ÉRIC LAGUERRE

FIGURES ARCHÉTYPES, FIGURES PROTOTYPES ET LEURS EFFETS DANS LA RÉSOLUTION DE TÂCHES

Abstract. Archetypal figures, prototypic figures, and their effects on problem solving
A characteristic of key-figures is to reproduce theorem’s premises and so to facilitate its application: for instance it’s easier to see a sub-figure included in a complex configuration. In this paper, we limited our study on Thales’ Theorem, and by bringing out figures named archetype or prototype – depending on their apparition before or after the teaching of the Theorem – we tried to understand how students built their typical representations. Then, we have studied how some redundant parameters defining the prototypes partly could generate difficulties on one hand on perception of figures – leading us to pathological figures – and on the other hand in the use of the theorem – leading us to pathogenic figures.

Résumé. Les figures-clés ont, *a priori*, pour caractéristiques de reproduire les prémisses d'un théorème afin de faciliter son application, par exemple, en rendant plus aisé l'accès à une sous-figure incluse dans une configuration complexe. Dans cet article, dont le champ est restreint au théorème de Thalès, nous nous sommes attachés, dans un premier temps, à comprendre la façon dont se constituaient des représentations typiques pour les élèves en dégageant des figures que nous avons nommées archétypes ou prototypes suivant leur moment d'apparition par rapport à l'enseignement du théorème. Nous nous sommes interrogés ensuite sur la manière dont certains paramètres superflus qui définissaient en partie ces prototypes pouvaient générer des difficultés, d'une part, dans la reconnaissance de figures, ce qui nous a conduit à mettre en lumière des figures pathologiques, et d'autre part dans la mise en œuvre du théorème, ce qui nous a amené à mettre en évidence des figures pathogènes.

Mots-clés. Figure, appréhension perceptive, appréhension opératoire, variable figurale, typicalité, figure archétype, figure prototype, congruence, Thalès.

Introduction

Lorsque nous parcourons des ouvrages scolaires de l’enseignement secondaire de toutes les périodes, nous pouvons observer que les expressions "figures clés de Thalès", "configurations de Thalès", "triangles en situation de Thalès" ont très souvent été utilisées et qu'une expression du type "figure de référence" a été employée un temps pour l’homothétie par exemple. L'analyse de quelques préparations de cours actuels de professeurs ou mêmes d’articles liés à

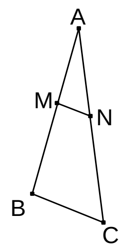
ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 12, p. 17 - 54.
© 2007, IREM de STRASBOURG.

l’enseignement (Montfort, 1995) nous montre également que ces vocables sont encore employés.

Mais quels sens pouvons-nous donner à ces termes ? Quelles précisions théoriques est-il possible de conférer à ces expressions ? Quels sont leurs effets et leur utilité éventuels pour les élèves en ce qui concerne une propriété ou une définition précise ?

Notre questionnement initial a trait d’une part à la didactique de la géométrie en général de par la définition et la recherche de l’existence de nouveaux objets liés à la notion de figure-clé et d’autre part aux répercussions que ces objets ont sur l’enseignement d’un théorème au niveau collège, en l’occurrence celui communément dénommé actuellement en France théorème de Thalès et qui est rédigé comme suit :

En classe de quatrième :
Dans un triangle ABC, si M est un point du côté [AB], N un point du côté [AC] et si (MN) est parallèle à (BC), alors AM/AB = AN/AC = MN/BC. Il s'agit de la variante que nous appelons "triangle". Sauf indication contraire, la figure ci-dessous sert de référence dans la suite du texte pour l'écriture de rapports littéraux.



La propriété directe de Thalès, dans sa totalité, est enseignée en classe de troisième et est rédigée comme suit :
Soient deux droites (d) et (d') sécantes en A.
Soient B et M deux points de (d), distincts de A, C et N deux points de (d') distincts de A.
Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles alors
AM/AB = AN/AC = MN/BC.
Nous nommons cette version la variante "droites sécantes".

La réciproque est rédigée de la façon suivante :
Soient (d) et (d') deux droites sécantes en A. Soient B et M deux points de (d), distincts de A. Soient C et N deux points de (d'), distincts de A.
Si AM/AB = AN/AC et si les points A, B, M et les points A, C, N sont dans le même ordre, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Nous notons au passage que cet énoncé n'est pas tout à fait la réciproque du théorème direct car d'une part il faudrait que dans le premier apparaissent trois égalités et non une seule et que dans la conclusion du second soit mis en évidence l'ordre des points, ce qui peut ce déduire du fait que si ces points n'étaient pas alignés dans l'ordre voulu, les droites en question ne seraient pas parallèles.

L’objectif principal de ce texte est par conséquent double mais une mise au point théorique est avant tout nécessaire.

Ainsi, en premier lieu, après avoir communiqué des éléments théoriques liés à la géométrie complétés par des précisions au sujet de l'enseignement et de la recherche en rapport avec le théorème de Thalès, nous définissons les notions de figures archétypes et prototypes, de figures pathologiques et pathogènes. Mais encore faut-il montrer l'existence et la pertinence de tels objets. Ainsi, nous mettons en évidence la présence de tels dessins dans le cadre plus circonscrit du théorème en question.

En second lieu, nous cherchons à comprendre les interactions des deux notions d'archétype et de prototype en mettant en évidence l'influence que peut avoir l'enseignement sur les archétypes et en montrant que la modification d'une ou plusieurs variables figurales les caractérisants peut soit engendrer le fait que les dessins ne sont plus reconnus comme pouvant faire l'objet d'une application du théorème soit engendrer des erreurs caractéristiques dans l'écriture de rapports littéraux.

1. Cadre théorique

1.1. Cadre géométrique

Comme le rappelle Duval (2005), la géométrie est l'un des domaines qui exige une activité cognitive la plus complète puisqu'elle sollicite le geste, le regard et la vue afin de construire, de raisonner et de voir. Mais la manière de voir des figures dépend étroitement de l'activité dans laquelle elle est mobilisée. En particulier, les tâches en rapport avec le théorème de Thalès peuvent se situer, parfois simultanément, dans trois cadres : le cadre géométrique, le cadre des grandeurs et le cadre numérique. Ces différents niveaux d'approche sont forcément liés à la reconnaissance, à la construction ou aux interprétations qu'il est possible d'avoir de dessins géométriques. Mais le problème est que ces actions ne se réfèrent pas aux mêmes types de perceptions.

1.1.1. Les manières de voir une figure

Duval distingue quatre manières de voir une figure qu'il considère comme quatre entrées différentes dans la géométrie.

Dans la vision du botaniste, il s'agit d'apprendre à reconnaître des formes qui sont utilisées en géométrie. Cette vision permet de constituer un «herbier» de figures qu'il faut reconnaître pour pouvoir rentrer dans une tâche.

En ce qui concerne l'arpenteur, il faut apprendre à mesurer des longueurs sur un terrain dans le méso-espace et à les reporter sur un dessin du micro-espace.

Le constructeur tente lui de connaître les figures qui sont constructibles et de comprendre les contraintes instrumentales qu'engendre de telles constructions.

Enfin, l’inventeur bricoleur a pour tâche de découvrir sur une figure une procédure de résolution d’un problème, en la décomposant, par exemple, en unités figurales que peuvent ensuite être reconfigurées ou en ajoutant des tracés supplémentaires.

De plus, Duval précise que voir recouvre deux niveaux d’opérations qui sont la reconnaissance discriminative de formes et l’identification des objets correspondant aux formes reconnues. Le passage d’un niveau à l’autre repose sur une ressemblance entre la forme visuellement discriminée et la forme typique de l’objet représenté. Deux mécanismes à partir de formes visuelles sont à la source d’identifications d’objets. Il existe une manière de voir qualifiée d’iconique et une autre manière non iconique.

La visualisation iconique, dont relève les entrées botaniste et arpenteur, permet de détecter des ressemblances avec un modèle type étalon. La figure reste indépendante des opérations qui sont susceptibles d’être faites sur elle. Les formes sont perçues comme étant stables ce qui annihile la possibilité de les transformer en d’autres formes semblables ou différentes, ou de les décomposer en une configuration d’autres unités figurales, ce qui constituent des impasses de la visualisation iconique.

La visualisation non iconique, qui concerne les approches «constructeurs», «inventeur bricoleur», passe justement par une décomposition de formes, par des modifications figurales qui constituent un acte de géométrie.

Ces quatre manières de voir les figures de la géométrie relèvent de diverses appréhensions et modifications de ces dernières.

1.1.2. Les diverses appréhensions et modifications des figures

Duval (1994) indique qu'il y a quatre types d'appréhension possibles d'une figure. La plus immédiate semble être **l'appréhension perceptive**, c'est-à-dire celle qui permet d'identifier ou de reconnaître, rapidement une forme ou un objet grâce à des indicateurs intrafiguraux qui sont, par exemple, des différences de taille ou d'orientation entre certaines unités figurales constituant l'image de ce qui est vu. Le traitement est automatique, c'est-à-dire immédiat au niveau du contrôle inconscient. La vision du botaniste est en rapport avec cette appréhension. Elle est fondamentale dans notre travail notamment pour la mise en évidence de figures prototypes, pathologiques que nous définissons plus bas et pour la prise en compte de la notion de **prégnance** empruntée à Noirfalise (1991). Par exemple, dans des contextes très différents des auteurs comme Grenier (1988) et Audibert (1982) ont montré que les élèves éprouvaient des difficultés dans la réalisation de constructions géométriques du fait de la prégnance des directions privilégiées par les bords de la feuille que l'élève intègre comme un repère de verticalité et d'horizontalité.

La perception suivante que propose Duval est **l'appréhension discursive**. Une figure est regardée par rapport à une dénomination (Soit un triangle ABC...), une légende ou une hypothèse qui en fixe explicitement les propriétés. Elle conduit à une explicitation déductive des propriétés mathématiques d'une figure autres que celles indiquées par la légende ou par les hypothèses. De plus, l'appréhension discursive peut être **congruente** ou non avec **l'appréhension perceptive** ce qui, quand le dessin est fourni, rend l'exercice plus ou moins facile.

Duval (1988) prend un exemple pour l'expliquer la notion de **figure congruente**. La figure I a été proposée à des élèves de 3ème avec l'énoncé suivant : *les droites (A'C') et (AC), (A'B') et (AB), (B'C') et (BC) sont parallèles. Montrer que A est le milieu de [B'C'].*

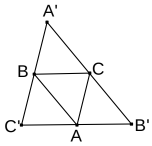


Figure I

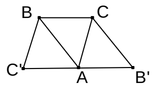
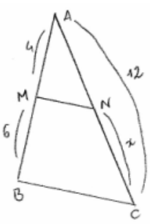


Figure II

Juste avant cette question, le même problème avait été posé avec la figure II qui est la sous-figure utile. Et l'énoncé fournissait les hypothèses non plus en indiquant l'existence de droites parallèles mais celles de parallélogrammes. Le passage de la présentation sémantique **congruente** du problème (figure II et hypothèses mentionnant des parallélogrammes) à la présentation **non sémantiquement congruente** (figure I montrant des triangles et hypothèses mentionnant des droites) a entraîné une chute très nette dans le taux de réussite.

L'auteur conclut alors que les élèves se concentrent généralement sur la figure sans revenir à l'énoncé. Cela caractérise une absence de l'attitude qu'il nomme **interprétation discursive** des figures. Les problèmes qui sont alors accessibles à ces élèves sont ceux dont l'énoncé est sémantiquement congruent avec la figure construite ou à construire ou avec la version du théorème du cours. Selon qu'elle est congruente ou non à l'énoncé, l'appréhension perceptive des figures peut avoir un rôle facilitateur ou inhibiteur sur la compréhension et la résolution d'un problème posé.

