GEORGES TOUMA

ACTIVITÉ COGNITIVE D'INTERPRÉTATION

Abstract. Interpretation Cognitive Activity – During the process of scientific phenomena's algebraic modelling, pupil must switch from a physic rationality frame to a mathematic rationality frame mobilising different semiotics registers. In this article, we raised the problem of discontinuity and rupture of semiotic register (Duval, 1995) inherent to rationality frame switch (Lerouge, 2000) during algebraic modelling activity in experimental science. More specifically, we raised the limits and the lakes of the three semiosis cognitive activities – formation of a representation in a semiotic register - treatment and conversion – so that the pupils has access to the conceptual meaning of a mathematic representation of an experimental science phenomenon. We also defined the interpretation cognitive activity.

Key words. Algebraic modelling, rationality frame, semiotic register, experimental science, semiosis, treatment, conversion.

Résumé. Durant le processus de modélisation mathématique d'un phénomène scientifique, en particulier en physique, l'élève doit passer d'un cadre de rationalité physique à un cadre de rationalité mathématique mobilisant des registres sémiotiques différents. Dans cet article, nous avons soulevé les problèmes de discontinuité et de rupture des registres sémiotiques (Duval, 1995) inhérents à un changement de cadre de rationalité (Lerouge, 2000), lors d'une activité de modélisation algébrique en sciences expérimentales. Plus spécifiquement, nous avons soulevé les limites et l'insuffisance des trois activités cognitives liées à la sémiosis - la formation de représentations dans un registre sémiotique, le traitement et la conversion - pour que l'élève ait accès au contenu conceptuel d'une représentation mathématique d'un phénomène en sciences expérimentales. Nous avons aussi défini l'activité cognitive d'interprétation.

Mots-clés. Modélisation algébrique, cadre de rationalité, registre sémiotique, sciences expérimentales, sémiosis, traitement, conversion.

Introduction

Pour la plupart des chercheurs scientifiques, dont Galilée fut le précurseur, *«faire de la science»* signifie mettre sur pied une expérimentation contrôlée, prendre des mesures, reconnaître la présence de fluctuations dans les données et tenter de repérer ou de construire un modèle mathématique (algébrique) général qui convienne aux données. Ainsi, cette démarche se joue dans l'interaction triple entre mesures réelles, modèle mathématique et jugement (numériquement appuyé) du chercheur. Dans cet article, en nous appuyant sur le concept de modélisation scientifique, sur la théorie de registres sémiotiques (Duval, 1995) et sur la théorie

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 13, p. 93 – 111.

de cadres de rationalité (Lerouge, 2000), nous voudrions aborder, discuter et analyser les différentes activités cognitives liées à la sémiosis susceptibles d'aider l'élève à compléter et à réussir cette démarche, en particulier l'activité de modélisation mathématique des phénomènes scientifiques.

1. Modélisation mathématique en sciences expérimentales

En sciences expérimentales, Nonnon (1986, p. 29), Johsua et Dupin (1999, p. 49) semblent s'entendre bien sur les différentes étapes des phases inductive et déductive de la modélisation scientifique. Dans la phase inductive, en interaction avec la réalité, c'est-à-dire avec un phénomène réel en sciences, l'élève identifie les variables en jeu et prédit ensuite leur interaction sous forme d'une hypothèse qui sera à son tour formalisée dans un schème de contrôle de variables lui permettant ainsi de planifier l'expérimentation. À partir des résultats recueillis, l'élève pourra dégager alors une ou des lois. Ensuite, la synthèse explicative de ces lois lui permettra de construire un modèle ou une théorie. Dans la phase déductive, l'élève tente, avec ce modèle, de répondre à une question donnée reliée au phénomène de départ.

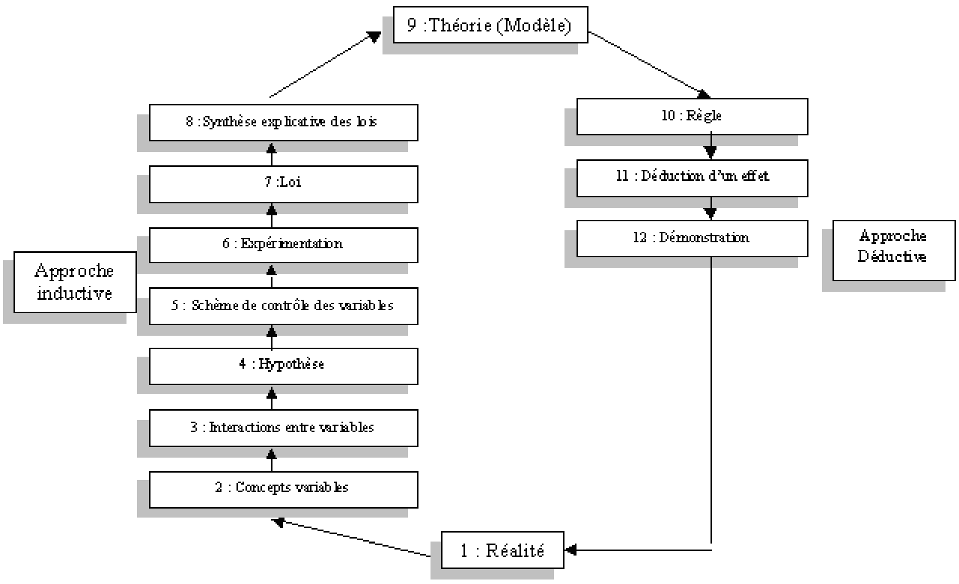

Figure 1 : Modélisation scientifique (Nonnon, 1986).

Ensuite, il formule des propositions ou des effets qui lui permettront non seulement d'expliquer ou de répondre à la question mais aussi de déduire ou prédire des résultats de l'expérience. Afin d'infirmer ou de confirmer le modèle construit dans la phase inductive, l'élève compare les résultats prédits ou déduits avec des données provenant de la réalité, des données nouvelles tirées par exemple d'une nouvelle expérience où il aurait modifié la variable indépendante.

