CATHERINE HOUDEMENT

UNE PLACE POUR LES PROBLÈMES POUR CHERCHER

Abstract. Problem solving as investigation activity in French primary school - The French curriculum 2002 for primary school (students 6 to 11) emphasised a category of problems as support of an investigation activity, aiming at the development of mathematical exploration ability. What kind of ability and/or what type of problems is concerned by this theme? In the facts (report of French Ministerial Education Authority 2006) selected problems and class lessons on this theme are very different, mathematical impact on students seems to be very weak. This text studies a priori the potentiality of such theme in the mathematics teaching and proposes criteria to choose adapted problems. These propositions may be considered as orientations for next research.

Résumé. Les programmes de 2002 mettent en avant les problèmes, notamment des problèmes dits « pour chercher» (MEN 2005). Que cache ce terme ? Le rapport IGEN 2006 rapporte que lors des séances de résolution de 'problèmes pour chercher', les problèmes choisis et les pratiques de classe sont très variés et d'impacts potentiels auprès des élèves très différents. Les séances semblent généralement mettre en jeu peu de mathématiques. Dans les programmes 2008 (MEN 2008). L'expression problèmes « pour chercher » a disparu. Ce texte pose des jalons pour une clarification des intentions d'apprentissage liées aux séances de résolution de 'problèmes pour chercher' et des critères de choix de ces problèmes. Il propose des orientations pour des recherches à venir.

Mots-clés. Problèmes, problèmes pour chercher, école primaire, validation, raisonnement, modèle.

Introduction

Les programmes de 2002 de l'école primaire (6-11 ans) mettent en avant les problèmes, notamment ceux dits « pour chercher » (MEN 2005). Certains comprennent cela comme une invitation à faire des « rallyes », à lancer des « défis », à introduire de l'extraordinaire dans la classe de mathématiques par exemple par le biais d'énigmes récoltées sans analyse critique (et parfois même sans intention mathématique) dans maint ouvrage ou sur maint site. Quand la séance fait partie de l'ordinaire de la classe, elle est parfois ponctuelle, sans véritable enjeu, comme le montre notamment le rapport de l'Inspection Générale (IGEN 2006).

Les programmes 2008 citent l'apprentissage de la résolution de problèmes comme faisant partie des mathématiques à enseigner (MEN 2008 p. 18 et 22) ; mais l'expression « pour chercher » associée à problèmes a disparu.

ANNALES de DIDACTIQUES et de SCIENCES COGNITIVES, volume 14, p. 31 – 59.

Les interprétations des ‘problèmes pour chercher’ posent donc question : un des reproches souvent entendu est leur contribution trop faible à des apprentissages mathématiques.

Cet article se propose d’abord de légitimer la place de certains de ces problèmes dans l’enseignement compte tenu de leurs potentialités. En effet les ‘problèmes pour chercher’ peuvent être des prétextes à mettre en jeu des connaissances mathématiques et à augmenter la culture mathématique des élèves. À ce titre (réinvestir des connaissances mathématiques), ils ont une place dans l’enseignement des mathématiques ; restent à déterminer leur spécificité et leurs apports.

Il s’agit aussi de questionner la possibilité d’une organisation de ces problèmes (voire d’une praxéologie au sens de Chevallard 1999) notamment en cherchant à regrouper les problèmes par type, à pointer les ‘techniques’ dont ils pourraient relever ; à préciser le discours à tenir sur ces techniques.

Remarquons cependant le caractère paradoxal de cette entreprise : il est d’usage de construire une technique pour d’un type de tâches routinier ; de quelle routinisation pourrait il s’agir concernant les ‘problèmes pour chercher’ ? Nous verrons plus loin notre proposition : elle a à voir, entre autres, avec des types de raisonnement. Et quid de la technologie, discours sur la technique ? Nous faisons l’hypothèse que la technologie en jeu ne fournirait pas là la justification mathématique de la technique, mais plutôt un certain mode d’emploi de la technique (technologie pratique versus technologie théorique).

En résumé ce texte vise à enrichir la réflexion sur les problèmes pour la formation des professeurs des écoles. L’étude se limite cependant à l’étude de problèmes numériques ou à traitement numérique. Elle peut être lue comme un texte d’orientations pour des recherches à mener.

Après avoir donné quelques éléments du contexte actuel, l’article, gardant comme horizon l’augmentation de connaissances mathématiques, identifie trois objectifs possibles pour les ‘problèmes pour chercher’ : réinvestissement de savoirs, apprentissage de raisonnements, apprentissage de validations. A partir d’une liste d’exemples fournis par les manuels, il propose une classification des ‘problèmes pour chercher’ en fonction de modes de raisonnements. Cette étude permet de préciser les potentialités de tels problèmes et des critères d’organisations possibles, dont un nouveau critère, lié à la modélisation.

1. Motiver et situer la réflexion

1.1 Un objet déjà ancien dans les programmes

La question inhérente à chaque programme est celle des connaissances mathématiques visées pour les élèves. Pour les professeurs, elle est indissociable de celle des problèmes que les élèves devraient savoir résoudre. Mais comment définir ces problèmes ? Comment organiser l'apprentissage de leur résolution ?

Les recherches sur le *problem solving* ne sont pas récentes. Déjà en 1985 Kilpatrick proposait une rétrospective de 25 ans de recherches sur l'enseignement et l'apprentissage de la résolution de problèmes et s'intéressait à différents types de problèmes (*various meanings of problems* Kilpatrick 1985 p. 8).

Les 'problèmes pour chercher' ont une place particulière dans l'enseignement français : initialisés en France par Glaeser (Glaeser 1976), valorisés dès les années 1980 sous le nom de *problèmes ouverts (*voire *situations-problèmes*[1]), ils ont donné lieu à de multiples interprétations et expérimentations (pour des élèves de 11 à 15 ans), dans les IREM, en particulier celui de Lyon (Arsac & al. 1988) ; ils se sont poursuivis notamment par les *narrations de recherche* (par exemple Bonafé & al. 2002). Ce qui est en jeu dans ces séances c'est l'attention portée au processus de recherche de l'élève plus qu'à la production de la réponse et l'accompagnement de l'enseignant visant à développer des « attitudes »….. L'équipe ERMEL (pour les élèves d'école primaire, de 6 à 11 ans) de l'INRP a produit un certain nombre d'écrits sur ce type de problèmes, soit intégrés dans des aides pédagogiques numériques par niveau d'école primaire (Ermel post 1991), soit plus spécifiques visant un travail des élèves sur l'argumentation (Ermel 1999).

A l'école primaire, cette attention au processus de recherche dans les problèmes existe dans les programmes depuis 1985 ; en 1995 apparaît l'expression « véritables problèmes de recherche ». Les programmes 2002 inventent un libellé : *Problèmes pour chercher* et leur consacrent un chapitre entier des *Documents d'accompagnement* (2005, pages 7 à 14) : ils font donc l'hypothèse –implicite- d'une « forme » spécifique pour ces problèmes. Ce chapitre ne précise pas la forme de ces problèmes, mais donne un objectif spécifique des séances qui leur sont liées, par rapport aux autres séances qui font intervenir des problèmes : « *problèmes centrés sur le développement des capacités à chercher : en général pour ces problèmes, les élèves ne connaissent pas encore de solution experte* » (MEN 2005 p. 7). Les Programmes 2002 distinguent ainsi des types de problèmes selon la fonction qu'ils ont dans le projet du professeur, les autres fonctions étant :

---

[1] Nous n'en dirons pas plus sur la signification de ces deux expressions : elles ont eu des sens très différents depuis 1980. C'est d'ailleurs sans doute à cause de son ambiguïté que l'expression 'situation-problème' a disparu de tous les programmes de mathématiques.

construire des nouvelles connaissances (exigibles en fin de cycle), les exercer et/ou les réinvestir, mobiliser plusieurs connaissances déjà travaillées (problèmes plus complexes). Ils précisent que l'expression ' problèmes pour chercher' correspond à une exploitation spécifique des problèmes : « *développer chez les élèves un comportement de recherche et des compétences d'ordre méthodologique : émettre des hypothèses et les tester, faire et gérer des essais successifs, élaborer une solution originale et en éprouver la validité, argumenter* » (*Documents d'application des programmes* Mathématiques 2002, cycle 3, page 7). Avec les ' problèmes pour chercher', il ne s'agit donc pas uniquement de chercher. Les compétences citées doivent certes être à l'oeuvre dans toute activité mathématique pratiquée par l'élève. Mais il est vrai que l'injonction (présente dans les programmes depuis 1985) de faire passer tous les enseignements de mathématiques par le filtre des problèmes est encore très mal comprise.

