GINETTE CUISINIER, CHRISTINE DOCQ, THÉRÈSE GILBERT, CHRISTIANE HAUCHART, NICOLAS ROUCHE, ROSANE TOSSUT

ATELIER ASSOCIÉ À L'ARTICLE : LES REPRÉSENTATIONS PLANES COMME UN FIL CONDUCTEUR POUR L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

PLANE REPRESENTATIONS AS A GUIDELINE FOR THE TEACHING OF GEOMETRY

1. Représentation d'une boite cubique quadrillée intérieurement

La figure 21 est la photo d'une boîte cubique sans couvercle.

Figure 21

Représentez, en perspective cavalière, cette boîte placée dans la même position que sur la photo. Ensuite représentez un quadrillage 8 sur 8 sur les faces intérieures de la boîte.

Faites le même travail en perspective centrale.

1.1 Résolution en perspective cavalière

La figure 22a montre une représentation en perspective cavalière de cette boîte placée avec le fond parallèle au plan de projection. Afin d'y voir des faces intérieures dans leur entiereté, on choisit de ne représenter que trois faces de la boîte, comme à la figure 22b : la face du fond y apparaît en vraie grandeur, et les deux autres faces, perpendiculaires au plan de projection, y sont représentées par des parallélogrammes.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, supplément vol. 11, p. 1– 22.

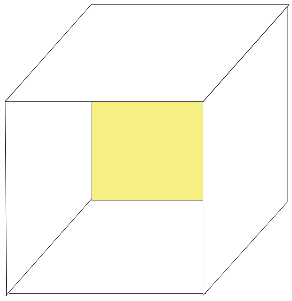

Figure 22a

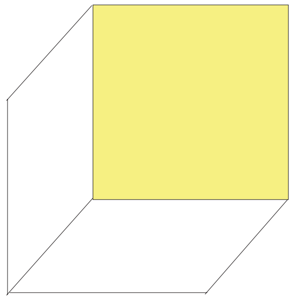

Figure 22b

Pour représenter le quadrillage de la face horizontale inférieure et de la face latérale gauche, deux méthodes sont proposées.

a) On commence par représenter la division de chaque face en quatre carrés : on représente le centre de chaque face, point d'intersection des diagonales, et ensuite les médianes (figure 23a). On recommence l'opération pour chacun des carrés afin de représenter 16 carrés sur chaque face (figure 23b) et 64 carrés à l'étape suivante ;

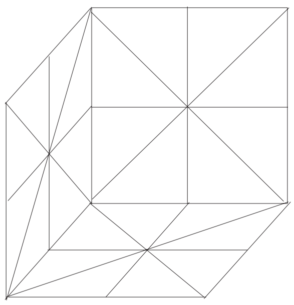

Figure 23a

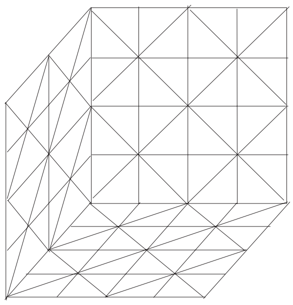

Figure 23b

b) On divise en 8 segments égaux deux côtés adjacents de chacune des faces. On représente ainsi des sommets des carrés du quadrillage (figure 24a). Par ces points, on trace des parallèles aux côtés des faces pour obtenir le quadrillage (figure 24b) ;

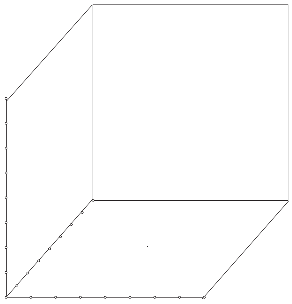

Figure 24a

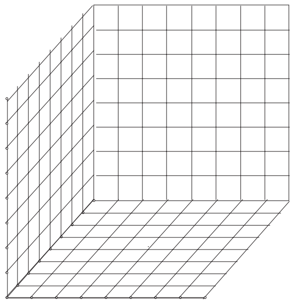

Figure 24b

Dans les deux méthodes, on a utilisé des propriétés des projections parallèles établies lors du travail sur les ombres :

- une figure parallèle au plan de projection est isométrique à son image ;
- le parallélisme est conservé ;
- dans une même direction, l'égalité des distances est conservée[1].

1.2 Résolution en perspective centrale

La figure 25 montre une représentation de la boîte en perspective centrale. Il s'agit de son image par une projection centrale sur un plan vertical parallèle à la face du fond. Contrairement à ce qui se passe en perspective cavalière, on peut placer l'objet de manière à voir sur le dessin les cinq faces intérieures. Le contour de l'ouverture de la boîte et la face du fond sont représentés par des carrés. Les quatre autres faces sont représentées par des trapèzes dont les côtés non parallèles sont sur des droites qui convergent en un point. Ce point est le point de fuite des droites horizontales perpendiculaires au plan de projection et est aussi appelé *point de fuite principal*.

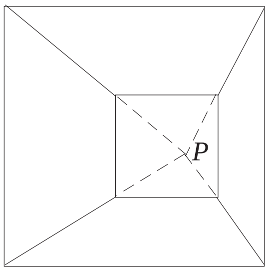

Figure 25

[1] La conservation des égalités des distances dans une direction peut être déduite de la conservation du parallélisme.

Nous avons utilisé des propriétés des projections centrales établies précédemment :

- une figure parallèle au plan de projection est homothétique à son image ;
- les images de droites parallèles entre elles mais non parallèles au plan de projection concourent en un point.

La deuxième propriété est utilisée, pour la première fois, dans le cas de droites parallèles qui ne sont pas toutes dans un même plan.

A ce stade-ci, on dispose d'un code pour représenter la boîte en perspective centrale. Les dessins obtenus peuvent varier : les carrés peuvent être plus ou moins décentrés et leurs tailles plus ou moins différentes. On peut choisir de laisser un caractère arbitraire à ces éléments. Ou, on peut choisir d'approfondir la question de la diversité des aspects possibles. On découvrira alors que ces aspects dépendent de paramètres liés aux positions relatives de l'objet, du centre de projection et du plan de projection.