En se référant aux travaux de Nonnon (1986), Johsua et Dupin (1999, p. 149) nous pourrons alors résumer l'activité de modélisation mathématique en sciences expérimentales par le schéma suivant:

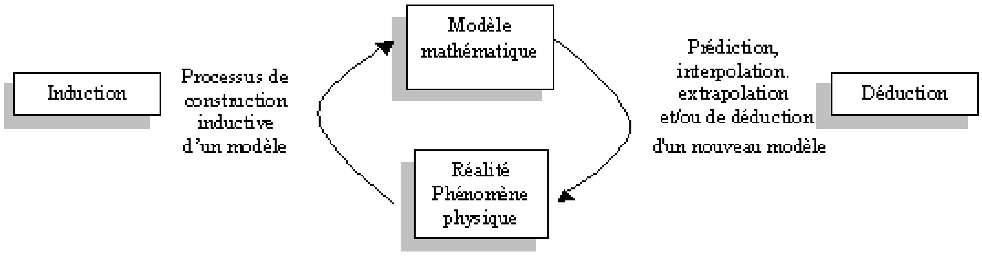

Figure 2 : Modélisation mathématique en sciences expérimentales.

Nous considérons que les phases inductive et déductive ne sont pas parfaitement disjointes comme la figure 2 pourrait le laisser croire. À l'intérieur d'une phase inductive, lors de la formulation d'une hypothèse, nous pouvons aussi avoir recours à la déduction : c'est le raisonnement hypothético-déductif, qui met à profit des lois supposées vraies ou des relations déjà étudiées pour élaborer de nouvelles suppositions ou inductions. Dans la phase inductive de l'activité de modélisation mathématique, l'élève construit le modèle mathématique correspondant au phénomène scientifique en particulier en physique. Cette activité consiste donc à transformer la représentation sémiotique des données expérimentales en une représentation sémiotique qui correspond à objet mathématique. Dans la phase de déduction, l'élève valide son modèle à partir des activités de prédiction, d'interpolation, et/ou de déduction d'un nouveau modèle.

À notre avis, le processus cognitif de construction et de validation du modèle mathématique mobilise chez l'élève plusieurs activités cognitives liées à la sémiosis et demande un changement de cadre de rationalité. Par la suite, nous allons analyser les difficultés liées aux tâches cognitives de la modélisation mathématique en sciences expérimentales en nous appuyant sur les théories de registres sémiotiques et de cadre de rationalité.

2. Registre sémiotique

Duval (1995) attend des registres de représentation sémiotique qu'ils permettent d'accomplir les trois activités cognitives fondamentales de la pensée : représentation, traitement et conversion. Plus précisément, il s'agit de :

– « *constituer une trace ou un assemblage de traces perceptibles qui soient identifiables comme une représentation de quelque chose dans un système déterminé* » ;

– « *transformer les représentations par les seules règles propres au système de façon à obtenir d'autres représentations pouvant constituer un apport de connaissance par rapport aux représentations initiales* » ;

– « *convertir les représentations produites dans un système en représentations d'un autre système, de telle façon que ces dernières permettent d'expliciter d'autres significations relatives à ce qui est représenté* » (p. 21).

L'analyse des difficultés relatives à la conceptualisation, au développement du raisonnement scientifique et de l'activité cognitive de construction et de validation d'un modèle mathématique d'un phénomène scientifique par l'élève, fait face à trois phénomènes reliés entre eux. Le premier est celui de la « *diversification des registres de représentation sémiotique* » (Duval, 1995, p. 21) dont chacun pose des problèmes et des questions d'apprentissage spécifiques. Le deuxième est celui de la « *différenciation entre représentant et représenté* » (Duval, 1995, p. 22). Le troisième phénomène est celui de la « *coordination entre les différents registres*» (Duval, 1995, p. 22). Selon la théorie des registres sémiotiques, ces trois phénomènes sont engendrés par quatre activités cognitives liées à la sémiosis : la formation de représentations dans un registre sémiotique, le traitement, la conversion et la coordination. En didactique des mathématiques, plusieurs recherches ont démontré que l'élève, pour avoir accès à un objet mathématique à travers ses représentations et le conceptualiser, doit absolument réussir ces quatre activités cognitives fondamentales à la sémiosis. La réussite à ces quatre activités sur un objet mathématique en sciences expérimentales suffira-t-elle aux élèves pour pouvoir accéder au contenu conceptuel de cet objet? Pour répondre à cette question, il est important de discuter ces activités dans les prochains paragraphes.

1.1. Formation de représentations dans un registre sémiotique

Selon Duval (1995, p. 37-38), l'activité de formation de représentations dans un registre sémiotique doit respecter ses règles de conformité. Ses règles portent essentiellement sur :

– « *la détermination (strictement limitée, ou au contraire ouverte) d'unités élémentaires (fonctionnellement homogènes ou hétérogènes….) : symboles, vocabulaire…* » ;

- « *les combinaisons admissibles d'unités élémentaires pour former des unités de niveau supérieur : règles de formation pour un système formel, grammaire pour les langues naturelles…* » ;
- « *les conditions pour qu'une représentation d'ordre supérieur soit une production pertinente et complète : règles canoniques propres à un genre littéraire ou à un type de production dans un registre.* »

Cette activité cognitive est essentielle à la réussite de la modélisation mathématique en sciences expérimentales. En effet, elle permettra à l'élève de reconnaître le registre sémiotique auquel la représentation des données expérimentales appartient (registre numérique, registre graphique, etc.) et ce, grâce aux règles de conformité de ce registre. Toutefois, cette reconnaissance n'implique pas nécessairement, ni la compréhension de ce que cette représentation dénote, ni son utilisation, ni son exploitation en mathématiques et en sciences expérimentales. D'autres types d'activités cognitives sont nécessaires dont le traitement, la conversion et la coordination pour permettre une compréhension, une utilisation et une exploitation efficace de cet objet en mathématique et en sciences expérimentales. Où se situent les activités de traitement, de conversion et de coordination dans le processus de modélisation mathématique d'un phénomène scientifique ?

1.2. Activité de traitement

Pour Duval (1995), un traitement est une activité cognitive permettant la transformation d'une représentation, d'un objet, d'une situation ou d'une information en une autre, mais dans le même registre. Cette activité de transformation est tout à fait interne à un registre donné. Par exemple, l'équation $ax - y + b = 0$ est le résultat d'un traitement algébrique sur l'équation d'une droite de type $y = ax + b$. L'activité de traitement d'une représentation d'un objet mathématique bien défini est engendrée par des règles d'expansion propres à cette représentation. Selon ces règles, la nouvelle représentation produite à partir de celle du départ sera établie dans le même registre de départ.