Cette explicitation des « Problèmes pour chercher » interpelle différents acteurs (professeurs d'école, inspecteurs, formateurs...) ou collaborateurs plus occasionnels (didacticiens, mathématiciens) de l'enseignement primaire qui en questionnent les différentes interprétations (transpositions) et s'interrogent sur la légitimité de ce qui semble être devenu un « objet » d'enseignement dans les programmes de mathématiques.

Chez les didacticiens, se rencontrent des points de vue radicalement opposés. Rapidement deux exemples : D. Grenier et C. Payan et l'équipe de *Maths à Modeler* (Grenier & Payan 2003, Godot K. 2006) prônent la nécessité de situations spécifiques pour accéder aux *savoirs transversaux* qui permettent « *d'entrer dans une démarche mathématique* » et développent, aussi pour le primaire, des séquences dédiées à de « *vrais problèmes de la recherche* » (Gravier & al. 2008 p. 53). Au contraire, A. Mercier s'élève contre la présence dans les programmes de « '*problème pour chercher', alors qu'il n'y a, en le cherchant, rien à trouver que le système d'enseignement ait identifié.* » (Mercier A. 2008 p. 107)

Certaines questions sont donc cruciales : Quelle place, quelle fonction ont de tels problèmes (de telles séances autour de problèmes) dans l'institution ordinaire de l'école ? Qu'apprennent-ils ? Comment doit on les organiser pour qu'ils apprennent des 'choses' aux élèves ? Quelles sont ces 'choses' ? Quel est le rôle du professeur dans cet apprentissage ?

1.2. Un rapide regard sur les pratiques

Les sources de problèmes qui se disent « pour chercher » ou que les professeurs utilisent comme tels abondent, notamment sur la toile, sous la rubrique Défis mathématiques, Rallyes. Les dispositifs organisant un jour par an des compétitions entre équipes d'élèves de classes différentes participent pour les professeurs au traitement de cet objet du programme (et parfois se résument à cela).

Un rapport de l'Inspection Générale de juin 2006 (IGEN MEN 2006) fait état des dérives que suscite le traitement en classe de cet objet. Il souligne fort justement la maladresse de l'expression ' problème pour chercher' qui produit un effet de brouillage : cette expression est simplement considérée comme synonyme de problème pour lequel la résolution n'est pas automatique, sans même considérer les connaissances mathématiques requises pour comprendre et traiter le problème. Dans cet esprit, il conseille, pour les problèmes en général, une typologie en quatre parties : « *Problèmes à une opération, avec étapes intermédiaires explicites, avec étapes intermédiaires trouvées par l'élève, plus complexes*. » On sait les limites d'un tel classement : par exemple Vergnaud (Vergnaud 1990) a montré qu'à contexte identique, des problèmes ternaires (deux nombres donnés, un troisième à trouver) relevant de la même opération et des mêmes nombres, ne présentaient pas tous la même facilité de raisonnement

Le rapport souligne l'inadaptation de la gestion de classe associée à un tel objet à enseigner. Les professeurs restent démunis face aux questions pratiques suivantes : comment exploiter de façon constructive les erreurs des élèves, relativiser des procédures lourdes, valoriser des procédures efficaces, conclure efficacement la séance dans un cadre mathématique ? Ces remarques sont renforcées par les recherches de Priolet (Priolet 2008, partie 3, chapitre 3) qui, grâce à une enquête auprès de professeurs des écoles (CE2, 8-9 ans) repère l'existence, au moins une fois par semaine, d'une séance de résolution de problèmes, mais constate l'hétérogénéité (en temps, organisation et contenu) des mises en œuvre de la recherche.

Le rapport s'interroge finalement sur les objectifs de la présence d'un tel objet d'enseignement dans les programmes de mathématiques du primaire.

Il est donc nécessaire de mieux cerner les raisons d'êtres de ces objets dans les programmes, d'en chercher les motivations, de construire des éléments de typologie….

1.3. Quelle motivation pour ces problèmes ?

Les problèmes dits pour chercher sont souvent justifiés (Arsac & al. 1988, Gravier & al. 2008) par le fait de permettre à l'élève de mener lui-même une partie de l'activité mathématique réelle du mathématicien, celle qui consiste à tâtonner, chercher, recommencer pour avancer, sans viser l'acquisition d'une connaissance notionnelle à plus ou moins long terme, ce dont se chargent les problèmes spécifiquement pensés à ces fins, comme ceux que la Théorie des Situations (Brousseau, 1970-1980) a permis de construire. En quelque sorte, ils offriraient une liberté et une gratuité que Glaeser (Glaeser 1976) avait déjà pointées.

Mais justement cette liberté et cette gratuité n'est elle pas antinomique de l'avancée des apprentissages, qui suppose qu'un savoir doit émerger explicitement (grâce à l'institutionnalisation du professeur) des situations étudiées ? Cela pose la question de l'existence dans les mathématiques scolaires de connaissances difficiles à institutionnaliser, qu'il faut cependant avoir construites pour faire des mathématiques, et donc qu'on n'acquerrait que par frayage.

En effet ces 'problèmes pour chercher' (tels qu'ils sont ordinairement proposés, isolés, avec une question déjà donnée) ne sont pas épistémologiquement fondés : si les mathématiciens résolvent des problèmes, c'est pour produire des résultats (concepts ou méthodes) qui font avancer la théorie qu'ils étudient. Or les 'problèmes pour chercher' des programmes ne visent pas de contenu mathématique, mais une certaine transversalité ; tels que décrits dans les Documents d'Accompagnement 2005, ils restent un 'objet d'enseignement' aux contours flous.

Pourtant dans d'autres pays, ils sont revendiqués, y compris par des didacticiens, justement parce qu'ils motivent, de façon externe, les apprentissages mathématiques. DaPonte (DaPonte 2007) insiste sur le côté effectivement formateur des 'problèmes pour chercher', notamment pour la participation des élèves (et donc comme une raison d'apprendre des mathématiques) et le développement de compétences transversales (capacités d'expression, d'échange, de collaboration). Il modère cependant leur impact pour mettre en réseau des connaissances, sauf pour les élèves forts.

En résumant, il pourrait, semble-t-il, s'installer un certain accord sur les **motivations externes** (aux mathématiques) des problèmes pour chercher.

- Donner un meilleur aperçu des positions respectives du professeur et des élèves vis-à-vis des apprentissages :
    - préciser un aspect du métier d'élève, pas seulement exécuteur, mais aussi contrôleur et initiateur ; on sait que cette conception du métier d'élève (agir, essayer, se tromper, contrôler) n'est pas dominante, que ce soit au cycle 3 ou plus tard ;
    - aider aussi le professeur à être d'abord un accompagnateur dans la recherche de la vérité (de la réponse exacte), pas uniquement celui qui sanctionne la réponse ou révèle la solution.
- Initier des démarches collaboratives moyennant des dispositifs adaptés : par exemples les rallyes mathématiques des origines se contentaient de faire travailler les élèves par équipes sur une liste de problèmes déterminée ; la modification qui consiste à doter chaque problème d'un quota de points qui affecte positivement le total de l'équipe en cas de

réussite et négativement en cas d'échec, amène les élèves à changer leur rapport à la réponse (l'équipe doit être sure que la réponse trouvée est correcte) et à mobiliser l'équipe pour contrôler les raisonnements produits. Bien entendu ces dispositifs de rallyes gagnent à être accompagnés de séances plus ordinaires autour de tels problèmes.

Ces motivations externes ne sont pas négligeables, mais qu'en est-il des **motivations internes** aux mathématiques ? Moyennant l'hypothèse de travail raisonnable « pour qu'il y ait apprentissage, il est nécessaire qu'il n'y ait pas seulement des tâche isolées », quelle progression prévoir, quels problèmes choisir ? Et bien sur, quelles séances mener autour de ces problèmes ?[2]

2. Quelques hypothèses de travail

S'intéresser à un objet d'enseignement amène d'abord à questionner sa légitimité a priori. Sans rentrer dans une recension des divers travaux qui se sont intéressés à la question[3], un consensus existe sur le fait que les problèmes ont globalement deux fonctions dans l'enseignement : contribuer à construire des connaissances mathématiques dans une dynamique connaissances – savoirs, fonction particulièrement pointée par les approches didactiques (Brousseau 1990, Conne 1992, Douady 1986) et faire fréquenter une partie de l'activité du mathématicien, chercher, valider, fonction mise en avant par des mathématiciens (Glaeser 1976) épistémologues, des praticiens chercheurs (IREM de Lyon dès 1988) et des chercheurs (équipe *Maths à Modeler* de Grenoble).

