LAURENT VIVIER

DE LA SYNTHESE SUR LES NOMBRES A LA *DOXA* ENSEMBLISTE

Abstract. From number synthesis to belief in naïve set theory - In this work we study the number summary required by the French curriculum for 14 and 15 years old pupils. We point out that, in textbooks and class lessons, the role played by the five classical number sets is huge for this synthesis. We discuss this fact by identifying what is relevant for mathematics in French secondary education. The analysis focuses on French mathematics curricula, textbooks and classrooms. We use the notion of settings defined by Régine Douady, the semiotic theory of Raymond Duval and the anthropologic theory of Yves Chevallard. Throughout this article we propose some ideas for a real number summary.

Résumé. Dans cet article nous étudions comment est pratiquée la synthèse sur les nombres en fin de collège et au début du lycée dans l'enseignement des mathématiques en France. Plus spécifiquement, nous interrogeons l'apport réel, et non supposé, des cinq ensembles usuels de nombres pour une synthèse sur les nombres dans l'enseignement secondaire. L'analyse porte sur les programmes, leurs accompagnements et les manuels des classes de troisième et de seconde ainsi que sur l'observation de trois classes de seconde lors de l'introduction des ensembles de nombres. Tout au long de l'article nous proposons des pistes pour produire de réelles synthèses sur les nombres. Nous utilisons, en les articulant, la référence cognitive aux cadres de Régine Douady, la théorie sémiotique de Raymond Duval et la théorie anthropologique du didactique de Yves Chevallard.

Mots-clés. Nombres, ensembles de nombres, synthèse, cadre, registre sémiotique, praxéologie.

Introduction

Les programmes français de mathématiques des classes de troisième et de seconde[1], grades 9 et 10, requièrent une synthèse sur les nombres mais ne donnent que des indications sommaires aux enseignants pour mener à bien leur tâche. La lecture des accompagnements de programmes ne permet pas de combler cette lacune. Tout se passe comme si synthétiser l'enseignement des nombres du primaire et du collège était une évidence. Nous montrons en quoi consiste cette *évidence* et nous nous interrogeons sur les possibilités réelles de produire une synthèse sur les nombres.

Il est certes compréhensible de procéder à une synthèse sur les nombres à la fin d'un cycle pour la classe de troisième et au début d'un nouveau cycle pour la classe de seconde. Mais ce qui nous intéresse ici est la manière de procéder à cette

[1] Il s'agit des programmes en vigueur à la rentrée 1999 pour la classe de troisième et 2002 pour la classe de seconde.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 13, p. 63 - 92.

synthèse. De manière générale, on estime que parler d'ensemble de nombres implique une synthèse sur les nombres. Cette relation est sujette à interrogation en soi. Nous montrons, par une double analyse sémiotique et praxéologique, que l'apport des ensembles de nombres n'est pas à chercher dans les savoirs et savoir-faire mais dans l'élaboration du langage mathématique. Nous en déduisons que, dans l'enseignement secondaire français, la synthèse sur les nombres par les ensembles de nombres se révèle être une *doxa*. La *synthèse* proposée aux élèves se contente de couvrir le concept de nombre par une couche d'ensembles. Finalement, la synthèse sur les nombres disparaît au profit d'un bilan sur les ensembles de nombres, bilan d'une grande pauvreté mathématique.

Nous proposons au cours de cet article des pistes qui nous semblent pouvoir produire une réelle synthèse sur les nombres dans l'enseignement secondaire. Les développements décimaux nous paraissent à ce sujet très intéressants. Les écritures décimales sont bien entendu rencontrées dans notre étude, mais l'enseignement des mathématiques au secondaire ne les exploitent pas suffisamment. Nous exposons l'intérêt de cette écriture des nombres réels pour classer et unifier les nombres.

Notre étude s'appuie sur la théorie des registres de représentation de Raymond Duval ainsi que sur la théorie anthropologique du didactique de Yves Chevallard. Ces deux théories nous semblent être au cœur de l'activité mathématique et nous les articulons pour les besoins de notre analyse. Nous utilisons également les cadres de Régine Douady afin de rendre la différence entre nombres et ensembles de nombres opérationnelle. L'analyse principale porte sur les programmes et leurs accompagnements des classes de troisième et de seconde, ainsi que sur 7 manuels de troisième et 18 de seconde. Nous faisons l'hypothèse que les manuels étudiés forment un panel représentatif – ce sont les manuels envoyés par les éditeurs au centre IUFM de La Seyne-sur-Mer. Cette étude curriculaire est complétée par l'observation de classes : nous avons assisté aux cours traitant de la synthèse sur les nombres de 3 enseignants de seconde dans un lycée du Var. Les classes de ces trois professeurs, nous nommons ces trois personnes P_A, P_B et P_C, ont permis de préciser l'étude. En particulier, les réactions des élèves et des professeurs révèlent les problèmes que l'étude des textes officiels et des manuels ne peut qu'esquisser.

En section 1 nous focalisons notre étude sur l'aspect sémiotique dont nous exploitons les résultats en section 2 pour mettre à jour la *doxa* ensembliste. L'articulation avec la théorie anthropologique fait l'objet de la section 3. Nous terminons notre étude en section 4 par les représentations graphiques des ensembles de nombres.

1. Analyse sémiotique

Nous distinguons deux cadres au sens de Douady (1986) qui vont nous permettre de mieux comprendre les conversions de registres sémiotiques : le cadre numérique élémentaire C0 qui a pour objets mathématiques les nombres, et le cadre ensembliste C1 qui a pour objets mathématiques les ensembles. La différence notable entre ces deux cadres réside dans la notion de nombre : d'objet premier auquel on a un accès direct dans C0, il devient second dans C1 puisqu'un nombre est un élément d'un ensemble.

1.1. Les registres

Nous exposons dans cette section les registres de représentation (Duval, 1995) associés aux cadres C0 et C1.

1.1.1. Les registres numériques

Le cadre C0 se construit dans l'enseignement en parallèle avec les registres de représentation décimal, fractionnaire et scientifique en nous limitant au système de numération en base dix. Nous considérons également le registre intrinsèque, ou algébrique, pour lequel un nombre peut être représenté par une lettre, sans référence directe à un système de numération. Ces registres forment un réseau plus ou moins solide selon leurs coordinations. Nous notons R0 ce réseau de registres et nous ne distinguons pas les différents registres dont R0 est composé sauf lorsque le besoin s'en fera ressentir. Ce que nous appelons une conversion de R0 vers un autre registre de représentation R est en fait une conversion d'un registre du réseau R0 vers ce registre R.

Nous considérons également comme faisant partie de ce réseau de registres R0 : le nombre π et les nombres qui s'écrivent en fonction de π, les puissances, les radicaux et les développements décimaux illimités. Les développements décimaux illimités pourraient constituer un registre de l'institution Enseignement des Mathématiques du Secondaire (EMS) définie par Bronner (1997b). Il n'en est rien : l'institution EMS n'utilise presque pas les développements décimaux car elle se limite pour l'essentiel aux périodiques. Pourtant, ce registre des développements décimaux serait d'une grande utilité pour l'enseignement des nombres et particulièrement pour la synthèse sur les nombres.

En revanche, nous ne considérons pas le registre de représentation sur une droite graduée comme un registre de R0 pour deux raisons. D'une part on sort du cadre numérique C0 et d'autre part on utilise presque systématiquement un des registres qui composent R0 pour placer les points sur une droite.

Les registres qui composent le réseau R0 sont coordonnés, ce qui permet de donner du sens et de procéder à des traitements et des conversions comme pour le calcul de « 3,1+2/3 » ou pour écrire « 1/4 = 0,25 »[2]. De ce fait, le réseau de registres R0 répond au fonctionnement cognitif de base pour les mathématiques puisqu'il satisfait, relativement au cadre C0, les deux conditions explicitées par Duval (1996) : « le fait de disposer *non pas d'un* mais de *plusieurs systèmes* de signes qui vont fonctionner comme des registres de représentation pour des fonctions cognitives de traitement et d'objectivation » et « la nécessaire coordination de ces registres ». Néanmoins, la coordination des registres de R0 n'est pas parfaite. Ceci a des incidences sur les apprentissages numériques des élèves de EMS comme l'a pointé la commission Kahane pour le calcul (Kahane, 2002).

1.1.2. Le registre ensembliste

Il serait inutile de considérer pour notre propos que C1 est le cadre axiomatique de la théorie des ensembles car il n'apparaît pas dans EMS. Le cadre C1 est donc relatif à une théorie naïve des ensembles, non axiomatisée, où les objets *ensembles* sont à prendre dans un sens intuitif. Les ensembles de nombres sont déclarés sans être réellement définis ce qui est conforme au programme de seconde qui parle de « notations » et non d'objets. Ainsi, C1 qui pourrait apparaître à première vue comme un cadre n'est en fait, dans l'institution EMS, qu'une utilisation d'une partie du système sémiotique relatif à ce cadre. Nous notons R1 ce registre de représentation dont les signes principaux sont $\in$, $\notin$, $\subset$, …, {, } et les notations des cinq ensembles usuels de nombres **N**, **Z**, **D**, **Q** et **R**.

Nous pourrions ajouter les symboles $\cup$, $\cap$ et $\varnothing$ qui apparaissent aux côtés des précédents en page 8 de l'*Accompagnement du programme de seconde*, ainsi que $+\infty$, $-\infty$,] et [. Mais bien que souvent utilisés, leurs usages se cantonnent au chapitre sur les intervalles : ils forment un registre sémiotique qui semble indépendant de ce que nous notons R1. Bien sûr, les intervalles sont des ensembles et même des ensembles de nombres. Mais, dans les manuels de seconde, ils n'apparaissent pas dans le chapitre sur les ensembles de nombres. Le lien entre les intervalles et les *ensembles de nombres* n'est pas fait même si l'on note dans 7 manuels sur les 18 l'affirmation que **R** est un intervalle. Nous excluons les intervalles de notre propos pour nous concentrer sur les cinq ensembles usuels de nombres et la synthèse sur les nombres.

