M. EUGENIA ANDREU IBARRA & JESÚS A. RIESTRA VELÁZQUEZ

Article adapté de l'espagnol et augmenté par FRANÇOIS PLUVINAGE[*]

ET SI NOUS EN RESTIONS À EULER ET LAGRANGE ?

Mise à l'essai d'un enseignement d'analyse à des étudiants non mathématiciens en début d'études supérieures

Abstract. Processing Calculus as Euler and Lagrange? Experiment of Teaching Calculus at University to Tyros not Mathematicians
At the beginning of College, a Calculus course is present in many paths, for its variety of uses. But rate of failure at final assessment is a problem. An experimental core curriculum for engineering has been designed in Mexico, with the idea not to change the global content of the course, but to modify its progression. As in the historic development, algebraic derivative comes before the formal definition of local derivative as limit. End of course actually goes beyond Euler, who used the notation f(x), and Lagrange, who has introduced the notation f'(x), but only after a wide use of their methods. Observed results are encouraging, mainly for the students who manifested slightly deficient results at the initial assessment.

Résumé. En début d'enseignement supérieur, l'analyse figure dans de nombreux cursus en raison de la diversité de ses utilisations. Mais la proportion d'échecs à l'examen pose problème. Un enseignement dans des formations mexicaines d'ingénierie a été entrepris, avec l'idée de ne pas modifier globalement le contenu d'enseignement, mais d'en changer la progression. Celle-ci a été voulue plus conforme au développement historique, dans lequel par exemple la dérivation algébrique a précédé la définition ponctuelle de la dérivée. Le cours prévu va finalement plus loin qu'Euler, qui systématisa la notation f(x), et Lagrange, à qui est due la notation f'(x) de la dérivée, mais seulement après une large exploitation de leurs modes de pensée. Les résultats observés sont encourageants, surtout auprès des étudiants pour lesquels des tests initiaux avaient révélé quelques déficiences.

Mots-clés. Enseignement supérieur, Formations d'ingénieurs, Calcul différentiel, Fonction dérivée, Dérivée, Situations problèmes, Maximum et minimum.

---

[*] La version en espagnol de cet article est rédigée à l'intention des enseignants, de manière à mettre à leur disposition les éléments pour la préparation d'un cours. Elle est consultable en ligne à l'adresse http://www.matedu.cinvestav.mx/~matedul.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 12, p. 165 - 187.

Introduction

Le calcul différentiel et intégral est un sujet central dans le développement des mathématiques. De plus, il figure dans un grand nombre de programmes d'enseignement au niveau de la fin des études secondaires et du début de l'enseignement supérieur, même dans des branches étrangères aux sciences exactes. La raison en est qu'il dispense des outils mathématiques fondamentaux, permettant d'étudier des phénomènes et d'en proposer des modèles, si bien qu'il s'avère indispensable dans des disciplines aussi diverses que physique, économie, biologie, sociologie, etc. Mais l'appropriation des bases mêmes du calcul différentiel et intégral présente des difficultés qui le font apparaître dans les formations à ces disciplines comme un barrage. Les échecs qu'il provoque sont évidemment regrettables lorsqu'ils concernent des étudiants qui par ailleurs présentent les qualités requises pour le cursus qu'ils ont entrepris.

1. Diagnostic général et repérage de difficultés spécifiques

Les résultats d'examen au terme de cours de Calcul différentiel et intégral sont traditionnellement très faibles. Cela est sensible dans les formations d'ingénierie de l'Université Autonome Métropolitaine de Mexico (UAM), dont la "Unidad Azcapotzalco" (UAM-Azc.) a été le centre où ont été menées les observations rapportées dans cet article. Le taux d'échec à l'examen de fin du premier cours de Calcul différentiel et intégral atteignait jusqu'à 72%, selon les chiffres que présentait la Division des Examens de cette université en 1997. Une telle situation n'était pas spécifique à notre institution : ainsi Tall (1996) rapportait, citant Anderson et Loftsgarden (1987) et Peterson (1897), qu'en dépit d'un entraînement intensif à des exercices d'analyse, le pourcentage d'échecs dans cette matière oscillait entre 30% et 50%.

Ce problème du faible taux de réussite nous inquiète ainsi que nombre de professeurs et nous savons par expérience que cette situation peut être due à de multiples causes, qui vont de questions d'ordre psychologique, économique ou social hors de portée des enseignants, à des questions tenant, elles, aux pratiques d'étude ou d'apprentissage sur lesquelles le professeur peut peser de manière déterminante.

Parmi les questions concernant les apprentissages, nous pouvons souligner les déficiences des étudiants sur des savoirs mathématiques antérieurement étudiés, nécessaires aux développements d'un cours de Calcul différentiel et intégral. A ce sujet, une étude conduite par des professeurs du Département des Sciences et d'Ingénierie de la UAM (Andreu et al., 1992) a montré qu'il y a une relation directe entre ces déficiences et le manque de réussite au premier cours d'analyse intitulé Calcul différentiel et intégral I (calcul différentiel), enseigné lors du premier trimestre d'études des formations d'ingénierie de cette institution. Ce trimestre comporte 11 semaines et une heure et demie par jour est consacrée au Calcul différentiel et intégral I ; par semaine, trois cours incombent au professeur responsable de l'enseignement et deux séances d'exercices à un assistant.

Le déroulement d'un cours de calcul différentiel est rendu difficile lorsque des lacunes algébriques et même arithmétiques se rencontrent chez la plupart des étudiants. Cette difficulté est accrue par l'obligation, en plus de couvrir complètement le programme de calcul différentiel, de mener un travail important sur la partie algébrique. De plus, dans un système trimestriel de caractère intensif, comme c'est le cas à la UAM-Azc., le temps imparti n'est pas suffisant pour que l'étudiant se rattrape et il en résulte que beaucoup abandonnent en cours de trimestre ou bien vont jusqu'au bout mais échouent.

Afin de préciser le diagnostic de possibles déficiences, un questionnaire initial de positionnement (prétest) a été élaboré. Il porte sur les connaissances algébriques et numériques qui nous paraissaient nécessaires pour le cours de Calcul différentiel. Les considérations d'ordre épistémologique sur lesquelles s'est appuyée toute notre démarche d'enseignement interviennent déjà dans ce choix pour un test diagnostic. En effet les deux piliers du développement spectaculaire de l'analyse a un moment de l´histoire des mathématiques ont été les traitements linéaires et le calcul littéral.