La mise en œuvre du théorème de Thalès engendre un jeu de cadres entre le géométrique et l'algébrique qui donne lieu aux phénomènes de congruence ou de non congruence sémantique. En effet, un grand nombre de distributions de longueurs utiles dans la tâche du calcul de l'une d'entre-elles ne sont pas congruentes avec la version actuelle du théorème, et sont à l'origine d'erreurs caractéristiques dans les mises en équations du type : $4/(4 + 6) = (12 - x)/12$.



Ainsi, la notion de congruence est employée dans notre travail pour une mise en évidence de catégories au sujet de la mise en équations et de la résolution de ces équations suivant les répartitions des mesures de longueurs sur une figure.

L'appréhension séquentielle, qui concerne l'ordre de construction d'une figure et qui est fondamentale dans la vision du constructeur, est explicitement sollicitée dans les tâches de construction ou dans les tâches de description ayant pour but la reproduction d'une figure donnée. Cet ordre dépend donc non seulement des propriétés mathématiques de la figure à construire mais aussi des contraintes techniques du programme de construction utilisé. Nous employons cette notion dans le cadre de l'étude des figures archétypes définies ci-après.

L'appréhension opératoire fonde la fonction heuristique d'un dessin et intervient dans la vision inventeur/bricoleur. Elle donne la possibilité de modifier une figure donnée pour en déduire une autre et Duval distingue trois types de modifications.

Tout d'abord, les **modifications optiques** consistent dans l'agrandissement, la diminution ou la déformation de la figure. Viennent ensuite les **modifications positionnelles** caractérisées soit par le déplacement de la figure dans le plan soit par le déplacement du plan de la figure par rapport au plan fronto-parallèle du sujet. Ces deux types de modifications sont pris en compte dans notre travail dans le but de voir jusqu'à quel degré elles peuvent être portées pour qu'une figure puisse être reconnue comme pouvant faire l'objet d'une application du théorème de Thalès. Enfin, les **modifications méréologiques**, que nous retrouvons dans l'exemple que nous avons pris pour illustrer la problématique géométrique ci-dessus, consistent à partager une figure en sous-figures, pour les recombiner en une autre figure.

Duval (1993) précise qu’un apprentissage des traitements proprement figuraux doit être centré sur cette appréhension opératoire des figures et non sur leur appréhension séquentielle ou discursive. Mais notre travail est principalement centré sur l’appréhension séquentielle et perceptive de dessins à la différence d’autres travaux connexes au notre comme ceux de Lémonidis (1991) qui se fondent sur l’appréhension opératoire. Ce dernier a procédé à une classification systématique *a priori* des différents cas de figures pour la représentation des situations de l’homothétie dans le plan afin de mettre en évidence trois possibilités de perception en profondeur. Des dessins que nous avons obtenus de la part des élèves peuvent se retrouver dans la classification de cet auteur puisque le théorème de Thalès est un résultat en rapport étroit avec l’homothétie, mais les deux travaux sont bien distincts dans leurs objectifs et leurs résultats. Nous avons en effet classés *a posteriori* des dessins produits par des *apprenants*.

1.1.3. Premiers éléments de réponses à la question initiale

a) Figure-clé

Une première réponse à la question de savoir ce que peuvent précisément signifier les termes de figure-clé ou de figure de référence est apportée par Houbedine et Kerboeuf (2005).

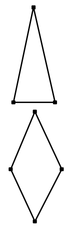
Ces auteurs considèrent qu'une figure-clé associe à un énoncé de théorème une figure obtenue par des *tracés minima* - éventuellement complétés de codages matérialisant par exemple l'égalité de mesures de longueurs ou d'angles, un angle droit, le parallélisme et des points alignés grâce à des couleurs - correspondant aux strictes données initiales contenues dans cet énoncé indépendamment de sa conclusion. D'autres chercheurs (Audibert 1982, Cordier 1989) associent justement à ces figures-clés un schéma représentant la conclusion du théorème.

L'une des raisons d'être d'une figure-clé est de rendre plus aisée, par le biais de la vision du botaniste, la reconnaissance puis l'extraction, au sein d'une figure complexe, d'une sous-figure qui vérifie les seules "hypothèses" de l'énoncé d'un théorème pour en faciliter l'application. Le rassemblement de figures clés correspondant à un niveau scolaire donné constitue une forme d'herbier géométrique. Le but est d'être capable de reconnaître des figures particulières typiques rattachées à un théorème, à partir de qualités visuelles minimales. Ainsi, une figure-clé ne devrait pas faire apparaître de tracés supplémentaires, comme par exemple ceux liés à la conclusion du théorème, par rapport aux prémisses de ce dernier. De plus, cela signifie également indirectement que les paramètres de ces figures-clés, comme la mesure de certains angles, l'orientation, la position des droites par rapports aux bords de la feuille, n'ont pas à être fixés.

Si nous prenons l'exemple d'une figure clé *triangle*, il n'y a aucune raison pour que cette dernière se caractérise par deux côtés de même longueur et un troisième dont le support se trouve être parallèle aux bords supérieurs et inférieurs de la feuille. Il n'y a pas non plus de raisons pour que les hauteurs demeurent à l'intérieur de la figure.

Au sujet du théorème de Thalès, une figure-clef peut au minimum, en classe de quatrième, se caractériser par un triangle dont deux côtés sont coupés par une parallèle au troisième côté, ce qui détermine deux triangles que nous nommons gigognes qui ont un sommet en commun. Aucun autre paramètre d'orientation, de mesure d'angle ou de position des parallèles par rapport à l'horizontale, ne devrait intervenir pour définir cette figure-clef puisque telle quelle, aussi simple soit-elle, elle permet l'accès au théorème.
En classe de troisième, cette figure-clé obtenue non pas à partir d'un triangle mais de deux droites sécantes est complétée par la figure-clé, que nous nommons papillon, pour laquelle les deux droites parallèles se situent de part et d'autre du point d'intersection des deux sécantes sans privilégier encore une fois d'autres paramètres.

Pour rendre totalement compatible l'énoncé actuel de la réciproque avec le théorème direct dont la conclusion ne fait pas apparaître de points alignés dans le même ordre, le seul schéma qui pourrait éventuellement apparaître à la suite d'une figure-clé serait celui qui mettrait en évidence, à l'aide d'un codage à déterminer,



le fait que trois points, d'une part, et trois autres, d'autre part soient alignés dans le même ordre.

Mais la détermination de ce qu'un dessin représente pour un apprenant dépend du contexte ou des indications discursives qui sont données et surtout retenues par l'élève. Nous en arrivons alors au concept de typicalité, car suivant ce que l'enseignant veut transmettre, pense avoir transmis et a réellement transmis et ce que l'apprenant conserve de significatif d'une figure, pouvant adjoindre à des éléments fondamentaux des caractéristiques superflues, l'application du théorème qui se rapporte à ce dessin peut subir des "déviances" plus ou moins caractéristiques, plus ou moins reproductibles.

b) La notion de typicalité

Dans ce qui précède, tant pour ce que nous avons trouvé dans les ouvrages scolaires que dans l'article précité, la notion de figure-clé est un outil dans la transmission du savoir. Dans cette perspective, les figures-clés, qui ne conservent que les caractéristiques utiles à l'application du théorème, facilitent la reconnaissance d'une figure ou l'opérationnalisation d'un théorème. Elles sont une aide significative pour les élèves.

Mais nous pouvons considérer qu'elles peuvent parfois privilégier des éléments superfétatoires qui faciliteraient, dans certains cas, l'accès au sens et dans d'autre lui nuirait. Nous allons illustrer notre propos en prenant un premier exemple situé hors du champ des mathématiques puis un second qui a trait au théorème de Thalès.

Lors d'une émission radiodiffusée, un sociologue a énoncé le fait que la société française n'était plus organisée de façon triangulaire mais sous la forme d'un losange. Ces propos relèvent de représentations typiques du triangle et du losange qui privilégient implicitement une orientation qui s'ajoute aux paramètres qui définissent les deux figures-clés "triangle" et "losange".

Par exemple, comme nous l'avons dit plus haut, en mathématique, une figure-clé représentant un triangle devrait faire apparaître un triangle scalène et non un triangle isocèle dont la base serait parallèle aux côtés supérieurs et inférieurs de la feuille. Les deux représentations ci-contre, en l'espèce, sont des facilitateurs d'accès au sens d'une idée, en rapport ici avec la sociologie élémentaire, en jouant le rôle d'illustrations spontanées d'une idée collectivement admise et comprise.

En ce qui concerne le théorème de Thalès, nous avons maintes fois observé des enseignants qui, dans l'espoir faciliter son application, signifiaient aux élèves les éléments qu'ils devaient en priorité reconnaître. Ainsi, ils leur conseillaient, que ce soit dans la version "triangles" que dans la version "droites sécantes", de trouver le sommet commun aux deux triangles qui apparaissent dans une figure-clé. Puis, pour construire les trois fractions égales, de partir à chaque fois d'une *"petite longueur et de la diviser par une grande"*.

Dans d'autres cas, nous avons supputé que les caractéristiques rajoutées à des figures-clés pouvaient, par exemple, perturber la reconnaissance de figures. Ainsi, il est bien connu qu’après enseignement, un rectangle n'est identifié que s'il a des dimensions caractéristiques ni trop grandes ni trop petites, s'il a des proportions moyennes et s'il est présenté avec les côtés pratiquement parallèles aux bords de la feuille. De même, nous avons observé des élèves du niveau sixième reconnaissant un losange et non un carré lorsque ce dernier est représenté "une pointe en haut et une en bas".

De telles figures biaisent alors l'accès au sens par le fait qu'à partir d'un moment, le changement de certains des paramètres qui les caractérisent ne permettent plus leur reconnaissance ni l'application d'un théorème, ce qui relève de la notion de **typicalité** (Cordier, 1989).

La typicalité, au sens de la psychologie cognitive, se définit ainsi : certains éléments (sous-catégories exemplaires) constituent de meilleurs exemples que d'autres de leur catégorie d'appartenance : ils sont typiques pour cette catégorie. Ces "bons" exemples se montrent d'une grande stabilité d'apparition sur des échantillons importants de sujets quand les consignes de construction sont les mêmes. Les normes de typicalité mises en évidence témoignent ainsi de la présence de sous-figures et de leurs représentations dans la mémoire à long terme. Des schémas de réflexion ou des schémas cognitifs seraient biaisés de façon significative par le fait que certaines propriétés non caractéristiques des figures seraient privilégiées par rapport à d'autres, et ce de façon permanente, ce qui engendrerait des erreurs ou des réponses incomplètes à certaines questions.

Cordier pense que les **représentations typiques**, expression introduite par Le Ny (1989), sont activées avant les représentations non typiques, ou encore que leur seuil d'activation est beaucoup plus bas.

Rosch (1976) dans ses travaux sur la représentation cognitive, a dégagé la notion de **prototype** qui se rapproche de la notion de représentations typiques, que, par ailleurs, nous adaptons ci-dessous et que nous enrichissons de la notion d’archétype :

> « Comme de nombreuses expériences l'ont montré, les catégories ne sont codées dans l'esprit ni au moyen de listes de tous les membres individuels de la catégorie, ni au moyen d'une liste de critères formels nécessaires et suffisants pour définir l'appartenance à la catégorie, mais plutôt sous forme de prototype d'un membre caractéristique de la catégorie. »

Nous appliquons cette notion de typicalité à la bonne identification des configurations de Thalès et à la mise en œuvre de ce théorème tant du point de vue des mises en équation que de la résolution de ces dernières.

c) Le concept de typicalité complété : figure archétype et prototype ; figure pathologique et pathogène

Nous avons émis l'hypothèse que l'identification et la reconnaissance des figures géométriques, dépendraient de l'activité personnelle de l'élève qui lui ferait développer des représentations et des modèles spontanés qui joueraient un rôle décisif dans ses acquisitions. Ainsi, pour préciser le concept de **typicalité,** nous introduisons deux notions nouvelles dont nous postulons l'existence : les **figures archétypes** et les **figures prototypes**, les premières étant censées être produites en liaison avec un théorème mais avant l'enseignement de ce dernier et les secondes apparaissant après son enseignement.