Pour représenter le quadrillage des faces intérieures, on peut utiliser des méthodes analogues à celles utilisées en perspective cavalière.

a) On commence par diviser les faces en quatre carrés. Sur le dessin, on représente d'abord le centre de la face à l'intersection des diagonales et on représente ensuite les médianes : les images des médianes parallèles au plan de projection forment un carré et images des médianes perpendiculaires au plan de projection sont sur des droites qui convergent au point de fuite principal (figure 26a). On recommence ensuite l'opération pour chacun des carrés (figure 26b) ;

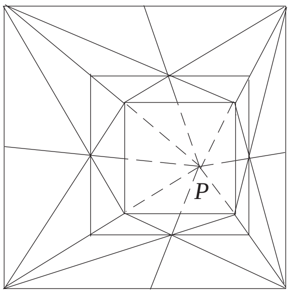

Figure 26a

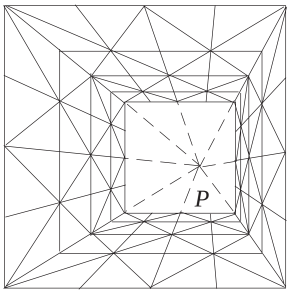

Figure 26b

b) Par l'autre méthode, on procède en deux temps. On représente d'abord les droites du quadrillage perpendiculaires au plan de projection. Pour cela, on utilise la conservation de l'égalité des segments situés sur des parallèles au plan de projection, ce qui permet de subdiviser le contour de l'ouverture, et on dessine ensuite les droites qui convergent au point de fuite principal (figure 27a). Pour représenter les autres parallèles du quadrillage, on utilise une propriété déjà rencontrée : la conservation des diagonales des quadrillages (figure 27b).

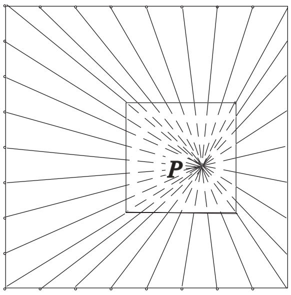

Figure 27a

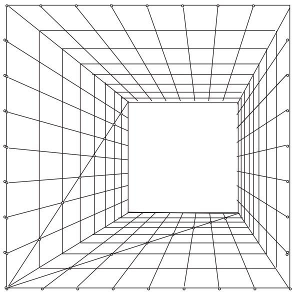

Figure 27b

2. Représentations du module de paix à l'aide du quadrillage

On suppose que les petits cubes qui forment le module ont même côté que les carrés du quadrillage. La figure 28 montre, vus du haut, trois modules posés sur la face horizontale de la boîte.

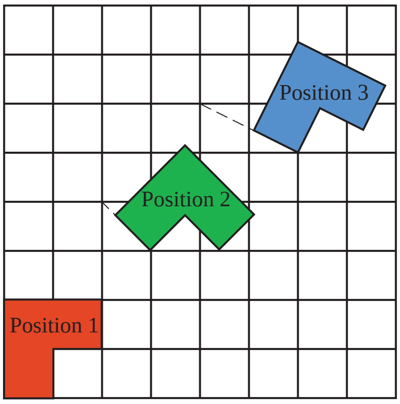

Figure 28

Représentez ces modules en perspective cavalière en vous servant du quadrillage construit précédemment (figure 24b).

Faites ensuite le même travail en perspective centrale (figure 27b).

2.1. Résolution en perspective cavalière

La hauteur du module vaut quatre fois le côté des carrés du quadrillage et sa représentation est partout en vraie grandeur. La véritable difficulté consiste donc à représenter la face inférieure du module.

a) Dans la position 1, c'est simple (figure 29) ;

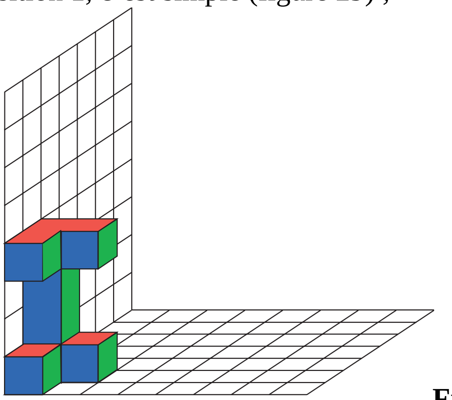

Figure 29

b) Pour représenter le module dans la position 2, on commence par relever la face inférieure de la boîte sur la face du fond, car celle-ci est parallèle au plan de projection et les figures y sont vues en vraie grandeur. Nous y dessinons un des carrés qui constituent la face inférieure du module (figure 30).

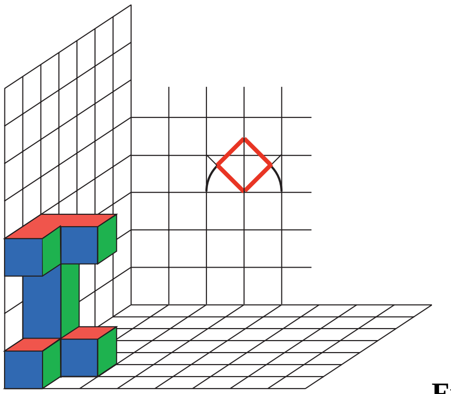

Figure 30

Il faut ensuite ramener ce carré sur le quadrillage horizontal. Pour cela, on commence par tracer, dans ce quadrillage, les deux diagonales sur lesquelles apparaîtront les côtés du carré (figure 31a). Dans ce quadrillage, les côtés du carré n'apparaissent pas en vraie grandeur. Par contre on voit en vraie grandeur les projections des côtés sur les lignes du quadrillage parallèles à la face du fond. Nous allons donc construire sur la face du fond les projections des côtés sur les lignes horizontales du quadrillage (figure 31b), ensuite utiliser des lignes de rappel (en trait interrompu sur la figure 31b) pour ramener les projections des côtés sur les lignes correspondantes du quadrillage du plan horizontal. On obtient ainsi la projection de chaque côté ; la construction des deux premiers côtés du carré est alors immédiate.