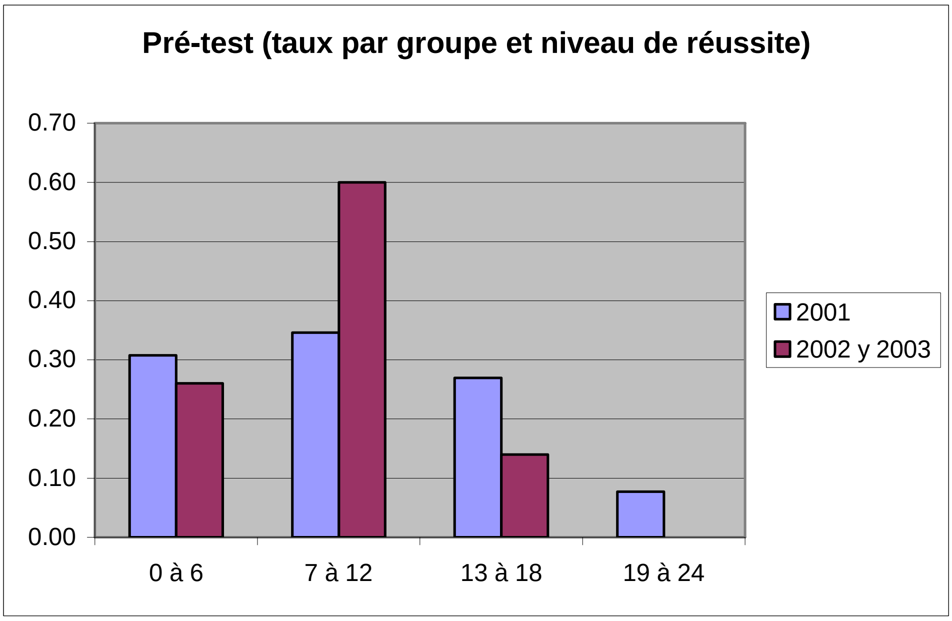
Notre test comportait quatre feuilles qui furent administrées séparément et dont nous n'examinons ici que les deux premières, correspondant aux prérequis les plus essentiels selon nous pour le cours considéré. Une présentation condensée de ces deux feuilles se trouve en annexe 2.

La première feuille, prévue pour un travail de 20 minutes sans calculatrice, comporte trois parties : A- ordre de nombres dont l'expression fait apparaître des exposants (7 questions), B- simplification d'expressions fractionnaires numériques (6 questions), C- simplification d'expressions fractionnaires comportant une variable (4 questions). La seconde feuille est constituée de : D- six questions sur des représentations graphiques, E- une question demandant d'exprimer une variable présente dans une formule donnée.

Ce prétest fut appliqué une prenière fois en début du trimestre d'automne 2001 à deux groupes (notés ici CAT06 et CAT07) qui suivirent l'enseignement habituel. Il fut ensuite appliqué en début du trimestre d'automne 2002 à deux groupes (notés CAT02 et CAT1) et enfin au trimestre d'automne 2003 à un groupe (également noté CAT02).

Les résultats des étudiants à ce prétest ont été regroupés par population (groupe de contrôle 2001 et groupes expérimentaux 2002 et 2003) et selon quatre niveaux de réussite, qui apparaissent dans la table ci-après.

Nombre de réponses correctes \ Années	2001	2002 & 2003
19 à 24	2	0
13 à 18	7	7
7 à 12	9	30
0 à 6	8	13



Une première observation est que la situation a plutôt empiré de 2001 aux années 2002 et 2003 : Si en 2001, les étudiants qui avaient réussi plus de la moitié des 24 esxercices élémentaires proposés représentaient une proportion de 0,35, en 2002 et 2003 cette proportion est tombée à 0,14. Nous verrons après la présentation de notre proposition d'enseignement les résultats des divers groupes d'étudiants distingués dans notre tableau.

2. Idées générales de la proposition alternative d'enseignement de la dérivée

Confrontés à la problématique qui vient d'être exposée, nous avons envisagé une alternative qui, sans prétendre aboutir à une résolution complète du problème d'enseignement, offre néanmoins aux étudiants une plus grande opportunité de se rattraper et de réussir l'unité de Calcul différentiel, et surtout d'aboutir à une meilleure compréhension des objectifs centraux constitués par la dérivée ainsi que par ses applications à la représentation graphique d'une fonction et à la résolution de problèmes de maximaux et de minimaux de cette même fonction.

Les programmes d'enseignement en cours débutent par la présentation des nombres réels et des limites. C'est un peu comme si, en géométrie euclidienne, la résolution de problèmes de constructions supposait qu'ait été digérée l'axiomatique du plan euclidien. Certes le concept de limite comme point de départ est en conformité avec le développement même des mathématiques d'aujourd'hui, mais il présente le gros inconvénient de faire dépendre de son acquisition les résultats usuels de dérivation. Une piste de travail pour le didacticien est la recherche de réponses de l'enseignement aux difficultés d'apprentissage que présente la délicate notion de limite. C'est elle dont une exploration est par exemple présentée par Hitt F. & Paez R. (2004). Cette piste est d'un interêt indiscutable pour la formation d'étudiants en mathématiques ou de futurs professeurs de mathématiques. Mais pour des formations au spectre mathématique moins étendu, une appropriation du concept de limite est-elle un passage obligé pour savoir dériver les fonctions rencontrées et savoir appliquer la dérivation ?

« Historiquement, la dérivée fut d'abord utilisée, puis découverte, et en dernier lieu définie. » Cette phrase, qui fixe les étapes du développement du concept de dérivée d'un point de vue social, exprime une thèse proposée par l'historienne des mathématiques Judith V. Grabiner (1983). L'étape d'utilisation inconsciente de la dérivée renvoie à la méthode de Fermat pour la détermination de maximaux et minimaux. L'étape de découverte est bien illustrée par les contributions d'Euler, qui fit un usage systématique de la notation f(x) pour une fonction, et Lagrange, qui introduisit la notation f'(x) pour sa dérivée (voir par exemple le site Chronomath http://serge.mehl.free.fr/). Enfin l'étape de définition formelle de la dérivée correspond à celle qui fut tout d'abord donnée par Cauchy, avant d'être mise au point par Weierstrass.

Notre proposition consiste à prendre ce point de vue en considération, en s'appuyant sur une perspective historico-épsitémologique pour construire des activités pour l'enseignement de la dérivée (Andreu et Riestra, 2005). En particulier, il est possible de présenter une définition algébrique de la dérivée, avant d'être confronté à l'obstacle important représenté par le concept de limite, qui provoque une rupture dans l'enseignement. Autrement dit pour nous rapporter au titre de cet article, nous proposons de nous cantonner dans un premier temps d'enseignement aux techniques qui étaient mises en œuvre au temps d'Euler et Lagrange. C'est seulement au terme de cette première approche que sont envisagés le concept de limite et les notions apparentées.

Par ailleurs, notre proposition permet d'appliquer deux principes didactiques importants. Le premier est de ne pas entreprendre l'étude d'un thème mathématique en partant de définitions générales, mais en exploitant des situations qui aient du sens pour les étudiants, afin de faciliter leur compréhension et de leur donner la possibilité d'analyser l'obtention de leurs résultats. Le second est de recourir de manière systématique lors des activités aux différents registres d'expression des fonctions et aux échanges entre ces registres. En particulier l'emploi du registre des tables de valeurs nous a semblé essentiel, même s'il n'a souvent qu'une place réduite dans l'enseignement, bien que les ordinateurs en facilitent grandement l'usage : dans le développement historique des études sur les fonctions, ce registre a joué un grand rôle.