Durant la phase inductive de la modélisation mathématique des phénomènes scientifiques, l'objet mathématique sera construit à partir des données expérimentales. Dans cette phase, l'élève est amené à transformer la représentation sémiotique des données expérimentales en une représentation qui correspond à un objet mathématique. Notons que même si cette activité de transformation se fait à l'intérieur du même registre de départ, elle ne peut pas être une activité de traitement puisque cette dernière requiert à priori un objet mathématique. La validation de l'objet mathématique construit dans la phase inductive se fait dans la phase déductive de la modélisation mathématique des phénomènes scientifiques.

C’est dans cette phase qu’une activité de traitement sur cet objet construit est possible (ex. : déduction d’un nouveau modèle algébrique à partir d’une activité de traitement sur l’objet construit). Il est donc important que l’élève puisse réussir l’activité cognitive de traitement pour accomplir avec succès la modélisation mathématique des phénomènes scientifiques. Il est bien important de noter aussi que dans la phase inductive, il est possible que l’élève recoure à une activité de traitement sur un objet mathématique pour construire le modèle mathématique en question.

1.3. Activité de conversion

La conversion est une activité cognitive permettant la transformation d’une représentation, d’un objet, d’une situation ou d’une information dans un registre, en une autre qui représente le même objet, situation ou information de départ, cette fois, dans un registre différent. Contrairement à l’activité cognitive de traitement, la conversion est tout à fait externe par rapport au registre et à la représentation de départ. Par exemple, le passage d’une équation algébrique d’une droite à sa représentation graphique ou inversement, la mise en évidence de la correspondance entre le coefficient directeur du registre algébrique et l’angle formé avec l’axe des abscisses du registre graphique permettraient la conversion de cette droite entre ces deux registres. Selon Duval (1995, p. 41), « *la conversion requiert que l’on perçoive la différence entre ce que Frege appelait le sens et la référence des symboles ou des signes, ou entre le contenu d’une représentation et ce qu’elle représente* ». Sans ce discernement, la conversion deviendrait alors une activité impossible voire même une activité incompréhensible. Plusieurs recherches en didactique des mathématiques montrent que *« la conversion des représentations sémiotiques constitue l’activité cognitive la moins spontanée et la plus difficile à acquérir chez la grande majorité des élèves »* (Duval, 1995, p. 44). La conversion dépend du degré de non congruence entre les deux représentations de départ et d’arrivée. « *Pour déterminer si deux représentations sont congruentes ou non, il faut commencer par les segmenter en leurs unités signifiantes respectives, de telle façon qu’elles puissent être mises en correspondance.* » (Duval, 1995, p. 47). Pour ce chercheur, il n’y a pas de méthodes spécifiques ou de règles générales selon lesquelles l’élève, en les appliquant, sera capable de réussir la conversion, cela, pour deux raisons. La première correspond au phénomène de non-congruence dont les cas sont toujours des cas particuliers et qui ne peuvent pas être généralisés. La seconde est celle de l’identification des unités signifiantes dans les deux registres de départ et d’arrivée d’un objet. Cette identification dépend du type des registres de départ et d’arrivée ainsi que de l’objet représenté lui-même. Donc, la discrimination des unités signifiantes varie en fonction de l’objet et des registres où il est représenté. Cette activité cognitive de discrimination est le cœur, voire la condition nécessaire de toute activité cognitive de conversion donc de toute activité de coordination entre plusieurs registres hétérogènes. Pour cet auteur, *« l'activité conceptuelle implique la coordination des registres de représentation»*. Il précise ensuite que, pour que l'élève puisse *« discriminer le représentant et le représenté, ou la représentation et le contenu conceptuel que cette représentation exprime, instancie ou illustre »*, il doit parvenir au stade de la coordination inter-registre. Duval (1995) note que seul l'apprentissage fondé sur la coordination entre registres entraîne une compréhension intégrative qui donnera ces possibilités de transfert.

Comme dans le cas d'une activité cognitive de traitement, la conversion requiert à priori un objet mathématique sur lequel l'élève exercera une transformation de la représentation de cet objet. Donc, dans la phase inductive de l'activité de modélisation mathématique en sciences expérimentales, la construction d'un modèle mathématique ne peut pas être considérée une activité de conversion puisque l'objet mathématique est inconnu à priori et il sera construit à partir de la représentation sémiotique des données expérimentales. Il est important de noter que dans la phase inductive, il est possible que l'élève recours à une activité de conversion sur un objet mathématique pour construire le modèle mathématique en question. Durant la phase déductive de la modélisation mathématique, les activités de conversion et de coordination sur l'objet mathématique construit dans la phase inductive est possible voire même obligatoire pour valider le modèle et pour déduire un nouveau modèle algébrique. Il est donc important que l'élève puisse réussir l'activité cognitive de conversion et de coordination pour accomplir avec succès la modélisation mathématique des phénomènes scientifiques. Par conséquent, et puisque l'activité de construction d'un modèle mathématique d'une représentation sémiotique des données d'un phénomène scientifique n'est ni une activité de traitement ni une activité de conversion, l'apprentissage fondé sur la coordination entre registres ne garantirait pas nécessairement un accès au contenu conceptuel de cette représentation. À notre avis, cette activité de construction est fondée sur une activité de coordination inter-cadre (mathématique et physique) puisque les représentations sémiotiques de départ et d'arriver se trouvent respectivement de le cadre des sciences expérimentales (ex : physique) et dans le cadre mathématique. Pour analyser et comprendre davantage les difficultés des élèves rencontrées dans une activité de modélisation algébrique des phénomènes scientifiques, il est nécessaire d'analyser les difficultés inhérentes aux changements de cadre de rationalité c'est-à-dire de cadre disciplinaire.