Plus précisément, les **figures archétypes**[1] sont des produits culturels prégnants liés à des objets mathématiques antérieurs aux notions auxquelles ces dessins se rapportent directement. Il s'agit de représentations propres à l'individu et produites par l'élève avant l'enseignement du théorème auquel elles se réfèrent. Ainsi, elles se caractérisent par des dessins types produits très fréquemment par les élèves dont les tracés et les valeurs des paramètres sont clairement déterminés. Nous pourrions dire au premier abord qu'il s'agit de figures-clés produites par les élèves avant enseignement de la proposition en question mais en fait ces dessins peuvent non pas uniquement comprendre des tracés supplémentaires par rapport à ceux obtenus en référence aux prémisses de l'énoncé mais aussi privilégier des variables figurales superflues.

Par exemple, compte tenu de propos ci-dessus tenus par un sociologue, nous nous référons sûrement tous à un archétype de l'objet triangle. Si nous demandons à un certain nombre d'individus de tracer spontanément un triangle à main levé, il y a de forte chance qu'un pourcentage élevé de ces productions fasse apparaître un triangle isocèle dont la base est parallèle au plan fronto-parallèle.

Les **figures prototypes**[2] sont des dessins types produits très fréquemment par les élèves après un enseignement ayant pour principal sujet le résultat concerné par ces dessins. La forme que prend l'enseignement imprègne directement, de façon plus ou moins explicite, les représentations géométriques de l'élève en rapport à ce théorème. Une telle imprégnation serait possible du fait, qu'à l'inverse des figures

[1] Dans Platon, les archétypes sont des idées, des formes, des modèles qui ont déterminé toutes les conditions de l'Univers.

[2] Un prototype, d'après le petit Robert, est un premier type, un modèle premier, un standard, un type, une forme de fabrication. Au sens figuré, cela désigne ce qui est conforme au modèle habituel, ce qui est sans originalité.

archétypes, les figures prototypes serait parfois institutionnalisées comme le laisse penser l'institutionnalisation de figures dites "clés de Thalès" que nous avons pu relever à maintes reprises. Mais à la différence des figures-clés définies par Houbedine, les figures prototypes, en plus des tracés *minima* qui suivent à la lettre les prémisses d'un énoncé, peuvent être caractérisées par le rajout de variables figurales inutiles dans la mise en œuvre du théorème et qui seraient même à la source d'erreur dans une telle application ou de non reconnaissance de dessins qui s'éloigneraient de cette norme. Une telle figure, dont les propriétés ajoutées ou reconnues comme importantes par l'élève sont des composantes contextuelles a été appelé par Wermus (1976, 1978), un **prédicat amalgamé**. Ces sont les caractéristiques réelles ou erronées qui sont rattachées à une figure en dehors de toute description explicite faite dans un énoncé. Ainsi, il est possible que les élèves qui dessineraient un triangle archétype sous une forme isocèle en produiraient peut être un différent après un enseignement qui insisterait sur les formes scalènes.

L'idée de typicalité n'est pas nouvelle et nombre de formateurs insistent souvent auprès d'enseignants pour qu'ils varient l'orientation et les paramètres des figures qu'ils représentent.

Mais ce qui est novateur dans ce domaine est, en premier lieu, l'idée de montrer que les représentations typiques existent chez les élèves avant et après enseignement au sujet d'un théorème précis sans être forcément les mêmes d'ailleurs et que l'enseignement en renforce certaines et, en second lieu, que des variables superflues retenues par des élèves entrave ou modifie l'application d'un théorème ou simplement la reconnaissance des figures qui évolue parfois au gré des propres représentations des enseignants. Ainsi, ce qui caractérise aussi bien les figures prototypes que les figures archétypes c'est le fait qu'elles laissent des empreintes lors de l'application d'un théorème ou d'une définition.

Le classement des dessins du côté des figures archétypes ou des figures prototypes s'effectue grâce à leur fréquence d'apparition significativement importante (plus de 50% pour les premières et plus de 65% pour les secondes), avant ou après enseignement du théorème auquel ces dessins se rapportent.

Pour compléter notre propos au sujet des figures archétypes nous pouvons dire que ces dernières correspondraient à un amalgame de figures prototypes antérieures à l'étude d'une proposition et seraient donc aussi culturelles. Peut-être existe-t-il des archétypes en géométrie indépendants de tout prototype, mais cette hypothèse demanderait à être étudiée sur une vaste échelle, pour des cultures différentes, ce qui n'est pas l'objet de notre travail.

D'autre part, nous savons que les différentes perspectives dans lesquelles les objets géométriques sont perçus par un sujet peuvent être situées sur un gradient de typicalité (Palmer, Rosch et Chase, 1981). En l'occurrence, cette perception est fonction des écarts que leurs représentations possèdent avec un objet type, reconnu statistiquement comme tel.

Pour tenter de répondre à certaines questions liées aux variations qu'il est possible de faire subir aux figures prototypes pour qu'elles puissent encore être reconnues par une majorité d'élèves, nous définissons deux nouvelles notions liées à l'interprétation globale des dessins. En utilisant le vocabulaire de la médecine, nous parlons de **figures pathologiques**[3] et de **figures pathogènes**[4] liées à l'appréhension perceptive des figures. Nous formulons l'hypothèse que dans certains cas où il lui serait demandé d'identifier un dessin, le sujet ne repérerait pas sur la figure, de par sa déformation, les relations indispensables à sa connaissance. Nous appelons alors ces figures dans laquelle un théorème est susceptible d'être appliqué mais n'est perçue comme telle que par moins de 5% des élèves des **figures pathologiques**. Mais un autre cas pourrait se présenter. La figure serait reconnue mais entraînerait des erreurs caractéristiques et fréquentes à des endroits précis de l'application du théorème de la part des apprenants, qui, par ailleurs, donneraient des réponses correctes à la même question mais posée pour une figure prototype. Dans ce cas, nous la qualifions de **figure pathogène**. Nous allons à présent nous attacher plus spécifiquement au théorème de Thalès.

1.2. Le théorème de Thalès en France : recherche et enseignement

1.2.1. Légitimité du choix

La question qu'il est possible de se poser est de savoir pourquoi fonder une recherche sur un théorème qui peut paraître *a priori* somme toute assez banal ? Nous pouvons tout d'abord avancer l'idée que nous avons choisi de travailler sur ce sujet car il permet de faire une liaison intéressante entre le registre figural et le registre numérico-algébrique. Ainsi, en premier lieu, cette proposition nous sert d'outil pour mettre en évidence l'existence d'objets géométriques que nous définissons initialement, en l'occurrence les archétypes et les prototypes. Dans un second temps, sa mise en œuvre, qui requiert l'articulation du registre figural avec les registres symbolique et numérique, nous permet d'étudier l'influence de la vision d'une figure dans son opérationnalisation.

1.2.2. L'écueil mathématique d'une démonstration du théorème direct et de sa réciproque

Aucune démonstration du théorème de Thalès et de sa réciproque n'est mathématiquement satisfaisante sans l'apport des nombres réels et plus

[3] D'après le Littré ; pathologique : "Relatif à l'état de maladie ; qui dénote un mauvais état de santé ; qui s'écarte du type normal d'un organe".
[4] D'après le Petit Robert ; pathogène : "Qui cause une maladie".

précisément sans la donnée d'un axiome du continu tel que l'axiome de Pasch. Cette remarque est également valable pour établir la formule de l'aire du rectangle d'autant plus que certains auteurs (Matheron, 1994 (b)) pensent pouvoir démonter ce théorème en faisant l'économie des nombres réels grâce à la formule de l'aire du triangle. Mais le problème réside justement dans le fait que cette formule, pour être établie, nécessite l'apport de ces nombres. En effet, comment démontrer que l'aire du rectangle, utilisée pour démontrer l'expression de l'aire du triangle, est égale à sa longueur multipliée par sa largeur lorsque ces deux segments sont incommensurables ?

Les démonstrations du théorème direct que nous avons pu glaner au cours de l'histoire sont très diverses mais pour la plupart difficilement transposables à l'enseignement actuel. Duval et Egret (1989) ont entrepris une telle démarche en commençant par partager un côté d'un triangle en trois segments de même longueur, en traçant les deux parallèles à un deuxième côté puis en démontrant que ces deux droites coupent le troisième côté en trois segments de même longueur. Dans le cadre de notre ingénierie didactique (2005), nous avons poursuivi cette démarche en partageant le côté en quatre puis en cinq, en passant par le cas d'un rapport fractionnaire pour finir, par la méthode des segments emboîtés, par celui d'un rapport irrationnel.

Ce n'est pas la justification mathématique du théorème qui est envisagée dans cet article mais, comme nous l'avons annoncé en introduction, la recherche de prototypes et d'archétypes liés à cette propriété et aussi sa mise en œuvre dans le cadre de situations présentées aux élèves. Nous tenons simplement à préciser que ces mises en fonctionnement se situent toutes dans l'ensemble des nombres rationnels. Il eut été possible de se poser la question de l'influence que notre travail, mené sur sa démonstration, pourrait avoir sur les applications demandées aux élèves, mais cela serait l'objet de plus amples développements complémentaires à ceux présentés dans le présent article.

1.2.3. L'enseignement actuel du théorème de Thalès

Nous avons également étudié (2005) l'enseignement actuel du théorème de Thalès à travers l'analyse de préparations de cours de professeurs et de manuels scolaires. Nous avons conclu que les activités qui sont censées l'introduire correspondent en fait à une simple familiarisation des élèves avec la propriété. Elles possèdent de faibles niveaux de problématisation et d'a-didactivité.

De plus, ce théorème n'est quasiment jamais démontré dans les ouvrages de 4^{e} et de 3^{e}, ce qui est par ailleurs conforme aux programmes en vigueur. En 4^{e}, les seules tentatives de démonstrations que nous ayons trouvées donnaient comme précurseur le théorème des milieux (démontré à l'aide des propriétés du parallélogramme) et dans un seul cas de préparation de cours, le cosinus joue ce rôle. Le théorème des milieux est utilisé pour démontrer le théorème dans le cas d'un partage en trois, puis on passe à l'énoncé général sans complément de démonstration. Et le cosinus, lui-même introduit par un constat visuel d'invariance d'un rapport, rend évidente la mise en place du théorème de Thalès qui n'est plus alors qu'un truisme. L'obstacle des nombres irrationnels est évité puisqu'il n'est pas mis en évidence. En 3e, le cas de la figure papillon est parfois démontré grâce aux propriétés de la symétrie centrale.

La mise en fonctionnement qui est envisagée dans les ouvrages que nous avons analysés et au sein des préparations de cours que nous avons étudiées, consiste à canoniser une procédure à la fois d'application du théorème et de résolution des équations algébriques. Cette procédure de canonisation est favorisée, en partie, par l'approche unique de la proportionnalité et se joue sur deux niveaux : on demande à l'élève d'être capable, d'une part, de reconnaître une figure type, de l'extraire éventuellement d'une configuration complexe afin de lui appliquer le théorème standardisé, ce qui relève d'une visualisation iconique avec ce qu'elle comporte d'inconvénients et d'autre part, il s'agit de mettre le problème en équation et de résoudre cette équation par des techniques adaptées et répétées en classe ; une grande partie du cours étant justement consacrée au recensement et à la résolution de tous les types d'équations possibles. Tout ce processus s'apparente à ce que Vergnaud (1990) appelle un apprentissage d'algorithmes.