Avant de détailler notre proposition d'enseignement du concept de dérivée, présentons à grands traits le contenu du cours de Calcul différentiel I. Le programme traditionnel propose : 1. Nombres réels, 2. Fonctions, 3. Limite d'une fonction, 4. Continuité, 5. Dérivée et applications. La proposition alternative change l'ordre d'étude des notions sans modification du contenu dans sa totalité ni du temps consacré à son développement : le thème 5 de la dérivée et ses applications est avancé en position 3, tout de suite après 2. Fonctions, puis viennent les limites et la continuité, avant que le programme s'achève par la formalisation de la dérivée au même niveau que dans le cours traditionnel.

Dans la suite, le déroulement de l'enseignement sera présenté de manière succincte lorsqu'il n'aura pas donné lieu à des changements et de manière plus détaillée en cas de changements. En particulier, nous présentons le déroulement séance après séance de la seconde partie, innovante, de l'enseignement alternatif. Nous nous en tenons à la présentation des contenus : Il eut certes été intéressant de disposer de notes d'observations précises sur les réactions des étudiants, mais nous avions souhaité que le cadre de l'enseignement expérimenté ne sorte pas du fonctionnement usuel tel qu'il a été présenté dans le § 1. Ce sont ici les résultats observés *in fine* auprès de la population étudiante concernée qui sont susceptibles de nous fournir des arguments en faveur de la faisabilité de la progresseon d'enseignement mise à l'essai. Comme ces résultats, nous le verrons, apparaissent prometteurs, il est dès lors possible de penser à étendre l'expérimentation.

Une première partie de l'enseignement (11 cours et 8 séances d'exercices) est consacrée aux thèmes 1. Nombres réels (et droite réelle) et 2. Fonctions (avec leur représentation graphique, des applications, telle la représentation de l'aire d'un terrain rectangulaire de périmètre donné, en fonction de l'un de ses côtés, et l'étude de transformations résultant d'opérations sur les fonctions). Un premier partiel la conclut. Aucun changement n'a été introduit dans les contenus de cette partie.

3. Introduction algébrique de la dérivée de polynomes

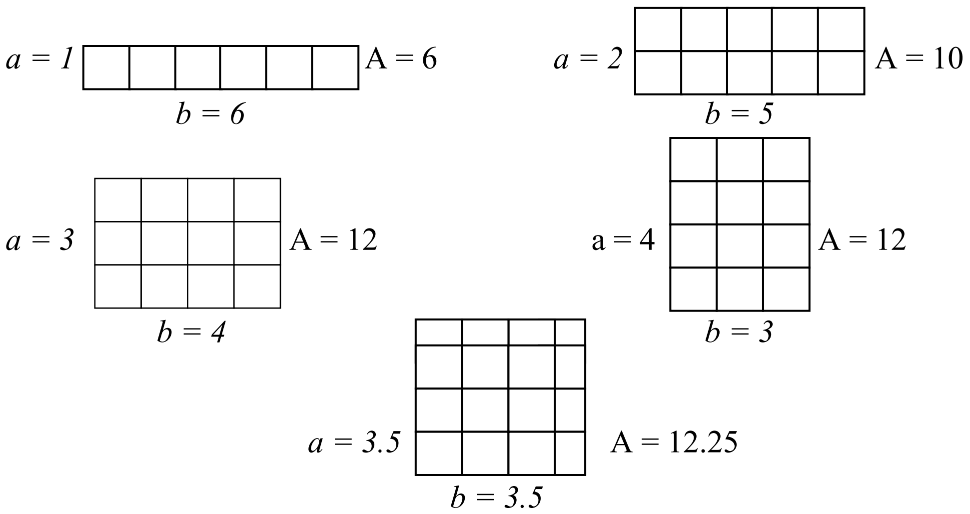
Une introduction de la dérivée qui ait du sens peut partir de problèmes de maximums et minimums. Nous avons commencé par utiliser une approche s'appuyant sur des tableaux de valeurs à la manière de Kepler (ce qui est l'approche historique de la détermination de maximums et de minimums), avec recours également à des graphiques. Ces derniers permettent une introduction modernisée de la méthode de Fermat et, avec elle, de la dérivée d'un polynome sous une forme purement algébrique. Voici comment l'enseignement a été imparti.

Séance 1. Un problème très simple a été étudié. Il s'énonce ainsi : *Un cultivateur dispose de 14 mètres de grillage, qu'il souhaite utiliser pour la clôture d'une surface rectangulaire où il veut reproduire un certain type de semences. Pour que la surface ait la plus grande aire possible, quelles doivent être ses dimensions ?*

Intérêts de la situation considérée :

- le problème est de la famille des isopérimètres, analogue au problème résolu par Fermat (avant 1638) pour la présentation de sa méthode d'obtention de maximums et minimums ;
- il est aussi suffisamment simple pour que sa présentation aux étudiants puisse être accompagnée d'un regard sur des méthodes heuristiques de portée générale, à savoir une approche exploratoire, puis la constitution de tableaux de valeurs, suivie d'une étude graphique, enfin une conclusion grâce à un travail algébrique sur des formules.

L'exploration peut débuter par des valeurs entières comme sur les figures suivantes.

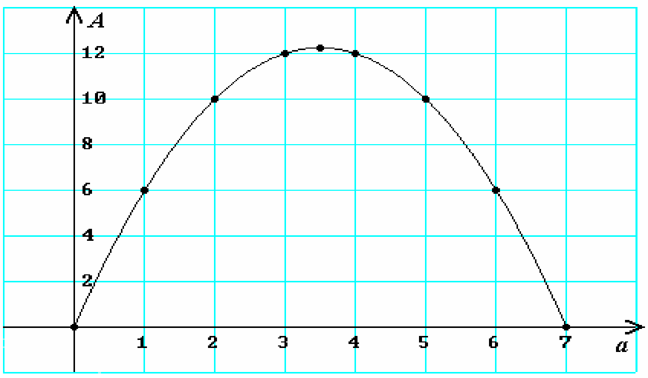


Dans ce même exemple, la constitution d'une table de valeurs aboutit à un tableau comme le suivant.

a	$b = 7–a$	P	A = $7a–a^2$
0	*7*	*14*	*0*
1	*6*	*14*	*6*
2	*5*	*14*	*10*
3	*4*	*14*	*12*
3,5	*3,5*	*14*	*12,25*
4	*3*	*14*	*12*
5	*2*	*14*	*10*
6	*1*	*14*	*6*
7	*0*	*14*	*0*

Le remplissage du tableau amène à se poser la question des valeurs extrêmes possibles, qui sont ici a = 0 et a = 7. De plus la table de valeur obtenue est symétrique, ce qui conduit bien à envisager la valeur moyenne a = 3,5 comme donnant lieu au maximum de A.

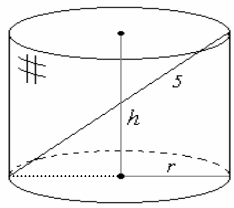
La représentation graphique de la fonction $A(a) = 7a - a^2$, qui est une parabole d'axe de symétrie la verticale a = 3,5, conduit à l'étude continue du phénomène considéré.



