PHILIPPE R. RICHARD ET JOSEP M. FORTUNY

AMÉLIORATION DES COMPÉTENCES ARGUMENTATIVES À L'AIDE D'UN SYSTÈME TUTORIEL EN CLASSE DE MATHÉMATIQUE AU SECONDAIRE

Abstract. Tutoring System for Improvement of Argumentative Competencies in High School Mathematics
This article tries to show how secondary school pupils can improve their argument skills with the help of tutorial systems intended for learning geometry. After having established the conceptual framework at the intersection of mathematics teaching and computer environments for human learning, the article compares the heuristic and discursive features of some tutorial systems, including the systems developed by our research team. It then deals with the issue of the complementary nature of knowledge and skills in order to aim at a strategy for assessing argument skills based on relationships in the subject-environment system. The text particularly includes cognitive control, semiotic and situational structures associated with the development of argument skills in such environments. It also tackles the specific nature of reference knowledge, the decontextualization of learning, the instrumentation of resources, the idea of mathematical proof and the role of teaching agents.

Keywords. Learning of geometry, tutorial system, model of knowledge, mathematical competences, argumentative competence evaluation

Résumé. Cet article vise à montrer comment l'élève de l'école secondaire peut améliorer ses compétences argumentatives à l'aide de systèmes tutoriels destinés à l'apprentissage de la géométrie. Après avoir situé le cadre conceptuel à l'intersection de la didactique des mathématiques et des environnements informatiques d'apprentissage humain, l'article compare les caractéristiques heuristiques et discursives de quelques systèmes tutoriels, dont les systèmes développés par notre équipe de recherche. Il traite ensuite la question de complémentarité entre connaissances et compétences pour se diriger vers une stratégie d'évaluation des compétences argumentatives sur la base des rapports du système sujet-milieu. Le texte intègre, en particulier, les structures de contrôle cognitif, sémiotique et situationnel associées au développement d'une compétence argumentative dans de tels environnements. Il aborde aussi la spécificité des connaissances de référence, la décontextualisation des apprentissages, l'instrumentation des ressources, l'idée de démonstration mathématique ainsi que le rôle d'agents didactiques.

Mots-clés. Apprentissage de la géométrie, système tutoriel, modèle de connaissances, compétences mathématiques, évaluation de compétences argumentatives

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 12, p. 83 - 116.

Introduction

À partir des années 1980, plusieurs programmes d'études au secondaire se présentaient sous forme d'objectifs d'apprentissage (v.g. Québec, Catalogne), dépassant la tradition des contenus et des méthodes disciplinaires. Les objectifs généraux se ventilaient alors en objectifs spécifiques, intermédiaires ou terminaux, ce qui devait faciliter à la fois la programmation de l'enseignement et l'évaluation des apprentissages. Bien que cette nouvelle approche fournît au monde de l'éducation des éléments de référence utiles sur les concepts, processus et attitudes mathématiques à étudier, on en a souvent retenu que l'apprentissage procédait par simple addition ou juxtaposition d'éléments. C'est dans un tel contexte qu'apparaît la notion de compétence. Définie comme un savoir-agir, la compétence se manifeste lors de situations d'une certaine complexité, son degré de maîtrise pouvant progresser tout au long du parcours scolaire et même au delà de celui-ci. Privilégier les compétences en classe de mathématique, c'est donc inviter à établir un rapport différent aux savoirs traditionnels et à se recentrer sur la formation de la pensée et le développement de l'autonomie.

Même si le développement d'une compétence est un travail de longue haleine, les situations de résolution de problèmes continuent d'être au cœur de l'apprentissage des mathématiques. C'est d'ailleurs, selon la théorie des situations didactiques, la seule façon de «faire des mathématiques» (Brousseau, 1998). Il ne s'agit pas tant de trouver une classe de problèmes pertinents à résoudre dont l'aboutissement présuppose un apprentissage satisfaisant, ni d'élaborer un curriculum de situations organisées de façon diagnostique. C'est-à-dire, dans le premier cas, se centrer sur les situations-problèmes qui rendent raisonnablement signifiant l'apprentissage d'un concept, ou, dans le second cas, prévoir que si l'élève rencontre une difficulté dans un problème donné, y remédier en lui demandant de résoudre un sous-problème associé ou en l'orientant vers une suite d'exercices adaptés[1]. Ce que nous retenons de la modélisation du système éducatif de Brousseau (1998) c'est que l'enseignant agit sur le «milieu d'apprentissage» de l'élève – c'est lui qui choisit les problèmes à résoudre et les conditions du processus de résolution – et que l'interaction de l'élève dans ce milieu apporte des informations et des rétroactions à tout agent didactique (l'enseignant, un agent pédagogique virtuel, voire un chercheur, un évaluateur ou autre observateur).

Dans notre étude, le développement de compétences argumentatives à l'aide d'un système tutoriel n'est pas un objectif en soi. On peut certes évoquer une sorte de tuteur «compétentiel», à l'image des tuteurs cognitifs (v.g. Carnegie Learning, 2006), qui proposent des situations-problèmes organisées dans un ensemble

[1] Il s'agit ici de ce qui était connu en France dans les années 1980 sous le nom d'«enseignement programmé».

structuré d'objectifs, d'éléments d'apprentissage ou d'activités pédagogiques constituant un système de référence curriculaire. L'amélioration de la compétence de l'élève cheminerait alors selon les réalisations ou les difficultés que l'élève rencontrerait par rapport au système programmé. Toutefois, la formation d'une compétence se substituerait à l'objectif d'étude, risquant au passage de subordonner les concepts, les processus et les attitudes mathématiques au développement de la compétence-objet. Nous considérons plutôt que l'évolution d'une compétence est conjointe à la progression des connaissances mathématiques et que le système tutoriel est capable d'agir, à la manière d'un enseignant compétent, par rapport à l'interaction de l'élève dans un milieu – pour favoriser la formation de la pensée et le développement de l'autonomie. Lorsque le système tutoriel s'inscrit dans un Environnement Informatique d'Apprentissage Humain (EIAH), l'amélioration de compétences argumentatives peut s'opérer en autant que le système tutoriel admet des structures de contrôle cognitif (pour assurer la progression cohérente des connaissances), sémiotique (pour assurer la représentation, le traitement et la communication) et situationnel (pour assurer la dévolution et l'institutionnalisation).

Le caractère multidisciplinaire de l'article nous incite à entamer celui-ci par une section préliminaire qui propose une description fonctionnelle d'un des systèmes tutoriels développés par notre équipe de recherche (section *Le système Turing*). Cette section devrait faciliter la compréhension des enjeux du cadre conceptuel (section *Construction d'EIAH et didactique des mathématiques*) et la comparaison des caractéristiques heuristiques et discursives de quelques systèmes actuels (section *Les systèmes tutoriels connexes*). Nous traitons ensuite la question de complémentarité entre connaissances et compétences en classe de mathématique (section *Connaissances et compétences*) puis nous proposons une stratégie d'évaluation des compétences argumentatives à partir des systèmes Turing et AgentGeom (section *Évaluation des compétences argumentatives*).

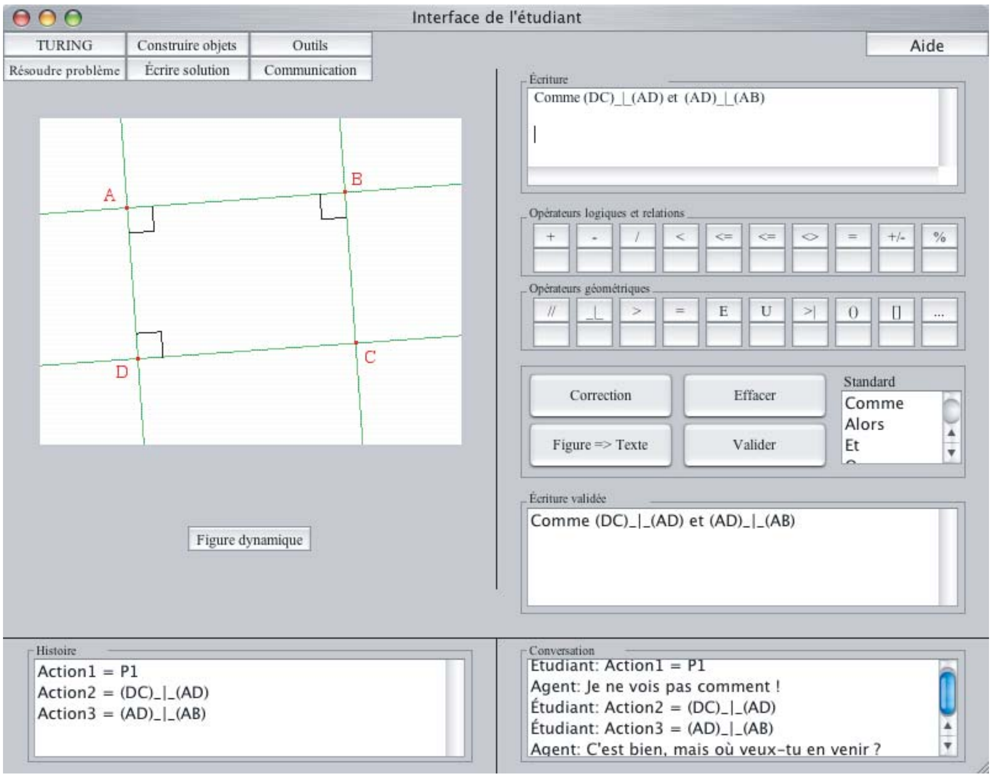


Figure 1 : Capture d'écran de l'environnement de l'élève. On aperçoit à gauche la zone graphique, un applet Java qui donne une figure dynamique, et, à droite, la zone discursive pour l'écriture des propositions. L'histoire des actions de l'élève et les messages de l'agent tuteur se trouvent en bas.

Le système Turing

Le mot TURING, acronyme de TUtoRiel INtelligent en Géométrie, se réfère à la fois à l'exécution d'un projet de recherche et à la réalisation d'un système tutoriel qui se destine à l'apprentissage de la géométrie (Richard & al., 2005). La version actuelle du système est un logiciel d'application, programmé en langage Java dans un environnement client-serveur. Nous illustrons d'abord le fonctionnement du logiciel à partir de deux captures d'écran et nous poursuivons ensuite avec la description de l'architecture du système.

Pour la résolution d'un problème donné dans Turing, l'élève construit un élément de figure, dégage du dessin des propositions graphiques ou écrit des propositions discursives pour produire un calcul ou une inférence structurée à l'interface de l'étudiant (figure 1). Le système tutoriel répond aux actions de l'élève, si nécessaire et en temps réel, à l'aide de messages. Ces messages ont d'abord été programmés à l'interface du didacticien (figure 2) en fonction du graphe qui contient l'ensemble des inférences possibles dans la logique du problème. Pour le maître ou le chercheur, il est possible d'adapter les inférences du graphe et leurs messages associés aux habitudes d'un contrat didactique spécifique – comme ceux qui admettent la contradiction en partie intégrante du processus de résolution ou qui acceptent les propositions graphiques dans la structure du raisonnement. Dans ce qui suit, une stratégie est un chemin du graphe qui part des hypothèses du problème et qui termine par sa conclusion, à ne pas confondre avec le processus de résolution de l'élève (voir paragraphe *Sur le discours* dans la section suivante).