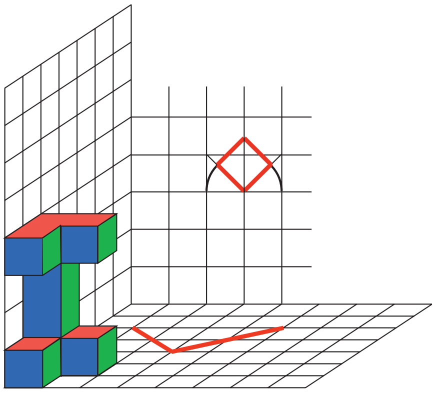

Figure 31a

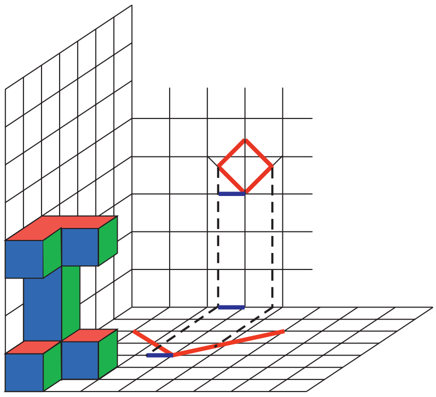

Figure 31b

On peut terminer la représentation du carré de base et ensuite celle de la face inférieure du module (figure 32).

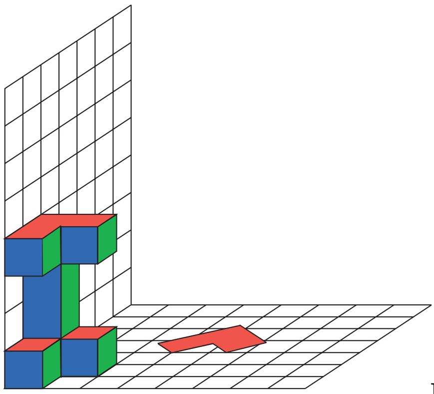

Figure 32

c) La représentation du module dans la position 3 est analogue. Les figures 33 et 34 montrent les constructions terminées.

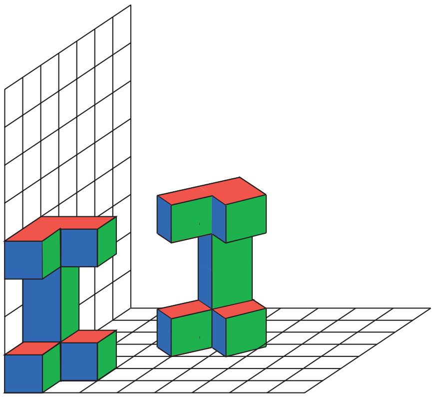

Figure 33

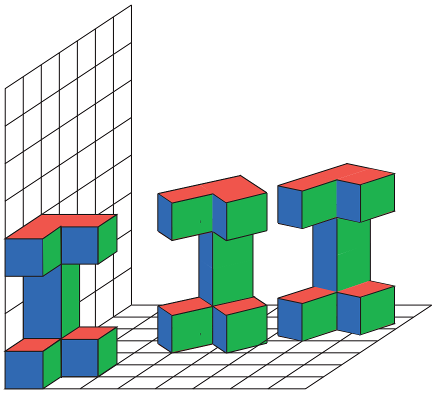

Figure 34

2.2. Résolution en perspective centrale

Nous avons choisi une résolution qui exploite le quadrillage donné, comme dans le cas de la perspective cavalière. Nous utiliserons en plus le point de fuite principal présent sur la figure.

a) Pour le module en position 1, on représente la face inférieure du module en suivant le quadrillage (figure 35).

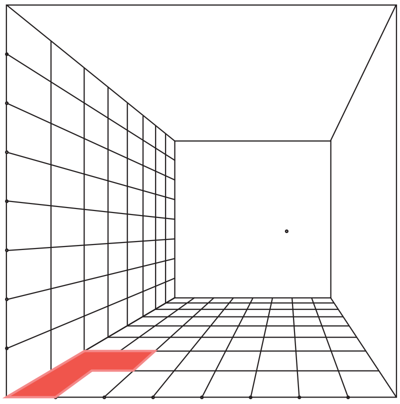

Figure 35

On complète la représentation (figures 36 et 37) en utilisant les propriétés suivantes :

– les horizontales parallèles au plan de projection sont représentées par des horizontales ;

– les verticales sont représentées par des verticales.

Pour faciliter les constructions, on peut également utiliser le fait que les images des perpendiculaires au plan de projection sont sur des droites qui convergent au point de fuite principal.

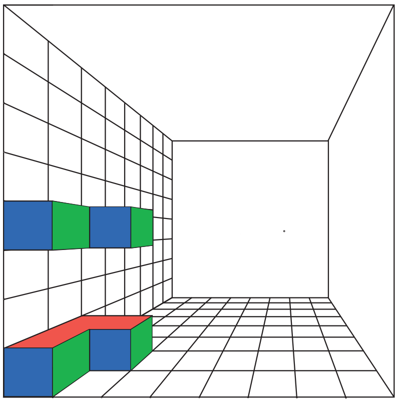

Figure 36

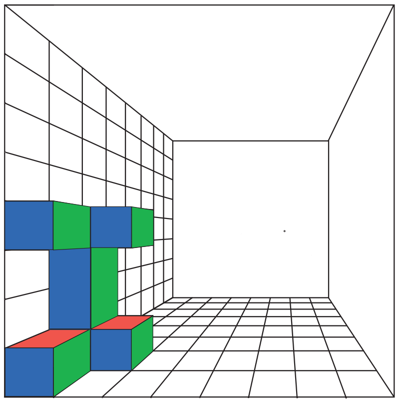

Figure 37

b) Pour représenter le module en position 2, on commence par relever la face inférieure de la boîte sur la face du fond et on y dessine la face inférieure du module $A'B'F'E'H'C'$ qui y est vue en vraie grandeur (figure 38).

