

Abstract. Mathematical Enculturation.

Resorting to cultural activities can prove to be invaluable to introduce and install abstract notions. This workshop emphasizes two means for restoring the pleasure of learning to demotivated pupils: history and artistic realizations.

The historical approach of mathematics allows to enter the concepts showing in which context and why they were born, how they have evolved. A round through the systems of numeration and the solution of equations gives a good example of these words. As to geometrical decorations whose examples are founded into all civilizations they can be used as aid for geometry learning so geometry shows its whole visual attraction. Repetitive patterns as friezes or tilings lend themselves to activities which combine intuition, creativity and analysis of mathematical structures.

Résumé. Le recours à des activités culturelles peut s'avérer une aide précieuse pour introduire et installer des notions abstraites. Cet atelier met l'accent sur deux registres susceptibles de rendre un certain plaisir d'apprendre aux élèves démotivés : l'histoire et les réalisations artistiques.

L'approche historique des mathématiques permet d'aborder les concepts en montrant dans quel contexte et pourquoi ils sont nés, comment ils ont évolué. Un parcours à travers les systèmes de numération et la résolution des équations illustre ce propos. Quant aux décors géométriques, dont on trouve des exemples dans toutes les civilisations, ils peuvent servir de support à l'apprentissage de la géométrie, qui montre ainsi tout son attrait visuel. Des motifs répétitifs tels que les frises ou les pavages se prêtent à des activités qui allient intuition, créativité et analyse des structures mathématiques.

Mots-clés. Histoire des mathématiques, réalisations artistiques, culture mathématique, scolarité dans son ensemble, formalisme algébrique, structures mathématiques.

1. Introduction

L'une des dernières recherches du CREM [4], dont nous rendons compte ici, s'intitule « Pour une culture mathématique accessible à tous ». Elle tente de porter une réflexion sur ce qui pourrait constituer une culture mathématique de base.

Compter, situer, mesurer, dessiner, jouer, expliquer sont des activités propres à tous les peuples. Elles permettent de développer, dès le plus jeune âge, des compétences mathématiques. Celles-ci devraient se compléter progressivement et s'enrichir tout au long de la scolarité. Or on constate que la culture mathématique échappe, de nos jours, à de nombreux adultes, même très cultivés dans d'autres domaines et/ou ayant un niveau d'études supérieures ou universitaires.

Les mathématiques ont pour vocation de résoudre des problèmes. Elles nécessitent la mise en œuvre de processus d'abstraction et de raisonnements analytiques qui dicteront les opérations à effectuer ; c'est en général l'interprétation des résultats qui fournit alors la solution.

Très souvent, dans l'enseignement, l'accent est mis sur les processus opératoires, alors que ceux-ci constituent la phase la moins « humaine » de la résolution des problèmes. Dans notre société moderne, c'est d'ailleurs la partie dévolue aux machines. Presque toujours, on impose aux élèves l'apprentissage d'algorithmes de calcul, sans dire à quelles occasions ces méthodes ont été mises au point, sans justifier leur pertinence ni exhiber des classes de problèmes qu'elles permettent de résoudre. De plus, sous prétexte d'exercer les élèves à utiliser ces algorithmes, on leur soumet des listes de calculs à effectuer hors de tout contexte. Ces pratiques conduisent inévitablement à faire percevoir les mathématiques comme un ensemble de procédures vides de sens, fournissant des réponses vides de sens à des questions vides de sens.

Dans cette recherche, comme dans les précédents travaux du CREM, on a tenté de donner du sens aux activités mathématiques proposées. Pour rendre un certain plaisir d'apprendre aux élèves démotivés, nous avons travaillé sur quatre registres :

- les mathématiques au quotidien ;
- les récréations mathématiques ;
- l'histoire des mathématiques ;
- les réalisations artistiques.

Suivant la tradition du CREM, la scolarité est envisagée dans son ensemble, de la maternelle jusqu'à 18 ans. Il s'agit d'un travail de synthèse, qui dégage des fils conducteurs soulignant les étapes successives de l'apprentissage des mathématiques, tant sur le plan de la numération (calcul, formalisation) que sur celui de la manipulation de figures, d'objets géométriques (symétries, structures, ...).

Dans le cadre de cet atelier, nous allons illustrer deux des moyens préalablement cités, l'histoire et les réalisations artistiques. L'enseignement traditionnel – en tout cas, ici en Belgique – exhibe rarement ces aspects culturels des mathématiques.