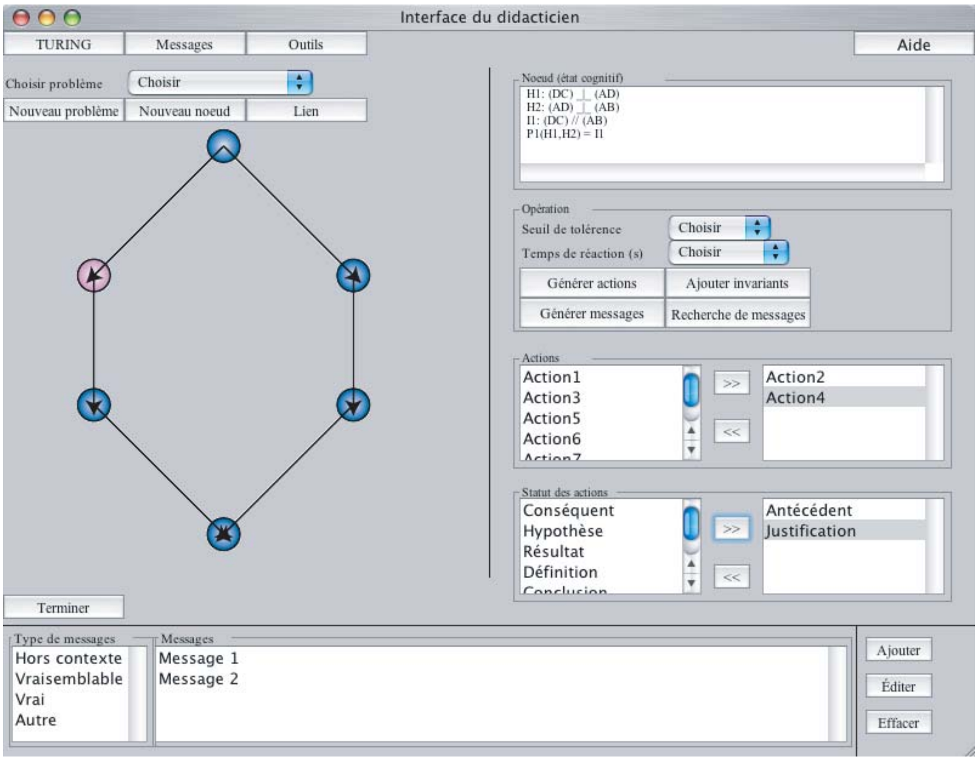


Figure 2 : Capture d'écran de l'environnement du maître ou du chercheur. L'interface dit du didacticien se destine à la construction du graphe inférentiel (à gauche) et à la gestion des messages qui lui sont associés (à droite). C'est à partir de cette interface que le maître ou le chercheur constitue, pour chaque problème, la base de référence de l'agent tuteur.

L'organisation physique et logique du système Turing comprend quatre agents principaux (schéma 3) :

- *l'agent apprenant* permet à l'élève de résoudre un problème et il l'aide dans son cheminement en montrant les messages de l'agent tuteur. Cet agent valide et corrige la syntaxe des propositions discursives écrites par l'élève et il autorise la conversion des actions graphiques en actions discursives ;
- *l'agent enseignant* montre au maître l'ensemble des stratégies et des messages disponibles. Il lui permet de choisir différents seuils de tolérance pour l'envoi des messages, dont celui du temps d'attente pour l'élève bloqué, et de modifier le contenu des messages même lorsqu'un élève est en plein processus de résolution. Les seuils de tolérance se rapportent aux niveaux de contrôle de la section *Évaluation des compétences argumentatives* ;
- *l'agent expert* autorise la création de graphes inférentiels et la programmation d'un ensemble de messages par défaut. Contrairement à l'agent enseignant, cet agent permet au chercheur de modifier des éléments de stratégie du graphe et de gérer l'organisation des messages. Au schéma 3, les relations du maître et du chercheur, vers les agents enseignant ou expert, renvoient à une distinction toute relative du statut de chacun. Un enseignant (maître) peut très bien adopter une position réflexive par rapport au milieu et au contrat didactique, par exemple pour ajouter au graphe une stratégie commune à un groupe d'élève, ce qui le place de facto dans une position de chercheur ;
- *l'agent tuteur* est le moteur du système Turing. Il fonctionne à la fois du côté client et du côté serveur pour le traitement de problèmes complexes. À partir d'une action de l'élève, l'agent tuteur retourne le message le plus approprié à la situation, ce qui inclut l'absence de message. Il relève également les patrons de conduite dans le processus de résolution, c'est-à-dire les successions récurrentes de propositions ou les ensembles invariants d'actions, pour adapter automatiquement le seuil de tolérance – comme l'élève qui construit systématiquement ses inférences de façon structurée ou, à l'inverse, qui abuse d'actions éparses, voire hors sujet.

Du point de vue informatique, si l'on abstrait l'aide à la production de propositions discursives, de graphes et de messages bien formés, les agents apprenant, enseignant et expert sont essentiellement des agents réactifs. Le comportement «intelligent» du système provient d'abord de l'interaction entre ces agents et en fait un système robuste. Par contre, en disposant d'un mode de représentation exclusif (gestion de la base de données), en tenant compte des événements passés (recherche de fichiers journaux) et en planifiant ses actions futures (générateur de messages), l'agent tuteur est plutôt un agent cognitif. L'adaptation autonome de l'agent tuteur par rapport à l'intention programmée, c'est-à-dire que l'envoi des messages dépend aussi d'une prise de décision par l'agent, lui donne une intelligence propre.

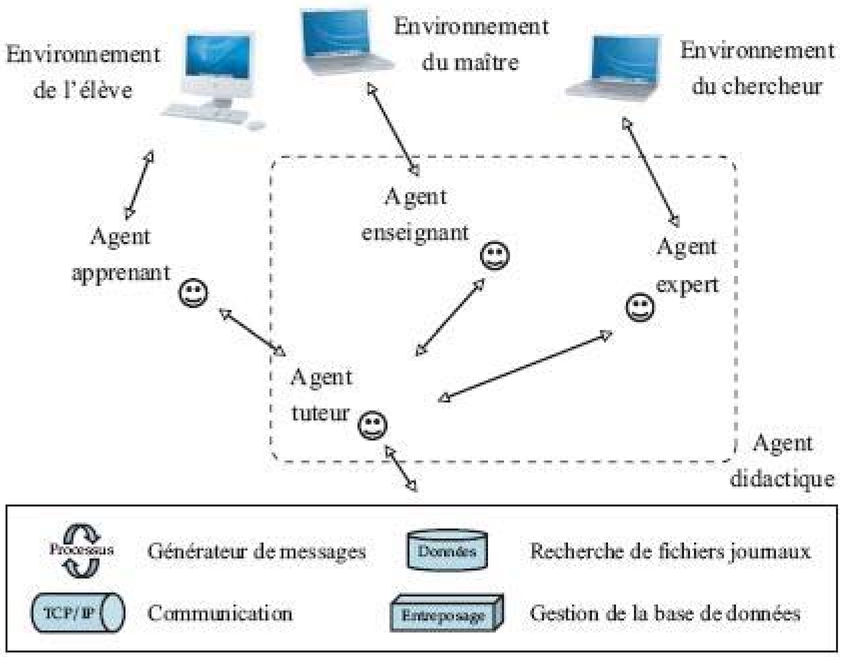


Schéma 3 : Architecture du système Turing.

Les agents tuteur, enseignant et expert, avec peut-être l'aide à l'écriture des propositions discursives de l'agent apprenant, se comportent comme une entité virtuelle entre l'élève et l'interface auquel il a accès. On sait bien que l'usager n'est généralement pas conscient des modèles qui sous-tendent l'exercice de programmation et ce qui reste le plus apparent est l'interaction avec la machine. Nous appelons agent didactique l'entité virtuelle qui simule le comportement d'un tuteur humain par l'envoi de messages, c'est-à-dire l'«agent interlocuteur» de l'élève. À la section *Évaluation des compétences argumentatives* nous distinguons la relation didactique simulée de la relation didactique réelle et nous introduisons le système Turing dans le système didactique de Brousseau (1998).

1. Construction d'EIAH et didactique des mathématiques

Lorsqu'on s'intéresse à la conception d'un système tutoriel, qui se destine à soutenir l'élève en résolution de situations-problèmes à l'aide d'interactions discursives (messages), il faut trouver une façon de rationaliser l'analyse a priori. C'est-à-dire que par rapport aux conditions particulières d'une situation-problème et dans un contrat didactique donné, le chercheur-concepteur doit à la fois trouver l'ensemble des stratégies qui seront mobilisées par l'élève-résoluteur et l'ensemble des messages mis à la disposition de l'agent tuteur. Ce travail d'analyse est habituel en didactique des mathématiques, quoique la gestion des messages qui répondent aux interactions de l'élève est généralement peu considérée. On sait traiter les échanges discursifs a posteriori, notamment entre un élève et un enseignant, ou répondre à la toute dernière action de l'élève à l'interface, mais la prévision d'authentiques stratégies argumentatives semble relever d'une entreprise perdue d'avance.

1.1. Sur le débat social simulé

Dans une perspective plus générale, les EIAH disponibles actuellement pour la géométrie de l'école secondaire ne considèrent pas le débat social simulé dans la construction des connaissances. En résolution de problème par exemple, on admet volontiers qu'il est possible de provoquer un débat de façon synchronique ou asynchronique à l'aide d'un forum de discussion ou d'un logiciel de courriel. Dans ces cas, la construction et le contrôle des connaissances s'effectuent lors du processus collaboratif de résolution (entre élèves) ou grâce à l'intervention d'un tuteur humain (généralement l'enseignant ordinaire). Mais si ce type d'EIAH est utile pour gérer les situations particulières qui exigent un apprentissage à distance (élèves hospitalisés, entraînement sportif d'élite, éloignement temporaire de la famille, …), son profit s'estompe dans l'enseignement habituel. Car les compagnons de classe ou l'enseignant sont toujours présents pour alimenter un éventuel débat, le milieu informatique devenant davantage un outil qu'un instrument de médiation pour l'apprentissage (Rabardel, 1995, Laborde, 2001a, b et Trouche, 2002). Or, l'attention personnalisée et l'animation de débats en classe est didactiquement coûteuse. Non seulement le temps à y consacrer est souvent dissuasif, mais il y a aussi la question des moyens pédagogiques à mobiliser pour s'assurer que les élèves travaillent dans la même situation-problème que celle qui est en jeu et qu'ils en respectent la logique interne. En outre, certaines habitudes socioculturelles entretiennent un authentique sentiment de méfiance face aux débats. On n'a qu'à penser au bris des règles de vie en commun, de l'harmonie sociale (v.g. au Québec : Cornellier, 2003 ; au Japon : Sekiguchi et Miyazaki, 2000) ou à l'impression qu'un argument contradictoire masque en fait une attaque personnelle. On comprend pourquoi la pratique enseignante n'y recourt qu'occasionnellement.