Des lignes de rappel permettent d'associer des segments parallèles horizontaux représentant des segments parallèles de même longueur dans la réalité. Ces lignes de rappel sont dessinées en trait interrompu. Ce sont des lignes verticales sur le dessin de la face du fond et ce sont des droites convergeant au point de fuite principal sur le dessin de la face inférieure.

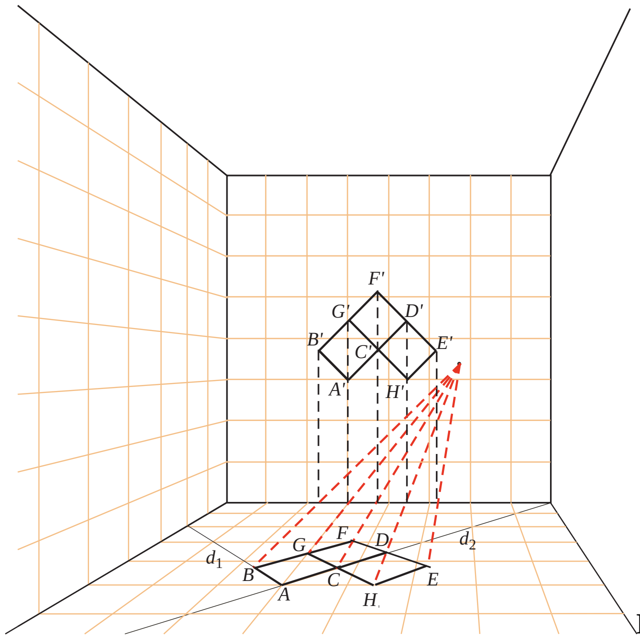

Figure 38

Sur la face horizontale, on place le point A et on trace les diagonales du quadrillage passant par A, à savoir d_1 et d_2 ; à partir de B', on détermine le point B sur d_1 ; puis à partir de C', le point C sur d_2 ; à partir de D', le point D également sur d_2 ; ensuite, à partir de E' sur $B'C'$, on repère la position de E sur BC ; et, à partir de F' sur $D'E'$, on obtient F sur DE ; à partir de G' sur $B'F'$, on obtient G sur BF ; et enfin, H' sur $G'C'$ nous fournit H sur GC.

On termine la représentation (figure 39) en utilisant les propriétés suivantes :

– les verticales sont représentées par des verticales ;

– les segments égaux situés dans un plan parallèle au plan de projection sont représentés par des segments égaux.

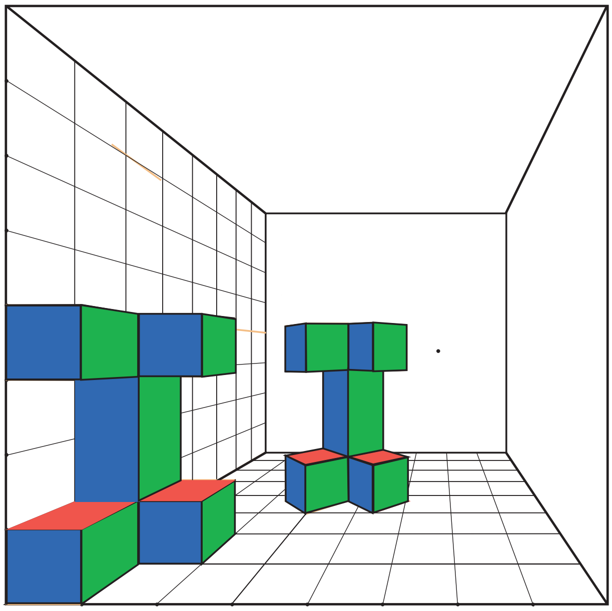

Figure 39

Notons que le texte présente une solution parmi d'autres possibles. On pourrait par exemple résoudre le problème en se servant des points de fuite associés aux directions de la base du module.

c) La représentation de la base du module en position 3 est analogue. La figure 40 montre comment représenter la face inférieure du module et la figure 41 montre la construction terminée.