Nous souhaiterions compléter par deux autres apports. Julo (Julo 1995, 2002) insiste particulièrement sur le rôle que jouerait la mémoire des problèmes résolus dans la résolution de nouveaux problèmes. Il fait l'hypothèse qu'il existe trois types de structures en mémoire, qu'il appelle schémas de problèmes à la suite de certains cognitivistes. Les schémas de type 'cas' seraient formés des traces sémantiques en mémoire de problèmes particuliers ; la théorie des situations, par les situations fondamentales, viserait une installation de tels problèmes, en contrôlant la qualité de leur adaptation au savoir visé. Les schémas de type 'regroupement' fonctionneraient avec des critères de surface et de nature pragmatique (par exemple les problèmes d'achats et dépenses). Enfin le troisième type, les schémas de type 'abstrait', s'appuierait sur des analogies structurales (analogie relationnelle au sens de Vergnaud 1990, procédure de résolution, outil de modélisation).

---

[2] Mais cette dernière question sera à peine traitée ici.
[3] Pour un aperçu des travaux liés à la résolution de problèmes numériques en primaire, voir Priolet (2008).

Sous ces hypothèses, les ‘problèmes pour chercher’ contribueraient à enrichir les schémas du premier type (par l’expérience de construction d’un raisonnement non automatique) et du troisième type. Mais comment déclencher la possibilité d’une mémorisation de tels problèmes réussis ? Peut-être par une rencontre organisée avec de tels problèmes, en les présentant aux élèves regroupés selon certains critères[4] (que nous développerons par la suite) ? En l’état actuel des connaissances, nous ne pourrons aller plus loin, les recherches restent ouvertes.

Le second apport de type réflexif concerne la problématique des enjeux ignorés d’apprentissage développée à l’IUFM de Haute Normandie autour de C. Castela (Castela 2008). Prenant appui sur les hypothèses de praticiens chercheurs (IREM, INRP, mais pas seulement) de bénéfices pour les élèves de séances bien pensées de ‘problèmes pour chercher’, il se pourrait que réfléchir aux types de connaissances effectives déclenchées par de telles séances et lister les conditions de ces déclenchements mettent à jour des connaissances ignorées (des professeurs et même des chercheurs), non simplement institutionnalisables[5], que possèderaient certains élèves et qui seraient très utiles (voire nécessaires) pour les apprentissages mathématiques ordinaires (Houdement 2006). On expliciterait ainsi la niche didactique des ‘problèmes pour chercher’. Là encore les recherches restent ouvertes.

3. Vers des éléments de légitimité internes aux mathématiques

S’intéresser à des activités permettant aux élèves d’avoir une activité de recherche suppose que soit définie ce qu’on appelle recherche : dans cet article ce terme désignera le fait qu’à l’échelle de la classe, le traitement du problème ne relève pas (ou pas encore pour certains problèmes) d’un traitement automatique. Il ne s’agit pas d’un exercice d’application ou encore de la juxtaposition de plusieurs questions d’application.

Légitimer de telles activités suppose de leur conférer une certaine potentialité d’apprentissage ; de quels apprentissages s’agirait –il ? Nous en proposons trois sortes que nous développerons : réinvestissement de savoirs en jeu, apprentissage de raisonnements, apprentissage de validation.

Quelle méthodologie avons-nous employée pour nourrir notre réflexion ? Nous avons pris appui sur des propositions effectives de tels problèmes dans les ouvrages pédagogiques de cycle 3 (fin de l’école primaire, élèves de 8 à 11 ans). La liste des problèmes retenus figure en annexe 1, avec leurs références en annexe 2. Nous

[4] une façon de décliner le dispositif de multi-présentation, expérimenté par Julo (Julo 2002) et repris par Nguala (Nguala 2005).
[5] non référencées ni à des technologies, ni à des théories (au sens de Chevallard 1999).

avons tenté de rechercher des critères d'organisation a priori (compte tenu de nos hypothèses de travail) et a posteriori (en nous laissant surprendre) de ces problèmes. C'est ainsi que notre étude fera apparaître une quatrième potentialité d'apprentissage : celui de la modélisation, qui nous fera porter un nouveau regard sur des problèmes plus classiques.

L'étude faite reste très modeste et exploratoire : elle ne prend pas en compte ici les gestions associées : type de consigne, support, variantes et variables, travail individuel ou en groupe, temps de recherche, de synthèse, conclusion, éléments à institutionnaliser ; elle délimite des potentialités, à mettre ensuite à l'épreuve… Elle se veut un point de départ pour des recherches à venir.

3.1. Les savoirs en jeu dans les problèmes

Il semble raisonnable de conserver comme problèmes 'pour chercher' des problèmes qui mettent en jeu un répertoire de savoirs relativement disponibles : à la fin de l'école primaire (cycle 3, 8 à 11 ans), les savoirs en jeu des problèmes candidats devraient tous se situer globalement en amont de la proportionnalité.

Mais il serait légitime que de tels problèmes permettent vraiment de **réinvestir des connaissances mathématiques** apprises ou en cours d'apprentissage. A priori des problèmes ne faisant pas appel à des savoirs mathématiques, relevant de l'anecdote ou de l'astuce, devraient rester exceptionnels. Les problèmes retenus comme tels auront donc d'abord une fonction de réinvestissement et a priori (c'est-à-dire à l'échelle du répertoire didactique de la classe) une résolution non immédiate[6]. Attention, cela ne signifie pas que l'outil le plus général pour résoudre le problème est un savoir visé du niveau de classe où se donne le problème.

3.2. Les raisonnements

Quels raisonnements pour l'école ?

Nous prenons comme synonyme de *raisonnement,* comme Ermel 1999, toute suite organisée d'inférences conduisant à une conclusion ; l'inférence consistant en la production d'informations nouvelles à partir d'informations déjà là et de connaissances avérées en mémoire. Il s'agit là d'un point de vue cognitif.

A. Weil-Barais (Weil-Barais 1993, p. 526) recense plusieurs formes de raisonnement. Elle qualifie les uns de non canoniques (ils ne suivent pas des règles bien définies), tels le raisonnement par analogie (une conclusion est tirée par ressemblance, il s'agit souvent d'un raisonnement heuristique), le raisonnement en contexte (une sorte de reconnaissance de forme qu'appliqueraient les experts).

[6] ce qui n'exclut pas que certains élèves, « plus forts » les résolvent presque immédiatement.

Nous y ajoutons le raisonnement par induction où une loi générale est tirée de l'examen de cas particuliers. Cette approche contient bien sur des analogies avec la mémoire des problèmes sous forme de schémas, pointée par Julo (Julo 2002).

Weil-Barais distingue deux types de raisonnements canoniques : le raisonnement déductif et le raisonnement expérimental, qu'elle nomme aussi raisonnement par test d'hypothèses. Ces deux types de raisonnement peuvent être légitimement travaillés par les élèves d'école primaire.

Le raisonnement déductif est directement associé aux mathématiques (comme moyen et comme but), notamment sous les formes diverses que sont l'implication logique (contraposée et contre-exemple), le raisonnement par disjonction des cas, le raisonnement par l'absurde, le raisonnement par récurrence[7]. A l'école primaire, il semble raisonnable d'exclure les deux derniers.

Le raisonnement expérimental est un raisonnement conditionnel à trois aspects : énoncé des hypothèses, recherche d'informations pour mettre à l'épreuve les hypothèses, traitement des informations. La recherche et le traitement d'informations peuvent relever de protocoles complexes (notamment des expérimentations) ; mais nous le verrons à l'œuvre dans des cas plus simples qui s'approchent d'un raisonnement par disjonction des cas.

Nous y ajoutons une autre forme de raisonnement canonique, lié à la sémiotisation : celui pris en charge par les règles de fonctionnement des écritures mathématiques (ici les écritures arithmétiques voire algébriques) : par exemple 45 x 32 = 1440 nous permet de savoir que 4500 x 320 = 1440000. Ce raisonnement sera placé dans les raisonnements déductifs.

La résolution de problèmes pourrait être une occasion de **rencontrer des modes de raisonnement** différents pour ouvrir une palette de possibles : déduction plus ou moins complexe, puissance des écritures arithmétiques voire algébriques, raisonnement expérimental y compris dans les mathématiques.

Quelques exemples pour illustrer

« *Si 25 tables pèsent 300 kg ; quel est la masse d'une table ?* » est un problème simplement calculable au cycle 3, il fait partie du répertoire des problèmes dont on vise le traitement automatique au cycle 3. Il n'a pas lieu de figurer dans les problèmes 'pour chercher'.