Pourtant, alors que les points de vue traditionnels en psychologie (v.g. Festinger, 1957, 1989 ; Vygotsky, 1978) accordent déjà au débat social un rôle déterminant dans l'acquisition des connaissances, les points de vue épistémologique (Lakatos, 1984), sémiotique (Duval, 1995) et situationnel (Brousseau, 1998) le situent de façon nécessaire par rapport à l'apprentissage des mathématiques. Par débat social simulé dans un EIAH nous entendons une discussion organisée et dirigée dans laquelle les interlocuteurs sont un agent apprenant, ou un élève, et un agent didactique. Ainsi, contrairement à l'activité d'apprentissage instrumentée ou au débat qui peut délayer la responsabilité de l'élève dans l'ensemble d'une classe – le système tutoriel ou l'interlocuteur gère en quelque sorte une partie des connaissances en jeu –, le débat social simulé que nous préconisons accorde à l'élève un rôle de premier plan. C'est-à-dire que l'élève est responsable de l'application des connaissances et que la progression du débat dépend essentiellement de ses actions à l'interface, même durant la gestion des impasses par le système tutoriel (Cobo & al., 2007). Dans un débat social simulé, nous devons souligner que l'agent didactique est particulièrement utile pour appuyer la gestion du sens, de la représentation et du respect de la logique interne (Richard & al., 2003). En cas de besoin, le système tutoriel permet de s'assurer que les symboles utilisés par le dispositif informatique ont le même sens pour l'élève que celui qu'il est censé avoir (contrôle sémiotique), que les concepts en jeu se réfèrent effectivement aux modèles prétendus (contrôle cognitif) et que l'élève travaille dans la même situation-problème que celle qui est proposée (contrôle situationnel).

1.2. Sur le discours

Pour simuler la conversation et permettre la rédaction de solutions, nos systèmes tutoriels utilisent une approche structurale du raisonnement qui se fonde sur les notions d'expansion discursive de Duval (1995) et d'expansion graphique de Richard (2004a). Pour Duval, le raisonnement se structure en pas de raisonnement – que nous appelons génériquement «inférences» pour les besoins de notre exposé – dans un processus logique (ex. déductions, syllogismes aristotéliciens) ou dialogique (ex. inférences sémantiques, inférences discursives). Selon Richard, ces pas peuvent mobiliser plusieurs registres de représentation sémiotique (ex. l'inférence figurale dans un pas de raisonnement discursivo-graphique) et, peu importe l'inférence mise en œuvre, le raisonnement progresse par construction ou accumulation de résultats intermédiaires (conséquences discursives). Pour assurer la continuité d'un raisonnement, les inférences s'enchaînent par recyclage de propositions ou elles se renforcent ou s'opposent par leur contenu en présentant une cohérence thématique pour appuyer ou aller à l'encontre de la thèse discutée, comme dans la dialectique de Lakatos (1976). Dans ce qui suit, nous comparons le raisonnement humain et la programmation informatique en montrant comment cela se répercute sur l'idée de modèle mathématique a priori, puis nous introduisons la notion de graphe inférentiel dans nos systèmes.

Les premiers systèmes tutoriels ont mis en évidence la forme d'expansion formelle du raisonnement en insistant sur la structure fonctionnelle des propositions discursives. Pourtant, outre les processus calculatoires (logiques, arithmétiques ou algébriques), l'expansion cognitive constitue la forme d'expansion discursive privilégiée en classe de mathématique. Un raisonnement qui procède par expansion cognitive exige la connaissance de définitions, règles ou lois pour un domaine d'objets (Duval, 1995), sans que celles-ci n'aient besoin d'appartenir à une théorie formelle. Au regard d'un modèle mathématique, il se peut que l'usage d'une définition ou d'une propriété pour justifier une inférence manque de cohérence globale, mais que l'inférence soit structurellement cohérente par le sens des propositions mobilisées. Ce phénomène est courant en géométrie lorsque le raisonnement se fonde sur des propriétés visuellement acceptables, c'est-à-dire qui paraissent vraies parce que le dessin se considère comme son propre modèle (Richard, 2004a), mais qui demeurent fausses par rapport au modèle géométrique sous-jacent. En privilégiant d'emblée un modèle mathématique comme cadre de référence pour la programmation informatique, ce qui suppose la détermination d'un ensemble de définitions et de propriétés globalement cohérentes dans le modèle, on empêche la découverte de contradictions qui pourraient appartenir à une stratégie de l'élève.

Lorsque nous parlons de géométrie cognitive, c'est parce que le point de comparaison de nos systèmes tutoriels est un graphe inférentiel qui se forme par expansion cognitive. Ce graphe admet certaines propriétés en usage dans un contrat didactique donné, comme les raccourcis inférentiels – macropropriétés de Richard (2004b) ou macroopérateurs d'Anderson (Koedinger & Anderson, 1993) – ou les propriétés qui demeurent localement cohérentes pour la découverte de contradictions. L'approche structurale du raisonnement réconcilie la difficulté de programmer la résolution de problèmes et la réalisation de preuve qui procèdent par expansion cognitive. D'abord parce que l'ensemble des règles d'inférence prévues peut s'adapter à la logique du problème et aux stratégies mises en œuvre dans un contrat didactique donné. Ensuite, parce que les messages véhiculés par l'agent tuteur permettent de simuler l'argumentation sur la base des connaissances relatives aux règles d'inférences. Encore, parce que si la réalisation d'une preuve devient nécessaire à la suite d'un processus de résolution, le graphe est disponible pour la rédaction d'une solution structurée. Enfin, l'approche structurale permet au système de considérer des structures de contrôle dans la logique du problème.

S'il n'y a pas de théorie formelle ou de théorie cognitive – au sens d'une théorie signifiante qui interprète une théorie formelle – sur lesquelles notre système se fonde a priori, celui-ci engendre un modèle à partir du graphe inférentiel et de l'algorithme (moteur) qui détermine les messages à retourner (voir section *Évaluation des compétences argumentatives*). Le graphe se constitue et il se modifie par un expert (maître, chercheur), ce qui suppose un choix dans les hypothèses et les règles d'inférence acceptées dans un problème donné. Par exemple, la considération simultanée d'hypothèses vraies et fausses dans le contexte d'un problème, mais dont les règles d'inférence acceptées sont toutes cognitivement valables, autorise la venue de contradictions. Lorsque l'élève ne perçoit pas la contradiction, l'algorithme peut se situer par rapport au graphe et fournir un message adapté. En fait, si l'approche structurale permet de doter le système tutoriel d'un ensemble complet de messages par défaut (v.g. El-Khoury & al., 2005), l'expert doit pouvoir adapter le contenu de chaque message au besoin. Ainsi, suite à la venue d'une contradiction – représentée dans le graphe par une inférence qui ne débouche pas vers la conclusion –, les messages peuvent se reformuler et porter sur une prise en compte de la contradiction. Lorsque l'élève écrit ou choisi une proposition et que l'agent tuteur retourne un message, on peut dire alors qu'ils collaborent au processus de résolution. C'est-à-dire que tous les deux traitent avec le même contenu, voire la même inférence. Néanmoins, selon leurs stratégies respectives, il s'agit plutôt d'un processus coopératif. L'algorithme ne suit pas le cheminement de l'élève par anticipation, mais il compare son action au graphe pour vérifier la cohérence des inférences et la stabilité des actions de l'élève, telle une abeille qui butine dans un champ proceptuel – au sens que nous avons développé dans Richard (2004b). L'ensemble des actions de l'élève et les messages de l'agent tuteur forment trois couches d'interactions que nous avons développées dans Cobo & al. (2007) et qui concernent les actions signifiantes à l'interface, le discours de l'élève et la médiation du milieu social.

2. Les systèmes tutoriels connexes

Notre équipe de recherche travaille conjointement sur les projets AgentGeom (Cobo & al., 2007) et Turing (Richard & al., 2005). Mis à part quelques différences mineures sur l'approche de recherche, la configuration des interfaces et l'usage des modèles relatifs à l'exercice de programmation, ces deux projets visent la construction et l'étude d'EIAH pour l'amélioration des compétences en mathématiques au secondaire. D'autres systèmes tutoriels se destinent déjà à soutenir l'élève à l'aide de messages en résolution de problèmes, notamment lors de problèmes de preuve. Nous les résumons au tableau 4.

Comme dans les systèmes tutoriels connexes, *AgentGeom* et *Turing* utilisent la construction d'une figure géométrique pour générer les interactions entre l'élève et le milieu, même si, dans son énoncé, la situation-problème n'est pas déjà modélisée par une figure géométrique. Ce point rejoint les questions de décontextualisation, de transfert ou encore d'acceptation du caractère contextuel de la connaissance à construire et il suppose que si les propriétés des connaissances construites par l'élève dépendent de ses connaissances antérieures, elles dépendent aussi des caractéristiques du milieu avec lequel il interagit et des compétences qu'il sait exercer. Par contre, les modèles géométriques sous-jacents aux systèmes *Baghera*, *Cabri-Euclide* et *Geometry Explanation Tutor* sont essentiellement des modèles formels, ce qui marque le cheminement de l'élève et l'intervention de l'agent tuteur. Le fait de concevoir un système tutoriel en géométrie cognitive permet de construire une architecture ouverte qui s'adapte non pas à un modèle géométrique préexistant, mais à une réalité socioculturelle propre à la particularité d'un contrat didactique. C'est-à-dire que dans un graphe inférentiel qui n'est pas nécessairement formel, non seulement chaque inférence peut représenter un état cognitif, sémiotique et situationnel fondés sur l'analyse didactique a priori, mais les messages qui s'y fondent permettent d'agir dans l'interaction sujet-milieu et donc, sur l'évolution des compétences mathématiques. De plus, selon Guin (1996), l'efficacité d'un EIAH dépend d'une modélisation du comportement humain qui est à la fois antérieur et postérieur à la conception de l'environnement. Parce que le couple sujet-milieu engendre un modèle qui lui est propre, le dispositif informatique même doit permettre un aménagement des caractéristiques heuristiques et discursives (rôle de l'agent didactique ; programmation des répliques, des stratégies, des systèmes de signes disponibles) selon le comportement instrumenté de l'élève (Richard & al., 2005).

	Modèle géométrique sous-jacent	**Intervention de l'agent tuteur**
Baghera (Laboratoire Leibniz, 2003)	Géométrie formelle	L'élève écrit une solution et un démonstrateur (moteur déductif en logique du premier ordre) la vérifie. Le fichier retour contient une preuve annotée, chaque étape de raisonnement est suivie d'une annotation qui atteste si celle-ci est correcte ou non. Ce fichier contient également une série d'annotations globales qui indiquent si la preuve est correcte relativement aux hypothèses du problème.
Cabri-Euclide (Luengo, 2005)	Géométrie formelle	Pour chaque énoncé écrit par l'élève, le système vérifie d'abord si l'énoncé se réfère à un objet construit dans la figure ou si la propriété se vérifie par un oracle du Cabri-géomètre. Lorsque l'élève invoque une définition ou un théorème, le système vérifie ensuite la cohérence des déductions ou la constance de la démonstration, de façon automatique ou à la demande de l'élève.
Geometry Explanation Tutor (Aleven & al., 2002)	Géométrie formelle	Fondé sur les standards des tuteurs cognitifs, le système considère une sorte d'écart par rapport au bon cheminement prévu dans l'architecture curriculaire. Lorsque l'élève écrit la justification d'une inférence par exemple, le système lui retourne un message selon un ensemble d'explications «correctes» ou «partiellement correctes».
AgentGeom (Cobo & al., 2007) et **Turing** (Richard & al., 2005)	Géométrie cognitive	Conçu par rapport à la particularité d'une situation-problème et d'un contrat didactique, le système retourne un message selon la nature du processus en cours (résolution ou rédaction), la valeur heuristique ou discursive de l'action de l'élève et le niveau de contrôle suggéré (voir *Évaluation des compétences argumentatives*).