Bien entendu, les nombres sont des objets de C1 puisqu'ils sont les éléments des ensembles de nombres. Il est nécessaire de les déclarer et donc d'utiliser les registres de R0. Mais les nombres sont seconds et *inertes* dans le sens où aucun traitement n'est requis dans le cadre ensembliste comme l'atteste l'absence – ou la très faible occurrence – des structures algébriques des ensembles de nombres (cf.

[2] Les exemples du premier type sont d'une grande rareté et le second exemple est remprunté à Duval (1996).

section 1.2.3). Nous faisons l'hypothèse que l'utilisation des registres de R0 ne sert, dans le cadre C1, que pour déclarer les éléments des ensembles.

R1 est bien un registre de représentation défini par Duval (1996) puisqu'il permet les trois fonctions cognitives fondamentales : la fonction de communication, comme lorsque l'on écrit « $\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$ », la fonction de traitement, comme lorsque l'on écrit « comme $5{,}1\in\mathbf{D}$ alors $5{,}1\in\mathbf{Q}$ », et la fonction d'objectivation, comme lorsque l'on déclare l'objet **N** pour désigner *tous les entiers naturels*.

1.2. L'apport sémiotique du registre R1

1.2.1. L'objectivation

L'objectivation est la fonction méta-cognitive définie par Duval (1996) comme « la possibilité pour le sujet de prendre conscience de ce dont jusqu'alors il n'avait pas eu conscience et de ce dont il ne peut avoir encore une conscience claire tant qu'un travail d'extériorisation à des fins de réorganisation n'est pas encore accompli ». Il s'agit d'une grande fonction assumée par R1. L'objectivation se produit par la prise de conscience que des nombres partagent les mêmes propriétés et qu'ils peuvent être ainsi classés dans les ensembles usuels de nombres.

On trouve rapidement la nécessité de classer les nombres chez les trois enseignants, et même les élèves de P_B devancent leur professeur sur ce point. Mais les élèves pensent aux catégories usuelles des nombres et ils n'ont naturellement pas l'idée d'introduire des ensembles. Les professeurs sont donc obligés de forcer la main à ce moment avec, pour P_C, une référence au programme : « un des objectifs de cette leçon c'est qu'un élève de seconde soit capable de classer le nombre qu'on lui présente dans les ensembles là, **N Z D Q R** ». Ce passage en force n'est pas étonnant, car à ce stade du curriculum il manque l'objet mathématique *ensemble*. Ainsi, l'objectivation ne peut qu'être incomplète.

Plus précisément, on note que seuls **N** et **Z** ont des écritures dans le registre R1 avec accolades et points de suspension du type {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; …} ou {… -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; …}. Ces écritures[3], observées dans 9 manuels de seconde sur les 18 étudiés et chez deux professeurs, permettent l'objectivation des ensembles de nombres du fait de l'énumération des éléments.

Si les manuels sont très partagés sur la manière d'objectiver **N** et **Z** – utilisation ou non de R1 –, en revanche ils sont tous en phase, à de très petites variations près, pour **D** et **Q**. On ne peut plus énumérer leurs éléments dans l'ordre, donc on déclare ces ensembles en compréhension. Le registre R1 n'est jamais utilisé, et il faut se contenter de, par exemple pour le manuel **a** : « Les nombres rationnels sont

[3] Voir également l'extrait de manuel proposé par Bronner en Annexe (Bronner, 1997b). On y retrouve les déclarations principales dont nous discutons ici.

les quotients *a/b* où *a* est un entier relatif et *b* un entier relatif non nul. L'ensemble des nombres rationnels se note **Q**. »[4]. L'objectivation se produit dans le registre de la langue naturelle, comme si on se refusait d'utiliser R1 pour remplir la fonction d'objectivation relative à ces deux ensembles de nombres. La fonction d'objectivation, si elle est remplie par R1, l'est de manière différente selon les propriétés fondamentales des ensembles de nombres considérés qui influencent la manière avec laquelle on peut organiser les éléments.

En ce qui concerne **R**, 11 manuels de seconde l'introduisent par la droite numérique, 4 en le définissant comme l'ensemble qui contient les rationnels et les irrationnels et 3 comme l'ensemble de tous les nombres. Si la majorité des manuels est conforme au programme de seconde[5], plus d'un tiers d'entre eux ne donnent qu'un simulacre de définition car, soit ils ne disent pas ce qu'est un irrationnel, soit ils ne disent pas ce qu'est un nombre. Ces deux questions ne trouvent évidemment leur réponse que dans la construction de **R**, et l'on rejoint la conclusion de Bronner sur le vide didactique des nombres réels (Bronner 1997a,b). Il est difficile de parler d'objectivation : d'une part, pour les 11 premiers manuels, l'objet est déjà là – la droite graduée – il ne s'agit que d'une nouvelle représentation dans un autre registre et d'autre part, pour les 7 autres manuels, aucune prise de conscience ne peut avoir lieu puisque l'on se base sur des objets dont on n'a pas conscience. Les trois professeurs qui sont confrontés à d'autres contraintes se doivent de donner une justification plus consistante : ils résolvent le problème en déclarant à leurs élèves que « les réels existent ».

1.2.2. Indépendance de la langue naturelle

Le registre R1 participe à l'indépendance de la langue mathématique par rapport à la langue naturelle. Avec les seuls registres composant R0 il est impossible d'avoir un discours sur la nature des nombres et la fonction apophantique de constitution d'énoncé complet (Duval, 1995) de la langue naturelle est incontournable. Comment dire, avec les seuls registres de R0, « 3,1 est décimal » ou déclarer « la somme de deux rationnels est un rationnel » ? En se limitant à R0, il faut se contenter de « 3,1 » et de, par exemple, « $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ ». Certes ces deux expressions contiennent toute l'information mais l'interprétation reste à faire.

---

[4] Tous les manuels proposent ce type de définition pour **Q**. Il en est de même pour **D** même si on relève deux *définitions* d'un nombre décimal : fraction $a/10^n$ ou *nombre à virgule*.
[5] Il subsiste une ambiguïté dans ces onze premiers manuels : on peut légitimement se demander comment cette droite a été graduée.

En revanche, R1 permet cette fonction de discours sur C0. Sur nos exemples nous pouvons écrire : « 3,1 $\in$ **D** » ou « si $x \in$ **Q** et $y \in$ **Q** alors $x+y \in$ **Q** » [6]. Bien entendu, c'est à partir de la langue naturelle que cette fonction de R1 se développe, mais ceci est propre à tous les systèmes sémiotiques (Duval, 1996). P_C assume complètement ce développement de la langue mathématique et indique à plusieurs reprises l'intérêt des notations et des symboles nouveaux qui sont introduits en classe de seconde.

1.2.3. Les structures algébriques

Les deux exemples précédents ne sont pas choisis au hasard car il s'agit des seules utilisations de R1 relevées dans les manuels de seconde mettant en jeu directement les nombres. L'intérêt des écritures, relatives à la nature des nombres, du type « 3,1 $\in$ **D** » est très restreint du point de vue mathématique, nous en discuterons plus longuement à la section suivante. En revanche, les expressions du type « si $x \in$ **Q** et $y \in$ **Q** alors $x+y \in$ **Q** » sont très intéressantes car les structures algébriques des ensembles de nombres sont à portée. Mais l'analyse montre que cela reste tout à fait confidentiel car si certains manuels de seconde s'en préoccupent, c'est toujours de manière anecdotique, et uniquement dans des exercices.

Ainsi la possibilité d'exposer les structures algébriques, sans nécessairement trop s'y attarder, est une potentialité non exploitée. Il faut comparer cet état actuel de EMS avec d'autres institutions pour comprendre que ce n'est pas toujours la position des programmes. En effet, les programmes des classes du collège de l'époque des Mathématiques Modernes ou, de nos jours, la première année de Classe Préparatoire aux Grandes Ecoles, section scientifique, proposent tous deux, aux côtés de C1 et R1 les structures algébriques de base. Dans EMS, seul subsiste le registre R1 et des bribes du cadre C1 sans que n'apparaissent les structures algébriques qui peuvent motiver l'introduction de R1. Nous pensons que cet état de EMS provient d'une transposition institutionnelle dont l'étude reste à faire.

1.3. La conversion entre R0 et R1 : une excellente congruence

1.3.1. A l'oral : l'expansion discursive de la langue naturelle

Nous venons de voir que l'utilisation de R1 était essentiellement centrée sur la nature des nombres et que R0 ne peut porter ce discours seul car la langue naturelle est nécessaire. De ce fait, il n'y a pas vraiment de conversion de registres au sens de Duval entre R0 et R1. Reprenons l'exemple « 3,1 $\in$ **D** ». Cet énoncé dans R1

---

[6] Nous ne tenons pas compte des mots de liaison qui sont issus de la langue naturelle car il serait artificiel d'écrire « $x \in$ **Q**, $y \in$ **Q** $\Rightarrow x+y \in$ **Q** ».

peut être converti dans la langue naturelle en « 3,1 appartient à D »[7]. Nous avons constaté que la fonction apophantique de la langue naturelle permet de dire « 3,1 est un décimal »[8]. Le passage se produit donc dans la langue naturelle entre « trois virgule un appartient à D » et « 3,1 est un décimal » : il s'agit de la fonction d'expansion discursive de la langue naturelle (Duval, 1995).

On voit cette fonction d'expansion discursive de la langue naturelle à l'œuvre dans le discours des professeurs comme le montre ce passage relevé dans le cours de P_A :

> P_A : Ainsi quand j'écris 2/3 appartient à **Q** comme ça. [*il écrit au tableau* 2/3∈**Q**] Voilà. ça veut dire 2/3 est un nombre rationnel.
> Elèves : c'est quoi le petit e là avec…
> P_A : ça ça veut dire appartient.
> Elèves : ça veut dire quoi appartient ?
> P_A : 2/3 est un rationnel, 2/3 appartient à l'ensemble des rationnels
> Elèves : Ah oui, c'est l'ensemble…
> P_A : L'ensemble de tous les rationnels, voilà je note
> Elèves : Dès qu'on a une fraction, c'est **Q**

Pour P_A il s'agit bien de l'expansion discursive de la langue naturelle car les deux expressions « 2/3 est un rationnel » et « 2/3 appartient à l'ensemble des rationnels » ont du sens pour lui. Ce n'est évidemment pas le cas pour ses élèves pour lesquels le registre R1 est en construction.