Une déduction simple (nous la nommerons D1) correspondrait au texte suivant : « *Pour un malabar et un croissant Fatma a payé 1 € 5 c. Pour deux croissants, Lucas a payé 1 € 60 c. Trouve combien coûte un malabar.* » (problème 11,

---

[7] Ce qui ne signifie pas que toutes ces formes sont exploitables à l'école.

annexe 1) : il existe dans ce texte un sous problème simplement calculable (le prix d'un malabar), première étape de la réponse.

Par contre nous dirons que le problème « *Le mobilier de l'école. Une entreprise a expédié trois chargements de 300 kg chacun pour équiper en mobilier une école. Le premier chargement contient 15 tables et 30 chaises. Le second contient 25 tables. Le troisième contient 10 tables, 20 chaises et 5 armoires. Combien pèse une chaise, une table, une armoire ?* (problème 1)» relève d'une déduction plus complexe : il contient la possibilité d'une déduction simple (la masse d'une table), mais qu'il faut isoler et construire par juxtaposition d'informations textuelles séparées dans le texte initial (la masse de 25 tables n'est pas indiquée à côté de la phrase qui mentionne 25 tables, il faut la déduire par traitement de l'information donnée en début d'énoncé). Nous qualifierons le raisonnement dans de tels problèmes de raisonnement D2. Le lecteur peut s'étonner que nous qualifiions de déduction non simple ce qui peut lui apparaître comme une simple reformulation : il trouvera des éléments dans ce sens dans Gueudet, Le Poche (Gueudet, Le Poche 2006) notamment les difficultés rencontrées par des élèves de cycle 3 pour trouver par quoi commencer.

Il nous semble possible de repérer un niveau D3 de déduction lorsqu'il s'agit de combiner des informations pour accéder à un texte simplement calculable « *Une sucette et 2 petites brioches coûtent 2 €. 5 sucettes et 2 petites brioches coûtent 4 €. Quel est le prix d'une sucette ? Quel est le prix d'une petite brioche ?* (problème 12)» : on pourrait aussi considérer que plus d'une déduction est nécessaire.

Remarquons que ce problème peut aussi démarrer par des essais sur le prix d'un objet et ajustement en fonction des contraintes : si la sucette coûte 1 euro, la brioche coûte 0,50 euro ; cela n'est pas conforme à la deuxième somme annoncée ; donc la sucette coûte moins d'un euro ; *etc*. Mais, pour ce problème, le raisonnement expérimental n'est pas très efficace.

Dans les propositions de problèmes pour chercher, il semble légitime d'inclure des problèmes déductifs au sens D1, mais aussi D2 et D3. La complexité du traitement (donc le temps de recherche) peut aussi être liée au nombre d'informations : il est alors nécessaire de savoir trouver parmi toutes ces informations celles susceptibles par déduction de produire une réponse permettant d'avancer dans le problème. Ce qui est en jeu est alors la capacité simultanée à planifier (construire les questions intermédiaires), à reformuler le texte et à repérer la déduction à mobiliser (qui se réduit souvent à un calcul). Il est vrai que ce qui se cache sous la reformulation peut se révéler plus complexe qu'il n'y parait, même pour les problèmes additifs (Damm 1992).

Les élèves d'école primaire peuvent ne pas mettre en œuvre de raisonnement déductif économique, notamment par manque de connaissances et/ou de système symbolique efficace. Ils peuvent par contre développer un raisonnement expérimental (ou par test d'hypothèses). On sait bien que, encore au cycle 3, même pour des problèmes additifs (ceux de type état-transformation-état avec recherche de l'état initial), certains élèves (8-10 ans) simulent l'action, testent des valeurs pour l'état initial, bien avant d'appliquer à l'état final la transformation inverse (Fayol 1990, p. 160).

Bien sûr un des objectifs de l'école est d'augmenter la faculté des élèves à traiter déductivement le maximum de problèmes, notamment en multipliant les rencontres avec de tels problèmes et en valorisant les résolutions déductives possibles avec le répertoire de la classe. Mais compte tenu de l'adaptabilité du raisonnement expérimental (et de son universalité dans les sciences, même si la nature de l'expérimentation à construire diffère), il semble intéressant de conserver, dans les mathématiques, des problèmes qui resteront à raisonnement expérimental pour tous les élèves : les problèmes relevant d'un système de deux équations à deux inconnues (cf. problèmes 2 et 16 de la liste) répondent à ce souci.

A tout niveau d'enseignement donné, la rencontre avec deux types de problèmes, ceux prétexte à une démarche déductive ET ceux qui nécessiteraient par exemple un test d'hypothèses, serait une façon de parcourir un spectre large de raisonnements. Bien entendu souvent ces types de raisonnement sont très imbriqués…

Le problème 4 « *Deux lettres différentes représentent deux chiffres différents. S vaut 2, il n'y a pas de 9, M est plus grand que T : MOI + TOI= NOUS* » nous fournit un bon exemple de problème à raisonnement mixte, reposant sur des connaissances du répertoire de cycle 3. La recherche sera plus ou moins longue selon le type de déductions. En voici un exemple : le texte donne S et exclut 2 pour les autres lettres ; des connaissances sur la numération (somme de 2 chiffres, au maximum 8) permettent de déduire que N égale 1 ; restent les chiffres 3 à 8 disponibles pour les autres lettres ; puisque S, chiffre des unités de 2 I, est égal à 2, I remplace 1 ou 6 (par connaissance de la numération), donc 6 (par déduction). O ne peut valoir 4 car la valeur 9 est exclue pour U, chiffre des unités de 2 O ; ni 5 car U ne peut être égal à 1 : O égale donc 3, 7 ou 8 ; restent au maximum 3 possibilités à tester dont une seule résiste : 836+536=1372.

3.3. Valider les réponses, valider les raisonnements

Une autre question reste latente : celle de la validation des réponses à ces problèmes. La résolution de tels problèmes est l'occasion d'engager les élèves dans un rapport à la vérité. Peut-on, à l'occasion de telles activités, institutionnaliser des éléments de validation de façon à conduire l'élève à prendre en charge lui-même la validation de sa réponse, ou du moins à en contrôler certains éléments ? Existe-t-il des problèmes plus prétextes à une discussion sur la validation que d'autres ? La question de la validation peut elle être une question prétexte à la résolution de problèmes 'pour chercher' ? Peut-on organiser les problèmes selon le type de contrôle de la réponse qu'ils permettent ?

Il existe certes des études didactiques fines sur le processus de preuve initialisées par Balacheff (Balacheff 1987) en France, mais elles ne sont pas adaptées à la plupart des problèmes concernés par notre étude (sauf problème 15, versus collège).

La réponse aux problèmes relevant de raisonnements déductifs pourra en général faire l'objet d'un contrôle par calcul et par soumission aux différentes contraintes de l'énoncé, ce à quoi le professeur peut habituer les élèves. La réponse résultant d'une recherche exhaustive repose sur la vérification que la méthode utilisée a parcouru l'ensemble des cas possibles. H. Péault (Péault 1992) avait déjà examiné cette question des différents types de validation, notamment pour enrichir la liste des problèmes qu'il proposait dans les rallyes mathématiques du Maine et Loire, dont un des enjeux était la discussion sur la validité de la réponse fournie, puisque toute réponse fausse enlevait des points.

En revanche, certains problèmes peuvent être prétextes à la construction d'un véritable processus de preuve.

Par exemple, si on propose de répartir 45 jetons dans deux boîtes vertes et quatre boîtes rouges comme dans le problème 21, le fait de ne trouver aucune réponse ne peut pas clore le problème : encore faut-il transformer ce fait en la certitude qu'il n'existe aucune solution, notamment par des considérations de parité.

Autre exemple, le problème 15 : la recherche de trois entiers consécutifs dont la somme est 48, 87, 120 est vérifiable par le calcul de la somme des trois entiers trouvés ; il est possible, au cycle 3, de prouver que 99 et 56 ne sont pas décomposables comme sommes de trois entiers consécutifs en exhibant un encadrement par deux nombres décomposables « successifs ». Mais le problème retourné (Bloch 2005), c'est-à-dire la recherche des nombres décomposables en sommes de trois entiers consécutifs n'est pas vérifiable (au sens mathématique) à l'école primaire, car elle relève d'une preuve algébrique (collège) : les multiples de trois fournissent tout au plus une solution non réfutable à l'école primaire. Un tel problème avec ces différentes questions peut être propice à discussion sur ce qu'est une preuve en mathématiques et permettre de distinguer une preuve intellectuelle de preuves empiriques (Balacheff 1987) (mais plutôt au collège).

Par l'étude de ces quelques exemples (notamment 21 et 15), on entrevoit tout l'intérêt de tels problèmes[8], notamment ceux dont il est possible de modifier les variables pour conduire à des nombres de solutions différents (une solution, aucune ou plusieurs), visant le passage d'une validation de la réponse à la construction d'un processus de preuve, un des enjeux du passage école collège.