Tableau 4 : Systèmes tutoriels en géométrie au secondaire.

3. Connaissances et compétences

La compétence argumentative à l'interface du système est une virtualité dont l'écriture de propositions discursives par l'élève et le retour des messages de l'agent didactique constituent la réalisation de l'acte argumentatif. Mais avant d'examiner toute contribution de l'acte même (voir section *Évaluation des compétences argumentatives*), il faut s'assurer que l'élève et l'agent didactique se rejoignent dans cette virtualité. C'est-à-dire que la puissance des situations-problèmes, du processus de résolution, de son expression et de sa régulation, notamment par les messages de l'agent, porte véritablement sur la construction des connaissances de l'élève et le développement de ses compétences mathématiques. Or, la plupart des modèles de connaissances sont développés sans contrepartie «compétentielle», ou si on y trouve une intention d'intégration manifeste, le modèle résultant fait abstraction de la particularité du contenu et des méthodes mathématiques. Pourtant, connaissances et compétences se complètent. Les savoirs utiles à l'exercice d'une compétence sont ceux qui se construisent par un élève intellectuellement actif, et l'étendue de la compétence dépend directement de la pertinence et de l'ampleur des savoirs qui l'alimentent. Parce que si les connaissances sont des ressources essentielles qui permettent d'agir adéquatement dans une situation complexe, le savoir-agir propre à une compétence suppose une appropriation et une utilisation intentionnelles des notions et des habiletés en cause. La séquence de développement d'une compétence ne chemine pas du simple au complexe ou des parties vers le tout, comme dans un éventuel tuteur «compétentiel». Elle se construit plutôt en fonction des dimensions multiples d'une situation et du contexte d'intervention. Le point de départ pour l'utilisation et le développement d'une compétence se situe dans la globalité du défi à relever et le point d'arrivée, c'est-à-dire dans une solution adaptée au problème de départ. Ainsi, de façon analogique, nous considérons que l'apprentissage des mathématiques épouse un mouvement en spirale à l'intérieur duquel les compétences servent à l'acquisition de nouvelles connaissances qui, à leur tour, font évoluer les compétences. Afin de dégager les rapports évolutifs qui s'attachent aux compétences argumentatives, nous spécifions la nature de l'ensemble des rapports qui relient les éléments d'un modèle de connaissances aux composantes de trois modèles de compétences mathématiques. Mais auparavant, nous exposons ces modèles dans leurs grandes lignes.

Dans un modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques et l'évaluation des conceptions de l'élève, dit modèle cK¢, Balacheff et Margolinas (2005) montrent que la conception apparaît comme un outil pour la construction d'un concept permettant la modélisation de l'élève comme agent apprenant, en relation avec un agent didactique et un lieu d'inscription de l'interaction et des productions. Ils considèrent que «la conception est l'état d'équilibre d'un système, et plus précisément l'état d'équilibre d'une boucle action/rétroaction du système sujet-milieu sous des contraintes proscriptives de viabilité»[2] (p. 6). Le terme de proscriptif réfère à la nécessité des conditions qui assurent l'équilibre du système, qui ne sont pas prescriptives parce qu'elles ne requièrent pas un processus particulier pour revenir à l'équilibre recherché. Ces contraintes proscriptives ne renvoient pas à la façon dont l'équilibre est atteint, mais aux critères de cet équilibre, comme ceux qui se rapportent au potentiel de développement d'une compétence argumentative. Soulignant le caractère local d'une conception, ces auteurs caractérisent la conception par un ensemble définitoire de problèmes (P) pour lesquels elle apporte des outils de résolution (R) en s'appuyant sur des systèmes de représentation (L) et une structure de contrôle (Σ) qui permet jugements et décisions[3]. Ainsi, lorsque s'exerce la conception C durant la résolution d'un problème P suivant un raisonnement discursif ou graphique, R est l'expression du raisonnement, rendu avec le type de langage L et issu du type de rationalité Σ. Faut-il noter que le modèle cK¢ est compatible avec les trois couches d'interactions que nous avons évoquées au paragraphe *Sur le discours* (section *Construction d'EIAH et didactique des mathématiques*) et que ses éléments permettent de situer le raisonnement qui s'exprime dans l'action (au sens de Richard, 2006).

---

[2] Dans ce modèle, le sujet et le milieu se définissent mutuellement et dialectiquement par la nature et la dynamique du jeu de leurs actions et rétroactions. C'est-à-dire que le système cognitif n'est pas le sujet psychologique, mais le système sujet-milieu pris comme un tout. Puisqu'avec Turing nous introduisons un agent tuteur au système sujet-milieu, nous devons revenir sur cette question (voir section *Évaluation des compétences argumentatives*).

[3] La conception C se formalise alors par l'égalité C = (P, R, L, Σ) de façon à définir l'objet d'une conception par une classe d'équivalence de conceptions relativement à l'une d'entre elles. Lorsqu'une conception (Cμ) rend compte du texte du savoir mathématique, elle définit un μ-objet (objet mathématique), c'est-à-dire la classe d'équivalence de conception Cμ. Une connaissance est donc un ensemble de conceptions ayant le même μ-objet.

MÉLS Programme de formation en mathématiques au secondaire	**TUNING** Programme de formation en mathématiques de premier cycle universitaire	**PISA** Évaluation de connaissances et compétences en mathématiques au secondaire
– Résoudre une situation-problème (P) ; – déployer un raisonnement mathématique (R, Σ) ; – communiquer à l'aide du langage mathématique (L).	– Concevoir des démonstrations (R, Σ) ; – modéliser mathématiquement une situation (L, T*) ; – résoudre des problèmes avec des techniques mathématiques (P).	– Pensée et raisonnement mathématique (R, Σ) ; – argumentation mathématique (R, Σ) ; – communication mathématique (L) ; – modélisation (L, T*) ; – création et résolution de problèmes (P, T*) ; – représentation (L) ; – utilisation d'un langage et d'opérations de nature symbolique, formelle et technique (R, Σ) ; – utilisation d'instruments et d'outils (R, Σ).

Tableau 5 : Relations entre les éléments du modèle cK¢ et les composantes de trois modèles de compétences mathématiques. Comme les éléments du modèle cK¢ sont indissociables pour une conception, ces relations témoignent du fait que les compétences mathématiques se définissent non pas de façon disjointe, mais selon des caractéristiques dominantes.

Les modèles de compétences sont nombreux et variés. Ils s'organisent habituellement en compétences générales ou transversales, de même qu'en compétences disciplinaires et transdisciplinaires. Ils varient souvent en fonction du niveau scolaire visé (élémentaire versus supérieur) et de son domaine d'application (définition d'un programme de formation, évaluation d'acquis entre réalités socioculturelles). Toutefois, par leur degré élevé de généralité, les compétences transversales se comportent presque de façon holiste pour rendre compte du caractère local des conceptions. On peut certes imaginer une décomposition des compétences transversales en éléments constitutifs, mais encore, les conceptions résultantes s'éloigneraient de la spécificité disciplinaire et y perdraient en pouvoir d'explication. En revanche, l'idée de compétences transdisciplinaires mérite d'être considérée, ne serait-ce parce que le développement d'une culture mathématique passe par la résolution (au sens large) de situations-problèmes issues de contextes scientifiques (Kahane, 2002). C'est pourquoi nous avons retenu les modèles de compétences mathématiques du ministère de l'Éduction des loisirs et du sport du Québec (Méls, 2003, 2006), du projet européen Tuning Educational Structures (Tuning, 2003) et du Programme international OCDE/PISA (Pisa, 2003), dont la définition des compétences s'inspire des travaux de Niss (1999, 2002) et de ses collègues danois. Au tableau 5, nous dressons la liste des compétences de chaque modèle, et, pour chacune d'elles, nous associons les éléments correspondants qui proviennent du modèle de Balacheff et Margolinas (2005). Par T*, nous intégrons les processus «extra-mathématiques» de transfert et de décontextualisation qui ne sont pas considérés formellement dans le modèle cK¢. Ces processus nous semblent nécessaires pour adjoindre l'exercice de modélisation au modèle de connaissances, sans restreindre celui-ci à un exercice de traduction entre systèmes de représentation mathématique (voir les trois compétences concernées au tableau 5). Le transfert et la décontextualisation appartiennent au processus plus large de mathématisation (au sens de Pisa, 2003) et relèvent de structures de contrôle qui vont au delà du domaine proprement mathématique, tant en termes de contenu (situations de la vie réelle impliquant un transfert des acquis scolaires) qu'en termes de contexte (environnements complexes et dynamiques de la vie réelle ainsi qu'aux tâches de raisonnement)[4].

L'argumentation mathématique apparaît expressément dans Pisa (2003) (voir tableau 5) ; dans Méls (2003, 2006), elle s'inscrit dans la compétence «déployer un raisonnement mathématique», mais dans Tuning (2003), on n'en retrouve aucune mention explicite. Pourtant, les auteurs du projet parlent de «concevoir des démonstrations» de façon progressive à travers des situations diverses qui s'étalent sur plusieurs cours, intention qu'ils opposent à «faire des démonstrations» avec l'idée d'acquérir l'habileté démonstrative de façon immédiate dans une sorte de cours éponyme (p. 188). Puisque les rapports de l'argumentation dans la conception de démonstration sont bien connus dans la littérature classique (v.g. Hanna, 1991 ; Boero, 1999), il en ressort que c'est surtout au niveau des opérateurs et des contrôles que l'élève et l'agent didactique sont susceptibles de se rejoindre. Or, la distinction entre opérateurs et contrôles n'est pas absolue, mais relative à une conception. En géométrie, l'opérateur peut être la réalisation explicite et fonctionnelle d'un contrôle, ce qui est le cas lorsqu'on justifie une inférence avec :

- la sélection d'une propriété dans un menu déroulant (action) ;
- l'écriture du nom d'une définition ou l'énumération de celle-ci (discursif) ;
- le déplacement d'éléments d'un dessin dynamique dans une zone signifiante pour représenter la propriété qui demeure invariante dans le mouvement (graphique).

[4] À la limite, parce que les contrôles restent le plus souvent implicites et qu'ils rassemblent, entre autres, les métaconnaissances (Balacheff & Margolinas, 2005), nous aurions pu inclure par extension ces processus dans Σ. Par contre, les exemples donnés par ces auteurs sont tous déjà modélisés mathématiquement et il semble qu'il s'agit là d'une intention du modèle cK¢.