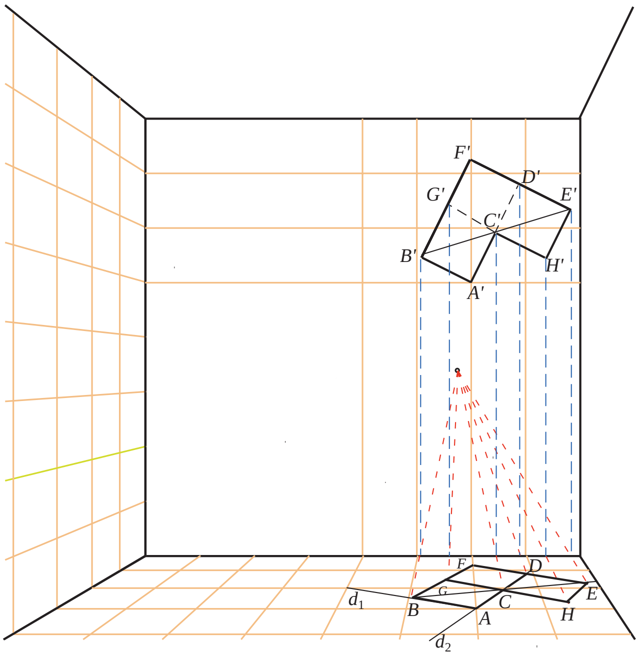

Figure 40

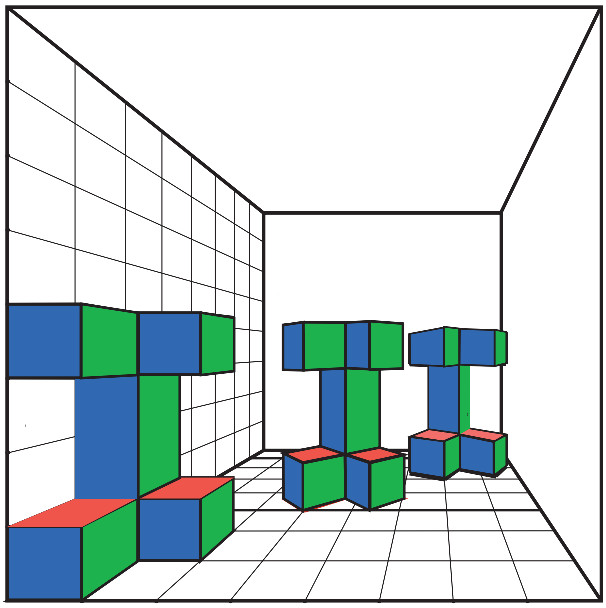

Figure 41

3. Représentations du module de paix sans quadrillage

La figure 42 est une représentation en perspective cavalière d'un module disposé verticalement, en position frontale. Complétez cette figure en représentant le même module de telle sorte que l'arête *OP* soit sur la droite *d* et que *P* soit placé à l'avant de *O*.

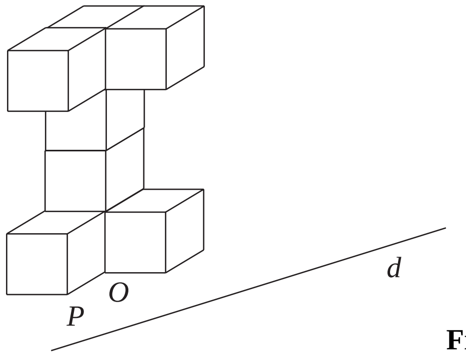

Figure 42

Faites ensuite le même travail en perspective centrale.

3.1 Résolution en perspective cavalière

Concentrons-nous sur la représentation de la face inférieure du module, car une fois cette partie-là du problème résolue, le reste suit aisément.

Cette face inférieure, composée de trois petits carrés isométriques, est placée dans un carré dont la figure 43 montre l'image en perspective cavalière. Un des côtés de ce grand carré est en position frontale. Que devient la représentation de ce carré si le côté *OP* prend la direction de *d* avec *P* devant *O* ?

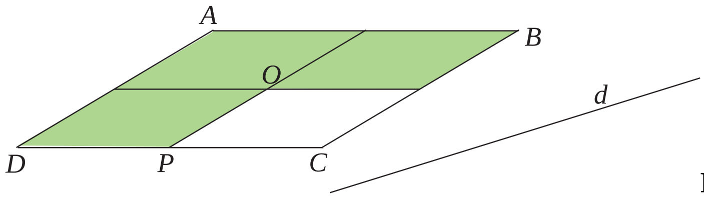

Figure 43

Commençons par tracer d_1, la parallèle à *d* passant par *O* et cherchons la nouvelle position P_1 de *P* sur d_1 (figure 44).

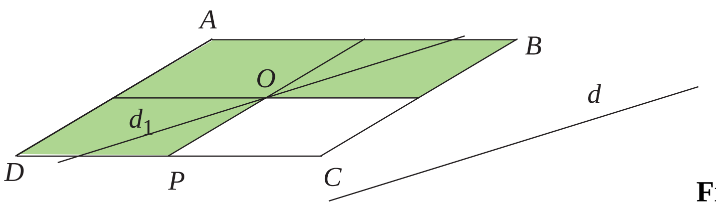

Figure 44

Pour l'obtenir, nous allons passer par une représentation en position frontale du carré *ABCD* (figure 45). Nous relevons le quadrilatère *ABCD* et l'amenons dans la position $A'B'BA$.

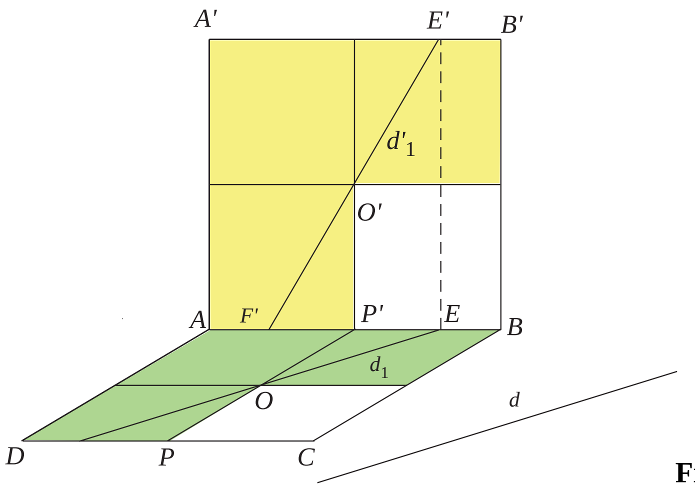

Figure 45

Soit *E*, l'intersection de d_1 avec *AB*. On construit aisément E' et O'. Comme la droite d_1 passe par *E* et par *O*, la droite d_1', passant par E' et O', est la représentation de d_1 dans ce plan frontal. Elle coupe *AB* en F'. Tout se passe comme si les figures *ABCD* et $A'B'BA$ représentaient deux faces intérieures d'une boîte cubique décorées d'un même dessin.

Sur d_1' nous plaçons le point P_1' tel que $O'P_1' = O'P'$ (figure 46). Et en utilisant les propriétés de la perspective cavalière, nous obtenons la position de P_1 sur d_1. Le segment OP_1 ainsi obtenu donne donc la longueur de la représentation de l'arête *OP* dans la direction de la droite *d*. Il nous reste à déterminer la longueur de la représentation de cette même arête *OP* dans la direction perpendiculaire à *d*.

