ROSA ELVIRA PÁEZ MURILLO, FELIPE ALFARO AGUILAR,
CARLOS ALBERTO TORRES MARTÍNEZ

ESTUDIANDO FUNCIONES EN CONTEXTO A TRAVÉS DE SIMULACIONES CON ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

Abstract. Studying functions through simulations with engineering students. This paper show the results coming out from a research led at the Autonomous University of Mexico City, in the context of a national project about teaching of calculus for engineering students. In order to identify the difficulties encountered in learning and building the concepts of co-variation and function, the use of the virtual simulation of a concrete situation was selected: transmission of movements by a fixed pulley. The students under observation received printed work sheets along with HTML pages using Java Applets for interactive work. Three research activities were prepared, ordered by growing difficulty. Two of them are reported in this paper, as they were considered to be illustrative of the difficulties that students face in understanding process of the phenomenon. This experience also showed that some elements from the simulation, as well as the misunderstanding of the involved mathematical notions (variables, parameters, algebraic relationships, domain and rank of a real function) can generate learning obstacles.

Resumen. En el presente artículo se reportan los primeros resultados que se han obtenido de una investigación con estudiantes universitarios de ingeniería del curso de cálculo diferencial acerca de las dificultades de aprendizaje y construcción del concepto de covariación y función, haciendo uso de problemas en contexto, los cuales se presentan mediante simulaciones a través de applets. Estas primeras evidencias recolectadas señalan dificultades para entender una situación física mostrada a través de una simulación y en ella identificar variables, parámetros, relaciones algebraicas, y dominios y rangos de funciones; al igual que se detecta que los elementos que se utilizan para la simulación causan obstáculos en los estudiantes. Las actividades que se han preparado para este proyecto corresponden al caso de una polea fija. Son tres applets en orden creciente de complejidad que fueron diseñados por el Dr. François Pluvinage, para cada uno se elaboró una hoja de trabajo que se entregó a cada estudiante. Estas actividades se aplicaron a cuatro grupos de la misma universidad.

Résumé. La simulation dans l'étude de fonctions pour des étudiants en ingénierie. L'article rapporte les premières observations qui résultent d'une recherche, conduite à l'Universidad Autonoma de la Ciudad de Mexico dans le cadre d'un projet national mexicain sur l'enseignement de l'analyse pour des étudiants en formation d'ingénierie. Pour identifier les difficultés d'apprentissage et la formation des concepts de covariation et de fonction, on a simulé sur ordinateur une situation concrète : la transmission de mouvement par une poulie fixe. Des pages html avec des Applets Java pour la manipulation sont accompagnées de feuilles de travail distribuées aux étudiants. Trois cas de complexité croissante étaient prévus, mais les observations qui se limitent aux deux premiers suffisent à mettre en évidence des types de difficultés liées soit à la compréhension de la situation

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 13, p. 113 - 132.

physique simulée, où certains éléments dressent des obstacles pour les étudiants, soit à l'identification des notions mathématiques qui s'y rapportent : variables, paramètres, relations algébriques, ensembles de départ et d'arrivée de fonctions.

Mots-clés. Fonction, fonction linéaire, simulation, variable, paramètre.

Présentation analytique

Afin que les lecteurs des Annales disposent en français d'une information détaillée sur le contenu du présent article rédigé en espagnol, il est précédé d'une présentation analytique élaborée par la rédaction des Annales.

L'introduction de l'article met l'accent sur le fait que beaucoup d'étudiants qui abordent un cours d'analyse éprouvent des difficultés à propos du concept même de fonction et des concepts dérivés (variables et paramètres, covariation, domaines). Pour tirer profit de l'étude du calcul différentiel proprement dit, les étudiants doivent comprendre et pouvoir utiliser ces premiers concepts. Une piste pour ce faire est de leur proposer des problèmes dits *en contexte*, recourant à des simulations sur ordinateur de situations physiques. Les étudiants n'ont pas à programmer, mais plus simplement à travailler sur des pages HTML permettant notamment des animations et à rédiger des réponses sur des questionnaires imprimés (reproduits en annexes de l'article). Cet environnement a été mis en place dans le cadre d'un séminaire national au Mexique portant sur l'enseignement de l'analyse, auquel participe notamment l'UACM (Universidad Autonoma de la Ciudad de México), où les observations dont l'article rend compte ont été effectuées. Dans d'autre centres, ainsi l'UAEM (Universidad Autónoma del Estado de México), l'environnement a pu différer, par exemple avec l'introduction de programmes didactiques (tel CalcVisual) et de questionnaires partiellement en ligne amenant à faire usage de système de gestion de données (de type MySQL). Ceci pourra être l'objet d'autres articles.

L'article ne porte pas sur la totalité du projet d'enseignement de l'analyse à l'UACM, mais se limite à présenter une analyse descriptive des observations effectuées lors du déroulement des premières activités. En effet, il est apparu qu'à elles seules elles méritaient une analyse en raison de leur intérêt et de leur richesse, s'avérant très révélatrices non seulement des savoirs des étudiants sur les premiers concepts fonctionnels, mais aussi d'autres aspects que la pratique des situations considérées a permis de mettre en lumière.

Le paragraphe 1, *Méthodologie*, présente les trois situations proposées aux étudiants, représentant toutes les trois une transmission par poulie simple fixe, de rayon négligeable par rapport à la longueur de cable, mais dans des contextes différents. Dans la première situation, le point de traction est libre et il s'agit d'observer les mouvements de la charge qui sont associés aux déplacements du point de traction. Dans les deux situations suivantes, le plan est rapporté à un repère orthonormé ; le point de traction M est astreint à se déplacer sur l'axe O*x* et la charge N se déplace sur O*y*. Ce qui distingue ces deux situations est que, dans la première des deux, qui réfère à une bête de somme tirant de l'eau d'un puits au dessus duquel se trouve la poulie, le point de fixation de la poulie est O, alors que dans la dernière, la poulie P se trouve placée en un point quelconque de O*y* (c'est la situation illustrée sur la figure ci-contre). Dans le cas particulier où la poulie P est en O, le lieu du point (*x*, *y*) dont les projections orthogonales sur les axes sont M et N se réduit à un segment de droite. Dans le cas général, on montre que ce lieu est un arc d'hyperbole.