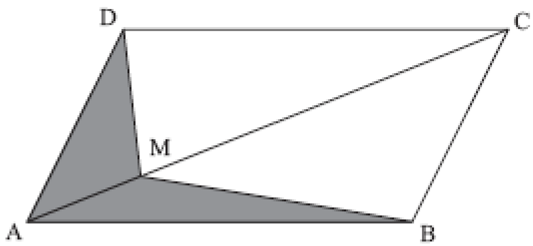
Faut-il signaler qu'ici, l'opérateur ne se considère pas dans une relation de représentation sémiotique, c'est-à-dire pour ce qui regarde le système L, mais selon des rapports logiques ou dialogiques à d'autres propositions. Que l'opérateur soit formulé graphiquement, discursivement ou dans l'action, ce qui compte est son choix et le rôle qu'il joue dans une inférence, un raisonnement ou une argumentation. Ainsi, en résolution de problèmes, lorsque le système tutoriel a déjà posé les caractéristiques heuristiques et discursives du milieu – dans Turing, les contrôles a priori renvoient au graphe inférentiel et aux messages disponibles –, l'agent didactique stimule le raisonnement de l'élève et agit sur ses compétences argumentatives lorsqu'il intervient par rapport aux opérateurs et aux structures de contrôle afférents au système.

Malgré l'importance des problèmes envers les conceptions, l'amélioration de compétences argumentatives ne réside donc pas tant dans le choix d'une classe de problèmes P, mais dans la qualité d'un processus argumentatif qui se fonde sur les conditions particulières de chaque problème. Il se peut même que la qualité d'une argumentation interfère avec l'enjeu de l'apprentissage. Par exemple, si l'agent didactique retournait un oracle, ce message aiderait probablement l'élève dans son raisonnement ou, à tout le moins, encouragerait le processus argumentatif. Mais il risquerait en même temps de modifier la conception cible de la situation. Par contre, si l'élève refusait, évitait ou ne résolvait pas le problème, l'agent didactique serait dans l'obligation d'aider l'élève dans son cheminement, à l'image de l'enseignant, ce qui légitime l'emploi occasionnel d'oracles. Pour reprendre l'idée de contraintes proscriptives de viabilité, il faut comprendre que la notion de qualité ne vise pas l'enrichissement de la méthode argumentative, mais que les messages de l'agent didactique permettent au système tutoriel de s'assurer que l'agent apprenant travaille dans la même situation-problème que celle qui est proposée et qu'il en respecte la logique interne – deux conditions indispensables pour le développement de l'autonomie chez l'élève (v.g. Cobo & al., 2007).

4. Évaluation des compétences argumentatives

Nos systèmes tutoriels s'intègrent au système didactique qui comprend l'enseignant. Dans cette perspective, chaque système tutoriel est un milieu adidactique sur lequel l'enseignant peut agir en modifiant les caractéristiques heuristiques et discursives du milieu. Toutefois, la présence d'un agent tuteur au sein du système sujet-milieu engendre un sous-système didactique dans lequel l'agent tuteur se substitue momentanément à l'enseignant habituel. En simulant l'argumentation à l'aide de messages, le milieu ne se réduit donc pas à un lieu de production et d'interactions puisque le processus argumentatif même agit sur la conception du sujet, notamment au niveau des opérateurs et du contrôle. L'évaluation de compétences argumentatives doit alors se réaliser sur deux plans, celui de la relation didactique réelle et celui de la relation didactique simulée. Dans le premier cas, l'évaluation résulterait de la comparaison d'environnements (v.g. EIAH versus papier-crayon) ou de milieux (v.g. AgentGeom versus Turing), comme si c'était la performance de l'apprenant que le système permet d'évaluer qui était responsable de l'évolution des compétences. Mais pour réaliser ce type de comparaison, s'il faut déjà mobiliser des moyens d'analyse qui débordent largement le cadre d'étude actuel, la comparaison demeure tributaire d'une évaluation à l'interface d'un même système tutoriel. C'est-à-dire une évaluation dans le second plan, qui considère la progression de l'acte argumentatif durant la résolution d'une séquence de situations-problèmes appropriées au système tutoriel. Bien que pour un élève donné, cette progression peut se relativiser par une sorte de rapprochement à un résultat optimal ou selon les résultats d'autres élèves, les critères d'évolution restent internes au système sujet-milieu.

Si M est un point quelconque de la diagonale [AC] du parallélogramme ci-contre, quelle relation y a-t-il entre les aires des triangles ombrés ?



Situation 6 : Énoncé du problème du parallélogramme.

4.1. Résolution du problème du parallélogramme

Afin d'illustrer l'évaluation dans le second plan et, notamment, les critères d'évolution de l'acte argumentatif, nous proposons un exemple de résolution du *problème du parallélogramme* (situation 6) qui provient d'une phase de prototypage avec Turing. Le graphe inférentiel a été construit à partir de l'espace-solution du problème[5] (Cobo & Fortuny, 2000) et l'ensemble des messages a été retenu au terme de la programmation des messages par défaut. Pour la résolution du problème, nous avons autorisé, dans la zone graphique, trois primitives de construction :

- créer une parallèle passant par un point (C_1) ;
- créer une perpendiculaire passant par un point (C_2) ;
- tracer un segment (C_3) ;

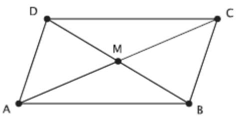
[5] De l'anglais «basic space of the problem».

et, dans la zone discursive, les règles d'inférence suivantes[6] :

- les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu (P1) ;
- propriété de Thalès (P2) ;
- deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles (P3) ;
- deux triangles de même base et de même hauteur ont la même aire (P4) ;
- si on enlève la même aire dans deux figures de même aire, alors il reste deux figures de même aire (P5) ;
- la médiane d'un triangle partage celui-ci en deux triangles de même aire (P6) ;
- définition de la médiane d'un triangle (D1).

Discours de l'élève (par expansion discursivo-graphique)		**Médiation du milieu social**
Actions graphiques	***Actions discursives***	***Messages de l'agent didactique***
	$\mathbf{A}_1$: «Aire[A, D, M] > Aire[A, M, B]».	
		$\mathbf{M}_{1\|0}$: «Es-tu bien sûr que c'est ce que tu penses ?»
	$\mathbf{A}_2$: «Aire[A, D, M] < Aire[A, M, B]».	
		$\mathbf{M}_{2\|0}$: «Est-ce que tu réfléchis sur le dessin ou tu ne fais que le regarder ?»
	$\mathbf{A}_3$: «Aire[A, D, M] = Aire[A, M, B]».	
		$\mathbf{M}_{3\|0}$: «Je ne vois pas pourquoi.» $\mathbf{M}_{3\|1}$: «Tu écris un énoncé, mais d'où vient-il ?» $\mathbf{M}_{3\|2}$: «Tu dis que Aire[A, D, M] = Aire[A, M, B], mais je ne vois pas comment tu arrives à ce résultat.» $\mathbf{M}_{3\|3}$: «Peut-être devrais-tu consulter l'information suivante : • La résolution d'un problème • Le fonctionnement d'une déduction • Le calcul d'aire»
• Accès au lien Le fonctionnement d'une déduction. • Accès au lien La résolution d'un problème.		
		$\mathbf{M}_{3\|4}$: «Si Aire[A, D, M] = Aire[A, M, B], c'est peut-être en partie parce que

[6] Aucune inférence autorisée se rapporte aux propriétés de la symétrie centrale car cette notion n'avait pas encore été à l'étude au moment de notre expérience.

		Segment[AM] est une base commune.» **M**$_{3\|5}$: «Si tu n'es pas en train de réfléchir, il faut que tu demandes de l'aide à un compagnon.»
• Déplacement du point M sur [AC] ; M est laissé dans le voisinage du milieu de ce segment.  		
	A$_4$: Sélection de la propriété : «Si on enlève la même aire dans deux figures de même aire, alors il reste deux figures de même aire».	
		M$_{4\|0}$: «Je veux bien, mais pourquoi ?» **M**$_{4\|1}$: «Tu déduis la conclusion à partir d'une propriété, mais sur quel énoncé te bases-tu ?» **M**$_{4\|2}$: «Tu dis que Aire[A, D, M] = Aire[A, M, B], selon la propriété qui dit que si on enlève la même aire dans deux figures de même aire, alors il reste deux figures de même aire, mais je ne vois pas sur quoi tu fondes ce résultat.»
• Déplacement du point M sur [AC] ; M est laissé près de C.		
		M$_{4\|3}$: «Peut-être devrais-tu consulter l'information suivante : • La construction de figures intermédiaires • Le fonctionnement d'une déduction • L'égalité d'aires»
• Accès au lien La construction de figures intermédiaires. **A**$_5$: Construction de [DB]. **A**$_6$: Définition de O, milieu de [DB].		
	A$_7$: «O est le milieu de Segment[DB]».	
		M$_{7\|0}$: «Je ne vois pas pourquoi.» **M**$_{7\|1}$: «Tu semble déduire un énoncé, mais à partir de quelle hypothèse et selon quelle propriété ?»
	A$_8$: Sélection de la propriété : «Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu». **A**$_9$: «O est le milieu de Segment[DB]».	
		M$_{9\|0}$: «Je le sais, tu l'as déjà dit, mais où veux-tu en venir au juste ?»
	A$_{10}$: «Dans Polygone [A, B, D],	

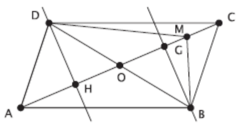
	Segment[AO] est la médiane issue de A».	
		M$_{10\|0}$: «Pourquoi ?»
	A$_{11}$: Sélection de la définition de la médiane. **A**$_{12}$: Sélection de la propriété : «La médiane d'un triangle partage celui-ci en deux triangles de même aire». **A**$_{13}$: «Aire[A, D, O] = Aire[A, B, O]».	
A$_{14}$: Construction de [DH] perpendiculairement à [AC], H $\in$ [AC]. **A**$_{15}$: Construction de [BG] perpendiculairement à [AC], G $\in$ [AC].  		
	A$_{16}$: «Segment[AO] est une base commune». **A**$_{17}$: Sélection de la propriété : «Deux triangles de même base et de même hauteur ont la même aire». **A**$_{18}$: «Segment[DH] = Segment[BG]». **A**$_{19}$: «Segment[AM] est une base commune.» **A**$_{20}$: Sélection de la propriété : «Deux triangles de même base et de même hauteur ont la même aire».	
		M$_{20\|0}$: «…et donc Aire[A, D, M] = Aire[A, M, B].» **M**$_{20\|1}$: «C'est très bien, mais il y a encore une déduction que je ne comprends pas.» **M**$_{20\|2}$: «Tu dis que O est le milieu de Segment[DB], selon la propriété qui dit que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, mais je ne vois pas comment tu fondes ce résultat.»
	A$_{21}$: «Polygone[ABCD] est un parallélogramme».	
		M$_{21\|0}$: «Bravo! À mon avis, on tient une solution.»

Tableau 7 : Acte argumentatif dans la résolution du problème du parallélogramme avec Turing.