2. Cadre de rationalité

En tenant compte de la dialectique entre rationalité personnelle et culturelle, et de la dualité familier/scientifique mise en évidence par Vygotski (1962) au sujet des processus de conceptualisation, Lerouge (2000) retravaille la définition de cadre de Douady (1984). Il propose la notion de cadre de rationalité dont la définition est

« *un ensemble cohérent de fonctionnement local de la rationalité culturelle ou personnelle “cadré” en fonction d’un apprentissage particulier* » (Lerouge, 2000, p. 176). Il est caractérisé par quatre composantes : son monde d’objets, ses processus et procédures de conceptualisation et de validation et leurs registres de signifiants, sémiotiques et symboliques. Les processus et les procédures de traitement et de validation en mathématiques sont opérationnalisés par un raisonnement déductif à partir des axiomes tandis qu’en physique ces derniers sont souvent opérationnalisés par un raisonnement inductif élaborant la formulation d’une loi à partir d’un ensemble fini de données expérimentales. Par conséquent, grâce à ces différentes composantes, nous pouvons distinguer les cadres de rationalité personnelle et culturelle des mathématiques des cadres de rationalité personnelle et culturelle de la physique.

2.1. Instabilité des structures des registres sémiotiques

Les recherches de Malafosse, Dusseau et Lerouge (2000-2001) sur l’utilisation des registres graphiques et algébriques en physique, en particulier l’ « *Étude en inter-didactique des mathématiques et de la physique de l’acquisition de la loi d’Ohm au collège : changement de cadre de rationalité* » (Malafosse, Lerouge, Dusseau, 2001), ont montré que, durant une activité de modélisation mathématique, lors d’un changement d’un cadre de rationalité à un autre, les structures de ces derniers sont instables, c’est-à-dire que « *le principe d’unité de représentation dans un registre donné n’est pas maintenu* » (Malafosse, 2002, p. 64) et que la continuité entre chacun de ces registres est illusoire.

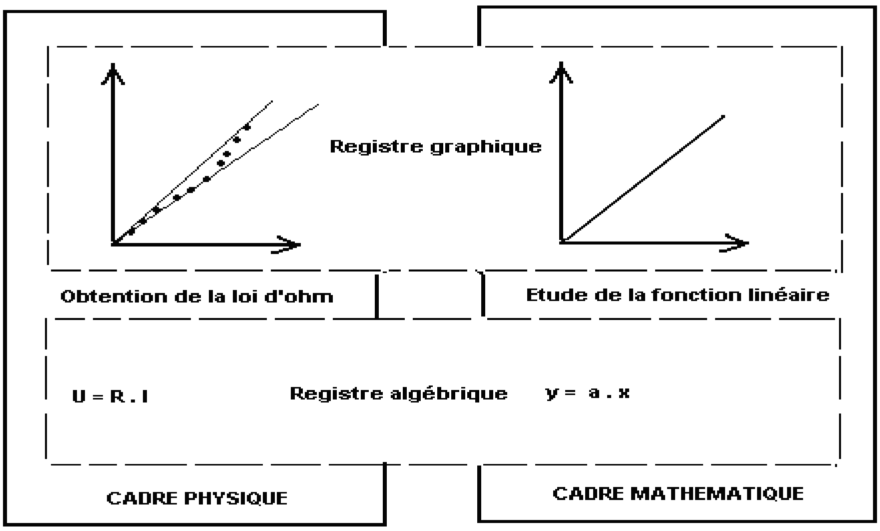

Figure 3 : Instabilité des structures des registres sémiotiques.

Selon ces auteurs, le point graphique en mathématique ressemble beaucoup au point graphique du plan (U, I) nécessaire à la vérification expérimentale de loi d'Ohm. En revanche, « *les relations structurelles du registre graphique qui autorisent les passages entre le point et la droite résistent moins bien au changement de cadre de rationalité : les changements de registre graphique/algébrique, et inversement s'en trouvent alors fortement affectés* », et « *lorsqu'on change de cadre disciplinaire, le principe d'unité de représentation dans un registre n'est pas maintenu* » (Malafosse, 2002, p. 64) ce que résume le tableau 1 qui consiste à distinguer les propriétés caractéristiques des objets conceptuels suivant : point, droite et axe dans chaque cadre de rationalité en physique et en mathématique.

Cadre scolaire de la physique de troisième	**Cadre scolaire mathématique**
Tout point graphique du plan représente un état accessible au système mesuré. Pour tenir compte des incertitudes des mesures, on associe à tout couple de mesures (U, I) soit un point plus ou moins incertain, soit une surface (tache) dont la forme et l'aire dépendent de la qualité de la mesure.	A tout couple de nombres (x, y) on associe par bijection un point graphique du plan XOY de coordonnées x et y. Ce point a les propriétés géométriques d'un point géométrique.
Les axes graphiques ont les propriétés géométriques des droites orientées mais ils sont dimensionnés (par exemple, l'axe des abscisses a pour dimension une intensité, alors que l'axe des ordonnées est un axe de tension).	Les axes graphiques ont aussi les propriétés géométriques des droites orientées mais ils ne sont pas dimensionnés.
La forme et l'aire de chaque tache dépendent des conventions de mesure et de représentation (vecteurs unitaires dont la longueur dépend du choix des unités de mesures, convention de branchement des appareils de mesure).	Le point reste un point par changement d'unité des axes de coordonnées.
L'ensemble des taches graphiques représente l'ensemble des états probablement accessibles au système, à la précision des mesures près. Les incertitudes expérimentales ne permettent pas d'établir une relation de bijection entre l'ensemble des points graphiques couverts par les taches et l'ensemble des couples de mesures.	L'ensemble des points graphiques est une droite graphique. La tache graphique n'a pas de sens.

La juxtaposition des taches donne une autre tache encore affectée d'incertitude. La propriété de continuité est occultée par celle d'imprécision des mesures.	
Pour des raisons de limites expérimentales et d'imprécision des mesures, la bande est de longueur et d'épaisseurs finies.	Les propriétés géométriques de la droite graphique sont celles de la droite géométrique (longueur infinie, épaisseur nulle, *etc*.).
Le passage de la tache au point graphique et de la bande à la droite graphique se fait dans la perspective d'une idéalisation des procédures expérimentales et par interpolation et extrapolation de nature inductive des résultats expérimentaux idéalisés. Cette phase d'idéalisation conserve aux unités significatives du registre graphique des éléments de rationalité du cadre de la physique. En particulier, tout point graphique est affecté d'autant de dimensions physiques (tension et intensité) que de dimensions géométriques (deux pour une représentation plane).	Pour Duval (1988a, p. 14), « *la figuration d'un point relève d'une autre procédure de représentation que celle de la droite : elle est marquage d'une pure localisation, résultant d'une pure visée déictique, ou de croisement de deux droites tracées* ». « *Le tracé de la droite se génère dans un mouvement et la propriété de continuité relève de cette représentation dynamique* ».
Tant qu'elle n'est pas tracée, la droite graphique n'est pas convertible dans le registre algébrique sous la forme d'une relation fonctionnelle. C'est par construction de la droite qu'on crée le signifié.	La représentation graphique de la droite et sa conversion dans le registre analytique sous forme d'une relation fonctionnelle de type affine coexistent toujours. Le signifié correspondant existe par définition.