Cette construction de R1 s'observe dans les manuels. Par exemple, le manuel **a** précise la conversion entre le registre R1 et la langue naturelle : « on écrit 3∈**N** » et « on lit 3 appartient à **N** ». Néanmoins, nous préférons considérer cette conversion comme une conversion entre les registres ostensifs écrit et oral de R1 (Bosch et Chevallard, 1999).

1.3.2. A l'écrit : une conversion très congruente

Afin de faire ressortir une conversion entre R0 et R1, il est nécessaire de neutraliser la fonction d'expansion discursive de la langue naturelle. On considère alors dans cette section les ostensifs écrits car, comme nous l'avons vu avec P_A, pour la nature des nombres l'expansion discursive de la langue naturelle fonctionne essentiellement à l'oral. A l'écrit, l'on dispose de : « 3,1 est décimal » pour R0 épaulé par la langue naturelle et de « 3,1∈**D** » pour R1.

Nous faisons ainsi apparaître une conversion entre les ostensifs écrits dont la congruence est excellente comme l'indique la correspondance des unités signifiantes :

---

[7] Toutes les unités sont signifiantes dans R1 alors que des variations, cognitivement neutres, sont possibles dans la langue naturelle car on peut tout aussi bien dire « est élément de ».
[8] On relève encore des variations cognitivement neutres : « est un (nombre) décimal ».

R0 et langue naturelle	3,1	est	décimal
R1	3,1	$\in$	**D**

La congruence est accentuée par les initiales. Très forte pour **D** et **R**, elle l'est un peu moins pour **N**, **Q** et **Z**. Certains manuels (5 sur les 18) utilisent ces initiales sans doute pour faciliter la conversion. Les professeurs ne peuvent y échapper et les trois que nous avons observés y font référence à des stades divers avec une participation active des élèves de P_B. La congruence est également forte avec les inclusions : « tout décimal est un rationnel (ou quotient) » et « $\mathbf{D}\subset\mathbf{Q}$ ».

Cette forte congruence, bien qu'intéressante pour les élèves, l'est moins du point de vue cognitif. Après avoir posé la coordination des registres comme un des deux points-clés de l'apprentissage, Duval (1996) précise le type de coordination dont il affirme l'importance :

> Cette coordination se traduit par la capacité de changer de registre en cas de non-congruence. En effet, un changement de registre s'effectue spontanément dans toutes les situations où il y a congruence entre les représentations qui constituent le départ et l'arrivée de la conversion. Car, dans ce cas, la représentation, du registre de départ est comme transparente à celle du registre d'arrivée. Mais lorsqu'il n'y a plus congruence, la conversion requiert la capacité de discriminer les unités signifiantes pertinentes ou les valeurs visuelles pertinentes à la fois dans la représentation du registre de départ et dans celle du registre d'arrivée, étant donné qu'il n'y a plus de correspondance directe possible entre elles. Des performances obtenues pour des tâches dont l'accomplissement n'implique pas de façon décisive des changements de registre peuvent donc être trompeuses sur la portée et la valeur des acquisitions.

Nous verrons en section 4 qu'effectivement les réussites des élèves masquent de sérieux problèmes.

2. La *doxa* ensembliste

Cette analyse sémiotique nous permet, à travers l'étude des manuels des classes de troisième et de seconde, de dévoiler une puissante *doxa*[9].

2.1. La classe de troisième : une impossible synthèse

Comme il est écrit dans le programme en page 77, la classe de troisième se doit « de faire une première synthèse sur les nombres avec un éclairage historique et

[9] Le terme *doxa* est utilisé dans son sens platonicien pour désigner le discours commun, l'opinion commune par opposition à la pensée personnelle et réfléchie.

une mise en valeur des processus algorithmiques »[10]. Le registre R1 est absent des textes officiels du collège, hormis le symbole d'appartenance qui figure au programme et le symbole de non appartenance qui est aussi utilisé[11]. Ils constituent des indicateurs importants dont nous cherchons l'utilisation dans le chapitre sur le théorème de Thalès puisqu'il s'agit du seul endroit du programme où l'on trouve des expressions du type « point sur une droite » qui peut être formalisé à l'aide de ce symbole. Mais afin de produire une analyse plus fine nous avons besoin d'autres indicateurs. Nous relevons les éventuelles déclarations des ensembles de nombres ainsi que l'expression « ensemble de nombres ». Nous regardons également si une classification des nombres est produite et si des exercices sur la nature des nombres sont proposés. Le résultat de nos investigations se trouve en Annexe 1.

Sur les 7 manuels de troisième analysés, deux types de manuels se distinguent particulièrement bien : le type M0 constitué par les manuels qui n'utilisent pas, ou très peu, les symboles de R1 ni d'expressions issues de C1 et le type M1 constitué des manuels qui les utilisent de manière assumée. On remarque immédiatement que les manuels du type M1 font tous une synthèse sur les nombres en proposant une classification et des exercices sur la nature des nombres alors que ceux du type M0, à une exception près, n'en font aucune. Par suite, 6 manuels sur les 7 ne suivent pas le programme soit parce qu'aucune synthèse n'est faite soit parce que le registre R1 et le cadre C1 sont utilisés pleinement. Les six manuels en question supposent, implicitement, l'assertion suivante : *aucune synthèse sur les nombres ne peut être réalisée sans les ensembles de nombres*. Cette assertion est évidemment fausse.

Observons le manuel *Nouveau Pythagore* : il produit une synthèse sur les nombres en restant bien dans C0, avec le réseau de registres R0, tout en proposant un regard historique. Ce que propose ce manuel est en fait parfaitement banal puisqu'il se contente de suivre les instructions du programme qui demande un « éclairage historique ». Il faut donc que la force de cette fausse assertion soit grande pour se retrouver au cœur de la grande majorité des manuels et faire fi des programmes.

Cette fausse assertion révèle une *doxa* : il suffit de parler d'ensemble de nombres pour produire une synthèse sur les nombres. Elle s'accompagne d'un corollaire : il est inutile de chercher, ou proposer, une synthèse sur les nombres qui ne soit pas ensembliste.

---

[10] Pour notre propos, le nouveau programme de troisième, en vigueur à la rentrée 2008, diffère très peu du programme de 1999 étudié dans cet article. On note toutefois la disparition des programmes du mot *irrationnel* et des processus algorithmiques.

[11] Un peu comme les symboles = et ≠ dont seul le premier est déclaré dans les textes officiels.

2.2. La classe de seconde

2.2.1. Une stabilité retrouvée

Nous nous intéressons maintenant à la manière dont est traitée la synthèse sur les nombres en classe de seconde. On lit en page 9 du Programme de Seconde de 2002 que le premier objectif est « d'approfondir la connaissance des différents types de nombres », puis en page 10 : « nature et écriture des nombres. Notations **N**, **Z**, **D**, **Q**, **R**. ». La synthèse n'apparaît explicitement que dans l'Accompagnement de programme, en page 13 : « Le programme rassemble sous un titre unique un bilan sur les ensembles de nombres, les problèmes de calculs numériques et algébriques et l'étude des fonctions. C'est une invitation forte à chaque enseignant pour qu'il construise son cours en faisant interagir ces différents éléments : […] » suivi par une liste de ces éléments où l'on note l'absence significatives des ensembles de nombres. Puis, dans la sous-rubrique « **Nombres**, **Nature et écriture des nombres** » : « On fera une synthèse des connaissances rencontrées jusque-là par les élèves et on introduira les notations usuelles des différents ensembles. Les élèves devront savoir reconnaître à quels ensembles appartiennent les nombres rencontrés. »

Comme l'on peut s'y attendre avec la *doxa*, tous les manuels s'engouffrent dans le registre R1 pour produire une synthèse sur les nombres. Il est à noter que ce point de vue est tout à fait conforme au programme de seconde, même si ce dernier distingue clairement la synthèse sur les nombres et les ensembles de nombres.

2.2.2. Le symbole d'inclusion, nouveau révélateur de la doxa

Le nouveau symbole d'inclusion $\subset$, qui apparaît dans l'accompagnement de programme de la classe de seconde, est utilisé quasi-systématiquement dans le chapitre sur les ensembles de nombres. Nous comparons son utilisation avec le chapitre de géométrie dans l'espace où il nous paraît avoir tout à fait sa place. Malgré l'absence de ce symbole et de l'expression « est inclus dans » dans les textes officiels, nous faisons l'hypothèse qu'à l'instar de l'utilisation du symbole $\in$ au collège, le symbole $\subset$ peut être utile pour désigner les positions relatives d'une droite et d'un plan. Or, si le symbole d'inclusion apparaît dans la grande majorité des manuels au chapitre sur les ensembles de nombres, il n'est utilisé dans le chapitre de géométrie de l'espace dans moins de la moitié des manuels (cf. Annexe 3). Ainsi, le registre R1 qui fait l'unanimité pour la synthèse sur les nombres a une utilisation partagée lorsque l'on sort du discours sur les ensembles de nombres.

Ce phénomène est très surprenant et renforce celui observé dans la classe de troisième. En effet, il est toujours possible de choisir d'utiliser ou non un symbole. Ce choix didactique est parfaitement détecté dans le chapitre de géométrie dans l'espace pour le symbole d'inclusion. Mais il semble, une fois de plus, que lorsque l'on traite des ensembles de nombres, il est impossible de faire un quelconque choix puisque l'on se doit d'utiliser le symbole d'inclusion pour ces ensembles. De même qu'en troisième, la voie semble toute tracée, la *doxa* montre le chemin. Le symbole d'inclusion révèle la *doxa* dans la classe de seconde.

2.3. La *doxa* en question

Dans cette section nous montrons, sur des exemples en classes, que l'apport du registre R1 ne résout pas les problèmes d'ordre numérique. Ceci n'est d'ailleurs pas surprenant une fois la *doxa* délaissée. Nous présentons des moments des cours observés où il est clair, contrairement à l'habitude et au discours commun, que les ensembles de nombres ne peuvent suffire pour faire une synthèse sur les nombres. Les problèmes sont révélés par les réactions, très liées au sémiotique, des élèves.