> « Un algorithme est un ensemble de règles qui permet, en un nombre fini de pas, de trouver la solution d'un problème quelconque de cette classe s'il en a une ou sinon de montrer qu'il n'en a pas. »

De plus, il semblerait que l'on se soit arrangé pour que dans l'enseignement de ce théorème les élèves n'aient affaire qu'à des égalités de rapports perçus comme des blocs. Ainsi, Michonneau et Pfaff (1990) ont montré que devant une difficulté importante de recherche d'une longueur inconnue, les élèves tentent d'appliquer la recherche de la quatrième proportionnelle selon la procédure quaternaire où la proportion est envisagée comme égalité de deux rapports $a/b = c/d$, en tant que quadruplé auquel est rattaché le produit en croix.

Ainsi, nous pouvons déceler un amenuisement de la distance qui sépare l'apprenant et l'enseignant au sujet du savoir. Tout cela nous incite à penser que le théorème de Thalès subit une obsolescence externe (Chevallard, 1991). Cet objet ne vieillit pas par rapport à la durée naturelle d'un cycle d'enseignement mais par rapport à une durée historique. On ne trouve plus de situations problèmes pour lesquelles le théorème est une solution, ni les difficultés théoriques que sa démonstration soulève, ni son utilisation en tant qu'outil pour introduire de nombreuses notions. Il ne reste que ses aspects algébriques et calculatoires qui réduisent cet objet à demeurer un générateur des mises en équations fractionnaires du premier degré. Les titres et le contenu de certains articles sont par ailleurs éloquents à ce sujet.

Ainsi, dans le texte *« Enoncé de Thalès : support pour le calcul algébrique »*, les auteurs Bach et Marot (1995) montrent que l'algèbre devient un outil indispensable à la résolution de tâches liées au théorème de Thalès, ce qui donne au calcul algébrique tout son intérêt. Les auteurs concluent que le théorème de Thalès :

> « fournit l'occasion de faire fonctionner les règles de calcul algébriques dans de nouvelles situations, d'accroître l'intérêt de l'algèbre tout en lui donnant du sens, d'élargir le domaine des équations. »

Cela caractérise une inversion pour laquelle la légitimité du théorème de Thalès réside dans le fait qu'il donne du sens à l'algèbre et non dans sa signification géométrique intrinsèque. Nous nous trouvons devant un phénomène de captation de sens qui consiste à imposer une présentation d'un théorème, qui privilégie un type restreint d'applications et engendre un amoindrissement voire une perte de sens. Finalement, nous pouvons citer une phrase de Lebesgue (1931) qui résume et explique les faits observés pour le théorème de Thalès :

> « Pour un mathématicien, calculer c'est raisonner, analyser plus profondément les faits géométriques sous-jacents ; pour un jeune élève, calculer c'est laisser aux symboles le soin de raisonner à sa place, c'est oublier tout fait géométrique pour ne plus voir que ces symboles. »

1.2.4. Au niveau de la recherche liée au théorème de Thalès

La richesse de ce théorème entraîne le fait qu'il a été choisi comme outil mais aussi comme objet d'étude. Ainsi, nous avons pu voir que la mise en place du concept de typicalité (Cordier, 1989), les effets d'un enseignement expérimental de l'homothétie (Lémonidis, 1990), l'étude générale de la variable complexité de la figure (Duperret, 1995) ou de l'application concrète de la notion d'organisation praxéologique (Matheron, 2000) ont pu avoir ce théorème pour cadre particulier.

En tant qu'objet, il a malgré tout peu souvent été le thème central de travaux de recherche. Nous pouvons citer d'ores et déjà la thèse de Pfaff (1995) ainsi que le travail collectif publié par l'IREM de Paris VII sous le titre *Autour de Thalès* (1995) au sein duquel les variables de complexité de la figure (Duperret 1995) et l'approche agrandissement réduction (Massot 1995) ont plus particulièrement été étudiées. Nous allons développer plus particulièrement les travaux de Lémonidis et de Pfaff.

Lémonidis (1990) est parti du constat, au sujet de l'enseignement classique pour l'introduction de l'homothétie, d'une insuffisance par rapport à un travail préparatoire sur la variété et la complexité perceptive de toutes les configurations homothétiques possibles. Il a alors réalisé une expérience d'enseignement dans laquelle une grande place est laissée à ce travail préparatoire fondée sur des activités intitulées « trouver le centre », « déterminer les points homologues » ou «construire une figure image ». Un corpus de figures homothétiques est choisi suivant une classification figurative effectuée par l'auteur et est proposée aux élèves. L'expérimentateur observe la façon dont les élèves perçoivent cet ensemble de figures. Dans une seconde partie l'auteur introduit le rapport numérique et demande sa mise en relation avec l'aspect figuratif correspondant.

Notre travail est différent puisque nous analysons et déterminons la typicalité de dessins qui certes, pour un certain nombre d'entre eux, peuvent se retrouver dans l'étude de Lémonidis, bien que les variables figurales retenues pour les décrire soient distinctes d'une étude à l'autre, mais sont produits plus ou moins spontanément par des élèves avant et après enseignement du théorème de Thalès. De plus, nous enrichissons les figures typiques de données numériques dans le but de procéder à une analyser complète de son opérationnalisation.

Après avoir proposé cet enseignement expérimental sur l'homothétie, Lémonidis a relevé une amélioration dans l'application du théorème de Thalès. Mais il constate malgré tout un ordre décroissant de réussite selon la forme des triangles proposées (gigogne/papillon) et selon les éléments concernés (côtés obliques/3$^{\text{ème}}$ côté). Le maintien de cet écart montre que l'interprétation de formes perceptives très différentes à l'aide d'une même formule (égalité de trois rapports) recouvre une tâche qui n'a rien de trivial et qui n'est pas didactiquement négligeable. Le second objectif de notre article est de procéder à une analyse précise du type et du taux d'erreurs commises dans l'application du théorème suivant la distribution des longueurs proposées sur une figure type (gigogne ou papillon).

Les répercussions des changements de programmes depuis 1964 au sujet du théorème de Thalès ont été étudiées par Matheron (1994 (a)). Ce que nous pouvons retenir est le fait que deux principales versions ont alternativement été au programme des classes du secondaire depuis 40 ans. Une version portant sur l'aspect projection ce qui donne le rapport de projection de la droite (AM) sur la droite (AN) suivant : AN/AM = AC/AB = NC/ MB et une autre sur l'aspect homothétie aboutissant au rapport du triangle AMN au triangle ABC : AB/AM = AC/AN = BC/MN. Justement, les travaux de recherche ayant pris pour objet ce théorème traitent principalement de la double approche projection et homothétie.

Nombre d'entre eux plaident pour un enseignement plus dynamique. Ainsi, Duperret (1995) considère que cette proposition apparaît aux élèves trop rapidement comme une configuration statique qui cache les deux approches précédentes. Cet auteur considère que si les élèves ont à leur disposition le théorème de Thalès projection et homothétie, ils pourraient procéder à deux expertises d'un même problème.

Mais Pfaff (1995) a montré que l'approche projective est très mal maîtrisée par les élèves pour la figure papillon. Par ailleurs, elle a montré que cette figure engendre toujours chez eux un raisonnement de type homothétie que les parallèles soient prolongées ou non et que les situations appelées T et P, T pour triangles et P pour parallèles (trois parallèles et deux sécantes), favorisent, pour la résolution d'un exercice de calcul de longueur, la mobilisation de la projection au détriment de l'homothétie. Par contre, le calcul d'une longueur d'un des côtés parallèles appelle l'application de l'homothétie. De même, le calcul d'une longueur d'un côté non parallèle paraît plus simple pour les élèves sur un dessin appelé TC (papillon) que sur un dessin T, l'homothétie étant reconnue plus facilement.

A la lumière de ce que conclut Pfaff dans son travail, nous pouvons constater que la mobilisation, de la part de l'élève, de l'une ou de l'autre des versions dépend de la situation proposée dans l'exercice. Les résultats obtenus par Lémonidis inciteraient également à choisir un enseignement en deux parties du théorème de Thalès. De plus, pour enrichir sa prise de sens pour les élèves, il nous semble aussi intéressant, *a priori*, de scinder son étude en deux parties faisant références à deux aspects différents de la proportionnalité. Dans la dernière partie de notre recherche (2005), nous avons fait un choix différent de l'alternative projection/homothétie en optant pour la proportionnalité interne/externe.

La **proportionnalité externe** (Rouche, 1992), ou procédure fonctionnelle (Bekaye Sokoma, 1989), appliquée au théorème de Thalès concerne les rapports de côtés des deux triangles qui apparaissent dans l'énoncé, alors que la **proportionnalité interne** ou scalaire est en relation avec les quotients des différents segments pris, d'une part, d'un "côté" de la figure, et les quotients de différents segments relevés, d'autre part, de l'autre "côté" de la figure. Autrement dit, la proportionnalité externe donne : AM/AB = AN/AC = MN/BC rapports qui relèvent de relations interfigurales relatives à deux triangles, alors qu'avec la proportionnalité interne nous obtenons les égalités suivantes : AM/MB = AN/NC ; AM/AB = AN/AC ; BM/BA = CN/CA, rapports liés à des relations intrafigurales relatives aux segments [AB] et [AC] qui peuvent se déduire de l'énoncé du théorème sous la forme : toute droite parallèle à un côté d'un triangle coupe les deux autres côtés en segments proportionnels. Cette partie révèle son utilité dans notre conclusion.

2. Objectifs des expériences et protocoles expérimentaux

Nous appliquons le concept de typicalité et plus précisément les notions d'archétype et de prototype pour partie au registre figural /symbolique et pour une autre nous le transposons au registre numérico-algébrique. Nous nous sommes en effets intéressés d'une part aux dessins liés au théorème de Thalès que pouvaient produire les élèves plus ou moins spontanément, en différenciant ceux qui apparaissent avant l'enseignement du dit théorème de ceux qui sont produits après, et d'autre part aux effets que ces figures pouvaient avoir dans sa mise en œuvre c'est-à-dire dans l'écriture des rapports littéraux, la mise en équations et leur résolution.

2.1. Problématique liée au registre figural

La première partie de notre problématique est liée aux nouvelles notions que nous avons définies précédemment. Le premier objectif est de montrer la légitimité des figures archétypes et prototypes dans le cas particulier du théorème de Thalès en recensant ces figures auprès des élèves. Nous avons émis l'hypothèse initiale que de telles figures existaient et que l'enseignement influait sur certaines d'entre-elles par l'intermédiaire de paramètres ajoutés ou retenus par les élèves en dehors de toute description explicite de la part de l'enseignant. Plus précisément, nous nous sommes demandé s'il existait, avant l'enseignement du théorème, des configurations souvent reproduites par les élèves liées au parallélisme par exemple. Il s'est agi ensuite de connaître le degré de représentativité, auprès des élèves, des figures géométriques susceptibles d'être utilisées pour l'application du théorème de Thalès après son enseignement.

Nous nous sommes aussi demandés si les archétypes et les prototypes étaient identiques et s'ils n'apparaissaient pas dans des ouvrages scolaires et des préparations de cours d'enseignants.

Nous avons étudié la prégnance que pouvaient avoir les paramètres des figures archétypes et prototypes lors de la reconnaissance de figures et de l'application littérale du théorème. Plus précisément, le second objectif en rapport avec le registre figural est de comprendre en premier lieu jusqu'à quel degré de modification optique et positionnelle les prototypes pouvaient être portées pour qu'une figure ne soit plus reconnue, à tort, par les élèves comme pouvant faire l'objet d'une application du théorème de Thalès, ce qui relève des figures pathologiques et en second lieu de répertorier les figures dites pathogènes obtenues par changements de certaines valeurs des paramètres des prototypes autorisant tout de même leur reconnaissance par les élèves mais qui engendrent des erreurs caractéristiques dans l'écriture des trois rapports littéraux égaux. Nous avons émis l'hypothèse que les erreurs seraient plus nombreuses et plus significatives lorsque la figure proposée serait pathogène.

