

**ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES,
Volume 11, 2006, IREM de STRASBOURG
RÉSUMÉS**

ANNA SIERPINSKA *Entre l'idéal et la réalité de l'enseignement mathématique, p. 5–39.*

Résumé. L'article part de l'hypothèse que toute réforme de l'enseignement des mathématiques est basée sur une "idéologie", c'est-à-dire une vision de l'état souhaitable de cet enseignement en contraste avec un état non-souhaitable, mais existant. La question posée est la suivante : Qu'est-ce qui, dans la réalité dans laquelle nous vivons, peut faire obstacle à la réalisation de cet état souhaitable, et être propice au maintien d'un statu quo non-souhaitable ? Dans la section principale de cet article, je regarde de plus près quelques postulats représentant un idéal de l'enseignement et apprentissage des mathématiques. Je discute, en particulier, des buts (idéaux) de l'enseignement des mathématiques, et des postulats sur la coordination des curriculums, les contenus mathématiques pertinents, l'apprentissage avec compréhension, le développement de la pensée mathématique à l'aide de la résolution de problèmes, le développement de l'autonomie et de la mobilité de pensée, l'évaluation des connaissances des élèves, la motivation des apprentissages, et l'utilisation de la technologie. La dernière section contient une réflexion sur les possibilités de communication entre idéologie et théorie, en dépit de différences importantes entre les deux. Je propose qu'une théorie didactique pourrait constituer un canal propice à cette communication, en remplaçant les débats idéologiques par des débats pragmatiques, basés sur des questions telles que : Quels sont les choix possibles – plutôt que 'souhaitables' ou 'bons' – de solution de tel ou tel problème didactique, pédagogique ou institutionnel ? Quelles sont les conséquences possibles de ces choix, au vu des résultats de recherches en didactique des mathématiques et de l'expérience commune ?

Mots clés. Enseignement, mathématiques, curriculum, idéologie, théorie, didactique, compétences

ALAN H. SCHOENFELD *Résolution de problèmes du berceau au tombeau, p. 41–73.*

Résumé. Cet article assez spéculatif propose une mise en perspective théorique globale de la prise de décision et de la résolution de problème "en temps réel". Le domaine est volontairement très large. Mon but est de traiter de la question suivante : "Comment et pourquoi les gens prennent-ils les décisions qu'ils prennent lorsqu'ils se soit engagés dans une activité de résolution de problèmes." Quelques hypothèses fondamentales de ce travail sont les suivantes :

1. L'expression "Résoudre un problème" est utilisée dans un sens très large. Elle comprend les actions d'un enfant dans ses relations avec ses parents, un étudiant travaillant sur un problème de mathématique dans une classe ou dans un laboratoire, et la prise de décision par un enseignant lors d'une leçon, par exemple de mathématique. Plus généralement, je suppose que presque toute action humaine est orientée vers la réalisation d'un objectif et que réaliser les objectifs de haute priorité peut être caractérisé comme un "problème".

2. La plupart des comportements humains sont rationnels au sens suivant. Les actions entreprises par un individu dans n'importe quel contexte particulier ont pour but fondamental de résoudre les problèmes qui sont importants pour lui. (Ces problèmes peuvent être, mais ne sont pas nécessairement ceux qui lui ont été "assignés") Si l'on est capable de comprendre quel problème une personne essaye de résoudre à un moment donné, les actions de cette

personne paraîtront souvent rationnelles et cohérentes. Dans certains contextes, tels que l'enseignement et la résolution de problèmes (au sens standard du terme), cette cohérence de comportement peut être assez forte pour que les actions de l'individu puissent faire l'objet d'une modélisation.

3. Dans tout contexte, la prise de décision dépend des croyances, des objectifs et des connaissances. En raccourci schématique: les croyances d'un individu, en interaction avec le contexte, modélisent la formation et la hiérarchisation des objectifs. Devant une constellation particulière d'objectifs, l'individu recherche et implémente la connaissance qui est cohérente avec son système de croyances et qui lui permet d'atteindre un ou plusieurs objectifs de première priorité. Lorsque ces objectifs sont atteints (ou ne le sont pas), ou lorsque le contexte change, de nouveaux objectifs acquièrent une priorité élevée, et les actions sont alors dirigées vers la réalisation de ceux-ci.

Des exemples sont donnés pour indiquer de quelle façon cette perspective théorique peut être exploitée.

Mots-Clés. Résolution de problème, rationalité, prise de décision, heuristique, croyance, objectif.

JEAN-CLAUDE RAUSCHER *L'écriture réflexive au centre de l'activité mathématique dans la résolution de problèmes de proportions*, p. 75–102.