2. Le recours aux sources historiques

2.1. L'apport de l'histoire

Nombreux sont ceux qui pensent que le rôle de l'histoire dans le cours de mathématiques est multiple. Citons par exemple, le courant représenté par le regretté John FAUVEL [11].

En premier lieu, une approche historique contribue à faire connaître les apports des différentes cultures à l'évolution des mathématiques. L'histoire des sciences est trop souvent négligée dans le cours d'histoire. Or, l'influence des connaissances scientifiques égyptienne, mésopotamienne, indienne, arabe, ... et du rationalisme mathématique grec a été prépondérante dans la construction de notre mode de pensée occidental.

Par ailleurs, les obstacles épistémologiques que doit franchir l'élève sont souvent ceux-là mêmes qui ont posé problème dans le passé. Contrairement à une idée que défendait la « mathématique moderne », on a compris aujourd'hui qu'on n'enseigne pas directement des notions abstraites dans leur forme définitive, telles qu'elles sont publiées¹. Elles doivent mûrir, muter, et cela, l'histoire encore le montre fort bien.

Lorsque l'élève assiste à la naissance d'un concept au travers des circonstances dans lesquelles celui-ci apparaît et se développe, il perçoit mieux le côté profondément humain des mathématiques ainsi que leur utilité. L'histoire permet ainsi d'observer les mécanismes qui mettent en marche la pensée mathématique.

Ajoutons encore qu'il y a un certain réconfort pour l'élève à resituer ses propres difficultés dans une continuité historique : d'autres avant lui ont dû faire face à des problèmes, affronter des défis ; ils ont obtenu des résultats...

Dans notre recherche, l'apport de l'histoire est illustré à travers des activités sur la numération (des débuts jusqu'aux nombres irrationnels), sur la résolution des équations et sur l'introduction à la trigonométrie.

1. *Numération*. – Des activités de décodage de nombres écrits dans différents systèmes de numération sont proposées à des jeunes de dix à douze ans. Par oppositions et comparaisons (nombre de symboles utilisés, base, présence du zéro, relation entre longueur de l'écriture et valeur du nombre, importance de la position des symboles, impossibilité d'écrire de très grands nombres), les élèves découvrent les différentes propriétés de notre système décimal

¹Comme le dit H. FREUDENTHAL [12], « Aucune idée mathématique n'a jamais été publiée telle qu'elle fut découverte ».

positionnel, afin de mieux le comprendre et l'utiliser.

Le théorème de PYTHAGORE donne une première approche de l'irrationalité, pour des élèves d'environ 14 ans. Une seconde approche est présentée aux élèves du degré supérieur de l'enseignement général, par la découverte et l'expérimentation de l'algorithme de THÉON, puis par le calcul d'une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre positif par l'algorithme de HÉRON.

2. *Trigonométrie.* – Elle est introduite par la construction d'une table de cordes, comme l'a fait PTOLÉMÉE dans son *Almageste*. Cela permet, non seulement de bien installer la notion de sinus, mais donne également l'occasion d'exploiter les outils géométriques mis en place durant la troisième année du secondaire, au cours d'une activité de justification et de démonstration.
3. *Symbolisme algébrique.* – Il s'agit de faire découvrir la formule de résolution de l'équation du deuxième degré à partir d'un extrait du texte d'AL-ḤWĀRIZMĪ sur le *calcul par le ḡabr et la muqābala*, généralement considéré comme le texte fondateur de l'algèbre. L'idée est de montrer le sens des développements algébriques en les confrontant à une représentation géométrique.

C'est ce dernier point qui a été développé dans l'atelier.

2.2. Découverte de la formule de résolution de l'équation du deuxième degré à travers un extrait du texte d'AL-ḤWĀRIZMĪ

Ne disposant pas des nombres négatifs ni du nombre zéro, AL-ḤWĀRIZMĪ a classé les équations de degré au plus deux en six types, dont il donne et démontre la formule de résolution. L'extrait proposé explique cette méthode pour l'équation du type $ax^2 + bx = c$.

Notre traduction est très fidèle, nous avons seulement jugé utile d'ajouter entre <> les mots <carrée> et <ce cinq> qui ne figurent pas dans le texte arabe. Pour éviter toute confusion entre le « carré x^2 » et le « carré figure géométrique », nous avons délibérément choisi de garder le terme arabe *māl*, qui désigne x^2 , au lieu de le traduire.