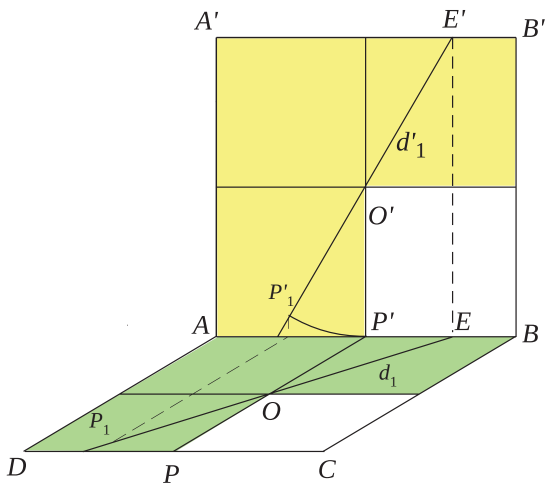

Figure 46

Servons-nous à nouveau du plan frontal. Traçons-y p' perpendiculaire à d_1' en O' (figure 47). Cette droite p' rencontre le côté $A'A$ en X'. Cherchons le point X de AD correspondant à X'. Pour cela, on utilise la propriété suivante :

Les rapports de longueurs dans une même direction sont conservés.

On a donc :

$$\frac{AX}{XD} = \frac{A'X'}{X'A} \qquad (1)$$

La figure constituée du carré $A'B'BA$ et des droites d_1' et p' est invariante pour une rotation de 90° autour du point O' et par conséquent, on a :

$$A'X' = AF' \quad \text{et} \quad X'A = F'B \qquad (2)$$

Des égalités (1) et (2), on déduit :

$$\frac{AX}{XD} = \frac{AF'}{F'B}$$

Dès lors, pour déterminer le point X, on trace la diagonale BD et la parallèle à BD passant par F'. Celle-ci coupe AD en X. Les points X et O détermine la droite p cherchée.

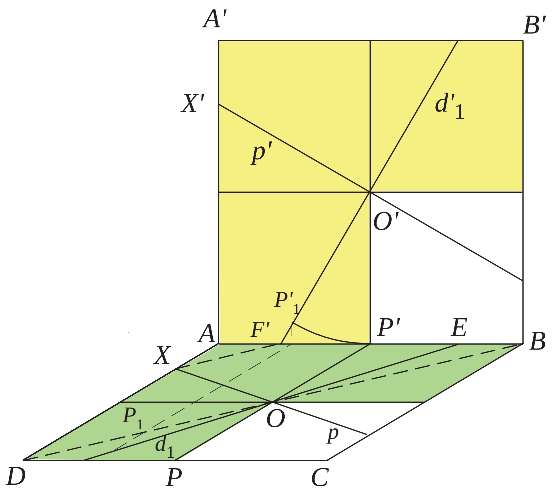

Figure 47

Il reste à repérer sur *p* le point P_2 tel que OP_2 soit la représentation d'un segment de même longueur que l'arête *OP*. Pour cela, dans le plan frontal, on construit P_2' tel que $O'P' = O'P_1'$ et, en utilisant les propriétés de la perspective cavalière, on en déduit la position de P_2 sur *p* (figure 48).

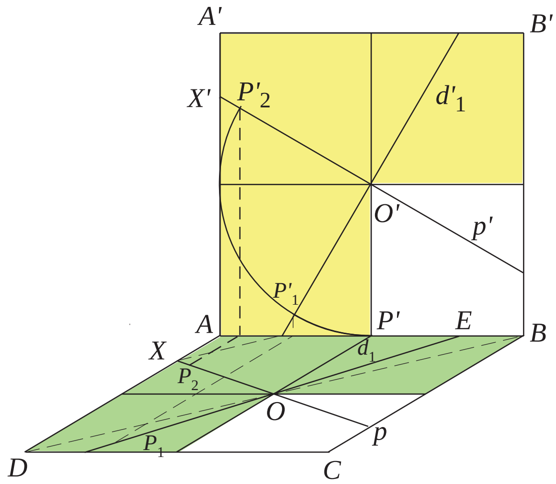

Figure 48

Sachant à présent comment représenter un segment de même longueur que l'arête *OP* dans la direction de *d* et dans la direction perpendiculaire à *d*, il reste à tracer les parallèles nécessaires pour dessiner la face inférieure du module (figure 49).

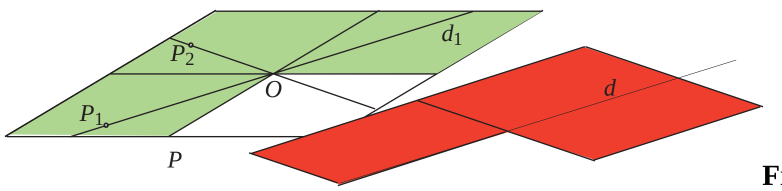

Figure 49

On termine la représentation en prenant comme hauteur le double de la longueur du côté *AB* du parallélogramme.

3.2 Résolution en perspective centrale

Comme dans le cas de la perspective cavalière, le problème principal est de représenter la base du deuxième module (figure 50).

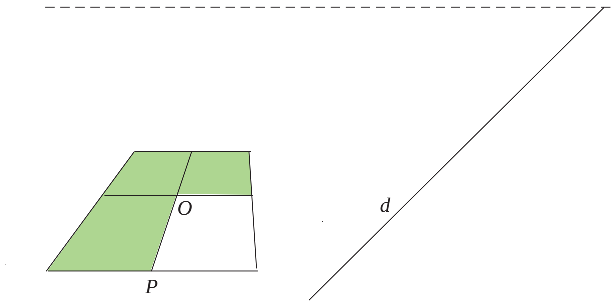

Figure 50

Dans un premier temps, nous allons représenter la base du module ayant tourné autour de *O* jusqu'à avoir son arête *OP* sur la droite d_1 qui est parallèle à *d* dans la réalité. Pour tracer d_1, avons besoin de la *ligne d'horizon* sur laquelle se trouvent les points de fuite des droites horizontales ; il s'agit de la droite horizontale menée par le point de fuite principal *F*. Les droites d_1 et *d* se rencontrent au point de fuite F_d (figure 51).