Tableau 1 : Tiré de Malafosse (2002, p. 64-65).

2.2. Registres sémiotiques transversaux

Le souci d'analyser la rupture et la continuité des registres sémiotiques en changeant de cadre de rationalité amène Lerouge (2000) à postuler l'existence d'un registre transversal en rapport contextuel avec chacun des cadres mobilisés. Il considère donc qu'un registre sémiotique au sens de Duval « *peut être commun à plusieurs cadres ou spécifique à un cadre particulier, mais qu'il est typé par chacun des cadres dans lequel il fonctionne* ». Il considère ensuite que dans un cadre de rationalité donné, il apparaît un registre intra-cadre que nous pouvons considérer stable au sens de Duval, et un registre inter-cadre dont il postule l'instabilité dans le changement de cadre.

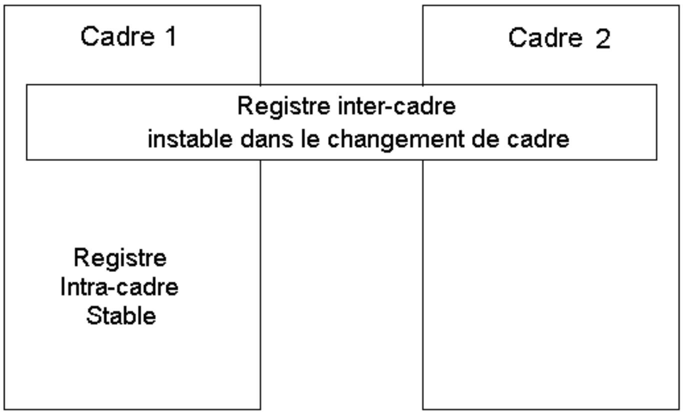

Figure 4 : Registre sémiotique inter-cadre (Lerouge, 2000).

Lerouge (2000) postule qu'au niveau sémiotique, le jeu intra- ou inter-registres développe la distanciation du signe et de l'objet conceptuel, mais que la validité sémantique de ce jeu est à rechercher dans les cadres de rationalité. Or cet auteur souligne que souvent, *les enseignants se placent généralement dans l'hypothèse de continuité des registres sémiotiques entre les mathématiques et la physique, ce qui met les élèves dans l'illusion de continuité quand on change de cadre disciplinaire » (Malafosse, Lerouge, Dusseau 1999).* À notre avis, si les professeurs du secondaire et du collège se placent dans cette hypothèse de fausse continuité, c'est parce qu'ils n'ont pas les outils en mathématiques appliquées nécessaires pour enseigner la modélisation algébrique en tenant compte des incertitudes de mesures. En fait, la réalité expérimentale (les ensembles de points issus de mesure) est à priori informe et polymorphe, ce polymorphisme étant aggravé par le flou des incertitudes. D'autre part, les élèves n'ont guère d'appréhension du polymorphisme algébrique et de la constructibilité d'un modèle mathématique : c'est dans ce rapport que se joue la conversion inter-registre. Ainsi, cette hypothèse de continuité ne permet pas à l'élève d'exercer ce jeu afin de distancier le signe de l'objet conceptuel et d'accéder au contenu conceptuel de la représentation sémiotique. Nous nous posons alors la question suivante : Comment aider l'élève à réussir ce jeu pour accéder de façon autonome au contenu conceptuel d'une représentation sémiotique d'un phénomène scientifique (ex : loi d'Ohm et loi des gaz parfaits ci-après) ?

Notons que le jeu intra ou inter-cadre (cadres mathématique et physique), intra et/ou inter-registre s'inscrit dans l'activité de modélisation mathématique de l'élève. Puisque par ce jeu l'élève construit ses modèles mathématiques, nous allons dans le paragraphe suivant préciser les différentes étapes de l'activité de modélisation mathématique durant le processus de modélisation scientifique.

3. Interprétation inductive d'un modèle mathématique

Nous définissons l'activité de construction inductive d'un modèle mathématique en sciences expérimentales par le processus cognitif avec lequel l'élève construit un objet conceptuel mathématique (ou un modèle mathématique : fonction d'une variable, droite, parabole, etc.) d'une représentation sémiotique d'un ensemble de données expérimentales d'un phénomène scientifique, en particulier en physique (ex. : loi d'Ohm). Ce processus de construction requiert alors un changement de cadre de rationalité. En effet, la représentation sémiotique d'un phénomène physique s'inscrit au départ dans le cadre de rationalité de la physique (Figure 5). Dans ce cas, l'objet conceptuel mathématique de cette représentation sémiotique de départ n'existe pas *a priori*. Ceci est dû aux caractères probabiliste et discontinu des données expérimentales (Figure 5). Il faut donc le transférer et le construire dans le cadre de rationalité mathématique (Figure 5). Cette construction consiste à transformer et à interpréter sous forme mathématique cet ensemble de couples de points informe et polymorphe du domaine de la physique.

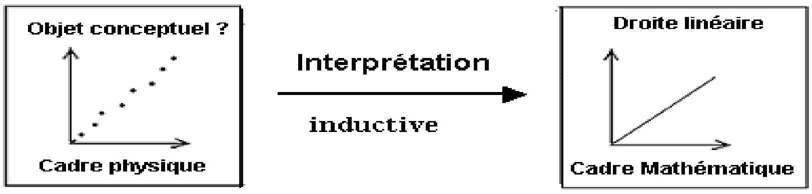

Figure 5 : Interprétation inductive.

Cette activité cognitive de transformation n'est pas prise en compte par Duval (1995). Comme nous l'avons mentionné, elle n'est, selon nous, ni une activité de conversion ni une activité de traitement puisque, selon Duval (1995), un traitement ou une conversion requiert à priori un objet conceptuel pour pouvoir transformer sa représentation sémiotique soit dans le même registre sémiotique de départ (traitement), soit dans un autre (conversion) (Figure 6).