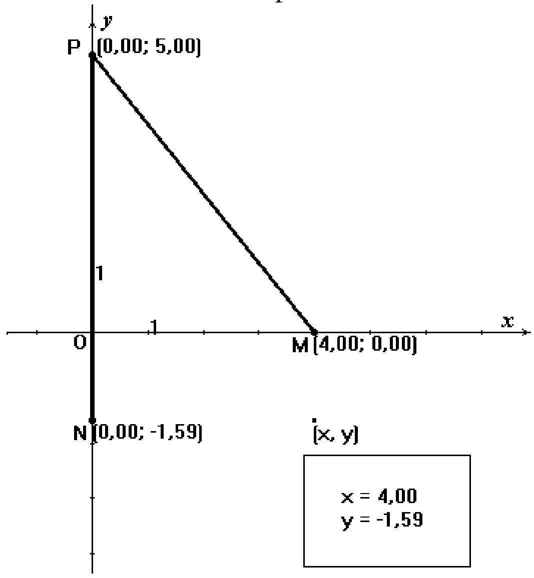


Figure pour la troisième situation.

Dans son application, la troisième situation s'est avérée pour les étudiants d'un niveau de complexité suffisamment élevé pour donner lieu à plusieurs séances de travail. Les observations effectuées à propos des deux premières situations (point de traction libre et eau tirée du puits) ont déjà permis de recueillir un corpus assez fourni pour faire à elles seules l'objet de l'article.

L'observation du travail des étudiants est traitée dans le point 2 de l'article, selon plusieurs rubriques. La première est relative à la compréhension de la situation physique représentée et à l'identification de la relations entre les variables, à longueur de cable donnée. Il est apparu des amalgames entre les désignations des objets par des lettres, à savoir M, N et P, et les variables numériques (les distances entre ces points). Ainsi un étudiant a répondu à propos de la première activité : « *Selon qu'on lâche M, la longueur de N varie. Si M diminue, N augmente, et si M augmente, N diminue.* » Lorsque la deuxième activité a été appliquée, une semaine après la première, les étudiants qui avaient fourni la première fois une réponse correcte et complète à la question de la relation entre la longueur *x* de MP et la longueur *y* de PN se contentèrent de réponses purement qualitatives, à l'exception d'un étudiant qui fournit à nouveau les réponses exactes. Les étudiants avaient été répartis en quatre groupes de travail, et toutes les réponses exactes dans la seconde activité furent données par les étudiants d'un même groupe, le seul où une session de synthèse avait été organisée après la première activité. Les difficultés observées ont souligné la complexité de la description d'une situation physique simplement en langage naturel, et *a fortiori* de sa traduction en langage algébrique. Par ailleurs, des confusions ont pu être remarquées dans des références à la proportionnalité (cette dernière sera évidemment importante lorsque la dérivation sera abordée) ; ainsi des étudiants ont pu parler à tort de quantités directement ou inversement proportionnelles pour exprimer des variations dans le même sens ou dans des sens opposés, alors que les relations étaient additives.

La seconde rubrique, numérotée 2.2, est relative aux ensembles de départ et d'arrivée. Certains étudiants n'ont pas été sensibles aux limitations que la longueur du cable impose. Quinze d'entre eux ont répondu pour la première situation qu'aussi bien x que y peuvent prendre n'importe quelle valeur positive. D'autres se sont rapportés strictement à la manipulation qu'ils ont faite du modèle et ne produisent pas comme réponse l'intervalle [0, 10], si la longueur de cable sur le modèle est de 10 cm, mais un intervalle plus réduit, tel que [0,02 ; 9,98]. Enfin, dans la situation qui est rapportée à un repère, certains n'ont pas pris en compte dans leurs réponses le signe négatif de y.

L'identification des variables et paramètres est l'objet de la rubrique numérotée 2.3. La variété des réponses obtenues pour la première situation apparaît dans un tableau de résultats, où par exemple la question sur la variable indépendante a donné lieu à six réponses différentes.

Pour illustrer les difficultés qui peuvent se rencontrer à l'occasion de conversions entre registres de représentation, rubrique numérotée 2.4, l'article présente une étude de cas. Un étudiant qui répond de manière correcte à la fois verbalement et algébriquement, se trompe au moment de dresser une représentation graphique. A cause de sa méconnaissance de l'écriture scientifique des petits nombres, telle que le logiciel la présente sous la forme 1,59e-14, pour $1{,}59\times10^{-14}$, il prend en compte simplement la valeur 1,59, ce qui l'amène, en contradiction pourtant avec ce qu'il a déjà répondu, à dresser deux graphiques erronés.

Une ultime rubrique numérotée 2.5 aborde la généralisation du modèle. Elle se contente de signaler que tous les étudiants du groupe dans lequel avait été organisée une session de synthèse ont réussi à généraliser.

Les réflexions proposées en conclusion s'opposent à des affirmations qui concluent nombre de recherches et qui paraissent exagérément optimistes aux auteurs. Ils évoquent aussi l'hypothèse qu'une manipulation de poulies réelles eut pu changer ensuite le regard sur les situations simulées. Si l'expérience menée n'est pas une panacée pour remédier aux difficultés des étudiants, elle présente au moins l'intérêt de bien mettre toutes ces difficultés sur le devant de la scène au moment d'aborder l'étude de l'analyse.

Introducción

Estudios realizados sobre la construcción de concepto de función (Hitt, 1998; Sajka, 2003) y límite (Páez, 2001 y 2004), sugieren que antes de enfrentarse a conceptos de cálculo complejos: el de límite o derivada, deberían estudiarse nociones básicas como la de variable, parámetro y función. Por ello, la investigación que se está realizando con estudiantes universitarios, se centra en cuestionar las dificultades de aprendizaje y construcción del concepto de covariación y función, haciendo uso de problemas en contexto, los cuales se presentan a través de simulaciones con applets.

Así mismo, investigaciones realizadas por Carlson (1998, 2002), Nemirovsky y Rubin (1991), Noble y Nemirovsky (1995), entre otros, nos reportan que la experiencia con la naturaleza física del fenómeno tiene cualidades que promueven el desarrollo de estructuras internas en el estudiante, permitiendo así que ellos puedan establecer conexiones entre diferentes representaciones del modelo físico. Además, Carlson (2002) manifiesta que las habilidades de razonamiento referente a covariación son importantes para interpretar y representar la naturaleza de cambio de funciones dinámicas (que modelan movimiento).