2.3.1. Des entiers un peu moins naturels

Les différents registres qui composent R0 apparaissent dans les cours des trois enseignants. En particulier, P_A et P_B demandent aux élèves des nombres qui servent de référence pour le cours. Les élèves ont beaucoup de mal à sortir des entiers et donnent des entiers de plus en plus grands pour répondre aux désirs de leurs professeurs qui en veulent des « plus compliqués ».

Le passage suivant, du début du cours de P_B, montre que la nature des nombres dans R0 est problématique pour les élèves. Le professeur est d'ailleurs embarrassé car il n'avait pas anticipé les réactions de ses élèves. P_B vient juste de finir la partie sur l'ensemble **N** et veut introduire l'ensemble **Z** :

> P_B : J'ai parlé d'entiers naturels, ce qui laisserait penser qu'y'a des entiers qu'on ne qualifiera pas de naturels. Dites-moi, parmi les exemples qui sont au tableau, est-ce que vous ne voyez pas un nombre entier un peu moins naturel que 36.
> Elèves : 10 puissance 2
> P_B : 10 puissance 2, c'est, c'est quoi si on l'écrit
> Elèves : c'est 100
> P_B : c'est 100, donc 100, 36, c'est un nombre un petit peu de la même nature, c'est un nombre entier.
> Elèves : racine de 18
> P_B : j'ai dit un nombre entier, ah ! Racine de 18, alors là, racine de 18 s'écrit bien avec un nombre entier, mais tu vois bien qu'on a modifié, tu vois bien qu'on n'a pas 18, bon, c'est racine de 18, hein, c'est, c'est pas 18, c'est pas un nombre entier. Tout à l'heure, c'est pas un nombre entier, on y reviendra…
> Elèves : –4

P_A, à la fin de son cours a eu le même genre de problème concernant 3^2 et son éventuelle irrationalité. Nous remarquons que la nature des nombres dans R0 pose problème, même au niveau le plus élémentaire. Le seul apport du registre R1 ne peut faire disparaître ces problèmes. Un travail spécifique dans le cadre numérique est nécessaire pour répondre aux questions relatives aux natures de 10^2, 3^2 et $\sqrt{18}$.

2.3.2. Les développements décimaux illimités évincés

Ce nouveau passage de P_B, voir ci-dessous, montre que les développements décimaux illimités arrivent immédiatement après l'écriture décimale des décimaux, sans passer par **Q** et les rationnels. A partir du registre décimal, la distinction décimal/idécimal (Bronner, 1997) est bien plus naturelle que la distinction rationnel/irrationnel communément admise.

> P_B : Alors dites-moi, là ça se complique un p'tit peu, mais, est-ce que vous n'avez pas envie de fabriquer un nouvel ensemble ? A partir de ce qu'on vient de voir. Bah on a vu que les décimaux ça suffisait pas puisqu'il y avait des nombres vous m'avez donné une fraction, celle-là était un décimal, l'autre n'était pas un décimal. Qu'est-ce qu'on pourrait…
> Elève : (*inaudible*)
> P_B : tu as envie de dire les nombres ? Vas-y dis-le
> Elève : qui n'ont pas de fin
> P_B : Qui n'ont pas de fin, Ah ! C'est une idée ça. C'est à dire que tu voudrais fabriquer un ensemble dans lequel il y ait des nombres comme celui-ci, avec des chiffres, in-infinité de chiffres après la virgule. Ben oui c'est ça. Alors ce que l'on va faire déjà, et on voit que c'est difficile à, enfin difficile pour vous à le dire, à le trouver, mais on a vu que ce nombre là qui se notait avec une fraction - d'accord ? - et bien n'était pas un nombre décimal. Alors on n'a qu'à considérer, alors vous allez mettre l'ensemble des rationnel, des nombres rationnels, l'ensemble des nombres rationnels, alors ce sera le grand 4.

P_B est un peu gêné par le bon sens de ses élèves qui va à l'encontre de son plan de cours (il venait d'exposer **D** et s'apprêtait à introduire **Q**). Il y met toute son autorité avec un « grand 4 » pour que **Q** arrive en scène. On sent ici tout le poids de la *doxa* : après **D**, c'est **Q**.

3. Analyse praxéologique

L'analyse de la section 1 a permis de préciser l'apport sémiotique du registre R1 et la section 2 a proposé une explication de son introduction. Dans cette section, nous étudions plus spécifiquement le fonctionnement mathématique induit par ce nouveau registre. Afin de préciser les conversions et les traitements en jeu, nous faisons une analyse praxéologique. Nous nous focalisons sur la classe de seconde pour deux raisons. D'une part la synthèse sur les nombres est pratiquée en tout début de cette année scolaire, ce qui implique que les praxéologies relatives à R0 des classes de troisième et de seconde sont potentiellement identiques. D'autre part, nous voulons comparer les organisations mathématiques relatives à R0 et R1, et bien que R1 apparaisse parfois en classe de troisième, sa présence n'est ni systématique, ni complète, ni officielle, contrairement à la classe de seconde.

3.1. Les types de tâches

Nous exposons les types de tâches relatifs à la nature des nombres qui apparaissent dans les manuels de seconde en nous limitant aux plus généraux afin de ne pas multiplier les notations.

3.1.1. Les types de tâches

L'analyse des manuels de troisième et de seconde a permis d'identifier des types de tâches relatifs à la nature des nombres. Les types de tâches relatifs à R0 sont déjà visibles en troisième et semblent être remplacés en seconde par ceux relatifs à R1. Nous les regroupons dans le tableau ci-dessous. Nous avons choisi de rassembler dans un même type de tâches *montrer* et *reconnaître*[12], ainsi que *est* et *n'est pas* alors qu'il ne s'agit manifestement pas des mêmes genres de tâches. La distinction n'aurait fait que compliquer le propos sans que le gain soit significatif. Ces types de tâches recouvrent en outre des types de tâches que l'on trouve effectivement comme *montrer, ou reconnaître, qu'un nombre est un décimal non entier* (par T_0^d et T_0^z).

R0	R1
T_0 : *Trouver la nature d'un nombre*	T_1 : *Trouver le plus petit ensemble de nombres contenant un nombre*
T_0^n : *montrer, ou reconnaître, qu'un nombre est, ou n'est pas, un entier naturel*	$T_1^{\mathbf{N}}$: *montrer qu'un nombre appartient, ou n'appartient pas, à* **N**
T_0^z : *montrer, ou reconnaître, qu'un nombre est, ou n'est pas, un entier relatif*	$T_1^{\mathbf{Z}}$: *montrer qu'un nombre appartient, ou n'appartient pas, à* **Z**
T_0^d : *montrer, ou reconnaître, qu'un nombre est, ou n'est pas, un décimal*	$T_1^{\mathbf{D}}$: *montrer qu'un nombre appartient, ou n'appartient pas, à* **D**
T_0^q : *montrer, ou reconnaître, qu'un nombre est un rationnel* T_0^{ir} : *montrer, ou reconnaître, qu'un nombre est un irrationnel*	$T_1^{\mathbf{Q}}$: *montrer qu'un nombre appartient, ou n'appartient pas, à* **Q** $T_1^{\mathbf{R}}$: *montrer qu'un nombre appartient, ou n'appartient pas, à* **R**

Pour simplifier les notations, T_0^x fera référence aux cinq types de tâches T_0^n, T_0^z, T_0^d, T_0^q et T_0^{ir}, et $T_1^{\mathbf{X}}$ aux cinq types de tâches $T_1^{\mathbf{N}}$, $T_1^{\mathbf{Z}}$, $T_1^{\mathbf{D}}$, $T_1^{\mathbf{Q}}$ et $T_1^{\mathbf{R}}$.

En revanche nous avons exclu de notre propos les types de tâches du style *résoudre dans* **X** *une équation polynomiale*, où **X** est un ensemble de nombres. Ceux-ci sont plus en rapport avec une autre organisation mathématique et ce malgré leurs présences non négligeables dans le chapitre sur les ensembles de nombres. Par

[12] *Reconnaître* signifie qu'aucun traitement n'est requis et *montrer* signifie qu'un calcul ou une preuve est nécessaire (cf. section 3.3).

ailleurs, on remarque à ce propos que les intervalles sont une fois de plus exclus de ces types de tâches alors qu'il est bien plus courant de devoir résoudre une équation dans [–1 ; 1] ou [0 ; +∞[que dans **D** ou **Q**.

3.1.2. La correspondance des types de tâches

Les types de tâches relatifs à R0, hormis les deux derniers, se retrouvent convertis sans autre modification que la référence au registre R1. Même les types T_0 et T_1 sont en parfaite correspondance. Pour T_0 il s'agit bien de <u>la</u> nature et non d'<u>une</u> nature car bien sûr –5 est décimal mais ce n'est pas la réponse attendue pour T_0. Cette imprécision disparaît avec T_1, son correspondant dans R1, même si la référence à la liste **NZDQR** est sous-entendue. T_1 se décompose fréquemment de manière explicite avec les cinq types de tâches relatifs aux cinq ensembles dans un tableau où il s'agit de mettre une croix, ou le symbole d'appartenance, pour dire si un nombre appartient ou non à l'ensemble en question.

Intéressons-nous à la dernière ligne du tableau et aux derniers types de tâches. Dans R0, c'est T_0^{ir} qui regroupe les tâches problématiques en laissant à T_0^{q} les cas plus simples tandis que dans R1, c'est le type de tâches $T_1^{\mathbf{Q}}$ qui est problématique. La correspondance entre les types de tâches de R0 et de R1 s'opère de manière couplée pour les deux dernières natures : $(T_0^{q}\ ;\ T_0^{ir}) \leftrightarrow (T_1^{\mathbf{Q}}\ ;\ T_1^{\mathbf{R}})$.

3.1.3. Le nécessaire couplage

Pour une bonne correspondance directe entre les types de tâches des deux colonnes, il faudrait soit considérer le type de tâches T_0^{r} (*montrer, ou reconnaître, qu'un nombre est, ou n'est pas, un réel*) soit le type de tâches $T_1^{\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}}$ (*montrer qu'un nombre appartient à **R** mais pas à **Q**)* qui correspondraient respectivement à $T_1^{\mathbf{R}}$ et à T_0^{ir}. Les absences de ces deux types de tâches rendent le couplage nécessaire.