2.2. Typicalité des figures

2.2.1. Archétypes et prototypes

Par l'intermédiaire de la première expérience, nous cherchons à savoir s'il existe chez les élèves des figures archétypes dont nous supposons qu'elles dépendent de la méthode de construction et donc de l'approche séquentielle (Duval, 1994) du modèle. Ainsi, nous demandons à une centaine d'élèves de classes de quatrième et à une centaine de troisième d'un collège situé en ZEP dans le Val d'Oise pour lesquelles la propriété étudiée n'avait pas encore été abordée pour les premiers ou révisée pour les seconds, de construire quatre dessins en suivant les quatre programmes possibles et distincts de construction faisant varier l'ordre d'apparition des tracés et menant chacun à une figure de Thalès : test 1 : un triangle et une parallèle à un côté ; test 2 : deux droites concourantes puis deux parallèles coupant les deux sécantes ; test 3 : deux droites parallèles coupées par deux droites sécantes ; test 4 : deux droites sécantes, une parallèle à l'une et une droite sécante aux trois premières droites.

Dans un second temps, nous mettons en évidence des prototypes. Nous nous sommes en partie inspiré d'une recherche entreprise par Cordier F et J (1991). Ces derniers ont demandés à 40 lycéens d'une classe de seconde de produire, en 30 minutes, 10 dessins caractérisant l'application du théorème de Thalès. Notons que l'énoncé de ce dernier est différent de celui sur lequel nous travaillons puisqu'il concerne deux droites (d) et (d'), trois points A, B et C sur la droite (d) qui sont projetés sur la droite (d') suivant une direction donnée respectivement en A', B' et C', on a alors, en valeurs algébriques : AB/BC = A'B'/B'C'.

Nous avons mis en place, avec l'aide de 99 élèves de classes de 3^{e} et 95 élèves de classes de 4^{e} ayant déjà étudié le théorème de Thalès, une tâche non plus de reproduction de dessins à partir de programmes de constructions comme précédemment, mais de production de quatre figures distinctes caractéristiques de l'application du théorème de Thalès. Nous émettons l'hypothèse que certaines de ces formes géométriques apparaissent avec une fréquence plus notable que d'autres. Il était demandé aux élèves d'imaginer puis de dessiner, à l'aide du matériel habituel, quatre figures géométriques, dans un ordre imposé sur la feuille de passation, pour lesquelles l'application du théorème de Thalès était pertinente.

En ce qui concerne la recherche de figures fréquemment reproduites dans l'enseignement actuel du théorème de Thalès, nous avons analysé les activités introductrices et les leçons contenues dans cinq ouvrages de quatrième publiés en 1998, dans cinq livres de troisième publiés en 1999 et également à l'intérieur de six préparations de cours de professeurs de trois collèges différents de Paris XX^{e} et de Villiers le Bel. Nous avons simplement observé si ces activités et séquences d'enseignement faisaient apparaître les mêmes types de figures ou si des variations voire de nouveaux prototypes étaient présents.

2.2.2. Figures pathologiques et pathogènes

Il restait à connaître l'influence que pouvaient avoir certaines déformations de prototypes dans la reconnaissance de la part des élèves de figures dans lesquelles s'applique le théorème et dans l'apparition d'erreurs caractéristiques dans l'écriture de rapports littéraux. Ainsi, au cours de notre deuxième expérience, nous avons fait varier les paramètres qui caractérisaient les figures prototypes pour placer les apprenants dans une situation de reconnaissance de figure afin de tenter de mettre en évidence tout d'abord des figures pathologiques. Sauf pour les cas où seuls deux choix étaient possibles - comme pour le type de figure papillon ou gigogne - et celui de l'orientation du dessin pour laquelle nous avons choisi quatre options, les autres paramètres ont chacun été modifiés à trois niveaux différents : modéré, moyen et fort. Si nous prenons l'exemple de l'angle A commun aux deux triangles AMN et ABC, nous l'avons réalisé une fois obtus, une deuxième fois un peu plus obtus et une dernière très obtus. Mais cette variable était aussi à croiser avec les autres. Nous donnons plus de détails dans la section méthode d'analyse.

Des cahiers de 17 feuillets ont été constitués. Sur chaque feuille étaient représentées 6 figures différentes. Un exemplaire de chaque cahier a été reproduit cinq fois, c'est-à-dire que cinq élèves, indépendamment les uns des autres, ont réfléchi sur le même exemplaire. La place de chaque figure a été tirée au sort. Ce test a été posé à trois classes de 4^{e} et à trois classes de 3^{e} du même établissement.

Les élèves ont eu 3 min 30 s pour traiter une feuille. Dans chacune des six cases de chaque feuille, le texte liminaire était rédigé comme suit : *"Pour chacune des figures qui vont suivre, vous déciderez si la propriété de Thalès est applicable ou pas. Pour cela, vous pourrez, si vous le désirez, utiliser les instruments de la géométrie, prolonger des droites afin de vérifier sur le dessin qu'elles sont ou non parallèles."* et la question prenait la forme suivante : *"On peut appliquer le théorème de Thalès : oui ? non ?"*. L'expérimentateur devait signaler qu'un certain nombre de figures géométriques ne permettaient pas l'application du théorème et que dans ce cas, il fallait l'écrire. Il chronométrait et donnait le signal à chaque changement de page.

Après l'analyse des déformations de prototypes mettant en évidence les figures qui n'ont pas été reconnues par les élèves, un autre cas se présentait qui était celui de la reconnaissance d'un tel dessin malgré des telles modifications. Cette partie de l'expérience consistait à déterminer les figures pathogènes en plaçant les apprenants dans une situation de résolution de problème. Une fois qu'un élève décidait que le théorème était malgré tout applicable, il devait uniquement écrire les rapports littéraux correspondant.

Ainsi, le texte liminaire cité ci-dessus se terminait en fait par : "Lorsque vous déciderez d'appliquer la propriété de Thalès, vous écrirez les égalités des trois rapports." et la question complète était "On peut appliquer le théorème de Thalès : oui ? non ? Si oui : … = … = …." Les sujets et les consignes étaient identiques à ce qui précède puisqu'il s'agissait du même test complété par ce dont nous venons de parler.

3. Résultats des expériences sur la notion de typicalité appliquée au registre figural

3.1. A la recherche de figures archétypes dans les productions d'élèves

a) Méthode d'analyse

Notre méthode d'analyse des productions pour rechercher chez les élèves des figures archétypes pour lesquelles le théorème de Thalès s'appliquait est passée par une catégorisation des réponses en rassemblant celles qui étaient jugées de même type. Pour cela, nous avons mis en lumière une certaine fréquence, dans les productions, des valeurs de paramètres tels que :

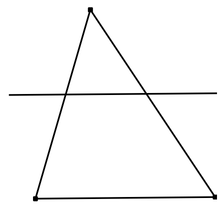
- (1) l''orientation de la figure ;
- (2) la caractéristique de l'angle commun aux deux triangles : aigu ou obtus ;
- (3) direction des parallèles par rapport aux côtés de la feuille ;
- (4) position relatives des parallèles par rapport au point d'intersection : la figure dominante (papillon ou gigogne) ;
- (5) dans le cas de la figure gigogne, position de la parallèle à un côté par rapport à la droite des milieux (au-dessus ou au-dessous de la droite des milieux) ;
- (6) dans le cas de la figure papillon, position du point d'intersection des deux droites sécantes par rapports aux deux droites parallèles ;
- (7) les dessins font-ils apparaître des droites ou des segments ? Autrement dit, les droites sont-elles prolongées au-delà d'un point d'intersection ou pas ?

Par rapport à ces variables figurales tous les dessins ont été différents mais nous avons regroupé les classes de paramètres voisins pour obtenir une figure médiane représentant ces classes. Nous pouvons dire, par exemple, que lorsque l'angle commun aux deux triangles était aigu pour une majorité de figures avec une mesure comprise entre 25° et 40°, nous avons considéré qu'il s'agissait d'une même classe dont le représentant possédait un angle commun de mesure 30° à 35°. Nous avons raisonné de la même façon pour les sept paramètres précédents.

b) Résultats et interprétations

Cinq catégories de figures standard sont apparues parmi lesquelles deux archétypes dont trois variantes ont également été décelées.

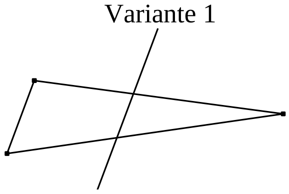
Ainsi, que ce soit en quatrième ou en troisième, dans le cas du programme qui consistait à tracer un triangle et une parallèle à un côté de ce triangle, l'archétype trouvé est du type I.



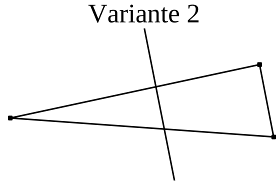
Archétype I

51% des élèves de troisième et 88% des élèves de quatrième ont produit ce genre d'archétype qui est caractérisé par une droite parallèle à un côté du triangle prolongée au-delà des deux points d'intersection, auxquels s'adjoignent une orientation "verticale" de la figure, un angle commun aux deux triangles que les tracés ont fait apparaître aigu et dont la mesure est comprise entre 25° et 40°, les deux parallèles "horizontales" à 10° près et également la parallèle à un côté du triangle au-dessous de la droite des milieux avec un rapport AM/MB compris entre 1,1 et 1,8. Nous constatons que le triangle initial est pratiquement isocèle, la base parallèle aux côtés supérieurs de la feuille ce qui correspond bien à l'archétype triangle que nous avons évalué *a priori*. Deux variantes existent par rapport à l'archétype I.

Variante 1



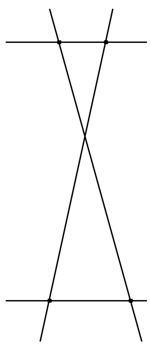
Variante 2



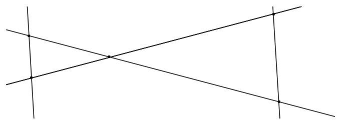
La première a été représentée à 21% par les élèves de troisième et à 30% par ceux de quatrième. Elle consiste à simplement renverser l'archétype I de façon à ce que les deux droites parallèles soient quasiment tout le temps, à 10° près, parallèles aux deux autres bords de la feuille et le sommet commun aux deux triangles à "droite" de ces deux parallèles. La seconde n'est apparue qu'au niveau des élèves de troisième qui l'ont dessinée à 20%. Il s'agit de la même figure que la variante 1 sauf que le sommet commun aux deux triangles est maintenant à "gauche" des parallèles.

Pour les trois autres tests, nous avons trouvé un archétype de la forme II avec des pourcentages d'apparition de 88% et 54% respectivement en troisième et en quatrième pour le test 3, 60% et 50% pour le test 4. Cet archétype a également été obtenu dans le cas du premier test à 27% en troisième et 23% en quatrième. Il est caractérisé par le fait qu'il s'agit d'une figure papillon formée de quatre droites avec une orientation verticale, l'angle commun aux deux triangles aigu toujours avec une mesure comprise entre 25° et 60°, les deux droites parallèles encore "horizontales" à 10° près et le point d'intersection des sécantes à peu près au milieu des deux parallèles.

Archétype II



Variante 3



Mais en ce qui concerne ce test 1, une variante ci-dessus, notée 3, est apparue à 32% et 24%. Cet archétype I est simplement renversé de façon à ce que les deux parallèles soient "verticales" par rapport aux bords de la feuille.