Esta investigación se enmarca desde una perspectiva de la construcción de conceptos basada en la teoría de representaciones semióticas (Duval, 1998 y 1999; Hitt, 2003). En particular, consideramos de importancia las producciones semióticas de los estudiantes en el proceso de construcción del concepto de variable y de función. Al igual que se considera esencial la posibilidad de detectar en ellos procedimientos que reflejen cierto tipo de conocimiento, al que se identifica como una concepción[1] en el sentido de Duroux (1983).

Las preguntas de investigación que orientan este estudio son: ¿Qué concepciones se presentan en los estudiantes del primer semestre de ingeniería, cuando están aprendiendo los conceptos de variable y función?, ¿Qué nivel de dificultad se presenta en los estudiantes al analizar situaciones en contexto, de los procesos de conversión entre diferentes registros de representación (verbal, algebraico, numérico y gráfico)?, ¿Qué dificultades se detectan cuando los estudiantes utilizan tecnología para resolver problemas?

Esta investigación de tipo exploratorio forma parte de un estudio sobre la enseñanza del cálculo (Seminario nacional "Enseñanza del cálculo", dirigido desde el Centro de Investigación y estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional)

[1]Duroux (1983) define este término como un saber local que se produce cuando se privilegian ciertas situaciones, en menoscabo de otras, en la adquisición del conocimiento. Por lo tanto, una concepción es operante sobre una parte de lo que Vergnaud designa como campo conceptual y por ende presenta necesariamente insuficiencias.

en donde participan cuatro universidades y un centro de investigación de México, proyecto que tiene por objetivo general mejorar la enseñanza y aprendizaje del curso de cálculo diferencial. La propuesta específica es la reestructuración del programa de estudios, y la implementación del uso de tecnologías en dos vertientes: el uso de un software tutorial de cálculo para funciones polinomiales y la implementación de applets con simulaciones de situaciones físicas; en este caso la polea simple y el globo inflable, las cuales tienen como fin explorar el conocimiento que poseen los estudiantes en relación a los conceptos primarios de variable independiente, variable dependiente, parámetro y función, para situaciones en contexto.

Dentro del marco del proyecto "Enseñanza del cálculo", investigadores de la Universidad Autónoma del Estado de México (centro universitario del Valle de Chalco) reportan que durante los tres últimos años de su investigación, el uso del software específico y de los applets mencionados, en su curso de cálculo ha ocasionado que los índices de reprobación disminuyan y que las dificultades de aprendizaje de los estudiantes evolucionen más rápido. Asimismo, la actitud de los estudiantes hacia la matemática ha mostrado cambios notables al tomar un papel más activo y propositivo, lo mismo en las sesiones de laboratorio que en el aula, es decir, el estudiante asume un rol diferente al que está acostumbrado tradicionalmente.

En este artículo nos centramos, no a considerar la totalidad del proyecto sino a presentar un análisis descriptivo de los resultados de las dos primera actividades de polea y mostrar dificultades de aprendizaje con que inician los estudiantes con respecto a los conceptos primarios ya mencionados. Nos interesa estudiar los resultados de la pre-experimentación desde un punto de vista cualitativo más que cuantitativo debido a que el principal interés en esta etapa es analizar la actuación de los estudiantes en base a sus concepciones.

1. Metodología

En esta primera parte de la investigación participaron cuarenta estudiantes, todos ellos alumnos de ingeniería del curso de cálculo diferencial de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Las actividades preparadas para este proyecto, corresponden al caso de una polea fija, son tres applets en orden creciente de dificultad. En el primero, se presenta el modelo de polea simple fija que el estudiante manipula libremente con una cuerda dividida por la polea en dos segmentos, cuyas longitudes son las variables a considerar (ver Figura 1).

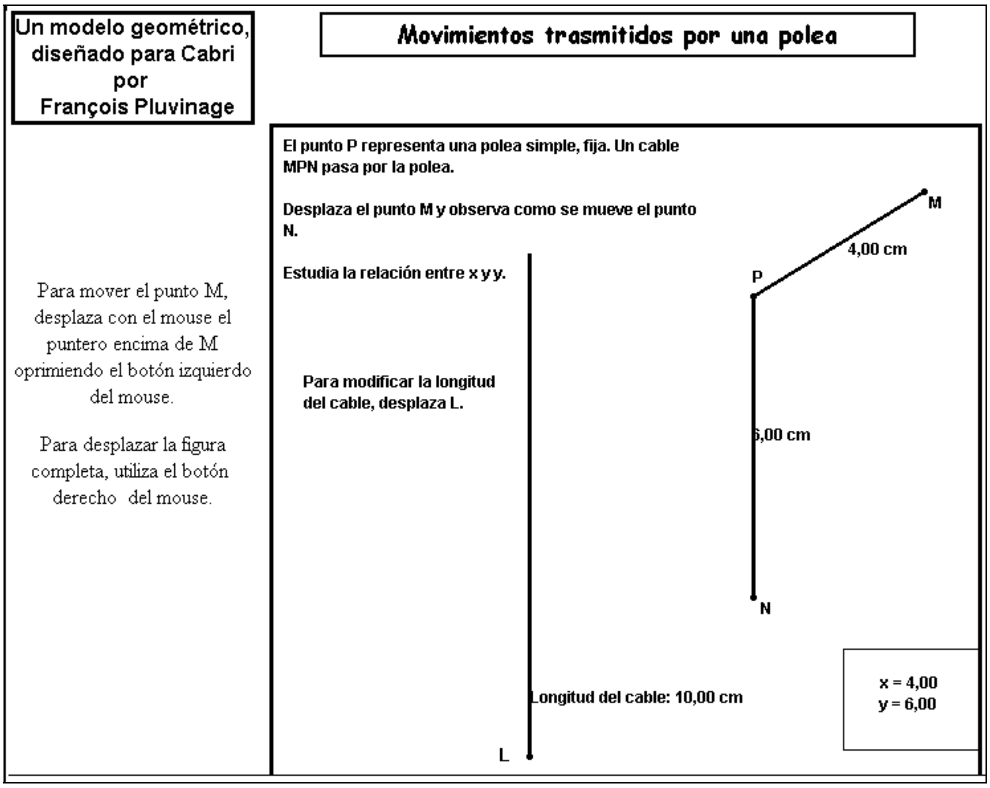


Figura 1: Applet de la actividad uno.

