d'apprentissage qui se posent au niveau universitaire ne sont en rien étrangères à celles qui se posent à d'autres niveaux d'enseignement et que la recherche que ces questions motive est une recherche qui devrait intéresser tous ceux qui s'intéressent aux questions d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques, de la prime enfance à l'âge adulte.

Bibliographie

ARTIGUE M. (2001) What can we learn from educational research at the university level?, in D. HOLTON & al. (ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

ARTIGUE M., BATANERO C., KENT P. (to appear) Mathematics thinking and learning at post-secondary level, in, E. SIVER (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.*

BERGÉ A. (2004) *Un estudio de la evolución del pensamiento matemático : el ejemplo de la conceptualización del conjunto de los numeros reales y de la noción de completitud en la enseñanza universitaria*, Doctoral thesis, University of Buenos Aires,
http://etd.bl.fcen.uba.ar/tede2/tde_busca/tde.php?id=7&id2=14&id3=1

BESSOT A. & RIDGWAY F. (2000) *Education for Mathematics in the Workplace*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

BESSOT A. & LABORDE C. (2005) *Vers une modélisation d'une géométrie en acte dans les activités de lecture-tracé du bâtiment*, IMAG, Grenoble.

BOSCH M., FONSECA C., GASCON J. (2004) Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **24/2.3**, 205-250.

CHEVALLARD Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **12/1**, 77-111.

CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en anthropologie du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **19/2**, 221-265.

DORIER J.L. (ed.) (2000) *On the Teaching of Linear Algebra*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

DORIER J.L. & SIERPINSKA A. (2001) Research on the teaching and learning of linear algebra, in D. Holton (ed.) (2001), *The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

DOUADY R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **7/2**, 5-32.

DREYFUS T. (1991) Advanced Mathematics Thinking Processes, in D. TALL (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 25-41, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

DUBINSKY E. (1991) Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in D. TALL (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 95-123, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

DUBINSKY E., MC DONALD M. (2001) APOS: A constructive theory of learning in undergraduate mathematics education research, in D. Holton (ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

DURAND-GUERRIER V. (2005) *Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*, Habilitation à diriger les recherches, Université de Lyon 1.

DUVAL R. (1995) *Semiosis et Noesis*, Peter Lang, Berne.

HAREL G. & SOWDER L. (2005) Advanced Mathematical-Thinking at Any Age : Its Nature and Its Development, *Mathematical Thinking and Learning*, **7(1)**, 27-50.

HENN H.W. & BLUM W. (eds). (2004) *ICMI Study 14 : Applications and Modelling in Mathematics Education*, Pre-proceedings of the Study Conference, February 2004, Dortmund University, Dortmund.

HOLTON D. (ed.) (2001) *The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

HOYLES C. & NOSS R. (2003) What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education, in A. Bishop & al. (eds), *Second International Handbook of Mathematics Education*, 323-350, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

KENT P. & NOSS, R. (2003) *Mathematics in the University Education of Engineers (A report to The Ove Arup Foundation*, The Ove Arup Foundation*)*, London. [download: http://www.theovearupfoundation.org/arupfoundation/pages/ViewContent.cfm?RowID=25]

LAKOFF G., NUNES R. (2000) *Where mathematics comes from: how the embodied mind brings the mathematics into being*, Basic Books, New York, University Press, Cambridge.

LERMAN S., SIERPINSKA A. (1996) Epistemologies of mathematics and of mathematics education, in A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and C. Laborde (eds), *International Handbook of Mathematics Education*, 827-876, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

N.C.T.M. (2000) *Principles and standards for school mathematics*, Reston, VA, Author, Retrieved 30 April 2005 from http://standards.nctm.org/.

NOSS R. & HOYLES C. (1996) The visibility of Meanings: Modeling the Mathematics of Banking, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **1(1)**, 3-31.

PERRIN-GLORIAN M.J. & ROBERT A. (eds) (2001) *Jeux de Cadres*, Actes du Colloque en l'honneur de Régine Douady, IREM Paris 7, Paris.

PRASLON F. (2000) *Continuités et ruptures dan la transition terminale S/DEUG Sciences en analyse*, *Le cas de la notion de dérivée et son environnement*, Thèse de doctorat, Université Paris 7.

RASMUSSEN C., ZANDIEH M. KING K. & TEPPO A. (2005) Advancing Mathematical Activity: A practice-Oriented View of Advanced Mathematical Thinking, *Mathematical Thinking and Learning,* **7(1)**, 51-73.

ROBERT A. (1998) Outils d'analyse des contenus à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **18/2**, 139-190.

ROBERT A. & SPEER N. (2001) Research on the teaching and learning of calculus / elementary analysis, in D. Holton (ed.) (2001) *The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

SFARD A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics,* **22**, 1-36.

SIERPINSKA A. (1994) *Understanding in Mathematics*, Falmer Press, London.

TALL D. & VINNER S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, **12**, 151-169.

TALL D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

TALL D. (1995) Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking, in, L. Meira & D. Carraher (eds), *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, **1**, 61-75, Universidade Federale de Pernambuco, Recife.

SELDEN A. & SELDEN J. (2005) Perspectives on Advanced Mathematical Thinking, *Mathematical Thinking and Learning*, **7(1)**, 1-13.

Michèle Artigue
Université Paris VII
artigue@gauss.math.jussieu.fr