3.2. Des archétypes aux prototypes : à la recherche de prototypes et des effets de l'enseignement sur ces deux types de figures

a) Méthode d'analyse

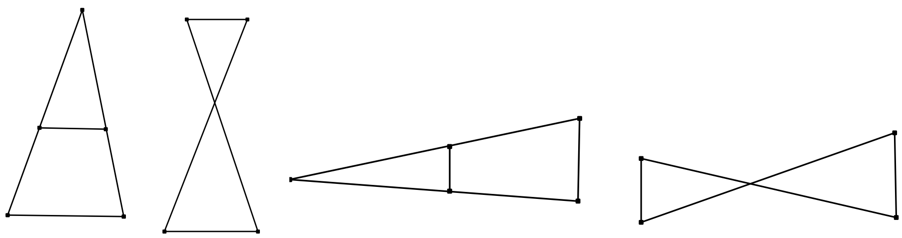
Nous avons caractérisé les figures prototypes liées aux dessins que produisent les élèves après enseignement du théorème de Thalès en mettant en évidence une certaine fréquence dans la première ou les deux premières productions, des valeurs des sept variables figurales précédentes. Même si les classes de chaque niveau n'ont pas reçu l'enseignement d'un même professeur, nous considérons que la présentation des résultats sous forme de pourcentages d'apparition est suffisante pour faire apparaître des dessins couramment produits par ces élèves. Un pourcentage élevé d'apparition d'un dessin type dans les productions d'élèves de classes distinctes montre d'autant plus que les enseignements tendraient à s'uniformiser au sujet des prototypes qu'ils engendrent.

En classe de troisième, nous avons parlé de figures prototypes pour les dessins les plus fréquemment rencontrés aux deux premières productions. En effet, nous avons jugé nécessaire d'en prendre deux en considération puisque les deux types de figures papillon et gigogne sont au programme de cette classe. Par contre, nous n'avons retenu que la première en classe de 4^{e} puisqu'une seule, la figure triangles gigognes, était à l'étude. Nous avons considéré que les deux derniers dessins pour les élèves de troisième, et les trois derniers pour ceux de quatrième relevaient de productions moins spontanément réalisées par les élèves s'éloignant ainsi de la notion de prototype. Parmi ces dernières, nous avons analysé tout de même celles qui étaient dessinées à plus de 10% des cas en particulier pour savoir si les apprenants étaient capables à un moment, en proposant des variantes, de rompre avec les figures prototypes qu'ils avaient initialement produites.

b) Résultats et interprétations

i) Productions et pourcentages d'apparition obtenus

Quatre grandes catégories de figures sont apparues.



Prototype I Prototype II Variante 2 Variante 3

	Dessin			
Figure produite	1er	2ème	3ème	4ème
Prototype I	60%	...	28%	32%
Prototype II	...	70%	16%	9%
Variante 2	6%	5%	20%	6%
Variante 3	...	5%	2%	12%

Tableau des pourcentages d'apparition des prototypes

ii) Analyse de ces productions

En ce qui concerne les sept variables figurales que nous avons retenues, pour ces quatre figures, l'angle commun aux deux triangles est aigu et seuls des segments sont représentés et non des droites débordants les points d'intersection.

De plus, deux prototypes forts se sont distingués : celui représenté à 60% au premier dessin et celui représenté à 70% dans le deuxième. Ces deux prototypes ont en commun leur orientation "verticale" et "l'horizontalité" des deux parallèles.
Dans des contextes très différents, des auteurs comme Grenier (1988) ont montré que les élèves éprouvaient des difficultés dans la réalisation de constructions géométriques du fait de la prégnance (Noirfalise, 1991) des directions des bords de la feuille que l'élève intègre comme un repère de verticalité et d'horizontalité. Dans nos deux cas de figures, il ne s'agit pas de difficultés de réalisation mais de prégnance de la verticalité et de l'horizontalité qui influent sur des productions d'élèves de telle façon que nous avons retrouvé statistiquement en grande majorité

les mêmes dessins. Par contre, la position de la parallèle à un côté par rapport au point d'intersection des deux autres côtés distingue les prototypes I et II : dans le premier cas nous avons obtenu la figure gigogne avec la parallèle à un côté d'un triangle juste en dessous de la droite passant par les milieux des deux autre côtés et dans l'autre la figure papillon.

Quelques variations de ces deux prototypes sont apparues. Ainsi, le renversement horizontal - vertical a engendré les variantes fortes 2 et 3. Ce ne sont que les prototypes I et II dont la variable orientation a changée puisqu'elles occupent une position horizontale par rapport aux deux bords supérieurs de la feuille. Nous avons remarqué que pour le prototype I et la variante 2, la parallèle occupait la même position relativement à la droite des milieux : assez près de cette dernière mais au-dessous pour le prototype et à droite pour la variante. Une variante du prototype I (12% au 1er dessin) a consisté tout de même à placer cette parallèle au-dessus de la droite des milieux, tous les autres paramètres demeurant fixes par ailleurs.

Les dessins mettant en évidence la droite des milieux comme parallèle ne sont pas représentés en nombre significatif. Pour d'autres, les fréquences sont également trop basses pour que nous puissions considérer qu'il s'agit de prototypes ou même de l'une de leur variante. Simplement nous pouvons préciser, si nous nous référons aux deux prototypes et à leur variante, que certaines figures sont moins "verticales" que les prototypes ou horizontales par rapport aux variantes et que d'autres dessins font apparaître les parallèles "obliques" c'est- à-dire moins horizontales ou verticales pour les variantes.

Ces résultats sont confirmés pour les quatre classes de 4ème auxquelles nous avons proposé un test similaire, tout au moins pour le prototype I et ses variantes.

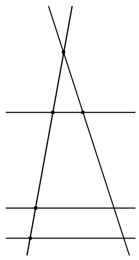
c) Interprétations des résultats

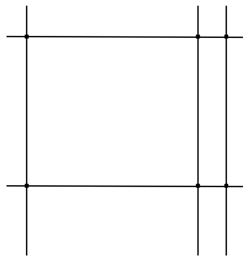
Les résultats que nous avons obtenus signifient que la figure venant le plus spontanément à l'esprit des élèves est le prototype I et qu'en classe de troisième, ils sont arrivés, dans un second temps, à varier de figure en proposant à une très large majorité le prototype II. Il n'y a pas une totale identité entre les archétypes et les prototypes. Ainsi, nous avons retrouvé les deux archétypes I et II précédent mais ordonnés différemment. L'archétype II a beaucoup plus souvent été représenté que l'archétype I alors que l'inverse se produit pour les prototypes. Ce qui est surprenant est le fait qu'après enseignement du théorème en principe en version "droites sécantes", le prototype en 3ème soit de type I sans que les droites débordent des points d'intersections et non de type II comme l'archétype que nous avons trouvé dans ce cas qui, de plus, faisait alors apparaître les droites prolongées. Dans ces conditions, il a été représenté par les élèves à 35% alors que le prototype, c'est-à-dire après enseignement et sans consignes de construction, a été lui dessiné à

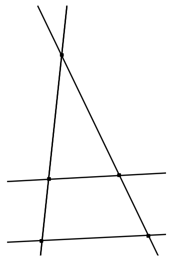
60%. **Nous en déduisons que l'enseignement renforce l'archétype I, qui est minoritaire chez les élèves par rapport à l'archétype II, qu'il transforme en prototype.** Nous nous interrogeons à ce sujet ci-dessous sur des préparations de cours et des ouvrages scolaires.

Par contre, même lorsque nous demandons de varier les figures, les élèves produisent difficilement autre chose que des prototypes I et II aux 3$^{\text{ème}}$ et 4$^{\text{ème}}$ dessins. Ils arrivent malgré tout à transformer facilement ces deux prototypes en les réorientant de la verticale à l'horizontale pour obtenir les variantes 2 et 3, de façon moins naturelle, à placer la parallèle à un côté d'un triangle non plus au-dessus de la droite des milieux mais au-dessus. En revanche, ils ne rompent pas du tout avec le paramètre de l'angle aigu commun aux deux triangles. Tenir compte des troisièmes et quatrièmes dessins n'a pas apporté de changement dans nos conclusions.

Il est intéressant de comparer ces résultats avec ceux obtenus par Cordier F et J pour une version projective du théorème. Ces auteurs ont conservé la première des dix figures que devait réaliser chaque élève et ont relevé quatre dessins avec les occurrences suivantes :


21


9


8

Trois points devaient être placés sur une droite et être projetés sur une seconde. Il est donc logique qu'un grand nombre de dessins fassent apparaître trois parallèles. Malgré tout, nous remarquons qu'ici aussi le prototype I, représenté à 72,5%, - les versions deux droites parallèles et trois droites parallèles étant confondues - prédomine. Même si le prototype II est très peu représenté, nous notons bien sûr que l'orientation "verticale" est privilégiée, tout au moins pour les dessins 1, 3 et 4.

Ainsi, que ce soit pour la version triangles gigognes, la version droites sécantes ou bien celle liée aux projetés sur une première droite de trois points situés sur une seconde, le prototype I est commun. Il y a une forte prégnance de ce prototype gigogne par rapport au prototype papillon mais il reste à en comprendre la raison.

3.3. Vision institutionnelle : variabilité des prototypes dans les ouvrages scolaires

Notre attention a tout d'abord été attirée par l'institutionnalisation de figures dites "clefs de Thalès". Ces dessins étaient reproduits, à peu de choses près, de la même façon mis à part le fait que dans les activités et les résumés de cours des ouvrages que nous avons analysés, les droites étaient prolongées alors que dans quatre des six préparations de cours d'enseignants elles ne l'étaient pas.
Par ailleurs, ces figures-clés ne correspondaient pas aux objets définis par Houbedine (2005) mais plutôt à ceux que nous avons mis en évidence précédemment. En effet, en plus des tracés *minima* permettant d'aboutir à une figure dans laquelle le théorème s'applique, des paramètres supplémentaires, comme l'orientation de la figure en général et des parallèles en particulier, un angle commun à deux triangles constamment aigu etc., viennent s'ajouter. Ainsi, nous avons remarqué que les prototypes I et II étaient représentés à 75% dans les activités, les cours contenus dans les ouvrages et les diverses préparations analysés mis à part que dans les premiers les droites étaient le plus souvent prolongées. De même, les variantes II et III des prototypes étaient également présentes. Nous avons ainsi constaté le peu de variations des représentations du théorème de Thalès et qu'à l'inverse des figures archétypes, comme nous l'avions pressenti, les figures prototypes sont effectivement institutionnalisées.

Enfin, bien que la version officielle du théorème débute par la donnée de deux droites sécantes elles mêmes coupées par deux droites parallèles, dans quatre préparations de cours, les auteurs ont opté principalement pour une version triangle du théorème c'est-à-dire qu'ils ont amorcé l'énoncé par la donnée d'un triangle coupé par une parallèle à un côté. Il est à noter qu'à l'inverse de ces enseignants, les deux autres qui prolongent les droites sont rentrés en fonction après la mise en vigueur des programmes actuels. Les quatre professeurs plus chevronnés ont choisi l'ancienne version "triangles" consignée dans les programmes de 1989. Ce fait va dans le sens de l'idée que les professeurs conservent leurs propres prototypes dont ils ont du mal à ce départir au grès des changements de programmes.

Finalement, nous pensions trouver les mêmes prototypes dans les ouvrages et les préparations de cours, ce qui a été le cas mis à part ce détail des droites prolongées. Tout ce qui précède corrobore le renforcement chez les élèves des figures archétypes déjà existantes avant enseignement que ce dernier transforme en prototype par l'intermédiaire des propres représentations prototypiques des professeurs. Ce qui explique le renversement de l'ordre des archétypes qui se transforment en prototypes. Les apprenants introduisent rarement d'eux-mêmes une autre variabilité que celle des ouvrages et des préparations de cours.