En el segundo applet, se plantea la consideración adicional de que la cuerda de la polea se mueve en un sistema de coordenadas cartesianas (ver Figura 2). Escenario que se generaliza en el tercer applet, al permitir que el punto de apoyo P de la polea se fije en cualquier posición del eje de las ordenadas y; esto implica un aumento en el grado de complejidad, pues la relación entre variables cambia de lineal a hiperbólica. La dificultad de la tercera actividad fue inconsistente con la experiencia previa de los estudiantes, por lo que la información recabada después de su aplicación fue escasa y no se tomó en cuenta para la elaboración de este artículo.

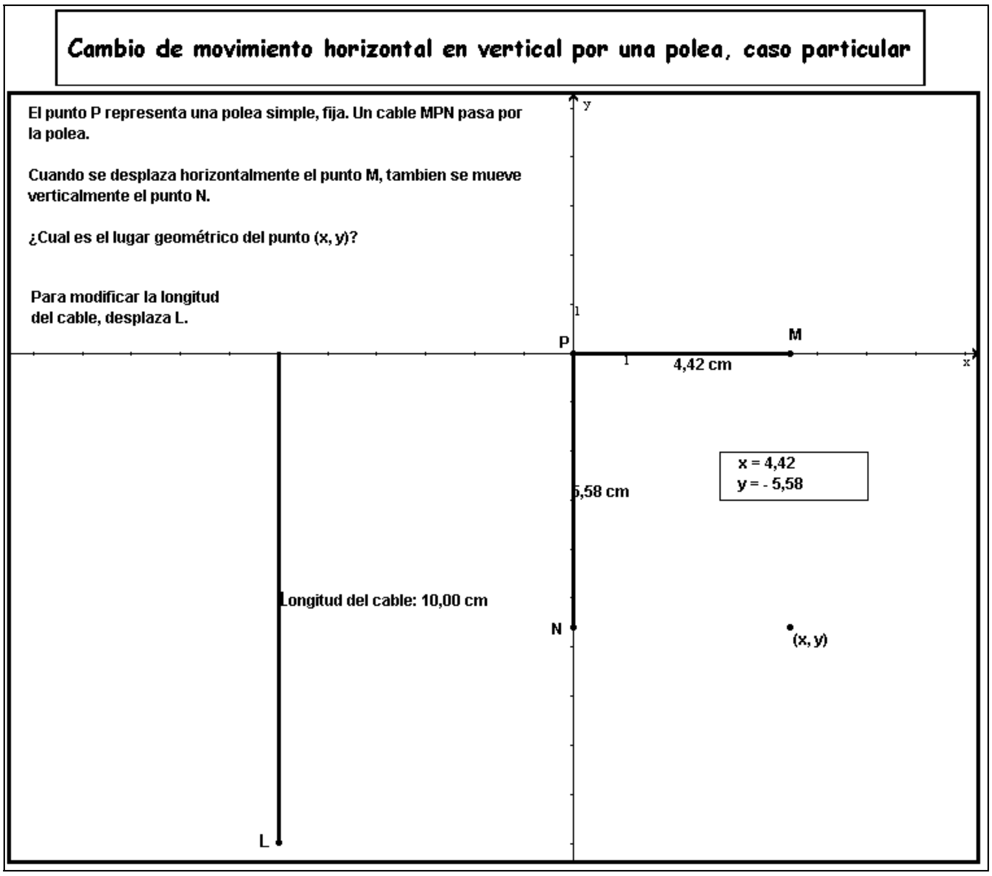


Figura 2: Applet de la actividad dos.

Para cada una de las tres actividades se diseñó una hoja de trabajo (ver anexos uno y dos) que se entregó a cada estudiante, junto con un disquete que contenía los archivos de cada simulación. En la hoja de trabajo se daban las indicaciones respectivas sobre los archivos y tareas a realizar. Las aplicaciones de la primera y segunda actividad tuvieron una duración de 75 minutos cada una y con un intervalo de una semana después. La tercera actividad resultó más compleja, por lo que se necesitó rediseñar la hoja de trabajo, y tener tres sesiones de 90 minutos cada una. El desarrollo de las actividades fue realizado de manera individual por el estudiante, y sin colaboración de los investigadores.

Algunas de las preguntas de la actividad uno y de la actividad dos son idénticas, sólo que como ya lo mencionamos, la situación física en la actividad uno se realiza sin ningún sistema de coordenadas cartesianas. Los objetivos de las preguntas de las actividades eran: identificar si los estudiantes reconocen cuáles son las variables que intervienen en esta situación en contexto, los parámetros, y las relaciones entre las variables en los diferentes registros de representación (numérico, algebraico, verbal y gráfico), y si había articulación entre los diferentes registros que utilizaban los estudiantes.

2. Observación del trabajo de estudiantes

De acuerdo al marco teórico se examinan las respuestas dadas por los estudiantes en las hojas de trabajo, y para efectos de este artículo de investigación, se engloban las principales dificultades que presentan los estudiantes en los diferentes registros y la conversión entre ellos.

2.1. Comprensión del problema e identificación de la relación entre las variables

Pregunta: *¿Qué relación algebraica descubriste entre los valores de* x *y* y *obtenidos por diversas ubicaciones del punto M, cuando no se cambia la longitud de la cuerda?*

Al respecto, cabe decir que la palabra "algebraica" se agregó después de haber aplicado la primera actividad a uno de los cuatro grupos participantes, al detectar que ésta era ambigua, y que las interpretaciones se estaban desviando a descripciones de tipo cualitativo, no lográndose el objetivo deseado de hallar una ecuación que relacionara las dos variables. Con la modificación realizada a los siguientes tres grupos, en la primera actividad, seis de cuarenta estudiantes respondieron con éxito, ya sea en lenguaje algebraico o en lenguaje verbal, y el resto de los participantes continuaron dando interpretaciones de tipo cualitativo.

Un aspecto que nos llamó la atención sobre las respuestas a esta pregunta, es que los elementos del applet, como las letras M y N usadas para identificar a los puntos extremos de la cuerda, y la letra P para identificar a la polea, actuaron como distractores al ser frecuentes respuestas donde relacionan a estos objetos como las variables del sistema, como lo podemos evidenciar en la siguiente que dio una estudiante: *"Entre más alargue M, la longitud de N, va variando con respecto a M. Si M disminuye, N aumenta, y cuando M aumenta, N disminuye"*.