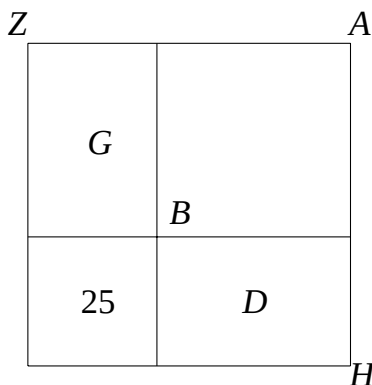
L'activité en classe commence par une lecture commentée de ce texte, dans lequel AL-ḤWĀRIZMĪ donne de l'algorithme qu'il a décrit précédemment, deux démonstrations qui s'appuient sur deux figures différentes. La première démonstration proposée, qui n'est pas reproduite ici, intervient dans l'espace noté [...] entre les deux paragraphes. C'est la deuxième approche, basée sur la figure la plus simple,

que nous proposons en lecture aux élèves.

Démonstration du cas « un $māl$ et dix de ses racines égalent trente-neuf dirhams. »

La figure pour expliquer ceci est une surface <carrée> dont les côtés sont inconnus. Elle représente le $māl$ qu'on veut connaître ou dont on veut connaître la racine. C'est la surface $\overline{AB}$, dont chaque côté peut être considéré comme une de ses racines ; et si on multiplie un de ces côtés par un nombre quelconque, alors le résultat obtenu peut être considéré comme le nombre des racines qui sont ajoutées à la surface. [...]

Mais il y a aussi une autre figure qui mène à ce résultat, et c'est la surface <carrée> $\overline{AB}$ qui représente le $māl$. Nous voulons lui ajouter l'équivalent de dix de ses racines. Nous avons pris la moitié de ces dix, c'est-à-dire cinq. Nous avons transformé ceci en deux surfaces $\overline{G}$ et $\overline{D}$ sur les flancs de la première surface. La longueur de chacune de ces deux surfaces devient cinq, qui est la moitié des dix racines, et la largeur est comme le côté de la surface $\overline{AB}$. Il nous reste le carré dans l'angle² de la surface $\overline{AB}$, et c'est cinq par cinq, et <ce cinq> est la moitié des racines que nous avons ajoutées sur les flancs de la première surface.



Nous savons donc que la première surface est le $māl$, et que les deux surfaces qui sont sur ses deux flancs sont les dix racines. Tout cela vaut trente-neuf, et il reste, pour compléter la surface la plus grande, le carré cinq par cinq, soit vingt-cinq.

²Littéralement, « le carré des angles de la surface $\overline{AB}$ ».

Nous l'avons ajouté à trente-neuf pour que la surface la plus grande se complète, c'est la surface $\overline{ZH}$, et tout cela vaut soixante-quatre. Nous prenons sa racine, huit, et c'est l'un des côtés de la surface la plus grande. Si on lui retranche l'égal de ce que nous lui avons ajouté, à savoir cinq, il reste trois. C'est le côté de la surface $\overline{AB}$, qui est le $māl$, et c'est sa racine. Et le $māl$ est égal à neuf.

La découverte de la formule de résolution de l'équation du deuxième degré se fera en trois étapes, à partir de ce texte accompagné du dessin.

2.2.1. Analyse du texte

On demande aux élèves de transposer les explications fournies par le texte en utilisant le symbolisme mathématique actuel et de compléter la figure en y reportant les mesures des côtés et des aires des carrés et des rectangles.

La lecture du texte appelle quelques commentaires.

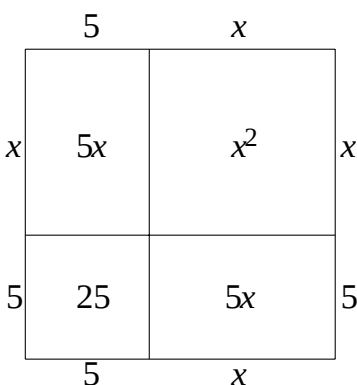
Le terme $māl$ signifie le bien, l'argent, la richesse, le capital, la fortune, le troupeau... Dans l'algèbre rhétorique, ce mot désigne la quantité qui a une racine. En fait on recherche X le $māl$ et $\sqrt{X}$ le $ǧidr$ qui est sa racine, et non une inconnue x et son carré x^2 . Quant à l'expression *trente-neuf dirhams*, elle désigne une quantité positive connue, qui n'est ni un nombre de carrés, ni un nombre de racines. C'est ce que nous appelons aujourd'hui le terme indépendant.

L'équation à résoudre est donc

$$X + 10\sqrt{X} = 39 \quad \text{ou} \quad x^2 + 10x = 39.$$

La première forme est plus proche de l'esprit du texte arabe, mais nous lui substituons la seconde, mieux adaptée au travail à effectuer avec les élèves.