Quelques notions générales peuvent se dégager de ce cas particulier très simple : la définition de valeurs extrêmes pour une fonction et la considération d'intervalles sur lesquels une fonction est monotone. Un traitement analogue proposé pour une autre valeur du périmètre (nous avions proposé 120) achève cette première séance.

<u>Séance 2</u>. La symétrie qui avait facilité l'étude du problème précédent est une caractéristique qui n'est pas présente dans l'exemple qui suit.

Un récipient doit avoir la forme d'un cylindre circulaire droit ; sa diagonale doit mesurer 5 dm. Quelles dimensions doit avoir le récipient pour que sa capacité soit maximale ?

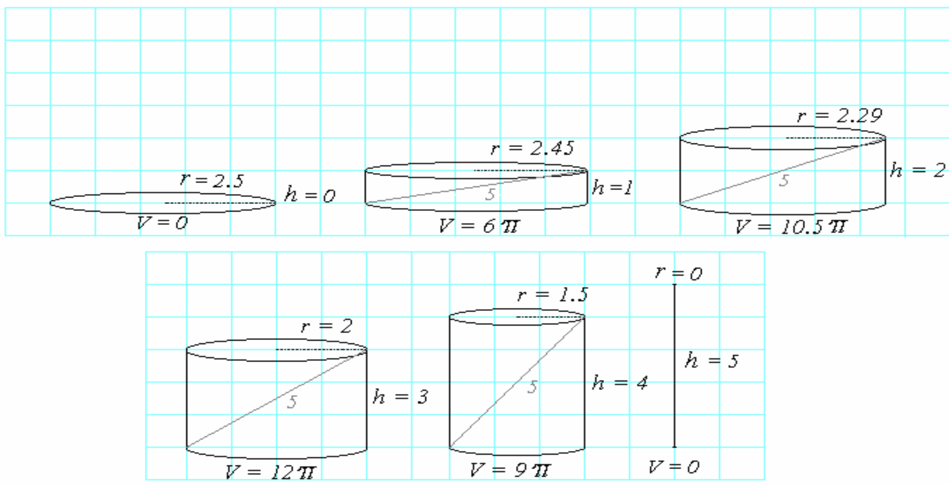


Notons que ce problème est historique : Kepler l'envisagea à partir de la considération des tonneaux de vin autrichiens. Il trouva qu'un cylindre de diagonale donnée a un volume maximal quand le rapport de son diamètre à sa hauteur est égal à $\sqrt{2}$ (Boyer 1959, p. 108 et 110, mentionnant la Nova Stereometria de Kepler, 1615).

Sachant que le volume du cylindre de rayon de base *r* et de hauteur *h* est donné par la formule $V = \pi r^2 h$ et exprimant *r* en fonction de *h* grâce au triangle rectangle formé par la diagonale, un diamètre et la hauteur du cylindre, nous aboutissons à l'expression suivante du volume en fonction de h :

$$V(h) = \frac{1}{4}\pi h(25 - h^2)\ .$$

Les valeurs à envisager pour *h* vont de 0 à 5, ce qui peut se remarquer directement sur la figure. Ci-après sont représentés les cylindres obtenus pour les valeurs entières de *h*.



L'évolution du volume est plus visible si les résultats sont reportés dans une table.

h	$V=\frac{\pi}{4}(25-h^2)h$
0	0
1	6,0π
2	10,5π
3	12,0π
4	9,0π
5	0

Trois valeurs successives de la hauteur, à savoir 2, 3 et 4, sont telles que la valeur centrale conduit au plus grand volume. L'idée indiquée aux étudiants est dans un tel cas d'affiner la recherche par dichotomie, ce qui conduit aux tableaux successifs suivants, où les coefficients de π sont donnés en valeur approchée, avec un nombre de décimales qui augmente avec la précision.

h	$V=\frac{\pi}{4}(25-h^2)h$
2	10,50π
2,5	11,72π
3	12,00π
3,5	11,16π
4	9,00π

h	$V=\frac{\pi}{4}(25-h^2)h$
2,5	11,719π
2,75	11,988
3	12,000π
3,25	11,730π
3,5	11,156π

h	$V=\frac{\pi}{4}(25-h^2)h$
2,75	11,9883π
2,875	12,0278π
3	12,0000π
3,125	11,9019π
3,25	11,7305π

h	$V=\frac{\pi}{4}(25-h^2)h$
2,7500	11,98828π
2,8125	12,01630π
2,8750	12,02783π
2,9375	12,02252π
3,0000	12,00000π

h	$V=\frac{\pi}{4}(25-h^2)h$
2,81250	12,01630π
2,84375	12,02415π
2,87500	12,02783π
2,90625	12,02731π
2,93750	12,02252π

Lors de la recherche avec les étudiants, il convient de conserver au moins le premier et le dernier de ces tableaux pour des observations ultérieures (observations intra-table et inter-tables).

Il serait possible de poursuivre en recherchant une meilleure approximation, mais nous sommes déjà en mesure de dire que le volume maximal arrondi à deux chiffres après la virgule est 12,03π dm^3 = 37,79 dm^3, et qu'il est atteint pour une hauteur qui, arrondie à un chiffre après la virgule, est 2,9 dm.

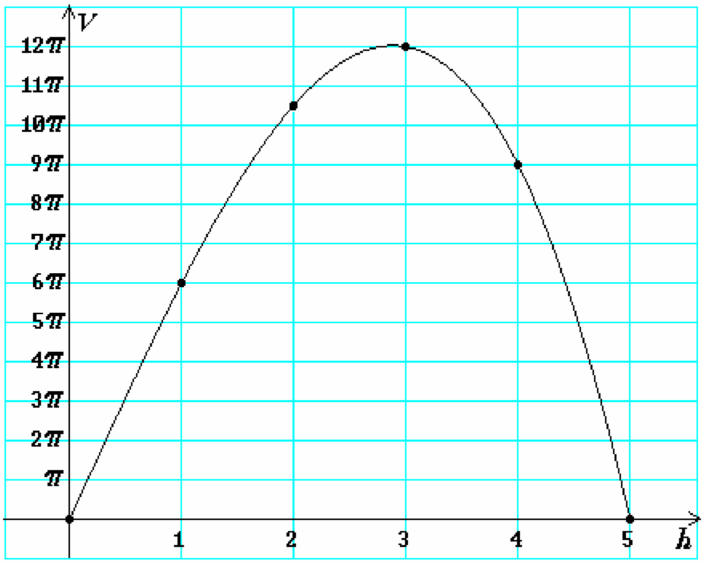
Deux observations sur ces tableaux de valeurs méritent d'être signalées.

1º- Observation intra-table : Dans une table donnée, c'est-à-dire pour une variation Δh fixée, c'est autour du maximum du volume obtenu dans la table que sa variation ΔV est la plus faible.