Le type de tâches T_0^{r} n'apparaît que deux fois[13] dans le manuel **q**, en exercice 77 page 62 où il faut dire si « –1 ; 2/3 et π sont des réels » est vrai ou faux, et dans le manuel **l** en exercice 41 page 64 : « Parmi les écritures suivantes, quelles sont celles qui indiquent un nombre réel ? $\sqrt{}5$; $\sqrt{}(-2)^2$; $\sqrt{}\sqrt{}3$; $\sqrt{}(5+\sqrt{}6)$; $\sqrt{}-16$ ». Même si, pour ce dernier, la question est mal posée car il faut plutôt la comprendre comme *quelles sont les écritures qui ont du sens*, ce qui ne renvoie pas explicitement à T_0^{r} mais au bon usage des registres sémiotiques. L'utilisation extrêmement faible, et quasi inexistante, de T_0^{r} est sans doute due à son *absurdité* car à quoi bon montrer qu'un nombre est un nombre.

Pour les mêmes raisons, le type de tâches $T_1^{\mathbf{R}}$ est aussi absurde. Mais l'enseignement des mathématiques au lycée nécessite l'ensemble **R**, on peut donc en disposer. De plus, cet ensemble est requis dans les nombreux exercices sous

[13] Il apparaît également deux fois dans le manuel *Diabolo* de troisième.

forme de tableau où il faut répondre si oui ou non un nombre appartient aux ensembles de nombres : il serait étrange de ne mettre que des « non ». De ce fait, il n'est pas surprenant que les occurrences du type de tâches $T_1^{\mathbf{R\backslash Q}}$ soient peu nombreuses – voir par exemple l'exercice 4 du manuel **f**. Mais il semble également que si $T_1^{\mathbf{R\backslash Q}}$ n'a pas sa place aux côtés des $T_1^{\mathbf{N}}$, $T_1^{\mathbf{Z}}$, $T_1^{\mathbf{D}}$ et $T_1^{\mathbf{Q}}$ c'est aussi qu'il ne leur est pas homogène : **R\Q** n'est pas un ensemble de nombres au sens où il ne fait pas partie *des ensembles de nombres*. L'ensemble **R\Q** est exclu des ensembles de nombres au même titre que les intervalles. La raison réside peut-être dans les structures algébriques intéressantes du point de vue de EMS puisque **R\Q** et la plupart des intervalles ne sont stables ni par la somme ni par le produit. Les structures algébriques, déjà discutées en section 1.2.3, bien qu'absentes semblent influencer l'organisation mathématique de EMS.

3.2. Une organisation mathématique incomplète

Rapidement, nous remarquons à l'étude des manuels que nous ne disposons que d'une unique technique, notée τ_1, faisant intervenir le registre R1 : *un nombre qui appartient à un ensemble de nombres appartient à tous les ensembles dans lequel il est inclus*. Citons, par exemple, le manuel **i**, page 27 : « indication : ne pas oublier que si un nombre appartient à un ensemble, il appartient aussi à tous les ensembles *plus grands* ».

Les inclusions entre les cinq ensembles sont très importantes, comme il est dit dans le manuel **e**, page 45 : « La propriété $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{D}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$ permet de dire que si un nombre est élément d'un ensemble, il est aussi élément de tout ensemble écrit à sa droite. ». Ainsi, les inclusions, que ce soit en chaîne ou deux à deux, constituent l'élément le plus important d'une nouvelle technologie θ_1 puisqu'il explique, produit et éclaire l'unique technique τ_1. Il se trouve par ailleurs très souvent dans des encarts intitulés, par exemple, « A retenir » ou « Point repère ».

Nous obtenons l'*organisation mathématique* relative à la nature des nombres dans R1 suivante $[T_1,T_1^{\mathbf{X}} ; \tau_1 ; \theta_1]$. Malheureusement, les types de tâches ne peuvent être accomplis puisque tout ce que l'on sait c'est, par exemple, « si $x\in\mathbf{Z}$, alors $x\in\mathbf{Q}$ ». Mais comment savoir si $x\in\mathbf{Z}$? Ce n'est pas une organisation mathématique et nous devons affiner notre analyse.

3.3. L'organisation mathématique de C0

Pourtant, les types de tâches T_1 et $T_1^{\mathbf{X}}$ sont accomplis en seconde. La raison est simple : implicitement on utilise une autre organisation mathématique OM_0 que nous allons expliciter. Tout s'éclaire lorsque l'on entre dans le détail des techniques.

3.3.1. La technique de reconnaissance d'écriture

Les manuels précisent souvent la méthode :

- « Méthode : Pour trouver la nature d'un nombre, on recherche le plus petit ensemble de nombres auquel il appartient. Très souvent, on simplifie ce nombre à l'aide des règles de calcul, mais en gardant toujours la valeur exacte ! », manuel **j** page 13 ;
- « Méthode : Pour reconnaître la nature d'un nombre, on commence par l'écrire le plus simplement possible. », manuel **q**, page 49.

La méthode est claire : c'est bien sur le nombre lui-même, ou plutôt sur ses écritures, que l'on agit. Le but est d'obtenir, par une certaine technique (cf. ci-dessous), une écriture à partir de laquelle l'on sait donner la nature dans R0. Cette reconnaissance d'écriture est une technique, nous la notons τ_0^{ecrit}. Elle recouvre pour l'essentiel la fonction apophantique de la langue naturelle nécessaire à R0 pour avoir un discours sur la nature des nombres (cf. sections 1.2.2 et 1.3.1).

3.3.2. Les techniques de calcul

La citation précédente du manuel **j** fait également référence à des calculs, c'est-à-dire des traitements relatifs aux registres de R0. Nous considérons les calculs qui peuvent être interprétés comme des traitements relatifs à un même registre de R0, sans conversion, comme une technique τ_0^{calc}. Bien entendu, τ_0^{calc} recouvre plusieurs techniques distinctes, mais il n'y a en général aucune ambiguïté sauf pour les fractions d'entiers : on peut interpréter *a/b* comme une opération à faire entre deux entiers ou comme un nombre écrit dans le registre fractionnaire. Lorsque la division *tombe juste* (comme pour –48/3, cf. la section 3.4.2) on utilise la technique τ_0^{calc}. Si ce n'est pas le cas, nous devons utiliser une nouvelle technique, notée τ_0^{div}, expliquée en page 15 du manuel **g** : « Un quotient d'entiers non nuls *a/b* est, par définition, un rationnel. En divisant *a* par *b*, on peut savoir si *a/b* appartient également à **N, Z** ou **D**. » Précisons que cette technique n'est effectivement pas englobée dans la technique τ_0^{calc} car, dans le cas où *a* n'est pas divisible par *b*, elle entraîne une conversion de registres.

3.3.3. Les techniques relatives au registre fractionnaire

Nous avons trouvé deux techniques de transformation d'écriture fractionnaire qui permettent essentiellement de traiter T_0^d. La première, que nous notons τ_0^{fd}, permet de mettre une fraction sous forme d'une fraction décimale. Cette technique ne peut être efficace que si le nombre est décimal. Or, comme on ne le sait pas *a priori*, on préfère souvent utiliser la technique τ_0^{fi} qui s'appuie sur une mise sous forme irréductible de la fraction et une décomposition du dénominateur en facteurs premiers.

3.3.4. Les techniques qui s'appuient sur l'écriture décimale

Nous relevons la technique τ_0^{ddp} de reconnaissance de la nature d'un nombre écrit dans le système décimal, que le développement soit fini ou infini périodique – elle est proche de τ_0^{div} et τ_0^{ecrit}. Cette technique est justifiée par une technique, notée $\tau_0^{équ}$, de conversion de registres, qui est une sorte de réciproque à τ_0^{div} : *montrer qu'un développement décimal périodique est un rationnel par l'utilisation d'une équation*[14].

La technique $\tau_0^{équ}$ apparaît dans tous les manuels sans jamais être appliquée aux décimaux[15]. On remarque alors que la conversion du registre décimal dans le registre fractionnaire, type de tâches noté $T_0^{d\rightarrow f}$, a une place très limitée, voire nulle, dans les manuels. Sans doute est elle considérée comme évidente. Toutefois, ce type de tâches se révèle être très problématique pour les élèves de P_A et P_B. S'il est aisé de trouver une fraction égale à 32,5 en passant au double, les élèves se heurtent vite à des difficultés car ils ne pensent pas à multiplier par une puissance de 10. Cette dernière technique, notée $\tau_0^{d\rightarrow f}$, n'est produite et institutionnalisée qu'après un long travail improvisé par les enseignants. Notons que l'on peut interpréter cette nouvelle technique comme une adaptation de $\tau_0^{équ}$.

3.3.5. Les techniques pour montrer l'irrationalité

Les techniques pour prouver l'irrationalité d'un nombre sont finalement toutes fondées sur une *démonstration par l'absurde*. Elles se limitent en général aux expressions affines contenant des radicaux ou π qui sont reconnus comme des irrationnels notoires, nous la notons $\tau_0^{ir\pi}$. On note également quelques techniques de démonstration d'irrationalité de certaines racines carrées, nous les regroupons sous une unique technique, notée $\tau_0^{ir\surd}$ – la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ est un thème d'étude. La portée de ces techniques est bien plus grande que l'exploitation qui en est faite. Nous ne nous y attardons pas.

3.3.6. La praxéologie numérique

Nous pouvons maintenant expliciter l'organisation mathématique propre à la nature des nombres dans le registre R0 :

$$OM_0 : [T_0,T_0^x,T_0^{d\rightarrow f};\ \tau_0^{calc},\tau_0^{ecrit},\tau_0^{div},\tau_0^{fd},\tau_0^{fi},\tau_0^{ddp},\tau_0^{d\rightarrow f},\tau_0^{équ},\tau_0^{ir\surd},\tau_0^{ir\pi}\ ;\ \theta_0\ ]$$

---

[14] Dans cette technique, l'équation ne permet pas la détermination d'une inconnue, puisque le nombre est connu, mais mène à une nouvelle écriture. L'objet *équation* acquiert un nouveau statut qui se démarque de son rapport institutionnel usuel.