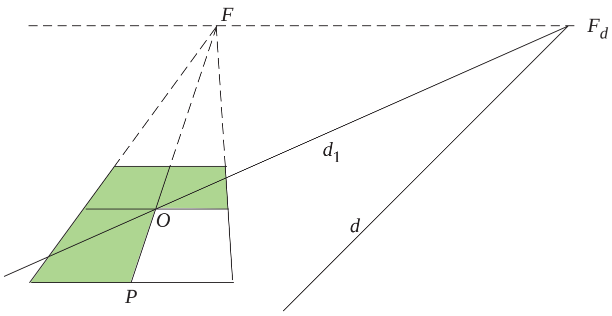

Figure 51

Pour représenter une droite qui, dans la réalité, est perpendiculaire à la droite d_1, nous allons utiliser une propriété des projections centrales qui n'est pas intervenue jusqu'à présent : l'angle α formé par deux droites de l'objet réel se retrouve au niveau du centre de projection Z lorsqu'on joint *Z* aux points de fuite des deux droites (figure 52).

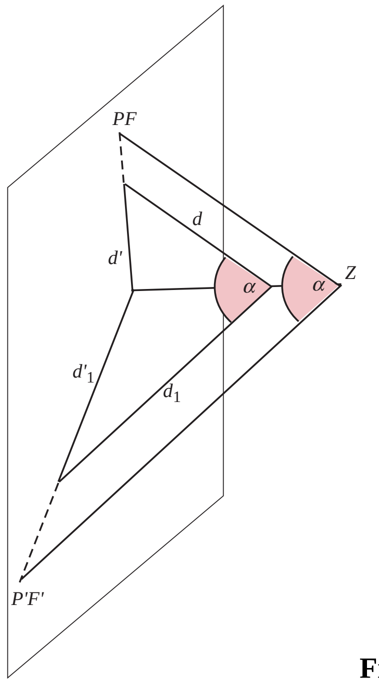

Figure 52

Cette propriété permettra d'abord de préciser la position du centre de projection à partir du dessin donné, ensuite de représenter une droite qui est perpendiculaire dans la réalité à la droite *d* donnée. Nous utiliserons aussi cette propriété pour construire, sur des droites sécantes du dessin, des segments qui ont la même longueur dans la réalité. Cette propriété nous permettra ainsi de résoudre le problème sans utiliser une vue en vraie grandeur du plan sur lequel les objets sont posés.

Commençons donc par déterminer la position du centre *Z* de projection à partir du dessin. Le centre *Z* se trouve dans le plan horizontal mené par la ligne d'horizon, sur une perpendiculaire à la ligne d'horizon menée par le point de fuite principal *F*. Pour situer *Z* sur cette droite, nous utilisons le point de distance F'. Un *point de distance* est, par définition, le point de fuite d'une famille de parallèles horizontales inclinées à 45° par rapport au plan de projection. Le point F' se trouve sur la ligne d'horizon et s'obtient à partir de l'image d'une diagonale de la base du module. Nous pouvons maintenant situer *Z* car la distance de *Z* au point de fuite principal *F* est égale à la distance de *F* à F'. A la figure 53, le plan horizontal contenant *Z* a été rabattu dans le plan du dessin, au-dessus de la ligne d'horizon, par rotation autour de la ligne d'horizon.

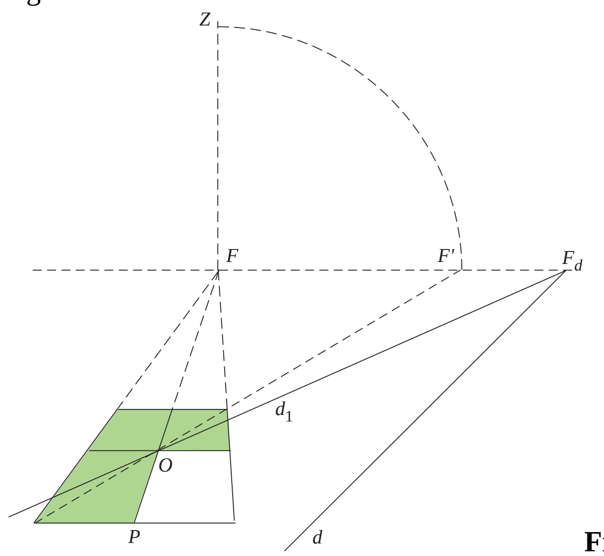

Figure 53

Nous pouvons à présent déterminer le point de fuite F_p des droites horizontales perpendiculaires à d dans la réalité et mener par F_p la droite p passant par O (figure 54). Pour ce faire, nous avons utilisé la propriété illustrée à la figure 52.

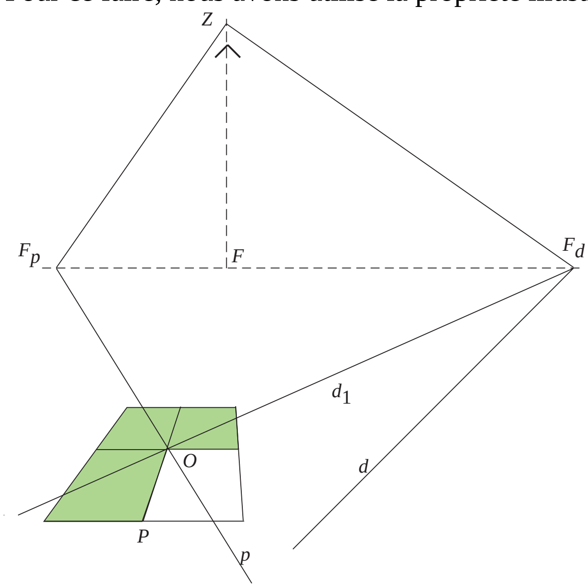

Figure 54

Nous allons à présent construire sur d_1, un point P_1 de sorte que OP et OP_1 représentent des segments de même longueur. Il s'agit donc de construire un triangle OPP_1 représentant un triangle isocèle, les angles en P et P_1 devant être égaux dans la réalité. Nous pouvons à nouveau utiliser le centre Z de projection et bissecter l'angle joignant Z aux points de fuite F et F_d ce qui fournit le point Q sur la ligne d'horizon (figure 55). L'intersection de QP avec d_1 fournit le point P_1 cherché[2].