Le problème 22 est particulièrement décrit dans Ermel 1999 (pages 102 à 117), avec toutes ses variantes pour construire littéralement des théorèmes arithmétiques faisant avancer vers la réponse. Ce problème relève d'un traitement collectif en classe, fermement piloté par le professeur.

4. Analyse de la liste

Examinons maintenant comment la liste de problèmes en annexe (proposables à des élèves de 8 à 11 ans) résiste à ces trois critères. Rappelons que ce que nous proposons correspond à une analyse préalable.

Concernant le raisonnement sous-jacent, considérons d'abord ceux qui relèvent plutôt d'un raisonnement déductif ; il nous faut évaluer la complexité de la « reformulation » permettant d'accéder à une déduction simple. Il nous semble qu'un premier groupe (D1) se compose des problèmes 5, 7, 11 ; le second groupe (D2) des problèmes 1, 6, 17, 18 (juxtaposer informations numériques et dessin permet d'avancer), 20, 24. Le troisième groupe (D3) comporterait les problèmes 12 (par combinaison d'informations données se forme la possibilité d'une déduction simple, quatre sucettes pour deux euros) ; 3 (idem : grâce à Léa et Jo, la zone B vaut 6 points) ; 10 ; 14 ; (par reformulation), 23 (par un schéma).

Certains problèmes, compte tenu du répertoire de connaissances des élèves du cycle 3, relèvent plutôt d'un raisonnement expérimental ou mixte : ainsi les problèmes 2 et 16 (système de 2 équations à 2 inconnues), 4, 8, 13, 15, 21, 22. Les problèmes 10, 12, 20, 23 peuvent aussi être traités par essais.

Bien sûr ce choix de regroupement peut être discuté : il peut paraître simpliste suite par exemple aux recherches déjà faites sur des énoncés courts de problèmes additifs (par exemple Damm 1992) : il faut le prendre comme une première approche, sans omettre que d'autres éléments peuvent jouer sur la complexité (par exemple la congruence de l'énoncé avec le (les) traitement(s) arithmétique(s), *etc*.).

Les savoirs mathématiques en jeu dans les problèmes cités ci-dessus se limitent à des connaissances sur la numération, les quatre opérations et la proportionnalité, comme peut rapidement le vérifier le lecteur. A ce titre ils fonctionnent potentiellement comme des réinvestissements de connaissances supposées

[8] La gestion du groupe classe reste la partie immergée (et le restera dans cet article).

acquises. Mais, pour certains d'entre eux, d'autres connaissances, autres que mathématiques, sont nécessaires pour avancer dans la résolution (et contrôler la réponse).
Certains s'appuient en effet sur une référence forte à la réalité, au fonctionnement pragmatique du contexte du problème. Par exemple le problème 17 nécessite de savoir qu'il est d'usage que d'autres personnes que commandant de bord et copilote soient assis dans le cockpit. La référence au réel est aussi essentielle dans le problème 8. Elle est aussi à l'œuvre dans le problème 24, mais ce problème ne fait pas fonctionner de contenu mathématique du cycle 3 ; un tel problème devrait rester anecdotique. Le problème 9, qui met en jeu des connaissances sur les multiples de 7, nécessite de connaître les règles d'usage du calendrier et de représentation de l'année[9]. Le problème 13 relève d'une démarche expérimentale au cycle 3 et doit être aussi contrôlé par la réalité évoquée ; mais ce problème n'est pas très intéressant dans la mesure où les erreurs (mauvais film des transvasements) ne permettent pas d'avancer vers la solution ; il n'est donc pas susceptible de la construction d'une procédure plus économique à ce niveau de classe.

Concernant la validation des résultats, un contrôle par vérification de la conformité aux informations données est possible pour un certain nombre de problèmes : ainsi les problèmes 1, 2, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 12, 15, 16, 20, 21, 23. Certains exigent le contrôle du nombre de réponses (2 et 16, unicité ; 21 multiplicité) de l'impossibilité de réponse (15), de l'exhaustion de la recherche (22). Tous ces contrôles se situent sur le plan mathématique, ils correspondent à ce que nous appelons (Houdement 2006) des contrôles syntaxique (organisation et transformation formelle des écritures) et sémantique (mathématisation des informations, par exemple 6 rangées de 13 correspond à 6 x 13).

Mais tous les problèmes ne se contentent pas de ces seuls contrôles. Nous retrouvons la nécessité d'une référence à la réalité. Par exemple le problème 9 se valide, au cycle 3, par consultation de documents de référence. Le problème 18 nécessite de repérer les bonnes longueurs sur le dessin pour les affecter des données 8 cm et 11 cm. Sans solides connaissances pragmatiques, le problème 19, malgré une forme simple et une solution intuitive, nécessite une validation complexe sur les plans sémantique et syntaxique (deux fonctions linéaires en jeu pour modéliser remplissage et vidage). Ce problème n'est d'ailleurs pas accessible à des élèves de cycle 3.

Ainsi certains problèmes nécessitent ce que nous appelons un contrôle pragmatique (Houdement 2006) plus poussé (confrontation au réel, aux conventions, irréfutabilité de la réponse dans le domaine d'expérience) ou plus généralement des connaissances pragmatiques, nécessaires à la recherche de la réponse, que nous

[9] ou peut être une occasion de les expliciter.

avons déjà citées. Ces connaissances pragmatiques sont très souvent indispensables aux élèves de primaire pour des problèmes classiques à l'école primaire, même si leur nécessité n'émerge souvent que lors des problèmes de proportionnalité : en effet la résolution correcte d'un problème à contexte réalité évoquée et dit 'de quatrième proportionnelle' nécessite de savoir que la relation qui lie les grandeurs du domaine d'expérience est une relation de proportionnalité.

En résumé, les trois critères choisis, savoirs mathématiques en jeu du répertoire de la classe, raisonnements potentiels à l'œuvre, contrôles efficaces et enseignables semblent opérationnels pour organiser la liste de problèmes. Un nouveau critère a émergé suite à l'étude, lié à la mobilisation de connaissances pragmatiques pour guider (et contrôler) le choix des modèles mathématiques à associer aux problèmes évoquant la réalité. Ce choix est en effet routinier dans la plupart des problèmes proposés, c'est un des objectifs de l'école de le rendre également routinier dans la plupart des problèmes numériques ternaires. Mais peut-il être objet d'apprentissage plus systématique ?

5. L'apprentissage de modèles

Envisageons donc la question de la résolution de problèmes numériques comme la mobilisation, voire la construction de modèles qui les rendent calculables.

Nous prendrons la notion de modèle au sens où Fischbein la définit (Fischbein 1990) « *Given two systems, A and B, B may be considered a model of A, if, on the basis of a certain isomorphism between A and B, a description or a solution produced in terms of A may be reflected, consistently, in terms of B and vice versa.* » (Fischbein 1990 p. 23). Cette définition est très large et regroupe modèles mentaux et matériels. Nous nous intéressons ici pour leur fonction heuristique aux modèles mentaux explicites, qu'ils soient primitifs ou élaborés. Certains sont construits lors de la résolution (voir plus loin l'étude du problème 16 en école primaire), d'autres (par exemple les écritures arithmétiques) sont mobilisés automatiquement.

Une écriture arithmétique est un modèle élaboré qui a été enseigné (dans le cadre des mathématiques). Un dessin, épurant la situation de départ en respectant certaines contraintes, sera un modèle s'il possède un caractère génératif ; les dessins figuratifs, supports possibles de raisonnement des jeunes élèves, sont ainsi souvent des pré-modèles (par leur caractère local, non généralisable à d'autres contextes). Pour qu'un dessin devienne modèle, il serait nécessaire qu'ils aient des vertus génératives.

Cette question du potentiel génératif d'un dessin est d'importance à l'école : l'enfant de CP perd beaucoup de temps à dessiner le personnage du problème avec tous ses attributs, il doit apprendre à n'en garder que les éléments liés à la question posée pour lui conférer un pouvoir génératif. Un des apprentissages de cycle 2 est celui d'une transformation (épuration) raisonnée du dessin en un schéma fonctionnel pour raisonner. Cet apprentissage n'est pas terminé au cycle 3 : des élèves devant dessiner des cubes colorés dans une phase heuristique s'appliquent à colorier, alors que d'autres symbolisent la couleur par une croix (dans Exemple de mise en place d'un problème pour chercher : le pavé bicolore Hersant 2006 p. 51).