Para la actividad dos, la situación se mantuvo, el número de estudiantes que proporcionaron la relación algebraica fue aproximadamente igual, y el resto de los estudiantes proporcionaron interpretaciones de tipo cualitativo. Una diferencia que es necesario resaltar es que, los estudiantes que respondieron bien a esta pregunta en la primera actividad, ya no lo hicieron en la segunda que se aplicó una semana después, y se limitaron a dar respuestas de corte cualitativo, con una sola excepción de una estudiante que mantuvo respuestas correctas en ambas actividades.

Debemos señalar que, durante el experimento, antes de aplicar la segunda actividad, realizamos una sesión previa a uno de los cuatro grupos participantes. Con ellos se reflexionó sobre la situación física que se les estaba planteando y lo que estrictamente solicitábamos en la pregunta, ya que notamos que ésta les causó mucha confusión. Fue en este grupo, donde se obtuvieron todas las respuestas correctas a la pregunta sobre cuál es la relación algebraica entre las variables *x* y *y*.

Los resultados obtenidos para esta pregunta, tanto en la actividad uno como en la dos, determinan dificultades que tienen los estudiantes en traducir a un lenguaje algebraico o natural, la relación funcional lineal inmersa en un problema físico. Al respecto, Carlson (2002) señala la complejidad de esta situación debido a que las acciones para coordinar y entender el cambio de una variable con respecto a la otra, involucran toda una representación mental de la operación de coordinación entre dos objetos.

Además, se evidenció concepciones, en el sentido de Duroux (1983), relacionadas con el concepto de proporcionalidad, por ejemplo, el solo hecho de que una variable aumente y la otra disminuya o aumente, hace que los estudiantes afirmen que son inversamente o directamente proporcionales respectivamente. Esto se evidenció en tres estudiantes en la primera actividad y en cinco en la segunda actividad. Carlson (2002) describe a este tipo de “relación” entre las variables, que resulta del modelo físico, como “Estructuras de Covariación”.

2.2. Identificación del dominio y rango

Preguntas:

- *La cuerda teniendo una longitud determinada ¿puede tomar x cualquier valor positivo? Si no ¿cuáles son sus valores posibles*?
- *La cuerda teniendo una longitud determinada ¿puede tomar y cualquier valor positivo? Si no ¿cuáles son sus valores posibles*?

Esta parte nos permitió identificar dificultades que tienen los estudiantes acerca de la identificación de dominio y rango de una relación funcional. Los resultados obtenidos en la actividad uno, nos muestran que dieciséis estudiantes son capaces de identificar el dominio y el rango de esta relación algebraica. Quince estudiantes manifiestan que tanto x como y pueden tomar cualquier valor positivo. Algunos estudiantes responden estrictamente dentro de las limitaciones del applet, en el sentido que al manipular la cuerda, la variable x no alcanza los valores extremos del dominio, es decir, 0 o L, por lo que escriben dominios con intervalos del siguiente estilo $\left[0.02, 9.98\right]$ para una cuerda de longitud L=10 cm. En la actividad dos podemos identificar representaciones espontáneas para notación de intervalos, como lo expresa Hitt (2003), ya que expresan que los valores que puede tomar la variable y con un valor específico de la cuerda de 10 cm, es de 0 a -10, y lo representan como $[0, L]$ sin tomar en cuenta el signo negativo.

2.3. Identificación de variables y parámetros

Indicación: *En el fenómeno estudiado te proponemos introducir las palabras: variable dependiente, variable independiente, parámetro. De los elementos presentados en la página Internet, escoge los que te parezcan más convenientes en cada caso*.
Este enunciado corresponde únicamente a la actividad uno, y los resultados obtenidos los podemos evidenciar en las siguientes tablas:

Variable dependiente	
	Número de estudiantes
y	14
M	6
N	13
P	2
x	4
No Responden	1

Variable independiente	
	Número de estudiantes
x	14
P	1
N	4
M	14
L	2
y	4
No Responden	1

Parámetro	
	Número de estudiantes
L	27
P	2
M	2
N	2
Otras respuestas	4
No Responden	5

Como podemos observar en estos resultados, hubo seis respuestas distintas para seleccionar a la variable independiente, y otras tantas para la variable dependiente, inclusive llegaron a proponer el punto de apoyo de la polea P como variable.

Los resultados aquí obtenidos ratifican lo ya mencionado por Carlson (2002) sobre la complejidad de lo que implica el coordinar y entender el cambio de una variable con respecto a la otra, conllevando así a la dificultad para identificar los distintos elementos presentes en el applet, por ejemplo, confunden el punto extremo M de la cuerda, donde se jala para levantar la carga, con la variable x (la longitud del segmento de cuerda entre la polea y el punto M), a pesar de que en la simulación se muestra claramente el valor numérico cambiante de la longitud de este segmento de cuerda, el cual se identifica en un pequeño recuadro con el símbolo x. Esta misma confusión se muestra al identificar el punto extremo N de la cuerda donde se encuentra la carga, como la longitud del segmento de cuerda entre la polea y la carga, que en realidad es la variable y.

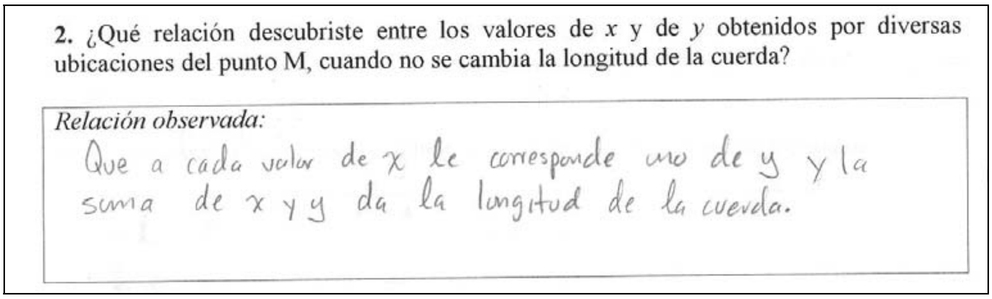
2.4. Conversión entre representaciones: Un estudio de caso

Indicación: *Para cada una de las longitudes que seleccionaste y con los valores de la tabla de la pregunta 1.*

> ***a**. Elabora una gráfica con los valores de x y y que se corresponden (x en abscisa, y en ordenada).*
>
> ***b.** ¿Cómo cambia la gráfica al cambiar el parámetro L en la situación planteada?*

Uno de los aspectos importantes a señalar en este punto, es que si bien se solicita graficar usando los datos obtenidos en la simulación, ninguno de los seis estudiantes que encontró la relación algebraica entre variables *x* y *y*, relacionó ambas formas de representación. No utilizaron las técnicas aplicadas en el curso para graficar funciones lineales, por ejemplo, la identificación de la pendiente y ordenada al origen; todos ellos usaron el tabulado de puntos. Tampoco establecieron una vinculación del aspecto gráfico con el dominio y rango, esto es, no limitaron sus gráficas a los dominios dados por ellos mismos, las “recortaban” de acuerdo a los datos usados en el tabulado de puntos, o bien las “extendían” más allá de su dominio sin precaución alguna.