2º- Observation inter-tables : Le minimum obtenu de la valeur absolue du rapport $\frac{\Delta V}{\Delta h}$ diminue quand son dénominateur, la variation Δh, s'approche de zéro. Ainsi, dans la toute première table (Δh = 1), le minimum obtenu pour la valeur absolue de ce rapport est 1,5π et dans la dernière (Δh = 0,03125), le minimum obtenu est 0,01664.

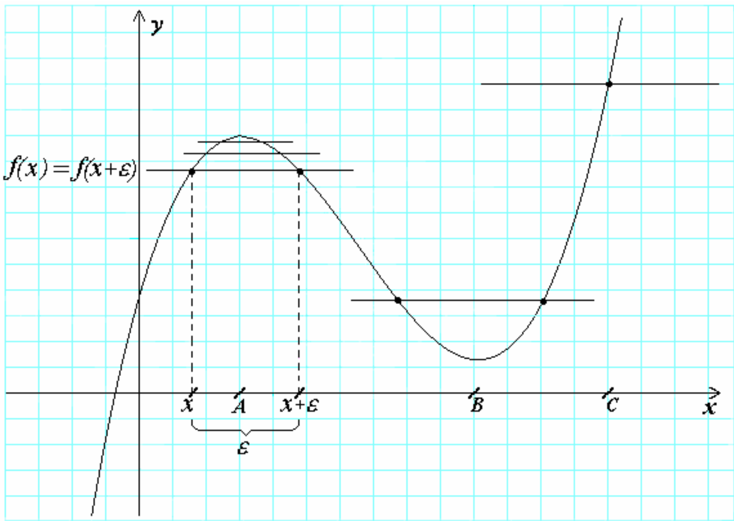
Certes, cette recherche du maximum d'une fonction par la tabulation de ses valeurs peut apparaître longue et quelque peu fastidieuse. Mais du point de vue historique, c'est bien elle qui a été développée par Kepler (1615) pour aborder des problèmes de minimums et maximums. Et c'est aussi Kepler qui fit observer que, pour une variation donnée de la variable, les changements de valeurs prises par la fonction diminuent au voisinage d'un maximum (Boyer, 1959, p. 111).

Le tracé de la fonction $V(h)=\frac{1}{4}\pi h(25-h^2)$ pour $0 \leq h \leq 5$ montre l'évolution continue du volume et incite à rechercher une méthode d'obtention du maximum.



Une méthode développée originellement par Pierre de Fermat avant 1638 conduit à l'obtention exacte du maximum (cf. Struik, 1969, p .23 note 1) et il convient de noter qu'il y apparaît le mode d'expression de Kepler en termes d'accroissements et de diminutions au voisinage du maximum (Boyer, 1959, p. 111). On pourra consulter Trompler & Noël (2003) pour un examen détaillé de la méthode. Une version moderne librement adaptée de cette méthode a été présentée par Riestra (2001), et nous l'exposons brièvement ci-après.

Soit $y = f(x)$ un polynome quelconque, dont on souhaite déterminer les extremums (minimums ou maximums). Supposons par exemple que la fonction soit représentée par le graphique suivant., avec en A un maximum local, en B en minimum local et en C un point régulier. Pour des valeurs de x proches des extremums A ou B, une égalité de la forme $f(x + \varepsilon) = f(x)$ se trouve vérifiée pour un certain ε petit, ce qui ne se produit pas au voisinage d'une valeur régulière comme C.



Considérons à présent la fonction $P(h) = f(x + h) - f(x)$, qui est un polynome en h dépendant du paramètre x. Quelle que soit la valeur considérée pour x, ce polynome a $h = 0$ pour racine. On en déduit qu'il s'écrit $P(h) = h\, Q_f(h)$, où Q est un polynome dont le degré est inférieur de 1 à celui de P. Le polynome Q évalué en $h = 0$ est par définition la **dérivée de la fonction** f.

Remarquons que si x est proche d'un extremum (A ou B dans le cas de la figure) le polynome P admet non seulement la racine 0, mais aussi la racine $h = \varepsilon$. Ainsi pour $x = A$ ou $x = B$ le polynome P admettra $h = 0$ comme racine double (c'est une condition nécessaire, mais non suffisante) et donc Q admettra $h = 0$ comme racine. Cela signifie que la recherche d'un maximum ou d'un minimum local d'une fonction revient à la résolution de l'équation en x qui résulte de la condition d'annulation de la dérivée.

Dans le cas de l'exemple du cylindre, pour lequel on adopte désormais les notations précédentes x et f au lieu de h et V, la fonction de x considérée est

$$f(x) = \frac{1}{4}\pi(25x - x^3)\,.$$

On obtient $P(h) = \frac{\pi h}{4}\left(25 - 3x^2 - 3xh - h^2\right)$, d'où $Q(h) = \frac{\pi}{4}\left(25 - 3x^2 - 3xh - h^2\right)$,

et la dérivée de f est $Q(0) = \frac{\pi}{4}\left(25 - 3x^2\right)$. Le maximum du volume sera atteint pour

$25 - 3x^2 = 0$, d'oú $x = 5\frac{\sqrt{3}}{3}$ ≈ 2,888675. C'est un nombre irrationnel ; la recherche par les tableaux ne pouvait donc pas nous fournir sa valeur exacte.

A la suite de cette étude, les notations usuelles pour la dérivée : $f'(x)$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$ ont été introduites. C'est la résolution de l'équation $f'(x) = 0$ qui a permis l'obtention exacte du maximum dans l'exemple étudié. A sa suite, un second problème d'optimisation à résoudre algébriquement a été proposé.

4. Généralisation du processus d'obtention de dérivées

Séance 3. La séance débute par une reprise de la définition algébrique de la dérivée de f comme $f'(x) = Q(0)$, où $Q(h)$ résulte de $f(x+h) - f(x) = h\, Q(h)$. L'attention est attirée sur l'intérêt d'obtenir des résultats généraux de dérivation, pour les appliquer à des cas particuliers, ce qui simplifie notablement l'étude de ceux-ci. Les règles usuelles de dérivation résultent de la définition ci-dessus pour le cas des fonctions polynomiales et plus généralement rationnelles (voir annexe 2).

Un nombre assez important d'exercices d'application des formules de dérivation a été proposé aux étudiants, ce qui nous paraît nécessaire, ainsi que la résolution d'un problème d'optimisation par application des règles de dérivation.

Séance 4. Correction des exercices d'application ayant soulevé des questions.

Séance 5. Dérivation d'une fonction composée et de fonctions implicites.

Nous allons montrer comment les considérations introduites permettent de démontrer que la dérivée de $g \circ f$, où les fonctions f et g sont dérivables algébriquement, est donnée par $(g \circ f)'(x) = [g'(f(x))]\, f'(x)$, ce qui s'écrira aussi $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$.