Plus tard avec l'enrichissement du répertoire didactique, un modèle peut être un réseau de connaissances mathématiques (par exemple modèle additif, multiplicatif, modèle de la proportionnalité…) qu'il s'agit alors de mobiliser avec son domaine de validité.

Dans cet article, nous laissons de côté la question de la genèse chez l'apprenant des modèles mathématiques (dans le domaine numérique les quatre opérations et la proportionnalité) émergeant d'un équilibre entre problèmes à résoudre, invariants opératoires et éléments sémiotiques (langage, écritures mathématiques) (Vergnaud 1990). Prenons juste l'exemple de « *Thierry vient de jouer deux parties de billes. A la seconde partie, il a perdu 7 billes. Quand il compte ses billes à la fin, il s'aperçoit qu'il a gagné en tout 5 billes. Que s'est-il passé à la première partie ?* ». La difficulté de résolution est connue (ce problème est échoué à 75% en 6ème (Vergnaud 1986 p. 36), il est nécessaire de modéliser (par le langage ou des schémas) les relations entre les collections de billes, autrement dit les parties. Cette modélisation est emblématique des raisonnements liés aux problèmes additifs de composition de transformations.

Nous ne nous intéressons qu'à leur mobilisation dans des nouveaux problèmes.

« Petite modélisation »

Un des critères de choix des problèmes pour chercher (ou complexes) et indirectement une façon de les regrouper pourrait être leur potentialité de création de modèles non encore rencontrés dans l'enseignement.

- Prenons l'exemple du problème 16, une histoire de poules et de lapins (Pluvinage 2008), trois types de raisonnement peuvent lui être associés : un raisonnement algébrique supporté par la traduction du problème en système de deux équations à deux inconnues (non disponible en fin de primaire), un raisonnement arithmétique par test d'hypothèses, une mise en schéma avec une tête représentée par un rond et une patte représentée par un trait. Le dessin de toutes les têtes suivi d'une distribution raisonnée des pattes (par exemple 2 pattes par tête d'abord, puis une nouvelle distribution de 2 pattes supplémentaires jusqu'à épuisement) donne la réponse : ce dernier dessin serait un modèle au sens où nous l'avons défini plus haut. Bien entendu cette représentation sera susceptible de devenir un modèle s'il est construit comme génératif, donc si l'élève a l'occasion de rencontrer plusieurs fois ce type de problèmes (système de 2 équations à 2 inconnues potentiellement lié à un tel schéma) ;

– de même les problèmes 20 et 23 peuvent s'appuyer sur trois types de raisonnements : algébrique, arithmétique par test d'hypothèses et géométrique par l'utilisation de segments mesurés.

Il nous semble intéressant, grâce à des rencontres régulières avec des problèmes pour chercher relevant de schémas voisins, de mettre les élèves en face de raisonnements potentiellement liés à des « démarches modélisantes » (Pluvinage 2008).

« Grande modélisation »

Nous ne pouvons pas ne pas citer un autre type de problèmes, plus ambitieux, étudié dans certaines équipes de recherche en didactique des mathématiques. Les *situations recherche* du projet *Maths à modeler* (par exemple Godot 2006, Gravier & al. 2008) ont les caractéristiques suivantes : un point de départ facilement compréhensible par l'élève, une situation non formalisée en termes mathématiques (« *c'est la situation qui amène l'élève au cœur des mathématiques* ») ; des méthodes de résolution non désignées ; une, plusieurs ou aucune solution.

Ces caractéristiques là sont déjà celles de bon nombre de problèmes pour chercher (par exemple le problème 21 selon le nombre de jetons et la série de boîtes peut avoir plusieurs solutions ou aucune solution). La spécificité des *situations recherche* réside dans le fait que les sous-problèmes liés à la question initiale et qui peuvent donner lieu à des tâches très différentes, ne sont pas fixés au préalable, ils sont placés sous la responsabilité des élèves, sous le contrôle des enseignants qui veille à leur faisabilité. Certaines situations sont fondées par un jeu avec un support matériel qui joue alors le rôle d'une aide à la formulation d'hypothèses et à leur validation.

Ces dispositifs présentent de grandes potentialités, ils permettent notamment de modéliser différents aspects d'un jeu pour mieux y jouer ou hiérarchiser sa complexité. Ils demandent cependant une bonne maîtrise mathématique et didactique de la part du professeur qui les installe dans sa classe : dans les travaux cités, c'est d'ailleurs toujours un « matheux » qui gère la séance. Mais ces recherches nous confortent dans l'importance de développer en classe une autonomie dans la construction et la résolution de questions.

Domaine de validité d'un modèle

Mais, plus généralement, et cela ouvrirait une nouvelle perspective pour les 'problèmes pour chercher' du moins en France, on peut s'interroger sur l'apprentissage d'un sens critique des modèles appris. Est il licite d'appliquer tel modèle intuitivement mobilisé ? Quelle sensibilité au contexte développer ? Quel contrôle par le réel (pragmatique) mettre en place ?

Prenons l'exemple classique suivant : « *38 personnes décident de partir en voiture ; une voiture peut transporter 5 personnes ; de combien de voitures ont elles besoin ?* » Il est usuel que les élèves donnent comme réponse le quotient par défaut. C'est un des rares exemples dans les habitudes françaises où l'élève est amené à questionner la pertinence d'un modèle (celui du quotient par défaut). Verschaeffel qualifie cet énoncé de *problematic item* (**Pi)** par rapport au suivant : « *nombre de sachets pleins si on empaquette 38 objets par paquets de 5* » qu'il qualifie de *standard item* **(Si).**

Verschaeffel (par exemple Verschaeffel 2000) étudie parallèlement les réussites à des *standard items* **Si** (validations pragmatique et sémantique en correspondance) et aux *problematic items* **Pi** (problèmes dont la validation pragmatique invalide le modèle intuitif) de même contexte, tels que :

- Peter organise une fête. Il invite tous ses amis : 8 garçons et 4 filles. Combien d'amis invite–il ? **Si**
- Charles a 5 amis et Georges 6 amis. Ils décident d'organiser une fête à deux et d'inviter tous leurs amis. Combien d'amis invitent- ils? **Pi**
- Paul a acheté 5 planches de 2 m de long chacune. Combien peut-il faire de planches de 1 m? **Si**
- Paul a acheté 4 planches de 2,5 m de long. Combien peut-il faire de planches de 1 m? **Pi**

Il montre la difficulté qu'ont les sujets à bloquer pour les Pi l'utilisation du modèle intuitif. Verschaeffel parle même à ce sujet d'un phénomène de *suspension de sens commun*, résistant même aux mises en garde. Burgermeister et Coray (Burgermeister et Coray 2008) ont étudié ce même phénomène très récemment pour des élèves de 12-13 ans (et travaillé finement sur le processus de contrôle) à l'occasion de problèmes de recherche de quatrième grandeur, relevant de modèles additifs (problèmes pseudo- proportionnels) ou linéaires.

Pourtant la culture citoyenne devrait comporter aussi cette capacité à choisir ou rejeter tel modèle pour tel problème et contrôler certes syntaxiquement et sémantiquement, mais aussi pragmatiquement les problèmes. Dans l'usage français, seules les validations syntaxique et sémantique sont prises en compte. Il nous faudrait aussi prendre en compte la dimension pragmatique, de façon non anecdotique[10], dans nos enseignements. Les séances autour de 'Problèmes pour

[10] On sait que le faire de façon anecdotique conduit à une rupture du contrat tacitement passé avec les élèves et reste peu significatif et peu efficace : c'est « l'âge du capitaine ».

chercher' pourraient nous fournir de telles occasions de construire une vigilance nouvelle face à des *problematic items,* vigilance qui engagerait vers un contrôle pragmatique dès les petites classes. Il serait utile de développer des recherches sur l'intégration de *problematic items* dans les séances dévolues à la résolution de problèmes.

6. Conclusion

Notre ambition était de clarifier les objectifs assignés des 'problèmes pour chercher' pour l'apprentissage de mathématiques, en considérant par cette dénomination les problèmes autres que ceux qui engagent vers des connaissances nouvelles (problèmes d'introduction) ou les entraînent et les exercent (problèmes d'application ou exercices) et de poser les jalons d'une organisation de ces problèmes 'autres'.

Tout problème donné à l'école doit engager des connaissances mathématiques, soit parce qu'elles seront sous peu pointées comme savoirs (CONNE 1992) et exercées, soit parce qu'elles sont supposées déjà là, suite au processus d'enseignement. Les problèmes dont il est question dans cet article sont au moins du second type.