Le tableau 7 résume l'argumentation qui découle du processus de résolution d'un élève de 14 ans. Son discours, qui s'exprime par expansion discursivo-graphique, se constitue par la suite des actions signifiantes $\mathbf{A}_i$, pour $1 \leq i \leq 21$, tandis que la médiation du milieu social s'offre avec les messages $\mathbf{M}_{m|n}$ de l'agent didactique, pour $m \in \{1, 2, \ldots, 21\}$ et $0 \leq n \leq 5$. De façon générale, on peut dire que l'agent didactique est réactif[7]. Mis à part les formules usuelles de salutation, l'agent didactique attend une action signifiante de l'élève avant d'envoyer un message. Il compare l'action du moment aux inférences du graphe et aux actions déjà enregistrées, et, s'il y a lieu, il retourne un message, selon la valeur heuristique de l'action et le niveau de contrôle souhaité. Ainsi, lorsque l'action correspond à une inférence du graphe, la suggestion est au niveau :

- 0 (ou «situationnel») lorsque le message porte sur les constituants de la relation didactique, dont le milieu, le contrat ou le rôle des agents. Les messages qui visent à entretenir la conversation, sans apport d'information, appartiennent à ce niveau ;
- 1 (ou «essentiellement sémiotique») lorsqu'il contient une suggestion métamathématique de type descriptif, que ce soit par rapport à P, R, L ou Σ. En particulier, les suggestions qui renvoient à R ou Σ se réfèrent essentiellement au statut des actions dans une inférence ou dans l'articulation d'un raisonnement complet ;
- 2 (ou «essentiellement cognitif») lorsqu'il porte sur le contenu mathématique de la situation-problème (concepts et processus), dont le contenu relatif à la conception-cible, c'est-à-dire l'enjeu de l'apprentissage ;
- 3 (ou «ressources») lorsqu'il oriente l'élève vers une source d'information connexe. Il s'agit principalement de liens hypertextes, susceptibles d'être alloués à plusieurs élèves en même temps, et qui débouchent vers des fiches explicatives avec contenu multimédia (textuel, visuel ou sonore) ;
- 4 (ou «relance») lorsqu'il contient des éléments ou une piste de solution qui visent à remettre en marche le processus de résolution. Ces suggestions sont de nature et de fonction variées, comme proposer verbalement une relation entre énoncés, un pas de construction figurale ou le déplacement d'un point mobile sur un objet-trajectoire géométrique, donner un dessin en définissant de nouveaux objets ou en ramenant l'intérêt sur un cas de figure particulier, ou répondre simplement avec un oracle ;

[7] Ici l'adjectif «réactif» est pris dans son sens courant. Il se distingue du sens informatique employé à la section *Le système Turing*.

– 5 (ou «appel à l'aide externe») pour ouvrir le système sujet-milieu à la relation didactique réelle de façon à limiter toute intervention providentielle de l'agent didactique, tel un deus ex machina.

Autrement dit, l'agent didactique ne cherche pas à diriger séquentiellement l'élève dans une stratégie. D'une part, il s'assure progressivement de la cohérence des inférences et de la stabilité du cheminement de l'élève dans au moins une stratégie disponible. Du point de vue de l'évaluation, cela permet de considérer distinctement raisonnement et discours, le raisonnement de l'élève devenant un arrangement structuré de son discours :

$$\mathbf{A}_{21} \xrightarrow{\mathbf{A}_8} \mathbf{A}_7 \xrightarrow{\mathbf{A}_{11}} \mathbf{A}_{10} \xrightarrow{\mathbf{A}_{12}} \left.\begin{matrix} \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{16} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\mathbf{A}_{17}} \left.\begin{matrix} \mathbf{A}_{18} \\ \mathbf{A}_{19} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\mathbf{A}_{20}} \mathbf{A}_3$$

En outre, le raisonnement d'un élève peut servir de base pour la rédaction d'une solution a posteriori et, ainsi, constituer un moyen de contrôle didactique sur l'à-propos de la médiation par l'agent didactique, ne serait-ce qu'en termes d'opérateurs et de contrôles. D'autre part, l'agent didactique communique avec l'élève à partir des actions de celui-ci, ce qui constitue une part d'adaptation du milieu au sujet – comme avec un interlocuteur humain qui collabore au processus de résolution-découverte. Si l'adaptation du milieu au sujet relève de la relation didactique simulée, elle se traduit en contraintes proscriptives de viabilité dans la relation didactique réelle.

4.2. Précisions sur l'acte argumentatif

En offrant au maître ou au chercheur la possibilité de modifier le graphe inférentiel et les messages de l'agent didactique, l'illustration du tableau 7 se fonde en fait sur un ensemble de contraintes particulier. Pour éviter l'effet trop relatif de l'exemple, nous commentons l'acte argumentatif dans une perspective qui s'ouvre également sur la relation didactique réelle. Néanmoins, les critères d'évaluation de l'acte même restent sur le plan de la relation didactique simulée.

L'élève commence avec une action signifiante difficile à interpréter ($\mathbf{A}_1$: «Aire[A, D, M] > Aire[A, M, B]»). Même si on peut supposer qu'il s'agit d'une première conjecture, on ne sait pas si elle est issue d'un raisonnement préalable, d'une perception visuelle ou d'un essai trichotomique dans la comparaison d'aires. L'agent didactique, lui, la considère comme une action «hors-sujet», c'est-à-dire une action signifiante qui n'apparaît pas dans le graphe inférentiel. Il retourne le message $\mathbf{M}_{1|0}$ («Es-tu bien sûr que c'est ce que tu penses ?»), soit un message de niveau 0 qui suit l'action $\mathbf{A}_1$ et qui appartient à la catégorie «hors-sujet». Devant le doute amené par $\mathbf{M}_{1|0}$, l'élève revient avec une seconde conjecture ($\mathbf{A}_2$: «Aire[A, D, M] < Aire[A, M, B]»). On ne connaît encore rien sur ce qui fonde cette dernière, mais le système retourne un second message «hors-sujet» ($\mathbf{M}_{2|0}$: «Est-ce que tu réfléchis sur le dessin ou tu ne fais que le regarder ?»). Il s'agit d'un message choisi dans un ensemble de messages équivalents («hors-sujet» de niveau 0), ensemble dont la constitution vise à maintenir, d'un message à l'autre, une même valeur logique, sociale ou épistémique (au sens de Duval, 1995, p. 112). Par contre, du point de vue de l'argumentation, le seul fait de voir apparaître un second message, même de facture équivalente, est susceptible de modifier momentanément la valeur épistémique de la conjecture du problème. Ne serait-ce parce qu'indirectement, le message n'approuve pas l'action. L'acte argumentatif est bien enclenché ; l'agent didactique agit déjà sur R.

On aurait pu lancer, après les actions $\mathbf{A}_1$ ou $\mathbf{A}_2$, une dialectique du contre-exemple (Lakatos, 1984) en ajoutant au graphe inférentiel une sous-stratégie qui débouche sur une conclusion fausse. Comme avec une suite d'inférences qui partent d'hypothèses logiquement incompatibles entre-elles, mais dont la conclusion paraît vraisemblable à cause de l'apparence visuelle du dessin (voir paragraphe *Sur le discours* à la section *Construction d'EIAH et didactique des mathématiques*). Dans ce cas, les messages par défaut demeurent les mêmes, mais ceux qui se rapportent à une telle conclusion appartiennent à une catégorie différente de la conclusion du problème. Du point de vue heuristique, cette disposition soutient la révélation d'une contradiction pour amener l'élève à invalider une action ou un groupe d'actions dans la logique du problème. Du point de vue argumentatif, cela permet :

- d'éprouver la valeur épistémique attachée à la conjecture, notamment en retournant graduellement des messages de type «en es-tu sûr ?», «en es-tu bien sûr ?», «en es-tu tout à fait sûr ?» (messages de niveau 0) ;
- d'expérimenter la conséquence d'un contre-exemple sur la conjecture, sa preuve (la sous-stratégie), ou bien encore par rapport à la conception-cible (C) ou ses fondements rationnels (Σ).

L'effet d'un message peut être fort différent selon le type de relation que l'élève entretient avec l'agent et la réalité socioculturelle dans lequel il se trouve (voir paragraphe *Sur le débat social simulé* à la section *Construction d'EIAH et didactique des mathématiques*). Avec «en es-tu sûr ?» par exemple, si l'élève perçoit une relation d'autorité, cela risque de produire une remise en cause de son affirmation, alors que s'il a l'impression d'agir de connivence avec l'agent, c'est plutôt l'explication qui devrait s'ensuivre. En fait, les sous-stratégies sont idéales pour tester la confiance en soi (au sens de la dissonance cognitive de Festinger, 1957). En cherchant sciemment à déséquilibrer l'élève par des messages adaptés, l'agent didactique assumerait conjointement plusieurs rôles (tuteur, compagnon ou perturbateur, pris ici au sens de Aïmeur & al., 2000), tout en se définissant de façon distincte par rapport à chacun d'eux. Qu'on intègre ou non au système sujet-milieu la dialectique de Lakatos ou la dissonance de Festinger, l'agent didactique est forcément un être de nature autonome par rapport à ce que devrait être un modèle humain traditionnel.

L'élève poursuit en écrivant la dernière conjecture possible ($\mathbf{A}_3$: «Aire[A, D, M] = Aire[A, M, B]») puis, il attend. Peut-être souhaite-il recevoir un peu d'aide, un mot d'encouragement ou un message d'approbation. Toujours est-il que cette attitude laisse présumer une incapacité, pour le moment, à défendre la conjecture du problème. C'est pourquoi l'agent didactique envoie graduellement les messages $\mathbf{M}_{3|n}$, pour $0 \leq n \leq 3$. À chaque fois, il attend une action signifiante de l'élève. Si elle ne se produit pas au bout d'un certain temps, le marqueur de niveau s'incrémente d'une unité ($n + 1 \rightarrow n$) et l'agent didactique retourne une nouvelle suggestion. Les trois premiers messages de la suite ($\mathbf{M}_{3|0}$, $\mathbf{M}_{3|1}$ et $\mathbf{M}_{3|2}$) ne semblent pas produire de réaction. Il faut attendre au quatrième message ($\mathbf{M}_{3|3}$) pour que l'élève consulte successivement deux liens hypertextes. Bien qu'en l'occurrence, ces actions ne sont ni graphiques, ni signifiantes, nous les indiquons à gauche, dans la colonne du discours de l'élève (tableau 7), parce qu'elles demeurent pertinentes pour comprendre l'effet des messages. L'élève ne produit toujours pas d'action signifiante. L'agent didactique retourne d'abord un message de relance ($\mathbf{M}_{3|4}$: «Si Aire[A, D, M] = Aire[A, M, B], c'est peut-être en partie parce que Segment[AM] est une base commune.») et, ensuite, un message d'appel à l'aide externe ($\mathbf{M}_{3|5}$: «Si tu n'es pas en train de réfléchir, il faut que tu demandes de l'aide à un compagnon.»). Sans demander l'assistance de quiconque, l'élève décide de déplacer le point M sur [AC] et le laisse dans le voisinage du milieu de celui-ci. Il sélectionne enfin une propriété ($\mathbf{A}_4$: Sélection de la propriété P_5) puis se met à attendre de nouveau. Le choix soudain de cette propriété peut paraître étonnant. Mais si on interprète le déplacement du point M comme la considération d'un cas de figure et que l'on recoupe celui-ci avec l'information contenue dans les liens hypertextes consultés[8], il est raisonnable de croire que l'élève cherche maintenant à justifier $\mathbf{A}_3$, ne serait-ce qu'avec un argument massue. L'acte argumentatif se continue ; l'agent didactique agit aussi sur Σ.