3.4. Résistances aux déformations ; effets des modifications optiques et positionnelles sur la reconnaissance des figures : figures pathologiques

a) Méthode d'analyse

Nous avons fait varier les paramètres des deux prototypes précédents. Si nous illustrons notre propos du cas "triangles gigognes", quatre orientations ont été sélectionnées : droite, renversée, et celle des variantes 1 et 2 ; deux angles communs : aigu ou obtus et pour chacun trois mesures distinctes ($4 \times 2 \times 3$) ; trois directions des parallèles ($4 \times 2 \times 3 \times 3$) et trois positions d'une parallèle par rapport à la droite des milieux, ce qui a donné $4 \times 2 \times 3 \times 3 = 216$ figures. Nous en avons retenues un peu moins pour le prototype II. Un prototype était proposé comme figure témoin.

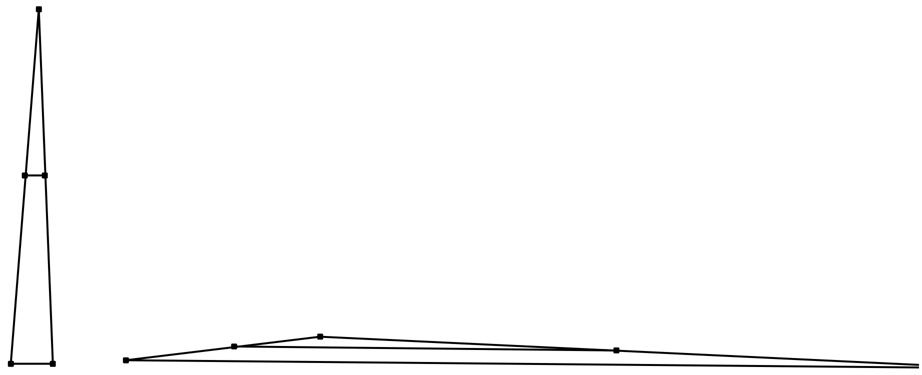
Nous avons repéré tout d'abord les élèves pour lesquels les taux de réussite étaient élevés afin de confirmer le caractère prototypique de certains dessins. Puis, pour ces mêmes élèves, nous avons observé l'évolution de ces taux suivant la figure concernée. Nous avons mis en évidence les caractéristiques et les variables de figures pathologiques en comparant les pourcentages de réussite obtenus à leur sujet, c'est-à-dire moins de 5%, par rapport aux pourcentages relevés aux figures prototypes.

b) Résultats et interprétations

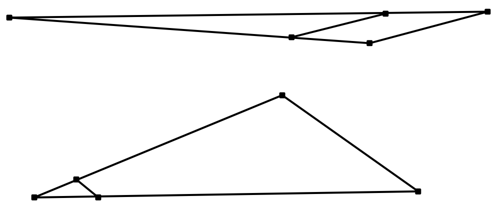
Nous avons noté que les résultats obtenus étaient valables pour les classes de 3$^{\text{ème}}$ et de 4$^{\text{ème}}$. En premier lieu, nous avons remarqué que des figures non standards ont été tout de même reconnues par les élèves. Ainsi, certaines variables modifiées n'ont pas perturbé les apprenants dans la reconnaissance de figures ces dernières pouvant être considérées non pathologiques. Plus précisément, celles d'entre elles qui n'ont subi qu'une seule modification et ce de façon moyenne ont été bien acceptées par les élèves. Par exemple, si seul était changé, d'une manière modérée, l'angle commun aux deux triangles dessiné alors obtus ou bien la position de la parallèle à un côté placée plus près de ce dernier ou bien les deux parallèles plus du tout horizontales ou bien encore l'orientation du prototype par renversement, alors la figure était reconnue par les apprenants.

Par contre, ils ont été plus sensibles à d'autres changements qui engendraient une mauvaise reconnaissance des figures de leur part. Celles qui, à tort, ont été reconnues par moins de 5% des élèves comme pouvant faire l'objet d'une application du théorème se classent en trois grandes catégories que nous illustrons de quelques exemples.

– Il y a tout d'abord celles pour lesquelles une seule modification a été apportée par rapport aux paramètres (1), (2), (3) (5) et (6) des deux prototypes mais de façon extrême comme pour les deux exemples ci-dessous où seul l'angle commun a été changé puisqu'il est très aigu pour le premier et très obtus pour le second :

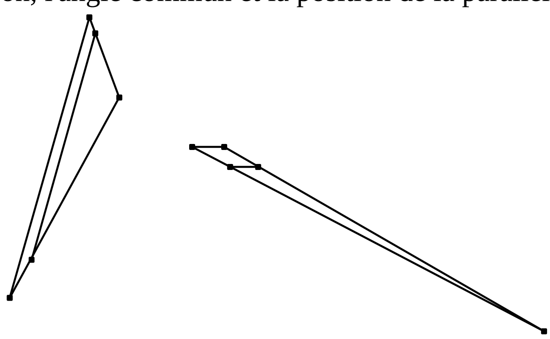


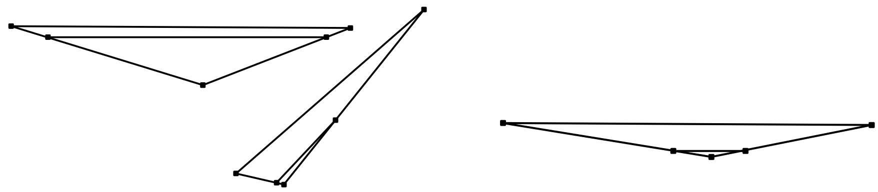
– Puis nous avons trouvées celles pour lesquelles au moins deux variables étaient au moins moyennement modifiées comme par exemple l'orientation et la position de la parallèle :



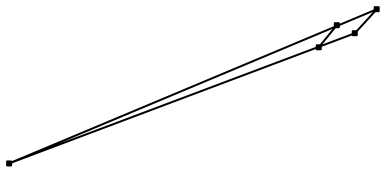
Précisons qu'une figure dont deux variables étaient modérément changées était reconnue.

– Enfin il y a les figures qui ont eu plus de deux variables changées comme l'orientation, l'angle commun et la position de la parallèle :





Il va de soit que lorsque deux ou trois variables étaient fortement modifiées, la figure obtenue était également pathologique.



Il est à noter que parmi les figures des trois catégories précédentes, aucune n'a moins bien été reconnue par les élèves qu'une autre.

3.1.5. Effets des modifications optiques et positionnelles sur l'écriture des rapports littéraux : figures pathogènes

a) Méthode d'analyse

Nous avons mis en évidence les caractéristiques et les variables de figures pathogènes pour lesquelles des erreurs caractéristiques dans l'écriture des rapports littéraux se sont reproduites dans plus de 80% des cas.

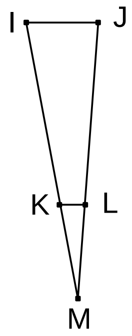
b) Résultats et interprétations

Nous avons remarqué dans l'analyse précédente que les figures qui étaient reconnues bien qu'elles aient été déformées étaient celles pour lesquelles une seule variable ou même deux avaient été modifiées mais de façon modérée par rapport au prototype. Parmi ces figures les plus représentées, certaines ont engendré des erreurs que nous avons caractérisées comme suit.

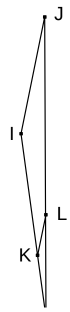
Les prototypes renforcent la tendance naturelle de lecture verticale de haut en bas et horizontale de gauche à droite, ceci conduisant à des écritures de rapports littéraux erronées lorsque l'on s'éloigne des formes prototypiques, d'où l'identification des figures pathogènes A, A', B, C, D et E ci-dessous. Nous avons retenu la figure pathogène B bien que les erreurs commises à son sujet dans l'écriture des rapports littéraux n'aient pas été commises à plus de 80%.

	Proto-type I	patho-gène A	patho-gène A'	patho-gène B	patho-gène C	patho-gène D	patho-gène E
Réussite	83%	13%	12%	57%	13%	15%	18%

Deux paramètres du prototype I sont source d'erreurs. D'une part, son orientation a une première forme de prégnance sur l'application du théorème. Ainsi, en ce qui concerne la figure pathogène A, les élèves écrivent très souvent : JL/JM = IK/IM = IJ/KL. De plus, la présence d'un angle aigu en haut d'une telle figure "renversée" renforce cette erreur (Pathogène A').



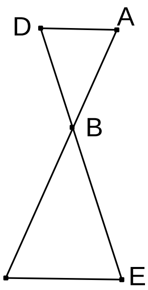
Pathogène A



Pathogène A'

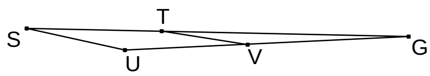
Notons que même s'il ne s'agit pas de dessins renversés ni redressés, un angle aigu situé vers le haut de la feuille entraîne une telle lecture verticale.

Nous avons montré que la lecture verticale est également présente pour la figure papillon. Par conséquent, le prototype I influe d'une nouvelle façon sur le II : AB/AC = DB/DE = DE/CE. (Pathogène B)



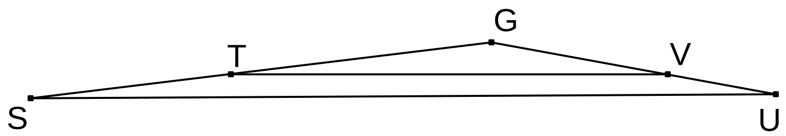
Pathogène B

D'autre part, la variante 2 du prototype I entraîne une lecture de gauche à droite. La présence d'un angle aigu prononcé sur la gauche de la figure et une lecture de gauche à droite génèrent une erreur caractéristique pour trois figures pathogènes.

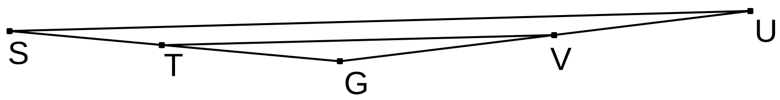


Pathogène C

La figure C qui est caractérisée par un angle aigu sur la gauche et une orientation "allongé", la figure D qui est un prototype I dont l'angle commun est moyennement obtus ce qui engendre la présence d'un angle aigu sur la gauche et la figure E qui est la figure D mais renversée.



Pathogène D



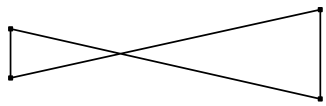
Pathogène E

Pour ces trois figures, les élèves écrivaient l'égalité fausse suivante :

ST/SG = TV/SU. Il apparaît une polarisation visuelle pour un angle aigu situé "sur la gauche", qui existe également lorsqu'un angle aigu se trouve en haut. En résumé, nous avons déduit que le prototype I avait une première forme de prégnance : il renforce la tendance naturelle de lecture verticale de haut en bas et horizontale de gauche à droite.

La figure papillon est aussi touchée par cette erreur de lecture de gauche à droite commise, dans le cas de la variante 3, par 62% des élèves. Remarquons enfin qu'une erreur type a été commise lors de l'application du théorème au prototype I.

La figure étant réellement un prototype I, les élèves ont écrit parfois les rapports suivants que nous nommons fragmentés pour les deux premiers : AM/MD = AN/NE = MN/DE. En classe de 4ème, cette erreur a été commise par 6% des élèves et correspond à 35% des erreurs. En 3ème, ce taux passe à 12%, soit 50% des erreurs au total.



Pathogène F

Nous émettons l'hypothèse que, d'une part, la fragmentation effective des mesures des longueurs sur le dessin, et d'autre part, la figure papillon accentuent cet obstacle en 3ème.

Conclusion

La notion de figure clé est couramment employée dans l’enseignement français. Nous sommes parti, *a priori*, de l’idée que les figures dites clés pouvaient jouer un rôle facilitateur dans l’application d’un théorème mais aussi perturbateur si des variables figurales superflues viennent s’adjoindre aux variables minimales permettant de les définir.