[15] Un élément technologique important sur les décimaux passe de ce fait complètement inaperçu : les décimaux ont deux écritures décimales. Seuls quelques manuels proposent de montrer l'identité 0,999…=1, mais sans aller plus loin.

où θ_0 est une technologie sur les différentes représentations des nombres avec les opérations usuelles. Elle est relative aux décimaux (développement décimal et fractions décimales), aux rationnels (développements décimaux périodiques et fractions d'entiers), à certains irrationnels comme les racines carrées de rationnels et le nombre π, et contient un peu d'arithmétique des nombres entiers.

3.4. L'organisation mathématique OM_1

Il nous faut maintenant expliquer comment cette organisation mathématique OM_0 est utilisée pour exécuter les types de tâches relatifs au registre R1.

3.4.1. Les techniques d'expansion discursive

Pour connecter les types de tâches relatifs à R1 et OM_0 il est nécessaire de considérer une nouvelle technique $\tau^{\in}_{0\to 1}$ afin de pouvoir recourir à OM_0 : *exprimer dans le registre R1 la nature d'un nombre exprimée dans R0*. Elle est explicitée en page 8 du manuel **d** : « Pour exprimer que *n* est un entier naturel, on écrit $n\in\mathbf{N}$. » Cette technique est essentielle pour plonger les techniques de OM_0 dans le registre R1. Par exemple on utilise τ_0^{ecrit} pour reconnaître que 2/3 est un rationnel puis $\tau^{\in}_{0\to 1}$ pour écrire $2/3\in\mathbf{Q}$. Cette technique décrit la fonction d'expansion discursive de la langue naturelle (cf. le dialogue entre P_A et ses élèves en section 1.3.1).

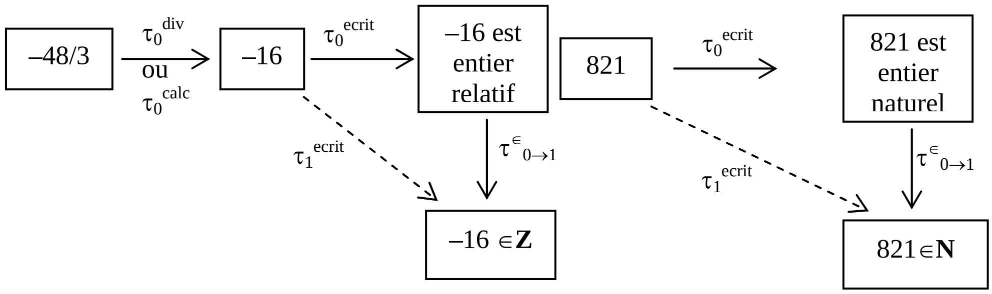
Il est alors naturel de penser à une autre technique, $\tau^{\in}_{1\to 0}$, réciproque de la précédente : *exprimer une relation d'appartenance à un ensemble de nombres dans R0*. Et en y regardant de plus près, elle est nécessaire pour certaines tâches, comme par exemple dans l'exercice 2, page 11, du manuel **f** : « montrer que $3/4\in\mathbf{D}$ ». On peut décrire le fonctionnement de la manière suivante :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Montrer que}\\ 3/4\in\mathbf{D}\end{array}} \xrightarrow[\tau^{\in}_{1\to 0}]{} \boxed{\begin{array}{l}\text{Montrer que}\\ \text{3/4 est décimal}\end{array}} \xrightarrow[\tau_0^{fi} \text{ ou } \tau_0^{fd}]{\tau_0^{div} \atop \text{ou}} \boxed{\begin{array}{l}\text{3/4 est}\\ \text{décimal}\end{array}} \xrightarrow[\tau^{\in}_{0\to 1}]{} \boxed{3/4\in\mathbf{D}}$$

Ces deux nouvelles techniques $\tau^{\in}_{0\to 1}$ et $\tau^{\in}_{1\to 0}$ passent quasiment inaperçues. Quelques rares manuels les déclarent, à condition de lire entre les lignes, comme en page 15 du manuel **g** : « –5 est un entier négatif. Donc $-5\in\mathbf{Z}$ ».

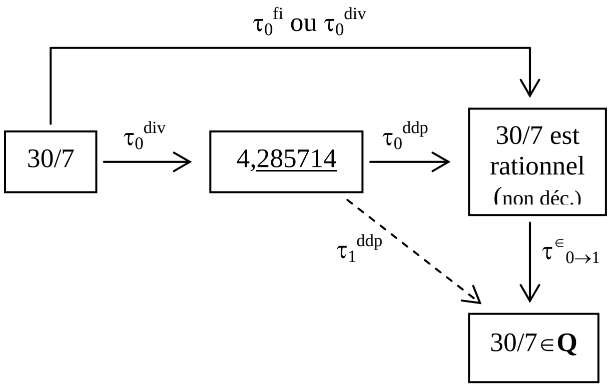
3.4.2. De nouvelles techniques de reconnaissance d'écriture

On peut comprendre le fonctionnement qui juxtapose les techniques τ_0^{ecrit} et $\tau^{\in}_{0\to 1}$ comme la production d'une nouvelle technique τ_1^{ecrit}. Nous explicitons ce fonctionnement par les trois schémas suivants, qui illustrent la solution de l'exercice page 9 du manuel **r** : « • $-48/3= -16$, donc $-48/3\in\mathbf{Z}$. • $13/5=(13\times 2)/(5\times 2)=26/10$, donc $13/5\in\mathbf{D}$. • $30/7=4,\underline{285714}$ a une écriture décimale périodique (qui n'est pas 0), donc $30/7\in\mathbf{Q}$. • $-7\in\mathbf{Z}$. • $821\in\mathbf{N}$. »



Le cas de –48/3, tout comme celui de 13/5, montre qu'un traitement dans R0 est nécessaire avant de pouvoir procéder à une conversion dans R1. En revanche, le cas de 821, tout comme celui de –7, est plus direct puisque la forme de l'écriture est immédiatement reconnaissable. On peut sans doute penser que cette nouvelle technique τ_1^{ecrit} est bien intégrée par les professeurs, mais on peut en douter pour les élèves, surtout si son utilisation reste du domaine de l'implicite. On peut une fois de plus espérer que la forte congruence entre R0 et R1 vienne à leur secours.

Il reste enfin le cas un peu plus complexe de 30/7 où, selon notre nomenclature, c'est τ_0^{ddp} qui se retrouve convertie dans R1. Mais notons tout de même que si le manuel **r** procède de cette manière, la plupart des autres manuels auraient sans doute utilisé soit τ_0^{div} directement sans écrire un développement décimal périodique ou alors la technique τ_0^{fi} qui donne directement le résultat puisque la fraction est sous forme irréductible.



Cette production de nouvelles techniques provient d'une caractéristique commune à τ_0^{ddp} et τ_0^{ecrit} : ces deux techniques utilisent la fonction apophantique de la langue naturelle dont on n'a plus besoin une fois le registre R1 institué. Nous rejoignons le propos de la section 1.2.2 sur l'indépendance des mathématiques de la langue naturelle.

3.4.3. La nouvelle organisation mathématique

Finalement, à OM_0 constituée pour l'essentiel en fin de collège, on ajoute le registre R1 ce qui fait émerger la nouvelle organisation mathématique OM_1 suivante :

$$[\ T_0, T_0^{x}, T_1, T_1^{\mathbf{x}} ;\ \tau_0^{calc}, \tau_0^{ecrit}, \tau_0^{div}, \tau_0^{fd}, \tau_0^{fi}, \tau_0^{ddp}, \tau_0^{équ}, \tau_0^{ir\surd}, \tau_0^{ir\pi}, \tau_1, \tau^{\in}{}_{0\to 1}, \tau^{\in}{}_{1\to 0} ;\ \theta_0, \theta_1\ ]$$

Toutefois, la liaison entre les deux technologies θ_0 et θ_1 est loin d'être claire et ne semble pouvoir être faite que grâce à $\tau^{\in}{}_{0\to 1}$ et $\tau^{\in}{}_{1\to 0}$. Nous ne précisons pas le niveau théorique qui ne peut réellement apparaître dans EMS. En effet, la théorie Θ relative à cette organisation mathématique OM_1 réconcilie les deux cadres et les différents registres : c'est en se fondant sur la théorie des ensembles que les nombres sont construits de la manière la plus rigoureuse.

Nous pouvons désormais répondre à la question de l'apport de R1 pour la synthèse sur les nombres : rien de vraiment nouveau n'apparaît du point de vue mathématique. En particulier, cette nouvelle praxéologie ne naît pas d'un manque de technique, contrairement au cas général que remarque Chevallard (1999). Nous concluons une deuxième fois que les ensembles de nombres ne suffisent pas, loin s'en faut, pour éclaircir les problèmes relatifs aux nombres : l'analyse praxéologique montre que tout se joue dans OM_0. La *doxa* recouvre ces problèmes d'une chape d'ensembles, faisant comme si on avait tout dit, tout résolu, alors que c'est bien plutôt dans OM_0 qu'il faudrait puiser la synthèse désirée.

3.5. Une technologie fondée sur les développements décimaux

La technologie θ_0 est partielle alors que, dans la perspective d'une synthèse sur les nombres, on pourrait espérer une technologie permettant un lien entre les différentes représentations des nombres réels. Il nous semble que cette technologie est à portée de EMS même si cela entraînerait une modification profonde de OM_0. Nous avons constaté en section 2.3.2 que les élèves n'ont pas de mal à imaginer les développements décimaux illimités à partir des décimaux. Il ne reste plus qu'à distinguer les différentes formes de développements décimaux recouvrant les catégories classiques des nombres. Mais il faudrait pour cela que les développements décimaux, finis, infinis périodiques ou infinis non périodiques, soient déclarés comme de *vrais* nombres.