C'est le recours au dessin qui montre clairement pourquoi l'auteur recommande de diviser en deux le nombre des racines (10 dans l'exemple choisi), le terme $10x$ de l'équation étant obtenu par l'adjonction au carré de deux rectangles de $5x$ chacun. AL-ḤWĀRIZMĪ insiste sur le fait que la longueur cinq de chacun des deux rectangles est la moitié du nombre des racines. C'est cette précision qui va permettre de passer du cas particulier, où on ajoute dix racines, au cas général, où on ajoute un nombre quelconque de racines.

$$\begin{aligned}
 x^2 + 10x &= 39 \\
 x^2 + 10x + 25 &= 39 + 25 \\
 x^2 + 10x + 25 &= 64 \\
 (x + 5)^2 &= 64 \\
 (x + 5) &= 8 \\
 x &= 8 - 5 \\
 x &= 3
 \end{aligned}$$


Après avoir complété le dessin, comme on le voit dans la figure ci-dessus, les élèves sont en mesure de transposer, sous forme d'équations, les opérations décrites dans le dernier paragraphe.

Pour les mathématiciens de l'époque, qui ne concevaient pas les quantités négatives en tant que nombres, la seule valeur dont le carré vaut 64 est 8. Dans le contexte actuel, nous considérons aussi la valeur -8 , ce qui nous permet de compléter la résolution d'AL-ḤWĀRIZMĪ.

Dans le domaine des nombres positifs et négatifs, l'équation $(x + 5)^2 = 64$ est équivalente à

$$x + 5 = 8 \quad \text{ou} \quad x + 5 = -8,$$

ce qui donne les solutions

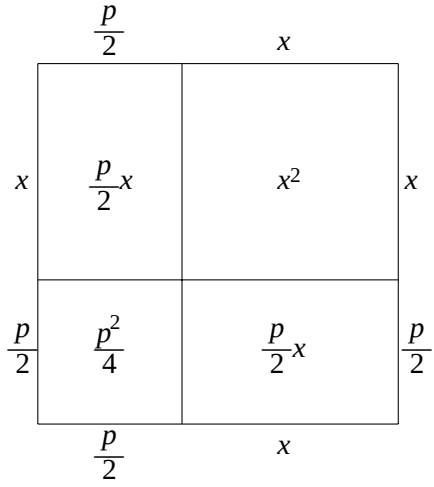
$$x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -13.$$

2.2.2. De l'exemple à l'algorithme

L'étape suivante consiste à se dégager de l'exemple numérique, à franchir un pas vers l'abstraction.

On demande aux élèves de recommencer le même raisonnement pour l'équation $x^2 + px = q$ (où p et q sont ce que nous appelons aujourd'hui des rationnels positifs).

Il s'agit donc de remplacer 10 par p , 5 par $\frac{p}{2}$ et 39 par q . Les calculs littéraux qui s'ensuivent mènent à une première formule.

$$\begin{aligned}
x^2 + px &= q \\
x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\
\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\
\left(x + \frac{p}{2}\right) &= \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \\
x &= -\frac{p}{2} + \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}
\end{aligned}$$


Complétons à nouveau la résolution en ajoutant la racine carrée négative de $q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$.

L'équation $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$ est équivalente à

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \quad \text{ou} \quad x + \frac{p}{2} = -\sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2},$$

ce qui donne les solutions

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{p}{2} - \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}.$$

En fait, nous avons obtenu une formule générale de résolution de l'équation de deuxième degré $x^2 + px = q$. En effet, alors que la démonstration géométrique ne s'applique qu'aux seuls cas où p et q sont strictement positifs, le développement algébrique, qui consiste à compléter le membre de gauche pour obtenir un carré parfait, peut être effectué avec n'importe quelle valeur de p et q .

2.2.3. La formule actuelle

Dans la troisième étape, il reste à dégager la formule qui donne la solution de l'équation sous la forme générale utilisée actuellement, à savoir $ax^2 + bx + c = 0$.

Les élèves doivent modifier les résultats obtenus pour exprimer les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ en fonction des coefficients a , b et c , où a est non nul. Nous avons supposé a non nul de manière à ce que l'équation ne soit pas réduite à une équation de premier degré. Dans ce cas, nous pouvons diviser tous les termes par a , ce qui donne

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a},$$

forme facilement comparable à

$$x^2 + px = q.$$

Les élèves verront qu'il suffit de remplacer p par $\frac{b}{a}$ et q par $\frac{-c}{a}$. On leur demande d'effectuer cette transformation de formule.