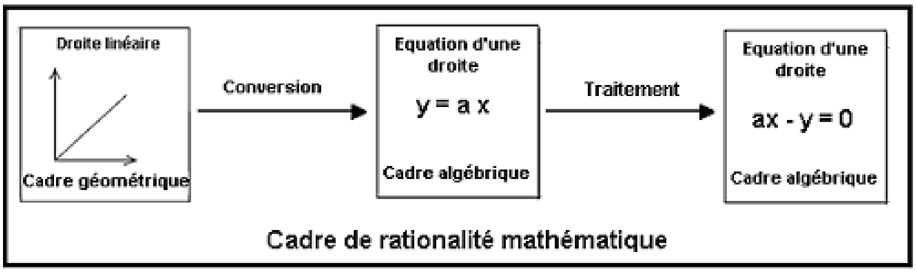

Figure 6 : Conversion et Traitement.

Notons aussi que ces deux activités cognitives (conversion et traitement) s'inscrivent dans le même cadre de rationalité mathématique. Or, dans notre cas (loi d'Ohm), l'activité de transformation requiert un changement de cadre de rationalité disciplinaire. Dans ce cas, l'objet conceptuel sera construit durant le processus de modélisation algébrique. L'ensemble des points issus de l'expérimentation nécessite donc une interprétation, qui permet d'identifier et de choisir le modèle mathématique pour permettre à l'apprenant de changer de cadre de rationalité avant d'exercer les activités de conversion et de traitement telles que Duval les définit. Pour distinguer cette activité de transformation des deux activités cognitives de traitement et de conversion au sens de Duval (1995), nous allons la désigner par interprétation inductive (Figure 6a).

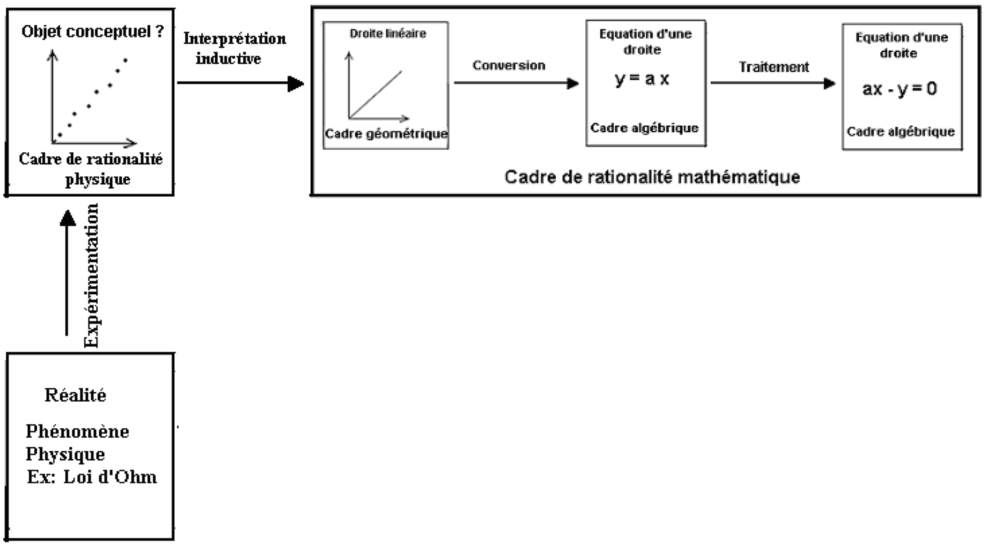

Figure 6a : Interprétation inductive.

4. Interprétation déductive d'un modèle mathématique

En sciences expérimentales, très souvent, les quantités et les variables auxquelles nous nous intéressons ne se prêtent pas directement à la mesure expérimentale. Ainsi, il faut les calculer ou les prédire à partir du modèle mathématique et de l'objet conceptuel construit dans la phase inductive. Pour ce faire, nous devons d'abord avoir accès au contenu conceptuel ou au concept de cet objet mathématique. Cependant, il ne suffit plus de parvenir au stade de coordination au sens de Duval, c'est-à-dire de pouvoir mettre en correspondance les unités signifiantes des différentes représentations sémiotiques de cet objet. Nous devons aussi être capables de les mettre en correspondance avec les propriétés, les caractéristiques des objets phénoménaux et les conditions expérimentales parce que souvent ces derniers agissent sur la représentation sémiotique. Cette activité de mise en correspondance est nécessaire pour la validation des prédictions et la cohérence interne du modèle mathématique. Ainsi, nous désignons cette activité cognitive de mise en correspondance par interprétation déductive.

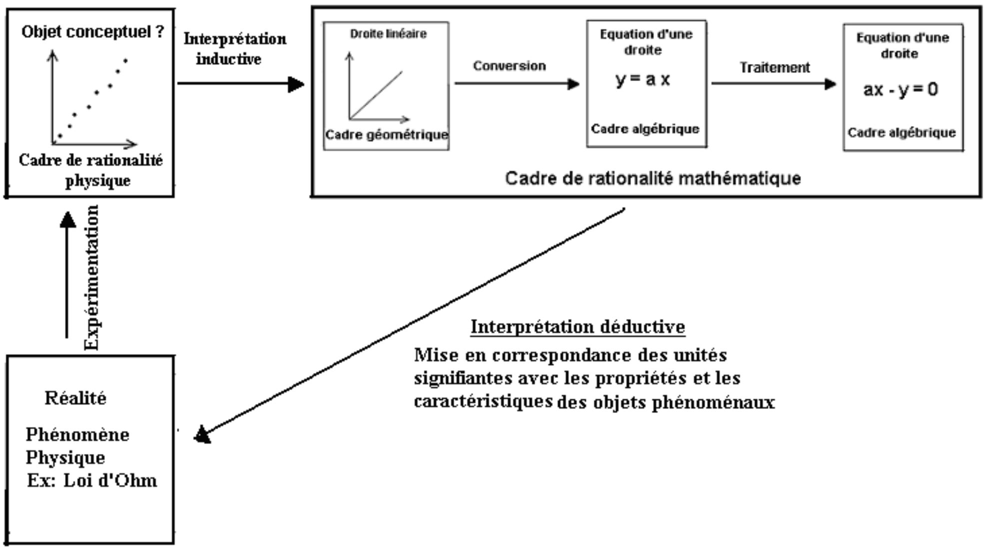

Figure 6b : Interprétation déductive.