L'analyse des manuels montre que le problème semble résider dans le fait qu'une écriture décimale illimitée n'est pas déclarée explicitement comme un nombre sauf dans le cas périodique. Alors que les formulations du style « Soit x=0,12121212… » de l'exercice 102 page 27 du manuel **n** apparaissent fréquemment, seuls deux manuels proposent des développements décimaux non périodiques : le manuel **e**, en page 61, qui propose le nombre de Champernowne[16] et le manuel **o** qui propose ce même nombre en page 34 et le nombre 0,12112111211112… en page 322 en précisant, pour ce dernier, que l'on peut « construire à volonté » des nombres irrationnels.

Pour ce dernier nombre il est relativement évident qu'il n'est pas rationnel puisque non périodique. Le recourt à une démonstration rigoureuse n'est pas nécessaire, contrairement au cas de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ bien plus problématique pour les élèves. Une simple reconnaissance de l'écriture avec une compréhension de l'algorithme de formation des décimales suffit. Il s'agit ici simplement d'une généralisation de la technique τ_0^{ddp} qui prendrait en charge les développements décimaux quels qu'ils soient. Ce serait la technique de reconnaissance de la nature d'un nombre la plus générale. Bien entendu, elle serait inopérante pour des nombres dont l'algorithme de formation des décimales est inconnu ou complexe, comme pour $\sqrt{2}$ ou π.

Il faudrait également généraliser bon nombre de techniques. Ces généralisations sont pour la plupart problématiques et nous ne citons que celle qui permettrait de faire la somme de deux développements décimaux illimités. Sans vouloir à tout prix obtenir une technologie parfaite, on peut proposer des sommes de développements décimaux illimités relativement simples à traiter. On obtiendrait ainsi une technologie sur les nombres réels qui réaliserait bien mieux une synthèse que l'organisation mathématique actuelle.

4. Les représentations graphiques des ensembles de nombres

Les représentations graphiques des cinq ensembles de nombres apparaissent dans tous les manuels de seconde et chez les trois professeurs. Elles sont de deux sortes : en droites et en diagrammes-*patates*. Nous allons constater que les premières, bien qu'étant explicitement au programme de la classe de seconde, sont sous-exploitées alors que les secondes, bien que n'apparaissant pas dans le programme de la classe de seconde et son accompagnement, sont très présentes. Nous dégageons à la suite un glissement : la synthèse sur les nombres a disparu au profit d'un bilan sur les ensembles de nombres.

4.1. Les droites

Que ce soit du point de vue historique, épistémologique ou encore du niveau technologico-théorique de OM_1, et même d'une organisation plus large constituant

[16] Il s'agit du nombre, défini en 1933 par le mathématicien anglais D. Champernowne, qui concatène la suite des entiers écrits dans le système décimal usuel : 0,123456789101112…

la géométrie analytique, la droite numérique réelle est une des représentations les plus importantes des ensembles de nombres. Chez les enseignants et dans les manuels (hormis les manuels **j** et **r**), elle possède une place de grande importance pour représenter, et même définir, **R**. Ceci est tout à fait conforme au programme. Mais la droite ne sert, finalement, qu'à représenter l'ensemble **R** sur laquelle sont représentés quelques nombres. Pourtant, de véritables types de tâches pourraient être proposés aux élèves comme, par exemple, les situations de mesures rationnelles proposées par Ratsimba-Rajohn (1982).

Il est toutefois notable que la représentation en droite ne soit utilisée que dans un seul manuel pour **N** et **Z**, ce que nous avons noté DD pour droite discrète dans le tableau en Annexe 3. Bien entendu, l'on pourrait penser qu'il est compréhensible que les manuels et les enseignants se passent de ce type de représentation pour **D** et **Q** car cela conduirait à une même représentation pour trois ensembles différents. Mais pourquoi cacher ce fait mathématique aux élèves ? Il nous semble que justement cela permettrait de problématiser le passage de **Q**, ou **D**, à **R** par la notion fondamentale de la topologie, la continuité. Cela n'est pas impossible car le manuel **c** adopte cette position – c'est le seul – et propose de « boucher les trous » de la droite rationnelle ce qui permet de commencer à combler le vide didactique des réels (Bronner, 1997a,b).

4.2. Les diagrammes-*patates*

Comme la représentation précédente, les diagrammes qui représentent les cinq ensembles de nombres par l'intérieur d'une courbe homéomorphe à un cercle, strictement inclus les uns dans les autres, sont très fréquents : seuls 4 manuels et un des 3 professeurs de seconde ne les utilisent pas[17]. Pourtant, ce type de représentation n'est nullement mentionné dans le programme de seconde et son accompagnement. On remarque une nouvelle habitude bien ancrée dont on ne discute pas. En outre, un glissement méta-cognitif apparaît puisqu'il est nécessaire d'expliquer la représentation avec les termes de contour, de frontière, de couronne, d'intérieur, d'extérieur, etc. – chacun de ces termes a été utilisé par au moins un professeur parmi les trois. Implicitement on change de cadre et de problème puisque ce sont des notions topologiques.

Ce type de représentation graphique constitue des ostensifs avec une valeur instrumentale (Bosch et Chevallard, 1999) très faible. On ne représente, finalement,

[17] Ce type de diagramme apparaît également dans le manuel *Cinq sur Cinq* de troisième, mais avec une différence notable : **R** n'est pas représenté. A côté des 4 ensembles de nombres **N**, **Z**, **D** et **Q** *inclus* les uns dans les autres figure une *patate* représentant les irrationnels. Cette représentation est contraire à ce que l'on observe dans les manuels de seconde et est à rapprocher de la transformation (rationnels, irrationnels) en (**Q**,**R**) discutée à la section 3.1.3 pour les types de tâches.

que la chaîne d'inclusions et, par suite, la technique τ_1 – ceci est tout à fait cohérent avec notre analyse de la section 3. Les natures très particulières des cinq ensembles de nombres disparaissent totalement et il ne subsiste que des ensembles, sans aucune structure. Et même s'il est aisé d'augmenter l'intérêt mathématique de cette représentation – on pourrait facilement y faire figurer la distinction positif/négatif – on ne pourra pas éviter de suggérer que ces cinq ensembles sont identiques, à la taille près.

4.2.1. Les variations structurales

L'analyse structurale, dans le registre graphique, que propose Duval (1995, 1996) pour déterminer les unités signifiantes est particulièrement éclairante. On note dans les manuels que toutes les représentations en diagramme des ensembles de nombres sont des portions convexes du plan. La forme des contours est toujours soit des ellipses – pour beaucoup de manuels –, soit des rectangles – mais pas de carrés –, soit des rectangles aux *coins* arrondis[18]. A chaque diagramme, ces contours ont toujours des éléments liés : des côtés rectilignes parallèles, les axes focaux des ellipses parallèles ou confondus. Toutes ces variations structurales sont cognitivement non pertinentes, auxquelles il faudrait ajouter le choix des couleurs. La signification de la représentation est contenue dans les cinq courbes strictement incluses les unes dans les autres.

L'observation de la classe de P_B a, sur ce point, été très instructive. Lors de la prise de note du cours, les élèves devaient reproduire ces diagrammes, et certains élèves ont commencé par tracer des cercles en lieu et place des usuelles *patates*. Ceci a soulevé l'indignation du professeur qui signale à plusieurs reprises « pas avec le compas ! ». Pourtant, les élèves ne font que reproduire à l'extrême les unités non signifiantes des manuels, il n'y a en effet pas de différence pour notre propos entre un cercle et une ellipse. Et l'on serait même tenté de dire qu'à défaut de renseignement utile pour les dessiner, soit on prend un instrument de géométrie, soit on trace des courbes isotropes, un peu comme les cercles d'Euler. On ne peut donc pas en vouloir aux élèves car aucun argument valable n'est à opposer à leur comportement.

4.2.2. Un nouveau type de tâches problématique

Pour conclure le chapitre sur les ensembles de nombres, P_B a proposé un exercice qui semblait anodin : placer des nombres dans le diagramme des cinq ensembles de nombres que les élèves avaient reproduits sur leurs cahiers. Il apparaît, à la lecture

[18] Ces contours ne sont pas assumés car aucune explication ou déclaration n'accompagnent ces représentations graphiques. Il est à noter que le manuel italien cité par Bagni (2006) expose justement la manière de représenter les ensembles, par des ellipses. Ainsi, le cadre ensembliste dispose d'un nouveau registre de représentation. Cet éclaircissement n'empêche pas les problèmes dans l'utilisation de ce registre (Bagni, 2006).

du passage que nous citons, que les élèves ont beaucoup de mal à s'acquitter de ce nouveau type de tâches que nous notons T_2.

> P_B : on va placer ces nombres donc qu'on a rencontrés au cours de la leçon sur ce schéma. Alors, je vais représenter chaque nombre par un point ou une croix, de manière à savoir pouvoir déterminer parfaitement s'il est à l'intérieur d'un ensemble ou à l'extérieur. Par exemple, si je dois placer par une croix le nombre 3, représenter par une croix le nombre 3 où est-ce que je le mets ?
> Elèves : **N**
> P_B : **N**, 3 est un entier naturel, je fais comme ça, l'avantage de faire une petite croix c'est si jamais vous écrivez sur la frontière ben vous savez que le nombre est à l'intérieur, 3 est un entier naturel. –4, je le place où ?
> […]
> P_B : si je le mets là [il désigne l'intérieur de la courbe *entourant* **N**] je le mets dans **Z**, ça veut dire que c'est pas assez précis ton truc hein. Qu'est-ce que tu dois dire ?
> Elèves : le mettre que dans **Z**
> P_B : Que dans **Z** ! C'est à dire on va être plus précis, dans **Z** mais pas
> Elèves : pas dans **N**
> P_B : dans **Z** mais pas dans **N**, […]
> *suivent d'autres nombres avec quelques problèmes sans grandes incidences*
> P_B : Chuuut ! Ensuite, 30/7, où est-ce que vous le mettez 30/7 ?
> Elèves : dans **R**
> P_B : Ho mais j'ai l'impression que vous n'avez pas bien compris hein. 30/7 c'est une fraction donc c'est un rationnel, dans **Q** mais pas dans **D**. Quant aux autres $\sqrt{2}$ et π ?
> Elèves : dans **R**
> P_B : Dans **R** mais pas dans **Q**, ce sont des irrationnels, ils ne sont pas rationnels, ils sont, on va les noter là.