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} \quad \text{devient} \quad x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}.$$

En réduisant au même dénominateur, ils obtiennent

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \text{et finalement} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Cette unique formule nous permet de résoudre toute équation du type $ax^2 + bx + c = 0$, avec des coefficients a , b et c positifs ou négatifs, b et c éventuellement nuls.

3. Les réalisations artistiques

3.1. L'apport de l'art

Nombreux sont les liens entre mathématiques et art, en peinture, architecture, musique, ... En particulier, les réalisations artistiques de nature géométrique, dont on retrouve des exemples dans toutes les civilisations et à toutes les époques, peuvent servir de support à l'apprentissage de la géométrie. On peut exploiter les peintures murales dans l'art africain, les zelliges de l'art hispano-musulman, mais aussi les pavages qui décorent les cuisines et les salles de bain, les frises qui ornent la vaisselle et le linge de maison...

Par des activités alliant le côté créatif à l'analyse des structures mathématiques, il est possible de stimuler le besoin de comprendre par le désir de créer. Un tel apprentissage développe l'intuition et aiguisé le sens de l'observation, tout en

procurant à la fois une satisfaction intellectuelle et un plaisir esthétique. La géométrie, qui a souvent été cantonnée à l'enseignement du raisonnement logique et de la méthode hypothético-déductive, montre ainsi tout son attrait visuel et l'un de ses rôles fondamentaux, l'organisation et la structuration de l'espace.

Pour certains élèves de l'enseignement technique ou professionnel, la motivation à la pratique d'activités géométriques peut être directement liée au travail en atelier. L'apprentissage peut encore être enrichi par l'utilisation de logiciels de dessin. C'est l'occasion d'un premier contact avec le DAO³, un des nombreux domaines où mathématiques, techniques et arts se rencontrent.

Les décors géométriques, tels que peintures murales, pavages, frises, ... constituent le matériel de base des activités géométriques proposées dans la recherche, de l'école primaire à la fin du secondaire. Les rythmes visuels portés par des motifs répétés ou *patterns* permettent de dégager des structures communes à des objets apparemment très différents. Élaborer des techniques de production de frises et de pavages sont des activités que l'on peut déployer à tous âges et qui développent des compétences multiples.

1. *Symétries à l'école primaire.* – À ce niveau, des manipulations (papier calque, miroirs) visent à mettre en place la notion de symétrie. Par le biais de réalisations de puzzles, de pliages et découpages, de peintures, les enfants analysent les symétries dans l'art africain et produisent des créations personnelles.



2. *Pavages et angles de polygones au début du secondaire.* – Une analyse en profondeur des pavages réguliers et semi-réguliers conduit à la construction des polyèdres platoniciens, en passant par des considérations sur les mesures des angles intérieurs des polygones réguliers.

³Dessin assisté par ordinateur.

3. *Frises à différents niveaux de la scolarité.* – Les frises sont une source inépuisable de situations d'apprentissage. Des activités intuitives débouchent sur la découverte des isométries qui laissent une frise invariante. L'immense diversité de ces bandes décorées, que l'on rencontre un peu partout, incite à les répertorier, les classer ; mais cela nécessite évidemment la mise au point de critères de classement. La structure de groupe qui émerge tout naturellement dans ce cadre géométrique, à partir des groupes de symétries, peut être dégagée dans les classes plus avancées de l'enseignement général.

C'est ce thème qui est développé dans l'atelier.

3.2. Les frises : de la symétrie aux structures

Le propos est de montrer que les frises permettent de travailler la géométrie des transformations à plusieurs niveaux d'abstraction, relevant de différents aspects de la pensée géométrique.

3.2.1. *Intuition (observation, analyse, compréhension)*



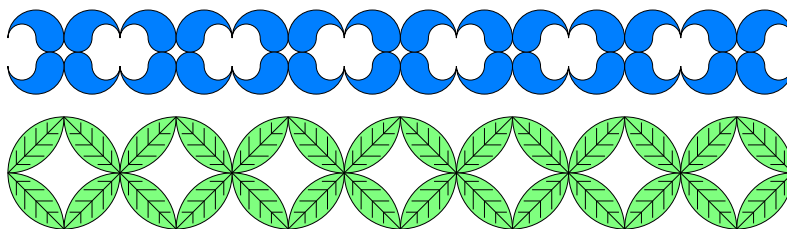
Une première phase d'observation révèle sans trop de peine qu'une frise est un décor sur bande et que ce décor est obtenu par reproduction d'un « motif de base » qui se répète tout au long de la bande.