Puisque la dérivation algébrique s'applique à la fonction *f*, on peut écrire $f(x+h) - f(x) = hQ(h)$. Posons $k = hQ(h)$, il vient $g\big(f(x+h)\big) = g\big(f(x)+k\big)$. La fonction g est par hypothèse algébriquement dérivable en f(x), donc $g(f(x)+k) - g(f(x)) = kR(k)$, où la valeur prise par $R(k)$ en $k = 0$ est la dérivée de g en $f(x)$. D'où $g(f(x+h)) - g(f(x)) = hR(hQ(h))Q(h)$. Dans cette expression, en faisant $h = 0$, d'oú aussi $hQ(h) = 0$, nous obtenons la formule voulue.

Le programme officiel d'enseignement comporte la dérivation de fonctions implicites, c'est-à-dire la dérivation par rapport à x d'une fonction $y = f(x)$ définie localement par une équation de la forme $P(x, y) = 0$.

Il est possible de se contenter de considérer le cas où P est un polynome en les deux variables x et y, cas qui est finalement celui qui intervient dans les applications envisagées par le programme à ce niveau, par exemple pour des considérations sur des coniques. C'est ainsi que sont définies les fonctions algébriques, objets du chapitre 4 du traité d'Appell, Goursat et Fatou (1929) sur les fonctions algébriques. L'étude peut résulter du théorème suivant de composition, qui pourra être examiné en détail dans un autre texte :

Théorème. Soient f et g deux fonctions telles que $g \circ f$ soit dérivable en x et que g soit dérivable en $f(x)$ et de dérivée non nulle. Alors f est dérivable en x et a pour dérivée $f'(x) = \frac{(g \circ f)'(x)}{g'\big(f(x)\big)}$.

Dans cet énoncé, par "dérivable" il convient d'entendre "algébriquement dérivable", puisque c'est cette dérivabilité que nous considérons dans ce texte. Une considération topologique est ici nécessaire : une fonction algébrique dérivable de dérivée non nulle en x est monotone sur un voisinage de x, donc sa restriction à ce voisinage est inversible[1]. En particulier, la règle de dérivation d'une fonction réciproque résulte de ce théorème. Et la dérivation d'une fonction réciproque permet d'obtenir la dérivée de fonctions puissances d'exposant rationnel. Ainsi peut-on obtenir la dérivée de n'importe quelle fonction algébrique.

Mais pour notre public étudiant, il nous a en fait paru didactiquement justifié de présenter la dérivation implicite en admettant l'existence de la dérivée recherchée. On connaît en effet le faible "rendement didactique" des démonstrations d'existence, et celle-ci est subtile. Or, cette existence admise, les formules s'établissent facilement.

Insistons à nouveau sur l'importance d'une pratique suffisante des formules et des méthodes introduites. Tâche demandée aux étudiants : résolution d'exercices d'obtention de dérivées par application de la règle de composition, de dérivation implicite, de résolution d'une question d'optimisation par la mise en œuvre des règles de dérivation.

Séance 6. Correction des exercices qui ont provoqué des doutes chez les étudiants.

5. Tangente à une courbe en un point

Séance 7. Reprise des règles de dérivation et résolution d'un problème d'optimisation amenant à mettre ces règles en œuvre. Il s'agit de se demander si le résultat obtenu en résolvant $f'(x) = 0$ est effectivement le maximum ou le minimum cherché, ce qui s'examine en situant graphiquement les images des solutions. Cela amène au thème suivant : définition de la tangente.

La vision d'agrandissements est une entrée en matière : Qu'observons nous dans un petit voisinage d'un point de la représentation graphique d'une fonction ? Un programme de tracés graphiques sur ordinateur offrant des effets de zoom permet une telle approche visuelle. On constate pour une fonction algébrique f que des agrandissements successifs au voisinage d'un point $(a, f(a))$ conduisent assez vite à l'obtention d'une courbe qui ne se distingue pas d'une droite. C'est un mode de fonctionnement du graphique que Maschietto(2001, p. 141) qualifie d'exploratoire. La droite obtenue va être définie comme la tangente à la courbe. Devant le public en formation d'ingénierie auquel s'adressait l'enseignement de calcul différentiel,

---

[1] Il est important ici que la fonction soit algébrique, comme le montre le contre-exemple suivant, adapté d'une proposition de Guy Noël : $g(x) = x\left(1+\sqrt{|x|}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$ est une fonction continue sur P, dérivable en 0 ($g'(0) = 1$), mais n'est monotone sur aucun voisinage de 0. Bien sûr, g n'est pas algébrique, et ce n'est pas un "zoom" avant mais arrière qui pourra faire passer son graphe pour un tracé de droite. Mais ceci est une autre histoire…

une partie des étudiants avait d'emblée l'intuition que c'est un segment de droite qui allait se voir, et certains allaient même jusqu'à faire remarquer que le tracé de courbes sur ordinateur se fait par petits morceaux de droites. Cette idée peut d'ailleurs être un obstacle, si l'on n'imagine pas que le zoom peut "faire bouger le petit morceau de droite" passant par (*a, f(a)*).

Pour obenir l'approximation linéaire d'un polynome et l'équation de sa tangente, on développe à nouveau $f(x+h)-f(x)$. En ordonnant cette différence selon les puissances croissantes de h, il vient $f(x+h)-f(x)=f'(x)\cdot h+TOS$, où *TOS* désigne les termes d'ordre supérieur à 1 en *h*. En se plaçant au point $(a, f(a))$, et en posant $h=x-a$, on obtient $f(x)=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)+TOS$, où le reste *TOS* regroupe les termes de puissances supérieures à 1 en $x - a$. Dans des calculs aprochés de précision donnée, ces termes ne se distinguent plus de 0 lorsque $x - a$ est suffisamment petit, ce qui explique l'allure de droite que prend le graphique d'une fonction au voisinage du point $(a, f(a))$ considéré. Si $f'(a)$ n'est pas nul, le terme $f'(a).(x - a)$ se distinguera encore de 0 alors que les termes de puissances supérieures à 1 en $x - a$ auront déjà été assimilés à 0.

Conclusion : $y=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)$ est l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $y=f(x)$ au point $(a, f(a))$.

L'accent est mis sur le fait qu'une dérivée nulle détermine une tangente horizontale. La normale à la courbe au même point est par définition la perpendiculaire à la tangente.

Exemple étudié avec les étudiants : fonction $f(x)=x^3-x$ au point $(2, f(2))$. Exercices proposés : Obtention de tangentes et de normales en un point au graphe d'une fonction polynomiale ou autre grâce à la dérivation implicite.

<u>Séance 8</u>. Correction des exercices qui ont provoqué des doutes chez les étudiants.