Résumé. Quelle contribution peut apporter le recours à la production « d'écrits réflexifs » par les élèves au développement de leurs connaissances ? C'est la question qui est envisagée ici dans le cadre d'une expérimentation menée en fin d'école primaire à propos de la résolution de problèmes relevant de la notion de proportionnalité. Les problèmes considérés sont des problèmes de comparaison de mélanges inspirés de Noeiting (1980). Inspirées par les travaux de Duval (1998), nos observations repèrent un obstacle dans l'exploitation des écrits des élèves en classe pour passer d'une situation de formulation à une situation de validation : une « pratique orale » de l'écrit par les élèves. Spontanément, les élèves écrivent comme ils parlent, sans retour sur ce qu'ils écrivent. Le dispositif élaboré et mis à l'épreuve a alors le but d'initier les élèves à une « pratique écrite » par l'objectivation de leurs écrits. L'écriture réflexive devient alors le centre de l'activité mathématique en cours. Nous analysons dans quelle mesure cette initiation à une posture d'écriture réflexive est réussie et quelles sont ses conséquences sur le développement des connaissances des élèves.

Mots-clés. Écrits réflexifs, pratique orale, pratique écrite, validation, résolution de problèmes, proportionnalité.

PATRICIA MARCHAND *Comment développer les images mentales reliées à l'apprentissage de l'espace en trois dimensions ?* p. 103–121.

Résumé. Cet article vise à reprendre quelques résultats tirés de notre thèse de doctorat interdisciplinaire (mathématique et sport) afin d'élaborer un cadre de référence pour la création d'activités visant le développement des images mentales liées à l'espace en trois dimensions. Ce cadre est explicité à l'aide d'exemples d'activités tirées du corpus primaire et secondaire.

Mots-clés. Enseignement de la géométrie, primaire-secondaire, espace en trois dimensions et images mentales.

JORGE SOTO-ANDRADE *Un monde dans un grain de sable : Métaphores et analogies dans l'apprentissage des mathématiques*, p. 123–147

Résumé. Les métaphores ne sont pas qu'un recours rhétorique, mais aussi des outils cognitifs très puissants. On peut constater au cours d'expériences d'apprentissage, qu'elles nous aident, non seulement à comprendre des idées nouvelles, sinon qu'elles fournissent en plus des moyens de calcul fort efficaces. Elles portent un impact cognitif plus important que les analogies, plus familières en didactique : Une métaphore est une analogie qui ne crie pas gare ! Nous en présentons ici des exemples concrets, qui apportent de l'eau à notre moulin...

Mots-clés. Métaphores, analogies, comparaisons, représentations, cognition, apprentissage des mathématiques.

ERICH CH. WITTMANN *Les mathématiques vues comme la science des structures*, p. 149–174.

Résumé. L'objectif de notre article est de rendre compte de l'approche globale adoptée dans le projet *Mathe 2000* en ce qui concerne l'éducation mathématique. L'accent est mis sur les origines mathématiques. Nous montrerons comment les mathématiques vues comme la science des structures peuvent être utilisées dans la recherche développementale. L'article est structuré en trois sections. La première section est consacrée à la philosophie de notre projet, la seconde est consacrée à la description de quelques environnements substantiels d'apprentissage (ESA) « substantial learning environments », tandis que la troisième explique certains principes théoriques sous-jacents aux environnements substantiels d'apprentissage développés dans la deuxième section.

Mots-clés. Structures, environnements d'apprentissage, découverte, représentations, démonstrations opératoires, formation des professeurs.

CATHERINE HOUEMENT, ALAIN KUZNIAK *Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie*, p. 175–193.

Résumé. L'enseignement de la géométrie a pour fonction première de permettre à l'élève de se construire un espace de travail géométrique efficace. Grâce à cet espace, il peut comprendre et résoudre des problèmes de géométrie. Mais l'interprétation des problèmes va dépendre de paradigmes géométriques qui diffèrent suivant les institutions (écoles mais aussi pays) où s'effectue l'enseignement. Cette diversité des paradigmes entraîne une diversité des espaces de travail et explique un certain nombre de malentendus didactiques. Dans cet article, nous précisons les notions de paradigmes et d'espace de travail géométriques. À partir d'exemples, nous montrons l'intérêt d'envisager des études didactiques utilisant et développant ces outils.

Mots-clés. Didactique, géométrie, paradigmes, espace de travail, enseignement.

DAVID TALL *Une théorie du développement mathématique par l'embodiment, le symbolisme et la preuve*, p. 195–215.

Résumé. Cette présentation envisage les mécanismes biologiques et mathématiques engagés dans le développement de l'enfant au mathématicien et propose une approche théorique pour interpréter les différences de croissance individuelles résultant de l'expérience de toute une vie. La théorie est ensuite utilisée pour répondre à des questions concernant l'enseignement sur le long terme et l'apprentissage des mathématiques sur toute la scolarité de l'enfance à l'âge adulte.