Ce type de tâches T_2 est en fait très problématique, car il ne s'agit pas seulement de savoir à quels ensembles un nombre appartient, mais aussi à quels ensembles il n'appartient pas, ce qui correspond à peu près à T_1, et de repérer ensuite la portion du plan où il doit se situer. Ce nouveau type de tâches ne fait pas partie du curriculum officiel. Comme le remarque P_B à la fin de son cours pour 30/7, les élèves ne semblent pas avoir tout compris, alors que jusque là ils avaient l'air de suivre le propos. Ceci confirme les propos de Duval, cités à la fin de la section 1.3.2 : une forte congruence peut être trompeuse sur les apprentissages des élèves. Car s'il est facile de dire « $30/7 \in \mathbf{Q}$ » à partir de « 30/7 est un quotient », le problème de la nature de 30/7 n'est pas complètement élucidé. Ici, une nouvelle conversion est requise, une conversion non congruente cette fois, qui révèle le problème cognitif.

4.3. Le bilan sur les ensembles de nombres

Nous reprenons ici les citations du programme de seconde et de son accompagnement que l'on peut trouver en section 2.2.1 La lecture de ces documents fait apparaître un glissement. Tout d'abord il semble que la synthèse sur les nombres doit être réalisée par les ensembles de nombres, c'est la *doxa* dont nous avons déjà discuté. Mais en page 13 de l'accompagnement on lit que le programme requiert un « bilan sur les ensembles de nombres ». Ainsi, au lieu de faire *un bilan sur les nombres avec les ensembles de nombres*, c'est *un bilan sur les ensembles de nombres*. La différence est grande car les nombres qui étaient déjà relégués au second plan par la *doxa* disparaissent totalement. Ce glissement que l'on observe dans le curriculum officiel peut expliquer la nécessité de trouver une représentation unique pour les cinq ensembles de nombres. Les diagrammes-patates remplissent parfaitement ce rôle d'unification. Mais c'est une représentation *a minima* où l'on a gommé toutes les singularités de ces ensembles si particuliers.

Certains manuels, pas tous, placent quelques exemples de nombres dans ces diagrammes. On peut se demander pourquoi. Pour revenir au nombre ? Pour donner des éléments afin de bien spécifier que les ensembles sont strictement inclus les uns dans les autres ? Du côté des professeurs, le type de tâches T_2 tente de remettre les nombres au centre des préoccupations puisque ce sont les nombres du début du cours qui sont utilisés. Mais T_2 est très problématique et contient un implicite fort. On peut douter de l'éclaircissement qu'il est sensé apporter au nombre. Le bilan sur les ensembles de nombres est fait, même s'il est d'une grande pauvreté, mais la synthèse sur les nombres reste à faire comme nous l'avons déjà constaté.

Conclusion

L'analyse croisée utilisant les praxéologies de Chevallard et les registres de représentation de Duval constitue une première tentative d'articulation entre ces deux cadres théoriques. La perspective de cette double analyse nous semble riche de promesses.

L'apport des ensembles de nombres pour la nature des nombres est uniquement sémiotique, en permettant un discours sur les nombres dans la langue mathématique. Mais finalement, la synthèse sur les nombres est entièrement prise en charge par l'organisation mathématique numérique, sans les ensembles de nombres. Il faut avoir conscience que, dans l'enseignement secondaire, les ensembles de nombres n'apportent rien pour la synthèse sur les nombres, si ce n'est des catégories dont on disposait déjà. Deux questions découlent de cette constatation : de quels ensembles de nombres a-t-on besoin au lycée ? Comment faire cette synthèse sur les nombres ?

La question de la nécessité des ensembles de nombres dans le secondaire est posée. Que fait-on de ces ensembles de nombres ? Les enseignants interrogés disent que ce chapitre de début de seconde sur les ensembles de nombres est complètement isolé. Bien sûr, **R** est nécessaire au lycée pour l'analyse, mais il a beaucoup plus sa place dans la partie sur les intervalles. **N** également peut être utile pour les suites numériques et la démonstration par récurrence. En revanche, on pourrait tout à fait se passer des trois autres au lycée.

Pour réaliser une vraie synthèse sur les nombres, il faudrait aller beaucoup plus loin et développer le niveau technologico-théorique de l'organisation mathématique numérique. Les développements décimaux, limités ou non, nous paraissent être le meilleur registre sémiotique pour unifier tous les nombres réels. On renforcerait l'idée que la nature des nombres et le sémiotique sont étroitement liés. Car finalement, nous nous devons de répondre à cette question au sens fort, formulée par les professeurs à leurs élèves : qu'est-ce qu'un nombre ?

En caricaturant à peine la situation, on peut affirmer que les ensembles de nombres dans l'enseignement secondaire français ne servent à rien si ce n'est à masquer les lacunes du numérique. L'enseignement de la synthèse sur les nombres est ainsi biaisé. Tout est déjà réglé par avance. Non pas par les mathématiques, ce qui serait naturel, mais par une *doxa* que nous avons qualifiée d'ensembliste. Cette *doxa* ensembliste est visible dès qu'il est question de la synthèse sur les nombres. Elle n'est pas seulement véhiculée par les manuels. Les pratiques des enseignants sont très semblables à ce que l'on trouve dans les manuels pour produire cette synthèse, alors même que deux des trois professeurs observés n'utilisent aucun manuel pour le chapitre sur les ensembles de nombres. La *doxa* est telle que la transparence est presque totale : beaucoup de manuels proposent des sections d'exercices intitulées « ensembles de nombres » où ne figurent que peu de ces ensembles, voire aucun.

Au-delà du thème traité dans cet article on peut légitimement se demander si d'autres parties des mathématiques ne souffrent pas également d'une *doxa* qui biaiserait les enseignements et les apprentissages. Nous pensons que c'est le cas. Il reste à savoir quelles sont ces parties et le poids de ces *doxa* dans l'enseignement.

Annexe 1

Les manuels de troisième

	Manuels de math. de troisième	∈ ou ∉	« ensembles de nombres »	notations des ensembles de nombres	classification des nombres	exercice sur la nature des nombres
M0	Triangle	/	/	/	/	/
	Dimathème	/	/	/	/	/
	Nouveau Pythagore	/	/	/	oui (histoire)	oui
	Math 3e Magnard	3∈ et 1∉	/	/	/	1 seul
M1	Trapèze	oui, les 2	cours exercices	/	oui	oui
	Diabolo	oui, les 2	/ /	**N Z D Q R**	oui	oui
	Cinq sur cinq	oui, les 2	/ exercices	**Z D Q** patates	oui	oui (dont T_1)

Annexe 2

Les professeurs de seconde

Les professeurs	**N-Z**	initiales	Représentations graphiques	inclusions
P_A	**extensions**	seul **R**	DN	**N**⊂**Z** chaîne
P_B	**extensions**	**Q :** P_B **DR :** élèves	DN patates	2 à 2 chaîne
P_C	/	oui	« frise historique » patates	chaîne

Annexe 3

Les manuels de seconde

Manuels de seconde	**N-Z**	**R** interv.	initiales	Définition **R**	rep. graph.	inclusions	⊂ Géo.
a : Dimathème Didier, 2000		/	oui	DN	DN	2 à 2 chaîne	/
b : Delagrave, 2000		/	oui	rationnels & irratio.	DD DN	chaînes	oui
c : Pyramide 2000, Hachette Education	**extension**	oui	/	tous les nombres	DN	chaîne	oui
d : Bréal, 2004	**extension**	/	oui	DN	DN	chaîne	oui
e : Axiale 2004, Hatier	**extension**	oui	/	DN	DN *patates*	2 à 2 chaîne	oui
f : Math'x 2005, Didier	**extension**	oui	/	DN	DN *patates*	2 à 2	/
g: Transmath 2000, Nathan		oui	/	tous les nombres	DN *patates*	2 à 2 chaîne	/
h : Abscisse 2004, Magnard		/	/	DN	DN *patates*	2 à 2 chaîne	/
i : Nathan		/	/	DN	DN *patates* (2)	chaînes	/
j : Déclic 2de 2004, Hachette Education	**extension**	oui	/	rationnels & irratio.	**sans DN** *patates*	chaîne	oui
k : Indice 2000, Bordas		/	oui	DN	DN *patates*	/	/
l : Fractale 2000, Bordas		/	/	DN ???	DN *patates*	chaîne	/
m : Point Math 2000, Hatier		/	/	DN	DN *poupées russes*	«inclusions»	/
n : Nouveau Pythagore 2000, Hatier	**extension**	oui	/	tous les nombres	DN *patates* **sans D**	chaîne **sans D**	oui
o : Belin, 2000	**extension**	/	/	DN	DN *patates*	2 à 2	oui
p : Modulo 2004, Didier	**extension**	/	/	rationnels & irratio.	DN *patates* (2)	2 à 2 chaîne	/
q : Hyperbole 2003, Nathan	**extension**	oui	oui	DN	DN *patates*	2 à 2	/
r : Repères 2004, Hachette Education		en exercice	/	rationnels & irratio.	**sans DN** *patates*	2 à 2 **sans R**	oui

Bibliographie

BAGNI G. T. (2006), Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of set theory, *Educational Studies in Mathematics*, **62**, 259–280.

BOSCH M. & CHEVALLARD Y. (1999), Sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **19.1**, 77–123.

BRONNER A. (1997a), *Etude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée*, Thèse, Université J. Fourier, Grenoble.

BRONNER A. (1997b), Les rapports d'enseignants de troisième et de seconde aux objets « nombre réel » et « racine carrée », *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **17.3**, 55–80.

CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **19.2**, 222–265.

DOUADY R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **7.2**, 5–31.

DUVAL R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Berne.

DUVAL R. (1996), Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **16.3**, 349–382.

KAHANE J.-P. (ed.) (2002), *L'enseignement des sciences mathématiques, Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*, Paris, Odile Jacob.

RATSIMBA-RAJOHN H. (1982), Eléments d'étude de deux méthodes de mesure rationnelle, *Recherche en Didactique des Mathématiques,* **3.1**, 65–113.

LAURENT VIVIER
IUFM d'Orléans-Tours, La Guignière 37230 Fondettes
laurent.vivier@orleans-tours.iufm.fr