Par exemple, en CP, un problème de commande de gommettes conditionnées par bandes de 5 gommettes pour « habiller » une fleur est déjà légitime dans la mesure où il réinvestit le nombre : il apprend aussi à distinguer les grandeurs des nombres qui les mesurent (2 bandes, c'est aussi 10 gommettes alors que 2 n'est pas 5) et contribue[11] à l'apprentissage de la numération décimale (2 dizaines, c'est aussi 20). Il peut faire entrer dans *une démarche modélisante* en apprenant à faire des dessins épurés. Bien sûr, il est nécessaire que les professeurs des écoles qui le choisissent pour un travail en classe aient bien été informés de ces objectifs pour l'exploiter dans ce sens. Comme le rappelle Mercier « *pour enseigner*, *un professeur doit être capable d'identifier la part d'apprentissage nécessaire qui se manifeste à travers les pratiques de ses élèves* » (Mercier 2008 p. 111)

Les perspectives de recherche liées aux 'problèmes pour chercher' apparaissent multiples. Dans un premier temps, il semblerait utile de mieux comprendre ce qui se joue au niveau des élèves : mesurer l'impact que pourraient avoir sur la culture mathématique des élèves des rencontres organisées avec des problèmes selon :

1. les raisonnements potentiels à l'œuvre, plus complexes qu'inférer une seule déduction : combiner plusieurs déductions, combiner des informations aboutissant à des déductions licites, élaborer un raisonnement expérimental,

[11] à long terme et moyennant d'autres accompagnements

2. les types de contrôles efficaces et enseignables ; les confrontations avec des validations diverses, notamment celles qui engagent dans une dynamique de preuve ;
3. les inférences plus ou moins nécessaires de connaissances pragmatiques, y compris pour critiquer l'application d'un modèle intuitif ;
4. l'intégration d'une démarche modélisante ;
5. le tout dans la perspective d'une culture scientifique, pour éviter notamment que les problèmes n'apparaissent qu'une fin en soi (Zawojewski & Lesh 2003 p. 324).

Il y a fort à parier que ces études rendent nécessaire une coopération plus forte qu'elle n'existe actuellement en France entre cognitivistes et didacticiens des mathématiques.

Annexe 1 : Liste de problèmes cycle 3 étudiés

1) Le mobilier de l'école : Une entreprise a expédié trois chargements de 300 kg chacun pour équiper en mobilier une école. Le premier chargement contient 15 tables et 30 chaises. Le second contient 25 tables. Le troisième contient 10 tables, 20 chaises et 5 armoires. Combien pèse une chaise, une table, une armoire ?

2) Luc et Marc lancent chacun trois fléchettes dans une cible (dessin cible à deux zones). Luc met deux flèches au centre et une dans la couronne, il obtient 22 points. Marc obtient 17 points avec une fléchette au centre et deux dans la couronne. Quelles sont les valeurs des zones ?

3) Jo, Léa et Toto ont lancé des flèches sur la même cible (dessin de trois fois la même cible à trois zones : A centre puis couronne B puis couronne C). Jo : 33 points avec 2A, 5C ; Léa : 39 points avec 2A, 1B, 5C ; Toto : 18 points avec 2B, 2C. Nombre de points que chaque zone permet de marquer.

4) Deux lettres différentes représentent deux chiffres différents. S vaut 2, il n'y a pas de 9, M est plus grand que T : MOI + TOI= NOUS (en colonne).

5) Neuf chercheurs d'or dont le chef se répartissent 180g, le chef prenant une double part. Combien de grammes d'or recevra le chef ?

6) Dimitri, Thierry, Oscar comptent leurs billes à la fin de la partie. Sandrine en a presque 100. Oscar en a le quart de Sandrine. Thierry en a le tiers d'Oscar. Et Dimitri en a la moitié de Thierry. Combien en ont-ils à eux quatre ?

7) Paul a pesé ensemble deux dictionnaires identiques et trois livres de mathématiques eux aussi identiques. La balance marque 3 kg 300 g. Valérie lui a pesé cinq livres de mathématiques identiques à ceux de Paul. La balance marque 1 kg 500g. Quel est le poids d'un dictionnaire ?

8) Un sac contient 12 bonbons rouges et 8 bonbons verts. Mais ces bonbons sont enveloppés d'un papier doré si bien qu'on ne peut pas voir leur couleur en les prenant. Combien de bonbons Laurent Outan doit-il prendre au minimum pour être sur d'en avoir deux de la même couleur ? De couleurs différentes ?

9) Nous sommes lundi 11 juin 2007. Dans 70 jours, nous serons le… ?

10) Dans la tirelire de Juan, il n'y a que des pièces de 10 centimes, de 20 centimes et de 50 centimes. Il y a autant de pièces de chaque sorte ; en tout cela représente 8 €. Combien de pièces de chaque sorte ?

11) Pour un malabar et un croissant Fatma a payé 1 € 5 c. Pour deux croissants, Lucas a payé 1 € 60 c. Trouve combien coûte un malabar.

12) 1 sucette et 2 petites brioches coûtent 2 €. 5 sucettes et 2 petites brioches coûtent 4 €. Quel est le prix d'une sucette ? Quel est le prix d'une petite brioche ?

13) Lucie veut prendre 4 litres d'eau dans un récipient. Elle ne possède que deux pots, l'un pouvant contenir 3 litres, l'autre pouvant contenir 5 litres. En utilisant seulement ces deux pots, explique comment elle peut mesurer 4 litres.

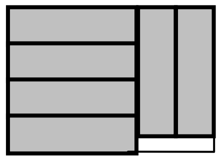
14) Dans la classe du Cours Moyen de Werner, tout le monde est sportif ! Lorsqu'on demande « qui fait de l'athlétisme ? », 16 mains se lèvent ; à la question « Qui fait du basket ? », 10 mains se lèvent. Chaque élève a levé la main au moins une fois, et quatre élèves ont levé la main deux fois. Combien la classe compte-elle d'élèves ?

15) Trouve trois nombres entiers consécutifs dont la somme est 48 ; 87 ; 120 ; 97 ; 612… (99, 3429, 56) ET donne des nombres qui sont la somme de trois nombres entiers consécutifs et des nombres qui ne peuvent pas être la somme de trois nombres entiers consécutifs. Justifie ta réponse.

16) Combien y a t il de poules et de lapins dans votre ferme ? Tu vas le trouver toi-même : lorsque je rassemble toutes les poules et les lapins de la ferme, il y a en tout 25 têtes et 64 pattes.

17) Un avion gigantesque contient 150 places assises en première classe, 400 en seconde et 4 dans le cockpit. L'équipage qui doit rester assis au décollage et à l'atterrissage, est composé d'un commandant de bord, un copilote, 8 hôtesses et 6 stewards. Combien l'avion peut-il prendre de passagers ?

18) Sur une plaque de carton rectangulaire de 8 cm sur 11 cm. Kid a dessiné des vignettes rectangulaires toutes identiques.



Sur ce schéma on indique comment il s'y est pris.
Calcule les dimensions d'une vignette.

19) Antoine ouvre à fond le robinet et remplit la baignoire en 3 minutes. Bain pris, il la vide en 6 minutes. Cléopâtre fait alors couler son bain, mais elle laisse la vidange ouverte. Au bout de combien de temps la baignoire commence-t-elle à déborder ?

20) Deux fûts contiennent ensemble 2800 litres de cidre. On a tiré 300 litres de l'un et 100 litres de l'autre. Il reste alors la même quantité dans chaque fût. Quelle est la contenance de chaque fût ?

21) Tu disposes de deux boites vertes, trois boites rouges et 50 jetons. Il faut mettre les 50 jetons dans les boites ; aucune boite ne doit être vide et il doit y avoir le même nombre de jetons dans les boîtes de la même couleur.

22) Pour le nombre 10, quel est le plus grand produit possible des termes d'une de ses décompositions additives ? Même question pour le nombre 14.

23) Le pépiniériste a vendu ce matin ce matin 420 arbres ; des poiriers, des cerisiers, et des pommiers. Il a vendu 45 poiriers de plus que de cerisiers ; 30 pommiers de plus que de cerisiers. Combien d'arbres de chaque espèce a-t-il vendus ?

24) Je dois scier un petit tronc d'arbre en six morceaux. Il me faut une minute pour le scier en deux morceaux. Combien de temps pour le scier en six morceaux ?

Annexe 2 : Références de la liste de problèmes

ERMEL (post 1995), Apprentissages mathématiques et résolution de problèmes CE2, CM1, CM2. Hatier.

TOUSSAINT, N., FROMENTIN, J. (2006), *Fichier Évariste École*, APMEP, **175**.

(1995) *Les récréations mathématiques d'Évariste et de Sophie*. Éditions Pôles.

Revue *Grand N* IREM de Grenoble.

Cap maths CE2 (2002) *Cap maths* CM1 (2003) *Cap maths* CM2 (2004) Editions Hatier.