Contrairement aux actions «hors-sujet», le déplacement du point M n'est pas une action signifiante parce que l'agent didactique ne peut pas l'interpréter. Il aurait été possible de prévoir une zone de sensibilité pour reconnaître un objet géométrique qui se déplace vers un lieu déterminé (le point M au voisinage du milieu de [AC]). Autrement dit, permettre à l'élève de produire dynamiquement une action graphique signifiante uniquement par expansion graphique, et non pas seulement

[8] Pour éviter d'alourdir l'article, nous ne reproduisons pas les fiches d'information. Elles s'inspirent toutefois du travail réalisé par notre équipe lors du projet Intermates (voir http://www.edu365.com/aulanet/intermates/index.htm).

en construisant de nouveaux objets géométriques. Les actions graphiques signifiantes peuvent aussi s'étendre au fait de :

- suivre un parcours déterminé qui n'est pas un objet-trajectoire géométrique apparent, mais auquel s'attache une action signifiante dans la logique du problème ;
- laisser une sous-figure dans un état ou une position particulière, notamment à la suite d'une transformation géométrique qui n'est pas soutenue par une primitive de construction – ce qui exclut d'emblée les isométries ou les homothéties typiques des applets de géométrie dynamique.

On peut même songer à détecter certains parcours invariants empruntés par le curseur via la souris, ou bien encore suivre les yeux ou l'expression de l'élève lorsqu'il réfléchit sur le dessin (v.g. IBM-ARS, 2006a, b). Il s'agit certes de réalisations ou de projets technologiques qui ne sont pas implantés dans Turing mais, quoi qu'il en soit, cela montre jusqu'à quel point la notion d'expansion graphique est utile à la reconnaissance, par le système, d'actions graphiques signifiantes. En les incluant à une sous-stratégie, ce genre d'action facilite le traitement de cas de figure dont la résolution repose sur la particularité du cas avec, éventuellement, l'intégration d'une dialectique du contre-exemple au processus.

Après $\mathbf{A}_4$, l'agent didactique envoie les messages $\mathbf{M}_{4|0}$, $\mathbf{M}_{4|1}$ et $\mathbf{M}_{4|2}$. À la suite de la dernière suggestion, qui rapproche $\mathbf{A}_3$ et $\mathbf{A}_4$[9], l'élève déplace de nouveau le point M pour le laisser proche du point C. L'agent continue avec un message de niveau 3, ce qui entraîne la consultation du lien sur la construction de figures intermédiaires. Manifestement, le message $\mathbf{M}_{4|3}$ est fructueux. L'élève construit le segment [DB] dans la zone graphique ($\mathbf{A}_5$), il y définit le point O en son milieu ($\mathbf{A}_6$), puis il convertit cette action graphique en action discursive ($\mathbf{A}_7$) – non pas à l'aide du bouton «figure ⇒ texte», mais en la réécrivant dans la zone discursive. On peut se demander si la suite d'actions $\mathbf{A}_5$, $\mathbf{A}_6$ et $\mathbf{A}_7$ n'est qu'un essai, comme ce qui semble être le cas avec les actions précédentes, ou si elles obéissent maintenant à un plan. En les recoupant avec les actions subséquentes, on comprend qu'une intention se dessine à partir des aires des triangles de la conjecture ($\mathbf{A}_3$). C'est-à-dire qu'en plaçant le point M près de C, l'élève rend plus facile l'appréhension visuelle d'une base et d'une hauteur dans chacun des triangles ADM et AMB, ce qui est confirmé un peu plus tard par la suite d'actions $\mathbf{A}_i$, pour $14 \leq i \leq 20$. Et qu'en venant de définir le point O, il peut déjà considérer la médiane du triangle ABD ($\mathbf{A}_{10}$).

[9] Ce rapprochement n'est pas dû à la proximité des actions dans l'acte argumentatif, mais à la présence de deux inférences du graphe qui les accepte.

En termes de raisonnement (voir paragraphe *Résolution du problème du parallélogramme*), l'action $\mathbf{A}_7$ est une rupture. L'élève passe de la conclusion ($\mathbf{A}_3$) à une proposition qui s'attache aux hypothèses :

$$\mathbf{A}_{21} \xrightarrow{\mathbf{A}_8} \mathbf{A}_7$$

Toutefois, il suit maintenant le fil de ses idées. Avec la production de dix actions signifiantes sans médiation ($\mathbf{A}_{11}$ à $\mathbf{A}_{20}$), l'élève commande essentiellement le reste de l'acte argumentatif. Les messages $\mathbf{M}_{7|0}$ et $\mathbf{M}_{7|1}$ visaient la cohérence de l'inférence :

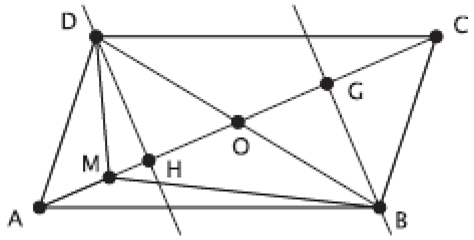
$$\text{ABCD est un parallélogramme} \xrightarrow{P_1} \text{O est le milieu de [DB]}$$

mais l'élève ne répond tout de suite qu'à l'exigence de la justification ($\mathbf{A}_8$). Peut-être qu'en réécrivant «O est le milieu de Segment[DB]» ($\mathbf{A}_9$), il voulait signifier qu'il s'agit là de l'hypothèse cherchée. Après tout, le point O avait déjà été défini graphiquement ($\mathbf{A}_6$). Mais pour l'agent didactique, $\mathbf{A}_9$ est une action discursive redondante qu'il traite comme telle ($\mathbf{M}_{9|0}$: «Je le sais, tu l'as déjà dit, mais où veux-tu en venir au juste ?»). D'ailleurs, il faut attendre tout à la fin pour que l'agent didactique semble «reprendre le contrôle» de l'argumentation (messages $\mathbf{M}_{20|0}$, $\mathbf{M}_{20|1}$ et $\mathbf{M}_{20|2}$). Pour assurer la stabilité du cheminement de l'élève, l'agent didactique revient sur les inférences incomplètes. Ici, comme il ne restait qu'une inférence à satisfaire dans la stratégie, l'élève a su compléter avec l'hypothèse manquante ($\mathbf{A}_{21}$: «Polygone[ABCD] est un parallélogramme»).

On aurait pu souhaiter qu'à la suite des actions $\mathbf{A}_3$ et $\mathbf{A}_4$, l'agent didactique oriente déjà l'élève vers une stratégie donnée en «forçant» ni plus ni moins une des relations d'inférence du graphe, comme avec celle-ci :

$$\left.\begin{array}{r}\text{Aire[A, D, C] = Aire[A, B, C]}\\ \text{Aire[D, M, C] = Aire[B, M, C]}\end{array}\right\} \xrightarrow{P_5} \text{Aire[A, D, M] = Aire[A, M, B]}$$

Si l'élève n'avait pas produit l'action signifiante $\mathbf{A}_5$, le message de relance $\mathbf{M}_{4|4}$ prévoyait, entre autres, un rapprochement des actions $\mathbf{A}_3$ et $\mathbf{A}_4$ avec la proposition «Aire[A, D, M] = Aire[A, M, B]». Cependant, une des difficultés du problème est due à la représentation (L). Déjà que l'appréhension visuelle d'éléments de figure appropriés n'est pas évidente en soi, encore faut-il avoir construit ou défini les points remarquables nécessaires à leur expression (milieu O, pieds H et G des hauteurs issues de D et B). En guise de message $\mathbf{M}_{4|4}$, l'agent didactique aurait pu retourner un dessin complet comme celui-ci :



qui ne situe pas les hauteurs (DH) et (BG) à l'intérieur des triangles ADM et AMB respectivement (cf. figure de l'élève au tableau 7, en dessous de $\mathbf{A}_{15}$). Or, on sait que comparativement au discours, les représentations graphiques cachent le raisonnement que ses propositions sont censées articuler (Richard, 2004a). L'agent didactique rendrait alors l'expression possible – il s'exprimerait lui-même par expansion discursivo-graphique –, sans donner inévitablement d'indication spécifique sur le raisonnement véhiculé par le dessin.

Le fonctionnement de l'agent didactique autorise le chevauchement de stratégies et il laisse à l'élève l'initiative dans l'acte argumentatif. Au sein du système sujet-milieu, on peut imaginer un décompte de «points d'autonomie» de l'élève à partir du nombre et des niveaux de messages nécessaires à la résolution du problème. Ainsi, le recours fréquent aux suggestions de niveaux élevés («relance» et «appel à l'aide externe») se traduirait par un degré d'autonomie faible. À l'inverse, si les niveaux restaient principalement bas, cela indiquerait non seulement que l'autonomie de l'élève est élevée, mais que le problème de dévolution s'attache davantage à des effets de contrat didactique qu'à des obstacles proprement mathématiques. On peut aussi songer à une mesure de l'efficacité heuristique de l'élève en relevant le nombre de stratégies explorées à la fin d'un processus de résolution. L'élève «heuristiquement efficace» serait celui dont la tendance consiste à résoudre les situations-problèmes en explorant le moins de stratégies possibles. Ou encore, penser à évaluer la continuité du discours de l'élève en comparant le nombre d'actions signifiantes de son cheminement avec celui du raisonnement correspondant, même si celui-ci se rapporte partiellement à plusieurs stratégies. La continuité dans les arguments fournis par l'élève constitue un critère privilégié pour rendre compte de l'amélioration de compétences argumentatives. Ce n'est donc pas tant la difficulté d'une situation-problème pour un groupe d'élèves qui représente un obstacle au développement de ces compétences, mais une disposition au manque d'enchaînement cohérent dans une suite d'idées.

5. Conclusion

En choisissant une approche structurale en géométrie cognitive, nous avons pu donner une forme à un système tutoriel qui permet à la fois le raisonnement, la construction de figures, l'argumentation et autres combinaisons de moyens interactifs pour la résolution de situations-problèmes complexes. Si la modélisation de connaissances et de compétences est nécessaire à la conception contrôlée du système, elle l'est tout autant pour valider un apprentissage ou pour assurer la formation d'une compétence. Nos systèmes tutoriels n'ambitionnent pas l'automatisation de la relation didactique. D'autant plus que, dans son ensemble, l'amélioration de compétences argumentatives exige déjà la présence d'interlocuteurs humains. Et qu'à l'image du caractère local de la conception, qui demeure indispensable pour l'acquisition de connaissances mathématiques plus vastes, une telle amélioration s'opère progressivement par petites touches, à partir de situations-problèmes variées qui profitent de l'enrichissement mutuel des conceptions. Au contraire, laissant au maître la possibilité d'adapter certaines réactions de l'agent tuteur, nos systèmes s'intègrent à la relation didactique de façon à en respecter les habitudes heuristiques et discursives. Toutefois, pour garantir la complétude de son organisation logique, de même que pour rendre le processus argumentatif conséquent, nos systèmes sont pourvus d'un ensemble de messages par défaut qui se fondent essentiellement sur un graphe inférentiel conçu dans l'esprit de la recherche en didactique – dont l'étude des effets cognitifs, sémiotiques et situationnels de l'interaction sociale en résolution de problèmes. Ces messages s'articulent selon des niveaux de contrôles qui visent à soutenir l'élève dans son cheminement, surtout lorsqu'il se trouve dans une impasse, sans que l'aide proposée n'en vienne à diluer la responsabilité de l'élève pour le développement de son autonomie.