Une activité avec des frises de papier et leurs photocopies sur transparents permet

- de travailler la notion d'infini dans un contexte géométrique ;
- d'identifier les mouvements qui permettent de fabriquer de nouvelles frises à partir du matériel et d'y associer l'isométrie correspondante ;



- de reconnaître des ressemblances de structure entre des frises différentes.



3.2.2. Classement (*raisonnement, conjecture, justification, démonstration*)

Les frises sont répertoriées en fonction des isométries qui les conservent globalement. On adopte une définition plus précise :

une frise est une bande décorée invariante par les translations d'une famille infinie de translations, toutes multiples d'une translation minimale.

Les élèves doivent prendre conscience que l'invariance par translation implique le caractère infini de la frise. Ils identifient les mouvements susceptibles d'appliquer une frise sur elle-même :

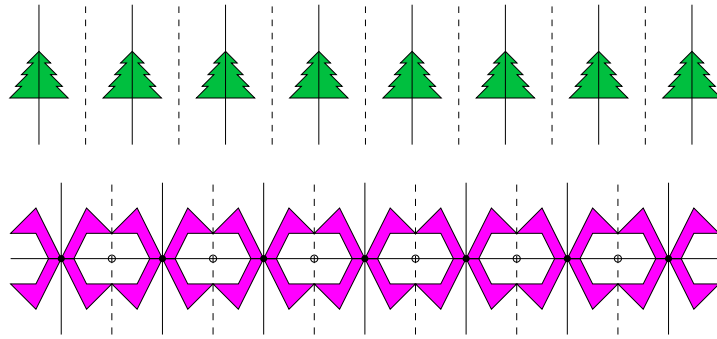
1. des translations dans la direction de la bande,
2. une symétrie d'axe médian,
3. des symétries d'axes perpendiculaires à la direction de la bande,
4. des symétries centrales dont le centre est sur l'axe médian.

En ajoutant à cette liste les composées des isométries ainsi répertoriées, les élèves rencontrent la symétrie glissée.

Pour réaliser le classement, on leur demande de trouver parmi une bibliothèque de frises celles qui sont invariantes pour

- uniquement des translations ;
- des translations et un seul type de symétries ;
- des translations et plusieurs types de symétries.

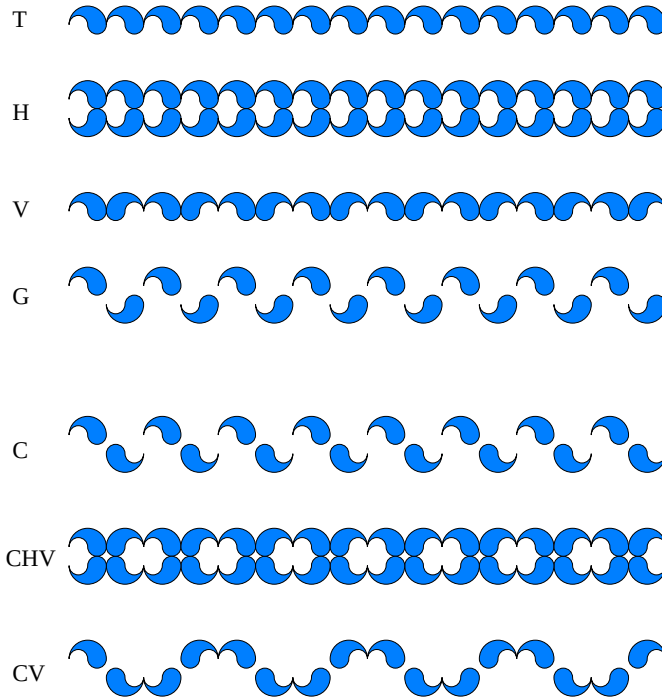
Tout en effectuant ce travail de classement, on démontre quelques propriétés de la composition des isométries. Par exemple, la première figure se prête à la découverte de la composée de deux symétries d'axes parallèles, la seconde à la composée de deux symétries d'axes perpendiculaires. On y découvre aussi les composées des symétries avec des translations ou avec des demi-tours.



On en arrive ainsi à classer les frises en 7 types et à se convaincre qu'il n'y en a pas d'autres.

Sept types de frises

Type



Les frises de type **T** sont invariantes par translations seulement ; celles de type **H**, **V**, **G**, **C** sont respectivement invariantes par symétrie d'axe horizontal, par

symétries d'axes verticaux, par symétries glissées, par symétries centrales (outre les translations). Les frises des types **CHV** et **CV** sont invariantes par plusieurs symétries différentes. Les élèves complètent un tableau récapitulatif en indiquant les isométries qui conservent les frises de chaque type.