Euromaths CE2 (2003) *Euro Maths* CM1 (2006) *Euro Maths* CM2 (2006) Editions Hatier.

Pb.	*Ouvrage*
1	*ERMEL* CM2 et *Grand N* 77
2	*Euro CM1* p198
3	*Cap CM1* p194
4	*Evariste* 61
5	*Evariste* 98
6	*Evariste* 62
7	*Cap CM1* p194
8	*Evariste* 54

Pb.	*Ouvrage*
9	*ERMEL CM* t 1 1981 p44
10	*Cap CM1* p178
11	*Cap CM1* p178
12	*Cap CM2* p100
13	*Grand N* 60 p44
14	*Récré* p19
15	*Euro CM1* p161 *CM2* p194
16	*Cap CM1* p113

Pb.	*Ouvrage*
17	*Récré* p44
18	*Euro CM2* p161
19	*Récré* p45
20	*Euro CM2* p121
21	*Euro CM1* p198
22	*ERMELCM1* p74
23	*Euro CM2* p31
24	*Evariste* 59

Bibliographie

ARSAC, G., GERMAIN, G., & MANTE, M. (1988), *Problème ouvert et situation problème,* Lyon : IREM de Lyon.

ARTIGUE M. & HOUDEMENT, C. (2007), Problem solving in France: didactic and curricular perspectives, *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik,* **39**, 365–382.

BALACHEFF, N. (1987), Processus de preuve et validation, *Educational Studies in Mathematics,* **18**, 147–176.

BONAFÉ, F., CHEVALIER, A., COMBES, M.C. et alii. (2002), *Les narrations de recherche de l'école primaire au lycée*, IREM de Montpellier.

BROUSSEAU, G. (1970-1990, édition 1998), *Théorie de situations didactiques*, 25–43, Grenoble : La Pensée Sauvage.

BLOCH, I. (2005), Dimension adidactique et connaissance nécessaire. Un exemple de « retournement » d'une situation, *Sur la théorie de situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage, 143–152.

BURGERMEISTER, P. & CORAY, M. (2008), Processus de contrôle en résolution de problèmes dans le cadre de la proportionnalité des grandeurs, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **28/1**, 63–107.

CASTELA, C. éd. (2008), Contribution à une approche didactique des implicites scolaires : la problématique des enjeux cachés d'apprentissage, *Les Cahiers de L'IUFM* **7**, Université de Rouen : publication de l'IUFM.

CHAPPAZ, J. & MICHON, F. (2003), Il était une fois la boîte du pâtissier, *Grand N*, **72**, 19–32.

CHARNAY, R. (2006), Rallyes mathématiques : quel intérêt ? *Grand N,* **78**, 53–62.

CHEVALLARD, Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **19/2**, 221–266.

CONNE, F. (1992), Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **12/2-3**, 221–270.

COPPÉ, S. & HOUDEMENT, C. (2002), Réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire, *Grand N,* **69**, 53–63.

DAMM, R. (1992) *Apprentissage des problèmes additifs et compréhension des énoncés,* Thèse. Strasbourg : ULP.

DA PONTE, J.P (2007), Investigations and explorations in the mathematics classroom. *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik*, **39,** 419–430.

DOUADY, R. (1986), Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des mathématiques,* **7/2**, 5–32.

DUPUIS, C. & GRUGNETTI, L. (2003), Le nez de Pinocchio, un problème de mathématiques «inverse», *Grand N,* **72**, 33–40.

ERMEL (1977 à 1982), *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire (CP au CM2),* Paris : Hatier.

ERMEL (post 1991), *Apprentissages numériques et résolution de problèmes (CP au CM2),* Paris : Hatier.

ERMEL (1999), *Vrai ? Faux ?... On en débat*. Paris : INRP.

FAYOL, M. (1990), *L'enfant et le nombre*, Lausanne : Delachaux et Niestlé.

FISCHBEIN, E. (1990), The autonomy of Mental. *For the Learning of Mathematics,* **10.1**, 23–30.

GLAESER, G. (1976), *Le livre du problème. Pédagogie de l'exercice et du problème*, Paris : Éditions CEDIC (seconde édition).

GODOT, K. (2006), La roue aux couleurs : une situation recherche pour apprendre à chercher dès le cycle 3, *Grand N,* **78**, 31–52.

GRAVIER, S., PAYAN, C. & COLLIARD, M.N. (2008), Maths à modeler. Pavages par des dominos, *Grand N,* **82**, 53–68.

GRENIER, D. & PAYAN, C (2003), Situations de recherche en classe. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2002,* Paris : IREM de Paris 7, 189–203.

GR IREM ELEM BESANÇON (2005), La conduite en classe d'une situation de recherche : un exercice périlleux, *Grand N,* **76**, 65–74.

GRAND N (2003), N°spécial *Points de départ*, IREM de Grenoble.

GUEUDET, G. & LE POCHE, G. (2006), Séquences de résolution de problèmes complexes, *Grand N,* **77,** 35–54.

HERSANT, M. (dir) (2006), *Des problèmes pour chercher à l'école primaire,* IUFM des Pays de la Loire et IREM de Nantes.

HOUDEMENT, C. (1998), Le choix des problèmes pour la résolution de problèmes, *Grand N,* **63**, 59–77.

HOUDEMENT, C. (2003), La résolution de problèmes en question, *Grand N,* **71**, 7–23.

HOUDEMENT, C. (2006), Trouver ou ne pas trouver : ce qui peut faire la différence entre élèves dans la résolution de problèmes arithmétiques ordinaires… *Cahier DIDIREM*, **54**, IREM de Paris 7.

IGEN MENESR (juin 2006) *L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire*. En ligne sur http://www.education.gouv.fr/cid4172/l-enseignement-des-mathematiques-au-cycle-3-de-l-ecole-primaire.html (consulté le 10-04-09).

JULO, J. (1995), *Représentation de problèmes et réussite en mathématiques*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

JULO, J. (2002), Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N*, **69**, 31–52.

KILPATRICK, J. (1985), A Retrospective Account of the Past 25 Years of Research on Teaching Mathematical Problem Solving. In Silver E.A (ed) (1985) *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving.* Mahwah NJ (USA) : Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

LÉPINE, L. (1996), Tout problème ouvert n'engage pas nécessairement une bonne recherche, *Grand N*, **60,** 43–55.

MEN (2005), Les problèmes pour chercher. *Documents d'accompagnement Mathématiques*, SCEREN CNDP.

MEN (2008), Horaires et programmes de l'enseignement primaire, BO spécial n°3, 19 juin 2008.

MERCIER, A. (2008), Une question curriculaire de l'enseignement élémentaire des mathématiques : la 'résolution de problèmes', In MEN-DGESCO *Actes du séminaire national sur les mathématiques à l'école primaire* (nov.2007).

NGUALA, J.B. (2005), La multiprésentation, un dispositif d'aide à la résolution de problèmes, *Grand N*, **76**, 45–63.

PÉAULT, H. (1992), Vers une pratique collective des mathématiques, *Grand N*, **51**, 5–65.

PLUVINAGE, F. (2008), Préalables à une analyse didactique de l'emploi des modèles. In Kuzniak, Parzysz, Vivier (eds) *Du monde réel au monde mathématique*, Cahier DIDIREM, **58**, Paris : IREM de Paris 7.

PRIOLET, M. (2008), *Enseignement et apprentissage de la résolution de problèmes mathématiques. Le cas des problèmes numériques au cycle 3 de l'école primaire française. Approches didactique et ergonomique*, Thèse de l'Université de Lyon 2.

THOMAS, Y. (2007), Gommettes et étiquettes, des problèmes pour chercher. *Grand N*, **80**, 29–42.

TOUSSAINT, N. & FROMENTIN, J. (2006), *Fichier Evariste Ecole*, Brochure APMEP, **175.**

VERSCHAFFEL, L., GREER, B. & DE CORTE, E. (2000), *Making sense of word problems*, Lisse (Netherlands): Swets & Zeitlinger Publishers.

VERGNAUD, G. (1986), Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques, *Grand N*, **38**, 21–40.

VERGNAUD, G. (1990), La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **10/2.3,** 133–170.

WEIL-BARAIS A. (1993), *L'homme cognitif*, Paris : PUF.

ZAWOJEWSKI J.S & LESH R. (2003), Models and Modeling Perspective on Problem Solving. In Lesh & Doerr (eds) *Beyond Constructivism*. Mahwah NJ (USA): Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 317–336.

CATHERINE HOUDEMENT
IUFM de Haute-Normandie, Université de Rouen. DIDIREM
catherine.houdement@univ-rouen.fr