Para ejemplificar lo que acabamos de mencionar, exponemos a continuación el caso de un estudiante. Para la actividad uno, en la pregunta 2 se solicita identificar la relación algebraica entre variables, describiéndola correctamente usando un lenguaje verbal (ver Figura 3). También describe correctamente cuáles son las variables dependiente e independiente, y sus intervalos de definición (ver Figura 4), sin embargo, no es capaz de plasmar dicha relación en la representación gráfica (ver Figuras 5a y 5b) y en la representación numérica. Tampoco se percata de su contradicción entre el dominio dado verbalmente, y el dominio que muestra en su representación gráfica, pues en la figura utiliza valores negativos.



2. ¿Qué relación descubriste entre los valores de *x* y de *y* obtenidos por diversas ubicaciones del punto M, cuando no se cambia la longitud de la cuerda?

Relación observada:

Que a cada valor de x le corresponde uno de y y la suma de x y y da la longitud de la cuerda.

Figura 3

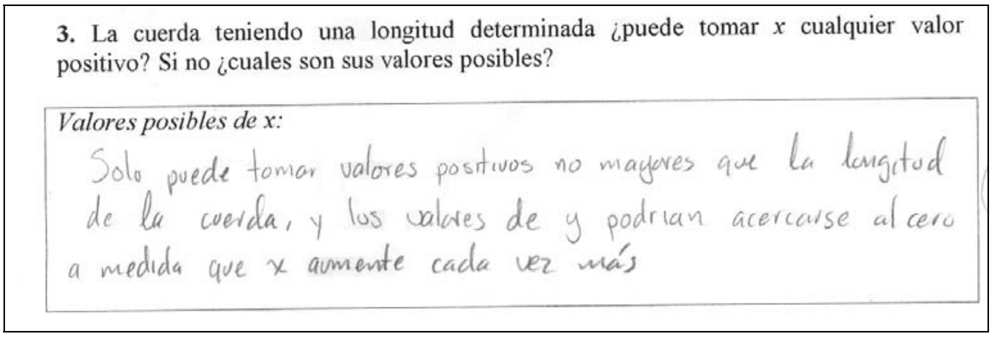


Figura 4

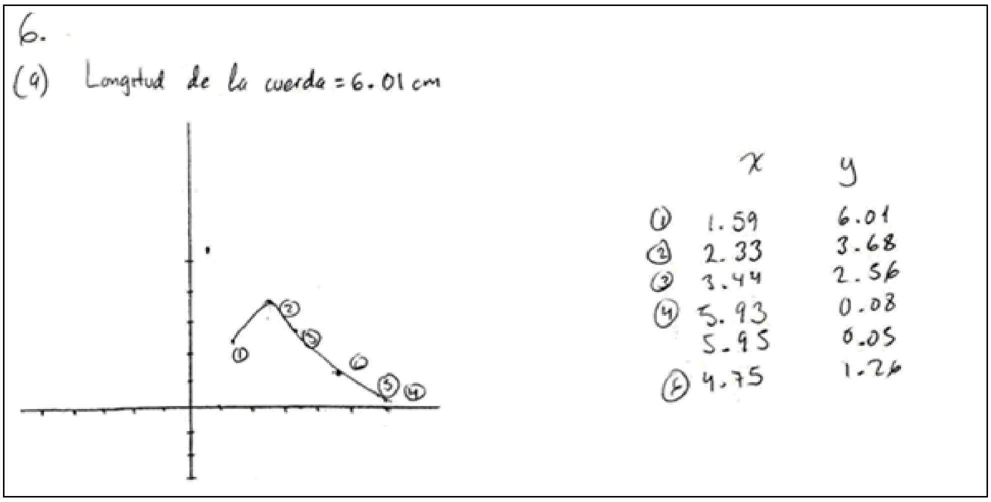


Figura 5a

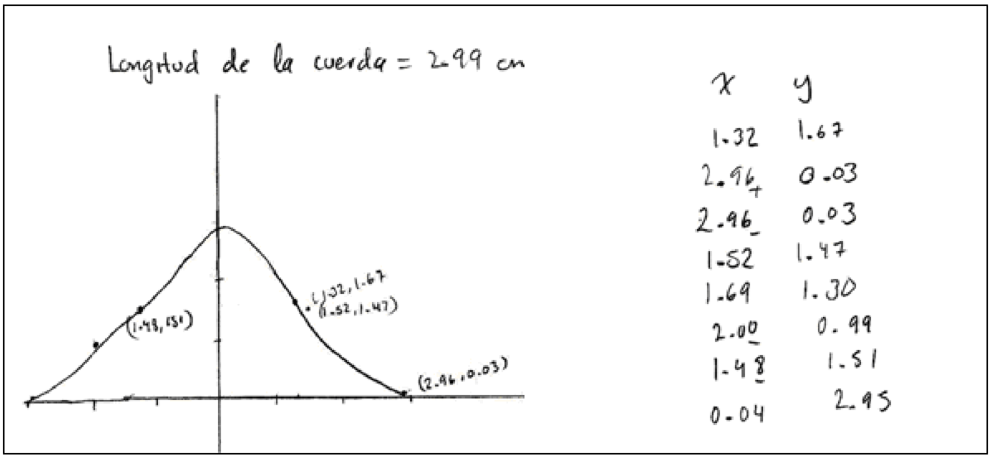


Figura 5b

Un aspecto más que llama la atención es que en la pregunta uno para una longitud de la cuerda de 6.01, el estudiante escribe un valor para *x* de 1.59e-14 y un valor para *y* de 6.01 cuando el punto M casi coincide con el punto de apoyo P de la polea. Al pasar a la pregunta seis, transcribe el valor para *x* como 1.59 despreciando el factor exponencial, mostrando dificultades en la lectura de números reales, específicamente con la lectura de exponentes negativos, al igual que no relaciona los datos numéricos con la relación algebraica que expone en la pregunta dos (ver Figura 3). En la gráfica realizada (ver Figura 5a) se evidencia también la falta de control o de vinculación con los datos numéricos que tiene con una relación lineal. También existen problemas de precisión entre la situación física y el modelo matemático, sólo se limita a escribir los datos que aparecen en la simulación sin tener una comprobación de la relación algebraica entre variables.