Type	Translations	Symétrie d'axe horizontal	Symétries d'axe vertical	Symétries centrales	Symétries glissées
T	×				
H	×	×			×
V	×		×		
G	×				×
C	×			×	
CHV	×	×	×	×	×
CV	×		×	×	×

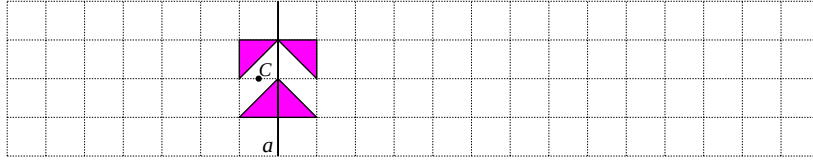
3.2.3. Structuration

La structure de groupe est introduite à partir des ensembles d'isométries qui conservent chaque type de frise. Ces groupes sont infinis mais peuvent être engendrés par composition d'une, deux ou trois isométries (génératrices) bien choisies. À titre d'exemple, montrons comment on peut engendrer le groupe $\mathcal{CV}$ des frises du type **CV**.

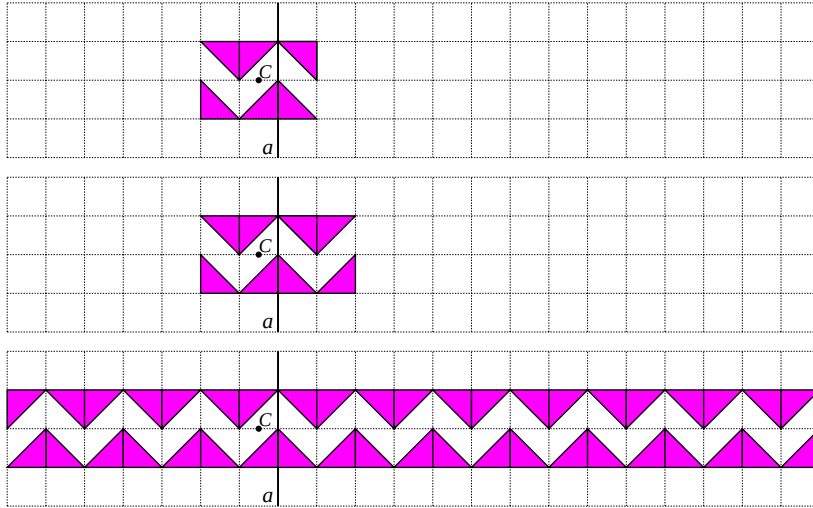
Les élèves sont invités à compléter la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie de centre C et par la symétrie s_a d'axe a .



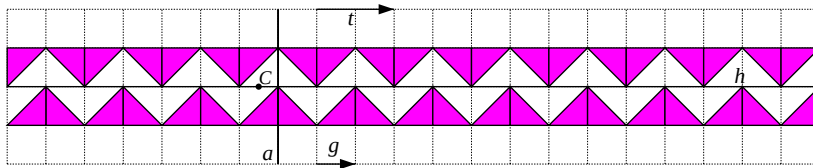
On complète tout d'abord la figure pour qu'elle soit invariante par la symétrie centrale s_C , puis par la symétrie s_a d'axe a ,



et on recommence indéfiniment en alternant les symétries s_C et s_a , jusqu'à l'obtention de la frise des figures suivantes.



Ajoutons sur la figure l'axe médian h , la translation de glissement g et la translation t . La symétrie glissée $s_g = s_h \circ g = g \circ s_h$ applique la frise sur elle-même, ainsi que la translation $t = s_g^2$.



On a $s_g = s_a \circ s_C$, ce qui permet de conclure que $\mathcal{CV} = \langle s_C, s_a \rangle$:

- par la composition de s_a et s_C , on obtient la symétrie glissée s_g ,
- les symétries glissées sont obtenues comme puissance à exposant impair de s_g ,
- les translations kt sont obtenues comme puissance à exposant pair de s_g ,
- les symétries d'axe vertical sont obtenues par composition de s_a avec les translations,

- les symétries centrales sont obtenues par composition de s_C avec les translations.

C'est l'occasion, pour les élèves de ces classes, de rencontrer une idée fondamentale de la géométrie moderne : on n'étudie plus les figures dans l'espace, mais les figures considérées comme des espaces, c'est-à-dire des ensembles organisés, structurés [16].