Pour mieux nous faire comprendre, nous allons donner deux exemples. Le premier est celui de la loi d'Ohm et le deuxième est celui de la loi des gaz parfaits.

Exemple 1

Soit un circuit électrique (Figure 7) formé d'un générateur, d'un ampèremètre, d'une résistance et d'un voltmètre aux bornes de la résistance :

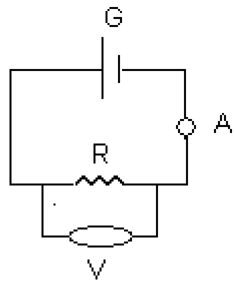

Figure 7 : Loi d'Ohm.

Pour étudier le voltage, aux bornes de la résistance, en fonction du courant, nous avons prix plusieurs mesures du courant et du voltage. Avec ces mesures, nous avons formé plusieurs représentations sémiotiques : une table de valeurs et un graphique (Figure 8).

I (A)	U(V)
0.16	9.575
0.182	10.953
0.203	12.155
0.219	13.152
0.233	13.974
0.246	14.736
0.233	13.974
0.219	13.152
0.203	12.155
0.182	10.953
0.16	9.575
0.134	8.05
0.121	7.229
0.107	6.408
0.092	5.528
0.078	4.648
0.063	3.739
0.047	2.83
0.032	1.891
0.016	0.953
0	0.015
-0.015	-0.924
-0.031	-1.862
-0.046	-2.801
-0.062	-3.71

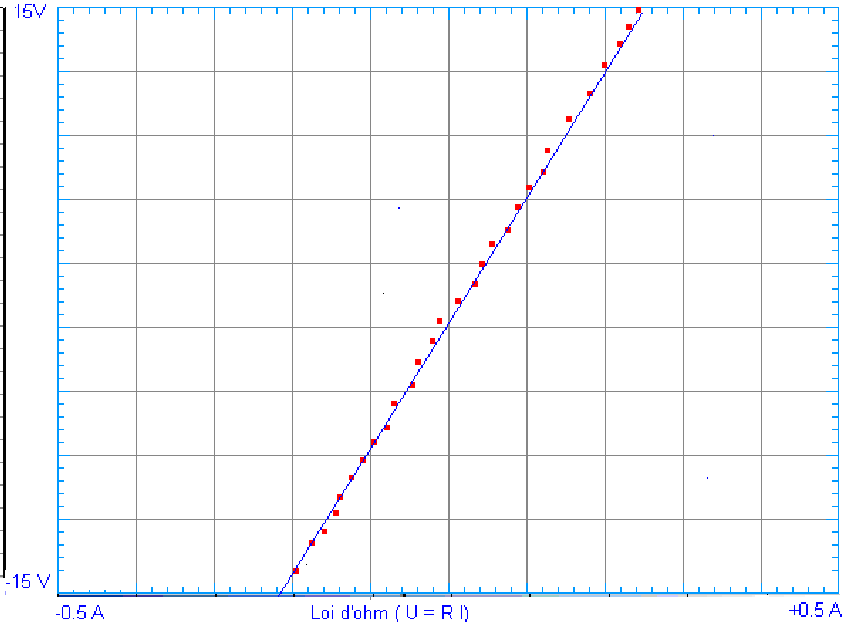

Figure 8 : Loi d'Ohm.

Dans la phase inductive, nous élaborons un modèle algébrique en trouvant l'équation de la meilleure droite passant par cet ensemble de couples de mesures. Jusqu'à cette étape, la mise en correspondance des unités signifiantes, au sens de Duval, nous permettrait seulement de déduire que le voltage est directement proportionnel au courant, c'est-à-dire que leur rapport est constant. Par contre, elle ne nous donne pas accès aux contenus conceptuels de ce rapport, c'est-à-dire à son sens réel. Il faut alors mettre ce rapport en correspondance avec la résistance du circuit électrique du référent empirique et ses propriétés (longueur, surface, température et nature du matériel). Pour ce faire, nous devrions pouvoir prédire la valeur de ce rapport (ou le coefficient directeur de la droite) comme étant la valeur de la résistance du circuit électrique (telle que donnée par le manufacturier). Or, ce rapport ou coefficient directeur n'est jamais parfaitement égal à la valeur exacte de la résistance. Nous devrions déterminer cette approximation de la résistance en évaluant en même temps son incertitude de mesure. Ainsi, et grâce à cette incertitude de mesure, nous pourrions déduire que ce rapport correspond, à une incertitude près, à la valeur de la résistance, bien que ces deux paramètres ne soient pas exactement égaux numériquement.

Exemple 2

Pour étudier la loi des gaz parfaits en chimie, il est possible, avec plusieurs instruments de mesures en sciences expérimentales, de mesurer la pression en fonction du volume. Comme dans le cas de la loi d'Ohm, la mise en correspondance des unités signifiantes de la représentation graphique de la pression de l'eau en fonction du volume, au sens de Duval, nous permettrait seulement de déduire que la pression de l'eau est inversement proportionnelle au volume. Par contre, elle ne nous donne pas accès aux contenus conceptuels du produit (Pression$\times$Volume), c'est-à-dire à son sens réel. Il faut alors mettre ce produit en correspondance avec les propriétés et les caractéristiques du gaz à l'étude (température, volume molaire, constante universelle des gaz parfaits, etc.), d'où l'importance de l'activité d'interprétation déductive.

4. Activité cognitive d'interprétation

Étant donné que les phases cognitives d'induction et de déduction s'inscrivent dans le cycle itératif du processus de modélisation scientifique, nous considérons que ces deux activités s'effectuent aussi dans un cycle itératif. Ainsi, par interprétation, nous désignons l'ensemble de ces deux activités cognitives d'induction et de déduction.