Por la trayectoria observada en este estudiante, el profesor lo identifica como uno de los más destacados en el curso de cálculo, ya que demuestra disciplina, dominio de algunos conocimientos y capacidad autodidacta. Sin embargo, parece "extraviarse" dentro de la dinámica del applet y no identifica como lineal a la relación que da entre ambas variables y, por lo tanto, no lo asocia con una línea recta en su representación gráfica. Está claro que tampoco asocia su respuesta dada en un lenguaje verbal (Figura 3), con una ecuación o una función que le sirva para graficar los distintos valores que va obteniendo de ambos segmentos de cuerda. Tampoco detecta sus errores en el llenado de datos a las dos tablas (una para cada longitud de la cuerda), a pesar de ser una relación sencilla, y de ser muy pocos los elementos visuales que participan en el ejercicio de la polea simple. Al respecto, Carlson (2002) manifiesta que los estudiantes pueden coordinar imágenes de dos variables que cambian bajo cierta relación, pero al parecer no pueden aplicar su razonamiento en el contexto de una gráfica o fórmula. Expresa además que los estudiantes son más espontáneos y de manera subconsciente se apoyan en estructuras internas que adquirieron o relacionaron con alguna experiencia o evento.

Continuando con el análisis de esta pregunta, inciso *b), ¿Cómo cambia la gráfica al cambiar el parámetro* L *en la situación planteada?*, es importante resaltar que en la primera actividad ningún estudiante identificó el efecto de dicho parámetro, y en la actividad dos, sólo dos estudiantes lograron traducir en un lenguaje natural lo que sucede en la gráfica al variar el valor de L. Cabe señalar que, nuestra intención con esta pregunta era que identificaran desde el punto de vista geométrico, la traslación vertical que sufre la gráfica al cambiar el valor del parámetro, pero de acuerdo a la diversidad de respuestas difusas, consideramos que la pregunta estuvo *mal planteada.*

2.5. Generalización del modelo

Preguntas:

- *¿Cómo cambia el modelo que planteaste si el burro se mueve a la izquierda*?
- *¿Cómo escribirías el modelo para que el burro se pueda mover a la derecha y a la izquierda?*

En estas preguntas exclusivas de la actividad dos, todos los estudiantes del grupo al que se le hizo la reflexión sobre la situación en contexto, lograron plantear dicho modelo.

3. Reflexiones

Uno de los aspectos que se pueden resaltar de la aplicación de las actividades seleccionadas es la mala asociación de objetos contenidos en el applet con los conocimientos que ya poseen. Además, puede existir confusión entre los diferentes elementos que aparecen en la simulación, como son: variables con objetos físicos (punto extremo, punto de apoyo de la cuerda, *etc*). A diferencia de los resultados exitosos que reportan investigadores como Nemirovsky y Rubin (1991), Noble y Nemirovsky (1995), al hacer que los estudiantes tuvieran contacto con la situación física para luego generar el modelo, en esta parte de pre-experimentación de las actividades, la manipulación del fenómeno físico en el applet no surtió el efecto esperado en los estudiantes. Esto se debió quizás a que se omitió la manipulación física con una polea real y de discusión sobre lo qué es una polea y sus diferentes clases que existen.

El estudiante no establece conexiones entre los diferentes tipos de representaciones del concepto de función, esto se hace visible en el momento en que proporciona respuestas contradictorias referentes a las representaciones gráficas y algebraicas.

Otro aspecto fundamental a considerar tiene que ver con las representaciones institucionales (Hitt, 2003), que usa el profesor, los libros, o los simuladores y las que utiliza el estudiante para comunicar sus conocimientos. Son los diferentes casos que se presentaron, por ejemplo, la notación matemática que escribe para expresar los intervalos del dominio y del rango, el lenguaje verbal usado para expresar dichos intervalos, o la doble interpretación que le proporciona a un mismo objeto que se usa en la simulación (es el caso de los puntos M y N que representa para él a la vez un punto y una longitud).

Anexo 1

ACTIVIDAD UNO[2]: POLEA LIBRE

Nombre: ___________________________________Matricula: _________________

Carrera: ____________________________________Plantel: ___________________

Instrucciones

I. *En el disquete que se te ha proporcionado, en la carpeta Actividad Uno Polea Libre abre el archivo PoleaMlibre. Aparecen en la pantalla unas indicaciones y una figura que representa un cable que pasa por una polea simple fija P. Puedes manipular este modelo con el Mouse de la computadora. Prueba los movimientos posibles.*

II. *Si quieres recargar en cualquier momento la página, para regresar a la situación inicial, da clic a la flecha de recarga en la barra de herramientas superior del navegador.*

III. *Con un doble-clic del Mouse abre una barra de herramientas debajo de la figura. Cuando el puntero está encima de un icono de dicha barra, aparece una indicación, por ejemplo, "escoger las trazas", o "resorte de animación". Si se quiere la obtención de lo indicado, hace falta seleccionar primero el icono, luego en la figura los puntos deseados, y finalmente regresar al icono seleccionado. Solamente después de estas tres etapas aparece el efecto indicado.*

IV. *Responde por escrito cada una de las preguntas siguientes. Al terminar la actividad el cual tiene* ***una duración de 30 minutos, deberás entregar dicho informe****.*

Preguntas o indicaciones

1. *Elige dos longitudes distintas para la cuerda y completa las siguientes tablas*

Longitud de la cuerda: L = _____cm

x	*y*

Longitud de la cuerda: L = _____cm

x	*y*

2. *¿Qué relación algebraica descubriste entre los valores de* x *y de* y *obtenidos por diversas ubicaciones del punto M, cuando no se cambia la longitud de la cuerda?*

Relación observada:

[2] *Instrumento tomado del proyecto de investigación Cinvestav-UACM y modificado para el curso de CD*

3. *La cuerda teniendo una longitud determinada ¿puede tomar* x *cualquier valor positivo? Si no ¿cuales son sus valores posibles?*