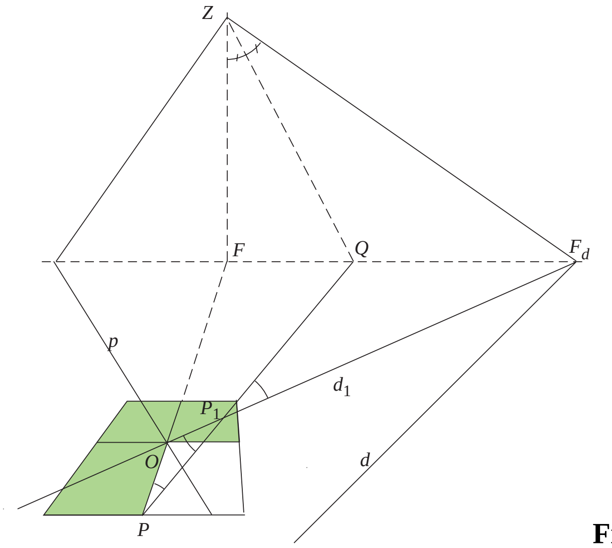

Figure 55

Pour représenter le segment situé de l'autre côté de O, nous utilisons la conservation de l'égalité de segments situés sur des parallèles au plan de projection (figure 56). On trace OQ_1' de même longueur que OQ_1 et on trouve P_1' à l'intersection de d_1 et de FQ_1'.

[2] Cette construction apparaît dans le traité de Brook Taylor de 1715, *Linear Perspective : or, a New Method of Representing justly all manner of Objects as they appear to the Eye in all situations,* (in Kirsti Andersen, *Brook Taylor's Work on Linear Perpective*, Springer-Verlag, New York, 1992). Le problème traité alors par Taylor est le suivant : « *Etant donné la ligne de fuite d'un plan, son centre et sa distance, construire la représentation d'un cercle à partir de la représentation donnée d'un rayon*. »

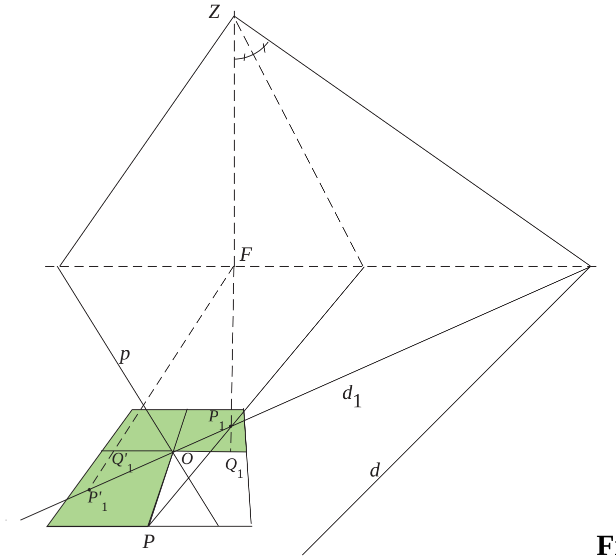

Figure 56

De manière analogue, on détermine sur la droite p deux segments représentant des arêtes de la base du module (figure 57).

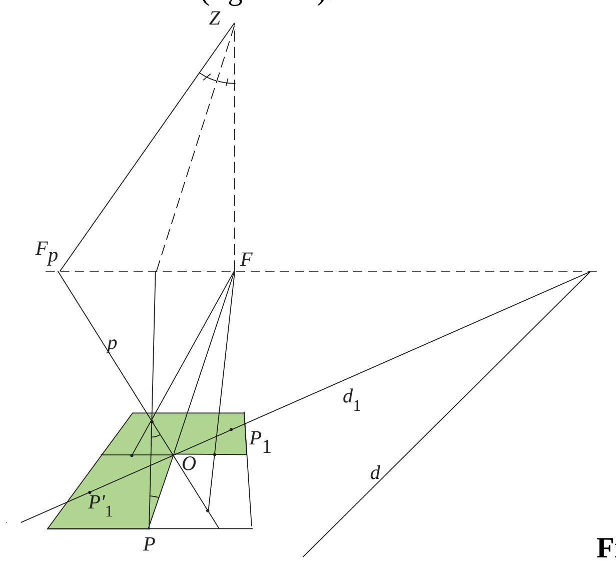

Figure 57

On peut ensuite représenter la base du module ayant une arête le long de d_1 en utilisant les points de fuite F_d et F_p (figure 58).

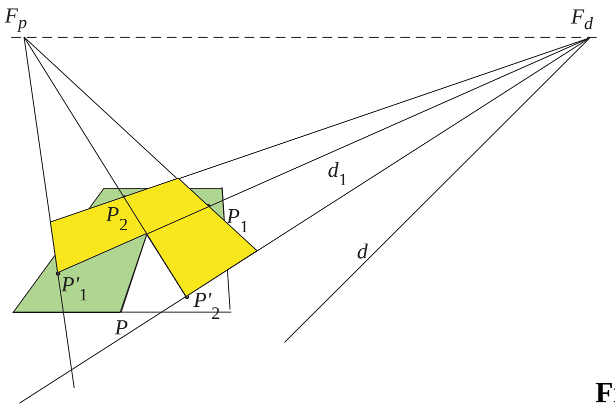

Figure 58

Pour disposer le module le long de *d*, il suffit d'utiliser la conservation de l'égalité de segments se trouvant sur des parallèles au plan de projection.

Référence bibliographie

GROUPE D'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE (G.E.M.) (2006) Les représentations planes comme un fil conducteur pour l'enseignement de la géométrie, *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, **supplément du vol 11,** 51-71.