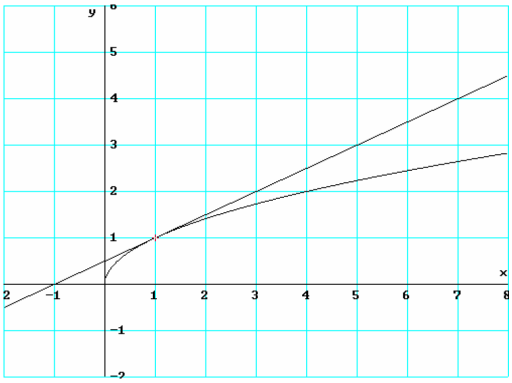
<u>Séance 9</u>. Lors de cette séance, l'étude de la tangente, déjà vue dans le cas polynomial. est étendue au cas général d'une fonction algébrique quelconque. Elle résulte de la considération de l'égalité

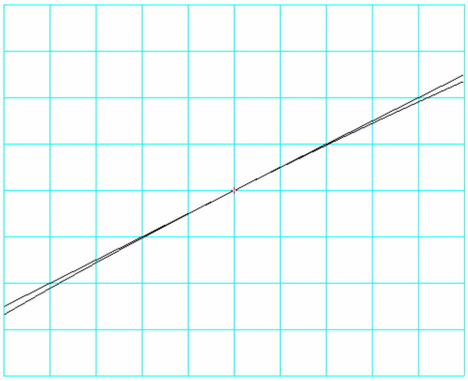
$$\begin{aligned} f(x) &= f(a)+f'(a)(x-a)+(Q(x-a)-f'(a))(x-a) \\ &= f(a)+f'(a)(x-a)+(Q(x-a)-Q(0))(x-a). \end{aligned}$$

L'étude de l'exemple $f(x)=\sqrt{x}$ met en jeu une fonction non polynomiale. On obtient dans ce cas :

$$f(x)=\sqrt{a}+\frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a)+\left(\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)(x-a)\,.$$

La figure montre la représentation graphique de la courbe et sa tangente pour $a = 1$, avec la vue du rectangle $[0{,}75,\ 1{,}25]\times[0{,}80,\ 1{,}20]$.





6. Etude de points critiques de fonctions algébriques et prolongements

Pour les fonctions que nous envisageons, les points critiques sont ceux du domaine de la fonction considérée où elle est soit dérivable de dérivée nulle, soit non dérivable. Dans le premier cas vont se trouver les candidats à être des maximums ou des minimums locaux, dans le second apparaîtront des situations de tangentes parallèles à l’axe des ordonnées ainsi que des situations de “rupture”, telle celle que présente $y = |x|$ à l’origine, et qui seront vues de plus près dans la séance 11.

La suite du cours consiste en l’étude des dérivées d’ordre supérieur et l’introduction des notions de concavité et de points d’inflexion. C’est en particulier la dérivée seconde qui conduit à une classification des points critiques.

Exercices proposés : Résolution de problèmes d’optimisation, obtention de la courbe représentative de quelques fonctions, cette étude incluant les éléments déjà vus, comme le domaine, les zéros, la parité, mais conduisant aussi à obtenir points critiques, intervalles de monotonie, concavité, points d’inflexion et ensemble image. La distinction entre minimums ou maximums absolus et relatifs est également demandée.

Séance 10. Correction des exercices qui ont provoqué des doutes chez les étudiants.

Séance 11. Fonctions non dérivables en un point : fonction valeur absolue, fonctions définies par morceaux, exposants rationnels. Notion de dérivée à droite ou à gauche. Relation avec les questions de tangentes : courbes n'admettant pas de tangente en un point et allure du graphe à son voisinage, tangentes verticales.

Exercices récapitulatifs de l'ensemble des sujets étudiés jusqu'ici dans le cours.

Séance 12. Correction des exercices qui ont provoqué des doutes chez les étudiants.

Séance 13 et 14. Séances d'exercices.

Séance 15. Deuxième examen partiel.

7. Variations, de la dérivée aux limites et à la continuité

La troisième partie du cours (12 séances magistrales et 8 d'exercices) est consacrée aux applications de la dérivation à l'étude de taux d'accroissement moyens, son interprétation particulière comme pente d'une sécante à la courbe représentative d'une fonction et comme vitesse moyenne pour un mouvement. Est présenté le taux d'accroissement limite ou instantané (en mettant l'accent sur limite et instantané, sur lesquels on reviendra) comme la dérivée de la fonction, l'interprétant comme la pente de la tangente, comme la vitesse instantanée. Cela amène à utiliser des graphiques fonctionnant comme idéogrammes selon l'expression de Maschietto (2001, p. 129). Le mouvement rectiligne d'une particule est représenté et ses caractéristiques jusqu'à l'accélération sont étudiées, ainsi que les taux d'accroissement associés (problèmes à plusieurs variables dépendant d'une unique variable indépendante, généralement le temps).

L'écriture que nous avions rencontrée, à savoir $f(x+h)-f(x)=hQ(h)$ permet de dire que *Q(h)* est le quotient effectué de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Ce quotient effectué vaut $f'(x)$ en $h = 0$, ce qui peut être noté $\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]_{h=0} = f'(x)$.

C'est justement une possible entrée pour la définition d'une limite, puis pour la formalisation de la notion de limite, objet du thème 3 de ce cours de calcul différentiel. Pour ce thème 3, nous sommes revenus à la présentation traditionnelle, notammant pour la levée d'indéterminations de la forme $\frac{0}{0}$, mais en ayant la possibilité de nous appuyer sur les simplifications rencontrées dans les études de polynomes et d'expressions algébriques.

Cette même remarque est valable pour la continuité et les propriétés des fonctions continues (thème 3 du cours). Les limites infinies et les limites à l'infini ont également pu s'appuyer sur les exemples précédemment rencontrés, telle la fonction $f(x)=\frac{1}{x}$.

8. Résultats et conclusions

Les tableaux qui suivent mettent en regard les résultats du prétest avec les résultats d'examen. Le barème pour l'examen conduit aux résultats : Très Bien de 90 à 100 points, Bien de 75 à moins de 90 points, Suffisant de (60 à moins de 75 points), Echec en dessous de 60 points.

Le premier tableau indique les résultats de groupes antérieurs à la mise en œuvre de notre proposition d'enseignement.

Prétest : Réponses correctes / Examen	0 à 6	7 à 12	13 à 18	19 à 24
Échec	8	8	0	0
Suffisant	0	1	2	0
Bien	0	0	3	0
Très bien	0	0	2	2

Au total sur ces groupes, le taux de réussite à l'examen a été de 10/26 = 0,38. Notons aussi qu'une proportion de 0,60 s'était située pour le prétest dans les groupes faible et moyen-faible (de 0 à 12 réponses correctes) et que parmi ces étudiants 1 seul a réussi.

Le second tableau est celui des groupes qui ont été concernés par notre proposition alternative d'enseignement.

Prétest : Réponses correctes / Examen	0 à 6	7 à 12	13 à 18	19 à 24
Échec	12	15	2	0
Suffisant	1	8	1	0
Bien	0	4	2	0
Très bien	0	3	2	0

Dans ce second tableau, il apparaît que le taux de réussite général à l'examen a été cette fois-ci de 21/50 = 0,42. On notera aussi que la proportion d'étudiants des groupes faible et moyen-faible du prétest a augmenté, passant à 0,86, et que 16 (soit une proportion de 0,37) parmi ces étudiants ont réussi l'examen.