Dans un premier temps, nous avons été amenés d’une part à déterminer de nouvelles notions, les figures archétypes qui sont produites par les élèves avant enseignement et qui sont ainsi des produits culturels prégnants antérieurs aux objets mathématiques en cours d'étude et les figures prototypes qui apparaissant après, et d’autre part à démontrer l’existence de ces objets dans le cadre particulier de l’enseignement du théorème de Thalès. Nous avons effectivement montré que les figures prototypes et les figures archétypes représentant les prémisses de cet énoncé pour les élèves ne comprennent pas seulement des caractéristiques essentielles qui facilitent la reconnaissance de configurations et son application, mais également des propriétés contextuelles superflues, réelles ou erronées, ajoutées ou reconnue comme importantes par l'élève en dehors de toute description explicite faite par un enseignant, qui s'y trouvent mêlées au moment de l'apprentissage ou de façon plus naturelle. Une question globale et qui relèverait de plusieurs disciplines serait de savoir s'il existe, dans d'autres domaines que ceux liés au théorème de Thalès, des archétypes indépendants de tout prototype.

Dans un second temps, nous nous sommes attachés à mettre en évidence les influences mutuelles des archétypes et des prototypes et leurs effets dans la mise en œuvre du même théorème. Par ailleurs, nous avons pu, d'une part, déduire de notre étude de cette mise en œuvre et, d'autre part, inférer de l'analyse du contenu d'ouvrages scolaires que la conduite dans l'enseignement actuel de cette proposition consiste à se référer à une figure prototype unique pour former des relations numériques et algébriques qui ensuite sont l'objet de traitements dans lesquels la figure n'intervient plus. Autrement dit, l'activité des élèves est réduite à la reconnaissance d'une configuration typique caractérisée en partie par des variables autres que celles qui ont trait à l'énoncé strict du théorème pour très vite abandonner le registre figural au profit de celui des calculs. Trois formes d'algorithmisation décrivent cette activité. Une première d'ordre méthodologique consiste, en respectant une procédure de repérage d'éléments précis d'un prototype (deux triangles, un sommet en commun aux deux triangles, une parallèle à un côté etc.), à reconnaître ou à extraire une telle figure. La reconnaissance d'un prototype étant effectif, un autre algorithme lié à l'écriture systématique de rapports littéraux (petit côté sur grand côté) est mis en place afin d'éviter ceux qui sont erronés. Enfin, ces deux étapes ayant permis de tenir à distance la figure et de rendre absente une interprétation discursive de cette dernière, il ne reste plus qu'à mettre le problème en équation et à résoudre cette équation grâce à une algorithmisation des calculs algébriques. Les deux questions que nous pouvons alors nous poser sont de savoir comment éviter cette fuite du géométrique au profit de l'algébrique et améliorer les résultats de mise en œuvre du théorème ?

Notre première piste est qu'il semble important d'instaurer dans l'enseignement une variabilité à la fois des prototypes et des types de calculs. En effet, pour éviter que des archétypes se transforment en prototypes à forte prégnance lors de l'application du théorème et qui rendent parfois son exploitation difficile, tout en proposant des outils de reconnaissance de configurations, nous avons conclu qu'une grande variété des paramètres définissants ces prototypes devraient être proposés par les professeurs. Une telle organisation devrait permettre aux apprenants de mieux accepter, dans des situations de résolution de problèmes, des variations raisonnables par rapport à ce type de figure. Certes la vision botaniste consistant à répertorier initialement les dessins types liés à un théorème pour pouvoir les reconnaître plus facilement dans une figure complexe n'est pas à négliger. Mais cet «herbier» devrait rassembler des prototypes caractérisés par les variables figurales strictement en rapport avec l'énoncé au risque autrement que l'application du théorème s'en trouve biaisée.

Afin d'éviter une visualisation exclusivement iconique liée à la lecture des données numériques sur les dessins qui engendre le fait que les élèves se concentrent sur une tâche calculatoire sans revenir à la figure, la réponse que nous apportons est fondée sur la proportionnalité interne, liée au théorème d'une droite parallèle à deux côtés d'un triangle qui coupe les deux autres côtés en segments proportionnels et sur la proportionnalité externe, en rapport avec le théorème de Thalès actuel. Suivant le type de répartition des mesures de longueurs connues et celle qui est à calculer, l'élève choisi l'une ou l'autre version. Le cheminement est exactement inverse à celui que nous avons décelé dans nos expériences et ne consiste plus à fuir le plus tôt possible le géométrique. L'élève part du géométrique pour repérer une configuration adéquate, analyse les données numériques avec pour objectif de choisir la version du théorème la mieux appropriée pour enfin revenir au registre figural dans le but d'appliquer effectivement cette version. Un retour à la figure en fin de procédure de calcul est à envisager pour vérifier la cohérence du résultat.

De plus, nous avons montré dans un travail antérieur que l'approche du théorème de Thalès par la proportionnalité interne et externe améliorait des résultats au niveau du registre algébrique. En effet, il semblerait qu'une double approche de la proportionnalité soit profitable à l'enseignement de ce théorème et constitue une remédiation aux erreurs rencontrées du fait que cette méthode diminue celles qui sont commises dans l'écriture des rapports littéraux, la mise en équation et la résolution de ces équations. Mais, à ce sujet, de plus amples détails ne peuvent pas être donnés dans le cadre de cet article.

De nombreuses questions demeurent ouvertes au sujet du théorème de Thalès en particulier celle qui consisterait à comprendre l'influence qu'un travail de démonstration de ce théorème avec les élèves pourrait avoir sur les applications qui leur sont demandé.

Pour finir, il semble tout à fait légitime d'émettre l'hypothèse que des figures archétypes et prototypes existent pour d'autres propositions et que les remarques que nous avons émises au sujet de l'enseignement du théorème de Thalès sont transposables à d'autres résultats. Ainsi, il serait intéressant de détecter de telles figures types pour un théorème donné et de scruter leurs effets sur son enseignement. Les questions générales qu'il serait alors possible de se poser sont de savoir, d'une part,

– si des figures géométriques ne préexistent pas chez les élèves avant l'enseignement d'une notion ou d'un théorème ;

– si l'enseignement ne renforce pas ces hypothétiques dessins ou n'en créé pas de nouveaux par l'intermédiaire de propriétés de figures ajoutées ou retenues par les élèves en dehors de toute description explicite de la part de l'enseignant ;

et d'autre part

– de savoir si de telles figures, en supposant qu'elles existent, ne laissent pas des empreintes lors de l'application numérique du théorème en question.

Enfin, nous pouvons penser que le cheminement qui consiste à passer au plus vite du géométrique au numérique, procédé rendant la visualisation iconique et le discours strictement algébrique, n’est pas un fait réservé au théorème de Thalès mais également à une bonne partie de l’enseignement contemporain de la géométrie. Un réel questionnement est à entreprendre à ce sujet.

Bibliographie

AUDIBERT G. (1982), *Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane*, Thèse de Doctorat, Université de Montpellier, Edition APMEP.

BACH M-J & MAROT M. (1995), *Énoncé de Thalès : support pour le calcul algébrique.* Autour de Thalès, Commission Inter IREM Premier cycle, Université Paris VII.

BEKAYE SOKOMA S. (1989), Aspects analytiques et analogiques de la proportionnalité dans une situation de formation, *Petit x* **19**.

BELLARD N. & LEWILLION M. (2001), *Schémas pour la compréhension des théorèmes pour la classe de quatrième,* Produire et lire des textes de démonstrations, Éditions Ellipses, Paris.

BROUSSEAU G. (1995), *Promenade avec Thalès entre la maternelle et l'université.* Autour de Thalès, Commission Inter IREM Premier cycle, Université Paris VII.

CORDIER F. (1989), *Les notions de typicalité et de niveau d'abstraction. Analyse de deux propriétés des représentations cognitives*, Thèse présentée pour le diplôme national d'Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris Sud.

CORDIER F. & J. (1991), L'application du théorème de Thalès. Un exemple du rôle de représentations typiques comme biais cognitif, *Recherche en Didactique des Mathématiques* **11.1**.

CHEVALLARD Y. (1991), Autours de l'enseignement de la géométrie au collège, *Petit x* **27**, Première partie.

DUPERRET J C. (1995), *Pour un Thalès dynamique.* Autour de Thalès, Commission Inter IREM Premier cycle, Université Paris VII.

DUVAL R. (1988), Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence, *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives* **1**.

DUVAL R. (1993), Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensé, *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives* **5**.

DUVAL R. (1994), Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repère IREM* **7**.

DUVAL R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives* **10**.

EGRET M.-A & DUVAL R. (1989), Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration, *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives* **2**.

EGRET M.-A. (1990), *Proposition pour introduire des élèves à la démonstration.* Publications de l'Institut de Mathématiques de Rennes. Fascicule 5.

EGRET M.-A., GUIN D., KUNTZ G., METEVIER G., VOGEL N. (1988), Réflexion sur l'apprentissage de la démonstration en géométrie en quatrième autour d'un logiciel, *L'Ouvert* **52**.

GRENIER (1988), *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale en 6ème*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

HOUBEDINE J. & KERBOEUF M-P. (2005), Les figures-clés : une idée pour le début de l'apprentissage de la démonstration en quatrième, *Repère IREM* **59**.

LAGUERRE E. (2005), *Une ingénierie didactique pour l'apprentissage du théorème de Thalès au collège,* Thèse de Doctorat, Université Paris VII Denis Diderot.

LEBESGUE H. (1931), *Sur la mesure des grandeurs. L'enseignement mathématique.* Paris et Genève.

LEMONIDIS C. (1990), *Conception, réalisation et résultats d'une expérience d'enseignement de l'homothétie,* Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur. Strasbourg.

LE NY J. (1989), *Science cognitive et compréhension du langage,* Presse universitaire de France.

NOIRFALISE R. (1991), Figures prégnantes en géométrie, *Repère IREM* **2**.

MATHERON Y. (1994 (a)), Les répercussions des changements de programme entre 1964 et 1989 sur l'enseignement du théorème de Thalès, *Petit x* **34**.

MATHERON Y. (1994 (b)), *De la proportionnalité vers le théorème de Thalès, point d'appui et évolution du rapport au savoir,* Mémoire de DEA de sciences de l'éducation, Université d'Aix - Marseille.

MATHERON Y. (2000), Analyse praxéologique. Quelques exemples d'organisations mathématiques, *Petit x* **54**.

MONFORT A-M. (1995), *A propos de l'énoncé de Thalès en 3ème* , Autour de Thalès, Commission Inter IREM Premier cycle, Université Paris VII.

PALMER, ROSCH & CHASE (1981), *Canonical perspective and the perception of objects in, attention and performance, IX,* Lawrence Erlbaum Associates Publishors, Hills dale, New Jersey.

PFAFF N. & MICHONNEAU J. (1990), La proportionnalité en géométrie : le théorème de Thalès, *Petit x* **23**.

PFAFF N. (1995), *Processus de conceptualisation autour du théorème de Thalès*, Thèse de Doctorat, Université Paris V René Descartes.

ROSCH E. (1976), *Classification d'objet du monde réel : origine et représentations dans la cognition*, Bulletin de psychologie, Numéro spécial.

ROUCHE N. (1992), *Leçons de la mesure*, Didier Hatier, Bruxelles.

VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels, *Recherche en Didactique des Mathématiques* **10-2.3**.

WERMUS H. (1976), *Essais de représentation de certaines activités cognitives à l'aide des prédicats avec composante,* Archive de psychologie, **XIV n°171**, Genève.

WERMUS H. (1978), *Esquisse d'un modèle des activités cognitives,* Dialectica, **32 n° 3-4**, Genève.

ERIC LAGUERRE
IUFM Versailles
elaguerre@club-internet.fr