Bibliographie

- [1] AL-ḤWĀRIZMĪ, sans date. *The Algebra of Mohammed ben Musa*. G. Olms, Hildesheim. Ed. and translated by F. ROSEN. Rééd. 1986.
- [2] M. BALLIEU, mars-avril 2001. Quelques « étapes » de l'histoire des mathématiques dans les pays arabes. *Mathématiques et Pédagogie*, 131 : 5–24.
- [3] A. J. BISHOP, 1988. *Mathematical Enculturation*. Kluwer, Dordrecht.
- [4] CREM, 2004. *Pour une culture mathématique accessible à tous. Élaboration d'outils pédagogiques pour développer des compétences citoyennes*. Ballieu, M. et Guissard, M.-F., coordinateurs, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.
- [5] C. CULUS et C. PERSOENS, mars 1995. Les transformations dans le secondaire inférieur. Document pédagogique, UREM, Université Libre de Bruxelles, Campus Plaine CP216, Bld Triomphe, B1050 Bruxelles.
- [6] G. DE VECCHI, 1992. *Aider les élèves à apprendre*. Hachette, Paris.
- [7] G. DE VECCHI et N. CARMONA-MAGNALDI, 1996. *Faire construire des savoirs*. Hachette, Paris.
- [8] A. DELEDICQ, mai 1993. Le monde des symétries. In *Collection Maths pour tous*. ACL-Éditions, Paris, 50 rue des Écoles, 75005 Paris.
- [9] A. DJEBBAR, 1988a. Quelques aspects de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe d'orient. In *Actes de l'Université d'été*, IREM de Toulouse, pages 259–286.
- [10] H. ELKHADEM, 1997. *La transmission des connaissances scientifiques au Moyen-Âge entre l'Orient et l'Occident*. Les Cahiers du CeDoP, Histoire des sciences et de la civilisation arabes. Centre de documentation pédagogique de l'Université Libre de Bruxelles, avenue Jeanne 44, 1050 Bruxelles.
- [11] J. FAUVEL et J. VAN MAANEN, éditeurs, 2000. *History in Mathematics Education, The ICMI Study*. Kluwer, Dordrecht.

- [12] H. FREUDENTHAL, 1983. *Didactical phenomenology of mathematical structures*. D. Reidel, Dordrecht.
- [13] GRUNBAUM et SHEPHARD, 1989. *Tilings and Patterns*. W. H. Freeman and Co., New York.
- [14] J. HØYRUP, 1992. « Algèbre d'Al-ğabr » et « algèbre d'arpentage » au neuvième siècle islamique et la question de l'influence babylonienne. In F. MAWET et PH. TALON, éditeurs, *D'Imhotep à Copernic, Actes du colloque international, Université Libre de Bruxelles, 3-4 novembre 1989*, pages 23–38. Peeters, Leuven.
- [15] G. G. JOSEPH, 1994. *The Crest of the Peacock (Non-European Roots of Mathematics)*. Penguin Books, London.
- [16] F. KLEIN, 1872. *Le programme d'Erlangen (Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes)*. Jacques Gabay, Paris. Rééd. 1991.
- [17] N. MAHAMMED, 1995. *Sur la résolution des équations algébriques*. IREM de Lille.
- [18] G. E. MARTIN, 1982. *Transformation Geometry, An Introduction to Symmetry*. Springer, New York.
- [19] J. SESIANO, 1999. *Une introduction à l'histoire de l'algèbre*. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne.
- [20] E. C. WITTMANN et G. MÜLLER, 1990 et 1994. *Handbuch produktiver Rechenübungen*, 2 vol. Ernst Klett, Stuttgart.

Pour une culture mathématique accessible à tous. Élaboration d'outils pédagogiques pour développer des compétences citoyennes est un ouvrage collectif dont les auteurs sont Michel BALLIEU, Jean-Michel DELIRE, Marie-France GUISSARD, Amélie JONKERS, Philippe MAIRESSE, Bénédicte MESTAG, Jules MIÉWIS, Laure MOURLON BEERNAERT, Jacques VANDEKERCKHOVE et Françoise VAN DIEREN.

Le texte de cette recherche est disponible sur Internet à l'adresse

<http://www.enseignement.be/prof/dossiers/recheduc/rech1.asp>

en introduisant le mot-clé « mathématiques ».

MICHEL BALLIEU

Professeur à l'Athénée Royal de Binche

`michel.ballieu@ulb.ac.be`

MARIE-FRANCE GUISSARD

Professeur à l'Athénée Royal de Waterloo