Mots-clés. Pensée mathématique, objet de pensée, action, opération symbolique, propriété, inné, déjà vu, connaissance procédurale, connaissance déclarative.

KLAUS VOLKERT *Faut-il étudier la tératologie ?* p. 217–228.

Résumé. Dans le présent article je vais analyser le rôle des « monstres » dans l'histoire des mathématiques modernes - en particulier dans le contexte des fonctions réelles et des polyèdres. Ainsi on va comprendre que l'intérêt pour les monstres est assez récent et qu'il est lié à l'idée que les mathématiques sont une construction libre de l'esprit humain. On va se demander si cette idée convient aux élèves.

Mots-clés. Analyse historique, monstre mathématique, fonctions réelles, contre-exemple.

LUCIA GRUGNETTI, ACHILLE MAFFINI & CARLO MARCHINI *Activités didactiques à caractère vertical pour la construction du concept de limite,* p. 229–250.

Résumé. Cette présentation concerne l'activité du groupe « zeroallazero^[1] » qui, dans l'Unité locale de recherche en didactique des mathématiques de l'Université de Parma, s'occupe du concept de limite. La caractéristique de ce groupe est de réunir des enseignants de tous les niveaux scolaires (de l'école primaire à la fin du lycée), ainsi que quelques chercheurs en didactique des mathématiques. Cette « verticalité » se révèle très précieuse. Elle nous permet de proposer des activités similaires aux élèves de différents niveaux, de vérifier les évolutions des idées, techniques et erreurs des élèves dans le temps, et d'observer les effets des méthodes d'enseignement sur eux. Les thèmes qui nous sont apparus comme les plus riches en possibilités didactiques pour construire le concept de limite sont ceux de la mesure, des suites et de l'approximation, qui, du fait de leur caractère vertical, permettent d'être abordé à plusieurs reprises et de plusieurs points de vue à des niveaux scolaires différents. Dans ce contexte, on veut mettre en évidence l'importance de l'approximation comme une ressource dans la longue construction du concept de limite.

Mots-clés. Concept de limite, approximation, activités didactiques verticales.

[1] Zéro puissance zéro.

FERNANDO HITT Représentations fonctionnelles et conceptions dans la construction de concepts mathématiques. Un exemple : Le concept de la limite, p. 251–267.

Résumé. Le rôle des représentations mentales et leur manipulation a été étudié pendant plusieurs années pour expliquer les processus de construction des concepts et pour comprendre les capacités mathématiques des étudiants. Recherchant de nouvelles voies sur la construction des concepts et des stratégies mathématiques sur la résolution des problèmes, le groupe de travail « Representations and mathematics visualization » du PME-NA, 1998-2002 (voir Hitt, 2002) a mis en valeur l'importance des représentations sémiotiques sur les constructions des concepts mathématiques, donnant une nouvelle dimension de travail de recherches dans la didactique des mathématiques. Tenant compte de la recherche précédente faite par Duval (1993, 1995, 1999) sur la construction des concepts mathématiques, nous nous sommes concentrés sur les conceptions des étudiants et sur le rôle des représentations fonctionnelles (représentations spontanées) employées par les étudiants afin de construire un concept mathématique. Nous avons constaté que ces représentations employées par les étudiants en construisant un concept jouent un rôle significatif et sont une partie de leur conception. Ces représentations fonctionnelles sont un genre de représentations qui diffèrent habituellement de ceux que nous trouvons dans les manuels, ou ceux qu'utilisent les professeurs dans la classe de mathématiques.

Mots-clés. Représentations fonctionnelles, conceptions et registres sémiotiques.

MICHÈLE ARTIGUE Apprendre les mathématiques au niveau universitaire : ce que les recherches récentes nous apprennent dans ce domaine, p. 269–288.

Résumé. Dans cet exposé, après avoir évoqué un certain nombre de réflexions et débats concernant les spécificités de l'apprentissage des mathématiques au niveau universitaire et la nature d'une éventuelle pensée mathématique avancée, je me centre, pour étudier ce qu'apportent les recherches didactiques récentes à la question des apprentissages mathématiques à ce niveau, sur trois dimensions qui me semblent bien mettre en évidence les potentialités offertes par certaines évolutions des approches et travaux pour mieux poser ces questions et avancer dans la connaissance des processus d'apprentissage et de leurs déterminants. Ce sont respectivement :

- l'accent croissant porté aux flexibilités dans l'apprentissage ;
- le déplacement d'approches constructivistes à des approches anthropologiques et socio-culturelles ;
- le développement des recherches sur de nouveaux domaines ou d'autres secteurs de formation, en prenant l'exemple de la formation des ingénieurs.

Mots-clés. Mathématiques, apprentissage, pensée mathématique avancée, université, transition lycée-université, anthropologie didactique, flexibilité cognitive, formation d'ingénieurs.