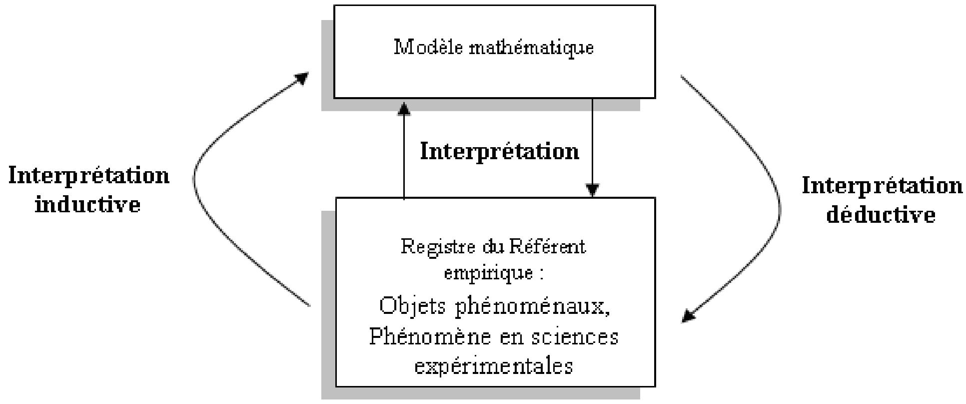

Figure 9 : Activité d'interprétation.

Nous postulons que, pour que l'élève puisse réussir le jeu intra- ou inter-registres et substituer à un modèle explicatif expérimental un modèle calculable et prédictif, et ait accès au contenu conceptuel d'une représentation graphique d'un objet mathématique, il devrait parvenir au stade de l'interprétation. C'est-à-dire qu'il devrait parvenir aux deux stades de l'interprétation inductive et déductive tels que nous les avons discutés précédemment.

Conclusion

Pour analyser les difficultés rencontrées par les élèves durant le processus de modélisation mathématique des phénomènes scientifiques, nous devrons prendre en considération le changement de cadre de rationalité. Pour ce faire, et pour réussir l'activité d'interprétation, l'élève devrait pouvoir construire le modèle mathématique en tenant compte de l'incertitude de mesure. Jusqu'en 2006, au secondaire et au collège, à cause de l'incertitude de mesure, les théorèmes et axiomes qui sont enseignés dans les cours de mathématiques ne sont pas applicables en physique pour déterminer le modèle algébrique (linéaire, parabolique, hyperbolique, sinusoïdal, exponentiel, logarithmique, *etc.*) correspondant à un ensemble de points issu d'une interaction des variables d'un phénomène scientifique. Pour le déterminer, nous devrions utiliser des méthodes en mathématiques appliquées de niveau universitaire, par exemple :

1) la méthode des moindres carrés de Gauss-Legendre ;
2) la méthode des moindres carrés pondérés ou généralisés pour les fonctions non linéaires.

Ces méthodes ne peuvent évidement pas être inclues dans le curriculum. Même si les calculatrices programmables ou des tableurs permettent de les utiliser, la compréhension du rationnel sous-jacent reste hors de portée de l'élève, ce qui ne peut selon nous que nuire à un apprentissage raisonné de l'activité d'interprétation. Sur la complexité de ces méthodes, Beaufils (1993, p. 124) note que : *« les démarches dites "du physicien" présentées aux élèves sont souvent fondées sur une mise en avant exclusive de l'expérience (découverte de loi, induction de théorie, expérience cruciale, etc.)…[…]… Si l'alternative centrée sur les méthodes modernes de modélisation relève d'une épistémologie plus satisfaisante en ce qui concerne la relation théorie/expérience, elle reste problématique au niveau de l'enseignement secondaire dès lors qu'elle se place sur un plan* ***quantitatif et mathématique.*** *Elle ne peut en effet être mise en œuvre de façon immédiate du fait, en particulier, de la limitation de la complexité des modèles mathématiques et des méthodes informatiques ».* Ainsi, le manque d'outils en mathématiques ne laissait pas nos élèves exercer le jeu inter ou intra-registre ou cadre ainsi que l'activité d'interprétation. Ce problème a amené l'auteur de cet article à élaborer et à concevoir une méthode de régression polynomiale, rationnelle, exponentielle, logarithmique et sinusoïdale, la Régression Graphico-Statistique (RGS) (Touma, 2006) publiée dans sa thèse de doctorat à l'Université de Montréal. Le rationnel de cette méthode est de niveau secondaire et collégial. Les résultats de nos recherches sur son utilisation et son impact sur l'activité d'interprétation feront l'objet de nos futures publications.

Bibliographie

BEAUFILS D. (2005), *L'ordinateur outil de laboratoire en physique : quelles transpositions?*, Paris, INRP.

DUVAL R. (1988a), Écarts sémantiques et cohérence mathématique : introduction aux problèmes de congruences, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **1**, 7–25.

DUVAL R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*. Berne, Peter Lang.

JOHSUA S. & DUPIN J-J. (1999), *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*, Paris, PUF.

LEROUGE A. (1992), La notion de cadre de rationalité. À propos de la droite au collège, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **20.2,** 171–207.

MALAFOSSE D. & LEROUGE A. & DUSSEAU J.-M (2000), Étude en interdidactique des mathématiques et de la physique de l'acquisition de la loi d'Ohm au collège : espace de réalité, *Didaskalia*, **16**, 81–106.

MALAFOSSE D. & LEROUGE A. & DUSSEAU J.-M (2001), Étude en interdidactique des mathématique et de la physique de la loi d'Ohm au collège : changement de cadre de rationalité, *Didaskalia*, **18**, 61–98.

MALAFOSSE D. (2002), Pertinence des notions de cadre de rationalité et de registre sémiotique en didactique de la physique, *Recherche en Didactique des Mathématique*, **22.1**, 31–76

NONNON P. (1986), *Laboratoire d'initiation aux sciences assisté par ordinateu,.* Thèse de doctorat, Université de Laval.

TOUMA G. (2006), *Un paradigme d'expérimentation au laboratoire de sciences pour l'identification et l'optimisation statistique d'un modèle algébrique par interaction visuo-graphique*, Thèse de doctorat, Université de Montréal.

VYGOTSKI, L. S. (1962), *Thought and Language*, Cambridge (MAS), MIT Press.

GEORGES TOUMA
Université d'Ottawa, Faculté d'éducation
Pavillon Lamoureux
145, Jean-Jacques-Lussier
Ottawa, ON, Canada, K1N 6N5
Georges.touma@uottawa.ca