De façon plus générale, nous avons voulu créer un environnement informatique dans lequel la modélisation du comportement humain était conjointe et réciproque à la conception du système. Cela nous paraissait souhaitable puisque, pour pasticher Balacheff et Margolinas (2005)[10], la «modélisation du comportement de l'élève» et le «système informatique disponible» se définissent mutuellement et dialectiquement par la nature et la dynamique du jeu des actions de l'élève et rétroactions du système. En outre, nous savions d'emblée que les structures de contrôle relatives aux conceptions de l'élève et celles qui sont implémentées dans notre système informatique se réfèrent à des modèles mathématiques distincts, dont le modèle de l'agent didactique programmé par l'expert. C'est pourquoi, lorsque l'agent didactique retourne des messages pour soutenir l'élève, il procède déjà avec des moyens heuristiques et discursifs différents. Et l'interaction sociale issue des échanges «élève ↔ agent didactique» se trouve également soumise à des contraintes qui évoquent, d'une certaine façon, les problèmes typiques de l'acte de communication. Pourtant, nous constatons dans cette recherche que l'agent didactique aide effectivement l'élève dans sa démarche et cela, sans besoin d'être

[10] Voir note à la section *Connaissances et compétences*.

directif. On peut certes envisager que même si le sens du message de l'agent renvoie à un modèle différent de celui qui sous-tend l'action signifiante de l'élève, ou que celui-ci ne comprend tout simplement pas ce qu'on lui dit, l'acte même est susceptible de stimuler le processus de résolution, ne serait-ce parce que le message entretient l'interaction sociale. Mais c'est sûrement insuffisant.

Faut-il souligner que le modèle comportemental engendré par l'agent didactique n'est pas déterministe. Car cet agent réagit bien plus aux actions signifiantes de l'élève qu'il n'en prend l'initiative par anticipation. Dans un cas extrême, on peut se demander si cette disposition n'engendre pas une tendance à rendre cohérente chaque inférence d'un raisonnement, sans nécessairement s'accompagner de la prise en charge d'une solution complète. Toutefois, malgré ce risque, malgré les problèmes inhérents à la communication et malgré l'écart incontournable entre les modèles mathématiques de référence, nous croyons que l'élève et l'agent didactique se rejoignent sensiblement dans l'effort de produire des connaissances non contradictoires. C'est-à-dire que l'absence implicite de contradictions dans les modèles de l'expert semble se transférer implicitement avec l'approche structurale du raisonnement qui fonde notre système tutoriel. Nous n'avons pas encore vérifié cette hypothèse, mais nous estimons que toute réponse positive constituerait une clef de voûte dans l'explication de plusieurs questions didactiques. Ainsi, comment l'élève arrive-t-il à produire des réponses adéquates, manifestant par là le succès au moins apparent du tutorat, alors qu'il ne dispose pas (encore) des moyens discursifs ou heuristiques nécessaires ? Pourquoi le maître soucieux du développement de l'autonomie de l'élève réussi-t-il à le soutenir, envers et contre tous, alors que ses messages ne lui apportent pas toujours l'information convoitée ? Enfin, pourquoi l'élève peut-il développer ses compétences mathématiques, alors que l'évaluation de celles-ci repose subjectivement sur la compétence professionnelle et l'idéologie du maître ?

Remerciements

Le développement de cette recherche a été possible grâce à une subvention du *Fonds québécois de la recherche sur la société et la culture* (FQRSC 2005-AI-97435, Gouvernement du Québec) et au support logistique du *Laboratoire Turing* (http://turing.scedu.umontreal.ca).

Références

AÏMEUR E., FRASSON C. & DUFORT H. (2000), Cooperative Learning Strategies for Intelligent Tutoring Systems, *Applied Artificial Intelligence. An International Journal* **14 (5)**, 465-490.

ALEVEN V., POPESCU O. & KOEDINGER K. (2002), Towards Tutorial Dialog to Support Self-Explanation : Adding Natural Language Understanding to a Cognitive Tutor. In Moore, J.D., Redfield, C.L. & Johnson, W.L. (Eds.), *Artificial Intelligence in Education : AI-ED in the Wired and Wireless Future, Proceedings of AI-ED 2001*, 246-255. Amsterdan : IOS Press.

BALACHEFF N. & MARGOLINAS C. (2005), Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In Mercier, A. & Margolinas, C. (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques*, 75-106.

BOERO P. (1999, juillet-août), Argomentazione e dimostrazione: una relazione complessa, produttiva e inevitabile nella matematica e nella didattica della matematica. *La lettre de la preuve – International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*. Récupéré le 17 juillet 2006 dans http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/ 990708.html.

BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage.

CARNEGIE LEARNING (2006), *Carnegie Learning's Cognitive Tutor mathematics solutions*. Récupéré le 17 juillet 2006 dans http://www.carnegielearning.com/approach_cognitive_tutor.cfm.

COBO P. & FORTUNY J. M. (2000), Social interactions and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, **42**, 115-140.

COBO P., FORTUNY J. M., PUERTAS E. & RICHARD P. R. (2007), AgentGeom : a multiagent system for pedagogical support in a geometric proof problem. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **12**, 57-79.

CORNELLIER L. (2003), *À brûle-pourpoint : interventions critiques*, Sillery, Septentrion.

DUVAL D. (1995), *Sémiosis et pensée humaine : registre sémiotique et apprentissages intellectuels*, Berne, Peter Lang.

EL-KHOURY, S., AÏMEUR E., RICHARD P.R. & FORTUNY J.M. (2005), Development of an Intelligent Tutorial System to Enhance Students' Mathematical Competence in Problem Solving. In Richards, G. (Ed.), *Proceedings of World*

Conference on E-Learning in Corporate, Government, Healthcare, and Higher Education 2005, 2042-2049. Chesapeake, VA : AACE.

FESTINGER L. (1957), *A Theory of Cognitive Dissonance*, Stanford, Stanford University Press.

FESTINGER L. (1989), The arousal and reduction of dissonance in social contexts. In Schachter, S. et Gazzaniga, M. (Éds.) *Extending Psychological Frontiers : Selected Works on Leon Festinger*, 238-257, New York, Russell Sage Foundation.

GUIN D. (1996), A Cognitive Analysis of Geometry Proof Focused on Intelligent Tutoring Systems. In J. M. Laborde (Éd.), *Intelligent Learning Environments : the Case of Geometry*, 82-93, Berlin, Springer Verlag.

HANNA J. (1991), Mathematical Proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 54-61, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

IBM ALMADEN RESEARCH CENTER (2006a), *Eye-Gaze Tracking*. Récupéré le 17 juillet 2006 dans
http://www.almaden.ibm.com/ software/projects/eyegaze/index.shtml.

IBM Almaden Research Center (2006b), *Creating computers that know how you feel.* Récupéré le 17 juillet 2006 dans
http:// www.almaden.ibm.com/cs/BlueEyes/index.html.

KAHANE J.-P. (2002), *L'enseignement des sciences mathématiques*, Éditions Odile Jacob et CNDP.

KOEDINGER K. & ANDERSON J. R. (1993), Reifying implicit planning in geometry: Guidelines for model-based intelligent tutoring system design. In Lajoie, S. P. & Derry, S. J. (Eds.) *Computers as cognitive tools*, 15-46. Hillsdale, NJ, Erlbaum.

LABORATOIRE LEIBNIZ (2003), Baghera Assessment Project : Designing an hybrid and emergent educational society. In Soury-Lavergne S. (Ed.), *Rapport pour la commission européenne, Programme IST, Les Cahiers du Laboratoire Leibniz nº 81*, Grenoble.

LABORDE C. (2001a), Dynamic Geometry Environments as a Source of Rich Learning Contexts for the Complex Activity of Proving. *Educational Studies in Mathematics* **44 (1)**, 151-161.

LABORDE C. (2001b), Integration of Technology in the Design of Geometry Tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 283-317.

LAKATOS I. (1984), P*reuves et réfutations. Essai sur la logique de la découverte mathématique*, Paris, Hermann.

LUENGO V. (2005), Some Didactical and Epistemological Consideration in the Design of Educational Software : The Cabri-Euclide Example. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* **10**, 1-29.

MÉLS (2003), Chapitre 6 : Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie. *Programme de formation de l'école québécoise, enseignement secondaire*, Publication du Gouvernement du Québec.

MÉLS (2006), *Programme de mathématique au secondaire, 2e cycle*, Document à usage restreint du ministère de l'Éducation des loisirs et du sport du Québec, version approuvée du 3 juillet 2006.

NISS M. (1999), « Kompetencer og Uddannelsesbeskrivelse » (Competencies and subject description). *Uddanneise* **9**, 21-29.

NISS M. (2002), *Mathematical competencies and the learning of mathematics : the Danish KOM project*. Récupéré le 17 juillet 2006 dans http://www7.nationalacademies.org/mseb/mathematical_competencies_and_the_learning_of_mathematics.pdf.

PISA (2003), *Cadre d'évaluation de PISA 2003 – Connaissances et compétences en mathématiques, lecture, science et résolution de problèmes*, Publication de l'Organisation de coopération et de développement économiques.

RABARDEL P. (1995), *Les hommes et les technologies : approche cognitive des instruments contemporains*, Paris, Armand Colin.

RICHARD P.R. (2004a), L'inférence figurale : un pas de raisonnement discursivo-graphique, *Educational Studies in Mathematics* **57**, 229-263.

RICHARD P.R. (2004b), *Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques*, Berne, Peter Lang.

RICHARD, P.R. (2006), *Intégration des figures dynamiques dans l'expression écrite du raisonnement mathématique*, Actes du Colloque 2005 du Groupe de didactique des mathématiques du Québec, 167-181, Montréal, GDM.

RICHARD P.R., El-KHOURY S., FORTUNY J.M. & AÏMEUR E. (2005), An Open Architecture to Improve the Mathematical Competences in High School. In Kommers, P. & Richards, G. (Eds.), *Proceedings of World Conference on Educational Multimedia, Hypermedia and Telecommunications 2005*, 3395-3402. Chesapeake, VA, AACE.

RICHARD P.R., FORTUNY J.M., COBO P. & AÏMEUR E. (2003), Stratégie argumentative et système tutoriel pour l'apprentissage interactif de la géométrie, *Actes de l'Espace mathématique francophone 2003*, Tozeur, EMF.

SEKIGUCHI Y. & MIYAZAKI M. (2000, janvier), Argumentation et démonstration au Japon. *La lettre de la preuve – International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*. Récupéré le 17 juillet 2006 dans http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/000102.html.

TROUCHE L. (2002), Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques. In Trouche, L. & Guin, D. (Éds) *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail informatique : un problème didactique*, 187-214.

TUNING (2003), *Tuning Educational Structures in Europe. Informe final. Fase Uno*, Publication de la Commission européenne dans le cadre du programme Socrates, édité par González, J., & Wagenaar, R. Bilbao, Universidad de Deusto y Universidad de Groningen.

VYGOTSKY L.S. (1978), *Mind in Society : The Development of Higher Psychological Process*, Cambridge, Massachusetts, Havard University Press.

PHILIPPE R. RICHARD
Département de didactique
Université de Montréal
Canada
philippe.r.richard@umontreal.ca

JOSEP M. FORTUNY
Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals
Universitat Autònoma de Barcelona
Espanya
JosepMaria.Fortuny@uab.es