Valores posibles de x*:*

4. *La cuerda teniendo una longitud determinada ¿puede tomar* y *cualquier valor positivo? Si no ¿cuales son sus valores posibles?*

Valores posibles de y*:*

5*. En el fenómeno estudiado te proponemos introducir las palabras: variable dependiente, variable independiente, parámetro. De los elementos presentados en la página Internet, escoge los que te parezcan más convenientes en cada caso.*
¿Cuál sería la variable dependiente? ____
¿Cuál sería la variable independiente? _______________________________________
¿Cuál sería el parámetro? ____

6*. Para cada una de las longitudes que seleccionaste y con los valores de la tabla de la pregunta 1.*
a*. Elabora una gráfica con los valores de* x *y* y *que se corresponden (*x *en abscisa,* y *en ordenada).*
b. *¿Cómo cambia la gráfica al cambiar el parámetro L en la situación planteada?*

7. a. *Si* x *aumenta una unidad, ¿qué sucede con* y*?*

7 b. *Si* x *aumenta dos unidades, ¿qué sucede con* y*?*

7 c*. ¿Qué relación observas entre los incrementos del valor de* x *y los incrementos del valor* y*?*

8. *En la gráfica, ¿cuál es el valor de la pendiente?*

Anexo 2

ACTIVIDAD DOS[3]: POLEA CASO PARTICULAR

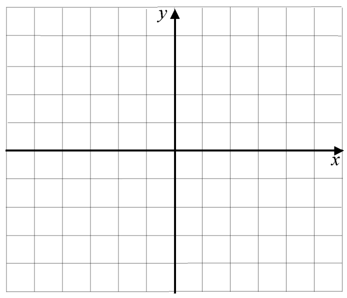
***Nombre:* ___________________________________*Matricula:* _________________**

***Carrera:* ____________________________________*Plantel:* ___________________**

Instrucciones: *En el disquete que se te ha proporcionado, en la carpeta Actividad Dos Polea CR abre el archivo PoleaCoord0...* **(siguen las mismas instrucciones del anexo 1)**

Situación: *Imagina que quieres sacar agua de un pozo y para ello utilizas una polea fija. En el lado vertical de la polea está la vasija y del otro lado se encuentra un burro que jala de la cuerda para subir el agua.*

Preguntas o indicaciones



1. *Dibuja esta situación dentro de un sistema de coordenadas rectangulares de tal manera que la polea fija está en el punto (0,0).*

2. *Elige dos longitudes distintas para la cuerda y completa las siguientes tablas*

Longitud de la cuerda: L = _____cm

x	*y*

Longitud de la cuerda: L = _____cm

x	*y*

3. *¿Qué relación algebraica descubriste entre los valores de* x *y de* y *obtenidos por diversas ubicaciones del punto M, cuando no se cambia la longitud de la cuerda?*

Relación observada:

4. *La cuerda teniendo una longitud determinada ¿puede tomar* x *cualquier valor positivo? Si no ¿cuales son sus valores posibles?*

Valores posibles de x*:*

---

[3] *Instrumento tomado del proyecto de investigación Cinvestav-UACM y modificado para el curso de CD*

5. *La cuerda teniendo una longitud determinada ¿puede tomar y cualquier valor positivo? Si no ¿cuales son sus valores posibles?*

Valores posibles de y:

6. *Para cada una de las longitudes que seleccionaste y con los valores de la tabla de la pregunta 1.*
a. *Elabora una gráfica con los valores de* x *y* y *que se corresponden (*x *en abscisa,* y *en ordenada).*

b. *¿Cómo cambia la gráfica al cambiar el parámetro L en la situación planteada?*

7. ***a.*** *Si* x *aumenta una unidad, ¿qué sucede con* y*?*

7 b. *Si* x *aumenta dos unidades, ¿qué sucede con* y*?*

7 c. *¿Qué relación observas entre los incrementos del valor de* x *y los incrementos del valor* y*?*

8. *En la gráfica, ¿cuál es el valor de la pendiente?*

9. *¿Cómo cambia el modelo que planteaste si el burro se mueve a la izquierda?*

10. *¿Cómo escribirías el modelo para que el burro se pueda mover a la derecha y a la izquierda?*

Bibliografía

CARLSON M. (1998), A cross-sectional investigation of the development of the function concept, *Research in collegiate mathematics education*, **7**, 114–162.

CARLSON M. (2002), Physical enactment: a powerful representational tool for understanding the nature of covarying relationships, in Hitt F., (Editor), *Representations and mathematics visualization*, CINVESTAV-IPN México, 63–77.

DUROUX A. (1983), La valeur absolue : Difficultés majeures pour une notion mineure, *Petit X*, **3**, 43–67.

DUVAL R. (1999), *Semiosis y pensamiento humano, registros semióticos y aprendizajes intelectuales*, Universidad del Valle, Santiago de Cali.

DUVAL R. (1998), Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, *Investigaciones en Matemática Educativa II*, Grupo Editorial Ibero América, México, 173–201.

HITT F. (1998), Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function, *Journal of Mathematical Behaviour*, **17-1**, 123–134.

HITT F. (2003), Le caractère fonctionnel des représentations, *Annales de Didactique et de sciences cognitives,* **8**, IREM de Strasbourg, 255–271.

NEMIROVSKY R. & RUBIN A. (1991), It makes sense if you think about how the graphs work in reality, in F. Furunghetti (ed.) *Proceedings of the 15th annual Conference International Group for Psychology of Mathematics Education*, **3**, 57–64.

NOBLE T. & NEMIROVSKY R. (1995), Graphs that go backwards, in L. Meir and D. Carraher (eds.) *Proceedings of the 19th annual Conference International Group for Psychology of Mathematics Education*, **2**, 256–263.

PÁEZ R. (2001), *Dificultades de aprendizaje en el concepto de límite: Ideas del infinito*, Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, México.

PÁEZ R. (2004), *Procesos de construcción del concepto de límite en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión*, Tesis de Doctorado, CINVESTAV-IPN, México.

SAJKA M. (2003), A secondary school student's understanding of the concept of function –A case study, *Educational Studies in Mathematics* **53**, 229–254.

Rosa E. PÁEZ MURILLO
Felipe ALFARO AGUILAR
Carlos A. TORRES MARTÍNEZ
rosa.paez@uacm.edu.mx, eltiopi@yahoo.com, inocencio3@gmail.com
Universidad Autónoma de la Ciudad de México (UACM)