C'est ce dernier chiffre qui est le plus impressionant, car la légère augmentation générale de 0,38 à 0,42 n'est pas statistiquement significative compte tenu des effectifs en jeu. Les étudiants présentant au départ des déficiences en matière de connaissances numériques et surtout algébriques ont rencontré, dans la progression d'enseignement que nous leur avons présentée, l'occasion de progresser au point de réussir l'examen, alors que cette possibilité était pratiquement inexistante dans la présentation traditionnelle.

Au moment de conclure, signalons que la progression adoptée nous a permis d'aller plus vite au cœur du sujet central de ce cours, c'est-à-dire la dérivation et ses appications. Nous avons donc disposé de davantage de temps pour développer ce sujet, y revenir et l'exploiter dans un plus grand nombre d'exercices. Un autre facteur de réussite a pu être la motivation introduite par des problèmes d'optimisation, qui ont pu s'inscrire dans une continuité par rapport au thème général de la modélisation par des fonctions et offrir aux étudiants des chances d'améliorer leur compréhension générale du concept de fonctions et des notions qui s'y rattachent. Ce sont ces deux vertus dont notre expérience a pu être dotée, sans perte concomittante en termes de mise en forme des concepts mathématiques, que nous retiendrons comme les apports didactiques peut-être les plus intéressants de cette étude.

Annexe 2 : Questionnaire proposé aux étudiants (présentation condensée)

Sans calculatrice

Question A. Placer dans chaque cadre le signe <, > ou = qui convient.

1) (exemple) $1 \boxed{=} 1$ ***2)*** $0.8 \boxed{\quad} 0.10$ ***3)*** $(51)^3 \boxed{\quad} (-51)^3$

4) $(2-7)^8 \boxed{\quad} (8-3)^8$ ***5)*** $(0{,}0121)^2 \boxed{\quad} (0{,}0121)^5$ ***6)*** $(121)^2 \boxed{\quad} (121)^5$

7) $(777+999)^2 \boxed{\quad} (777)^2+(999)^2$ ***8)*** $(555)^2-(333)^2 \boxed{\quad} 222\times 888$

Question B. Simplifier autant que possible chacune des fractions suivantes.

1) $\dfrac{10000-144}{100+12}=\dots$ ***2)*** $\dfrac{2000}{1111}-\dfrac{1000}{1111}=\dots$ ***3)*** $\dfrac{15}{284}+\dfrac{100}{142}=\dots$

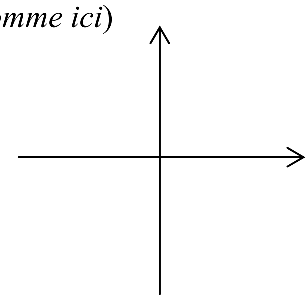
4) $\dfrac{15}{512}-\dfrac{100}{256}=\dots$ ***5)*** $\dfrac{512}{51}\times\dfrac{102}{256}=\dots$ ***6)*** $\dfrac{312}{32}\div\dfrac{156}{16}=\dots$

Question C. Simplifier chacune des expressions ci-dessous :

1) $\dfrac{2(x-3)^2-18}{2x^2}=$ ***2)*** $\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-2x+1}=$ ***3)*** $\dfrac{2x^2+3x+1}{x+1}=$ ***4)*** $\dfrac{x^2-1}{x^3-1}=$

Question D. Représenter graphiquement *(un système d'axes était placé en regard de chaque énoncé, non seulement du premier comme ici*)

1) $y=a\,x$ et $y=b\,x$, avec $0<a<b$



2) $y=m\,x+3$ pour $0<m<1$

3) $y=m\,x+3$ pour $m<-1$

4) $y=2+a\,x^2$ pour $a<0$

5) $y=2+a\,x^2$ pour $a>0$

6) $y=x^2$ et $y=x^3$

Question E. Compléter : Si $\dfrac{1}{F}=\dfrac{d^2}{GmM}$ alors $m=$

Bibliographie

ANDREU Ma. E., BECERRIL E. J.V., GUZMÁN H. J., Meda V. M. & ULÍN J.C. (1992), *Diagnosis y Remedio de la Deficiencia en Conocimientos Matemáticos en Estudiantes de Nuevo Ingreso a Escuelas de Ingeniería, Reporte de Investigación,* Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azc. CBI, México.

ANDREU Ma. E. & RIESTRA J.A. (2005), Propuesta alternativa para la enseñanza del concepto de derivada desde una perspectiva histórico-epistemológica de su desarrollo. In José Carlos Cortes & Fernando Hitt (Eds.) *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza,* Morevallado Editores, Morelia, Mich. México, 157-174.

APPELL P., FATOU P. & GOURSAT E. (1929), *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales : Étude des fonctions analytiques sur une surface de Riemann*, Chapitre 4 : Les fonctions algébriques d'une variable et les surfaces de Riemann correspondantes, 2e édition revue et augmentée par Pierre Fatou, Paris : Gauthier-Villars et fils, 165-221. Consultable en ligne <http://gallica.bnf.fr/>

BOYER Carl B. (1959), *The History of the Calculus and its conceptual Development,* Dover Publications, New York.

FERMAT P. (1660), De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione dissertatio geometrica, Tolosae : apud Arnaldum Colomerium
Consultable en ligne <http://gallica.bnf.fr/>

GRABINER J.V. (1983), The Changing Concept of Change: The derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine* ***56 (4)****,* 195-206.

HITT F. & PÁEZ R. (2004), On the limit concept in a cooperative learning environment: A case study, *Proceedings PME-NA XXVI*, Toronto, Canada, **Vol. 1**, 103-110.

MASCHIETTO M. (2001), Fonctionnalité des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'analyse à l'université, *Recherches en Didactique des Mathématiques* ***Vol. 21, nº 1-2***, 123-156.

RIESTRA J. A. (2001), El Método de Fermat para la determinación de Extremos de Polinomios. Una Visión Moderna. *Miscelánea Matemática* ***34****,* 103-112.

RIESTRA J.A. & ULÍN C.A. (2003), Tangencia, contacto y la diferencial. En Eugenio Filloy et al. (Eds.) *Matemática Educativa: Aspectos de la investigación actual.* México, FCE, 218-241.

STRUIK D. (1969), *A Source Book in Mathematics*, 1200-1800. Cambridge, MA. Harvard University Press.

TALL D. (1996), *Functions and Calculus; International Handbook of Mathematics Education*, chapter 8. The Netherlands, Kluwer Academic Publishers.

TROMPLER S. & NOËL G. (2003), *Vers les infiniment petits*, Bruxelles, Éditions SBPMef.

MARIA EUGENIA ANDREU
Departamento de Ciencias Básicas, UAM-A
Av. San Pablo No. 180, Col. Reynosa Tamaulipas, C.P. 02200, México, D.F.
mai@correo.azc.uam.mx

JESUS A. RIESTRA
Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV del IPN
Ave. I. P. N. 2508 Col San Pedro Zacatenco, 07360 México, D.F.
riestra@cinvestav.mx

FRANÇOIS PLUVINAGE
IREM
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex
pluvin@math.u-strasbg.fr