**KHEDIDJA KOUIDRI**

# PROBLÈMES DE L'ENSEIGNEMENT DE L'INTÉGRATION AU DÉBUT DE L'UNIVERSITÉ EN ALGÉRIE

**Abstract. Problems for teaching integration at the beginning of university in Algeria** – It is indispensable to be able to interpret the organization of a given teaching in terms of choice, in order to be able to identify their consequences on the meaning of the introduced objects and on students' learning. This article first presents the study of the place of area in the teaching of integral calculus at the beginning of university in seven reference textbooks. We bring to light three possible plans of filiations and breaks between the various types of integrals taught and the notion of area, connected to various meanings of the integral calculus. This study leads us to make a praxeological analysis of the types of tasks related to the institutional choices made in first year of university teaching in Algeria, before considering the feeling that students have about integral calculus.

**Résumé.** Il est indispensable de pouvoir interpréter l'organisation d'un enseignement en termes de choix, pour pouvoir identifier leurs conséquences sur la signification des objets enseignés et sur les apprentissages des étudiants. Cet article présente tout d'abord l'étude de la place de l'aire dans l'enseignement des intégrales simples au début de l'université dans sept manuels de référence. Nous y mettons en évidence trois schémas possibles de filiations et de ruptures entre les différents types d'intégrales simples enseignées et la notion d'aire, liés à différentes significations du calcul intégral. Cette étude nous conduit à effectuer une analyse praxéologique des types de tâches liés aux choix institutionnels effectués en première année d'enseignement universitaire en Algérie, avant d'étudier le rapport personnel des étudiants au calcul intégral.

**Mots-clés.** Aire, intégrale définie, intégrale indéfinie, intégrale impropre, rapport institutionnel, rapport personnel.

---

## Introduction

Cet article s'appuie sur notre travail de thèse (Kouidri, à soutenir).

Pour comprendre les difficultés de l'enseignement et de l'apprentissage de l'intégrale, nous cherchons d'abord à caractériser les choix de l'enseignement de l'intégrale en première année de deux universités algériennes (étude de cas), en les situant par rapport à différentes organisations possibles de cet enseignement (mises en évidence par une analyse de traités mathématiques). Nous précisons ensuite le rapport institutionnel au concept d'intégrale dans ces universités à l'aide d'une étude praxéologique du polycopié d'enseignement (Osmanov et Khelifati 2003). Enfin nous présentons une expérimentation et une analyse succincte des principales difficultés et erreurs des étudiants après enseignement.

**ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES**, volume 14, p. 123 – 151.

## 1. Une étude d'organisations possibles de l'enseignement de l'intégrale en début d'université en relation avec la notion d'aire

L'origine historique d'une problématique de l'intégration se trouve dans le calcul de l'aire d'une figure géométrique en rapport avec l'aire d'un carré et appelé pour cette raison quadrature. On trouve chez Euclide une première solution à ce problème : la méthode d'exhaustion pour le calcul approché de l'aire d'un disque.

Au 19ième siècle, Cauchy en 1823, puis Riemann en 1854 reviennent à la méthode d'exhaustion, outillés par les concepts de limite et de fonction, pour mettre en place une véritable théorie mathématique. Bourbaki décrit comme suit la portée de la contribution de Cauchy à la théorie de l'intégration :

« En ce qui concerne l'intégration, l'œuvre de Cauchy représente un retour aux saines traditions de l'antiquité et de la première partie du XVII$^{e}$ siècle, mais appuyé sur des moyens techniques encore insuffisants. L'intégrale définie, passée trop longtemps au second plan, redevient la notion primordiale, pour laquelle Cauchy fait adopter définitivement la notation $\int_a^b f(x)dx$ proposée par Fourier au lieu de l'incommode $\int f(x)dx \begin{bmatrix} x=b \\ x=a \end{bmatrix}$ (parfois employée par Euler) ; et, pour la définir, Cauchy revient à la méthode d'exhaustion, ou comme nous dirions, aux 'sommes de Riemann' (qu'il vaudrait mieux nommer d'Archimède, ou sommes d'Eudoxe). » (Bourbaki. 1976, p. III.65)

Le calcul d'aires est donc historiquement la raison d'être du calcul intégral et du développement de sa théorisation.

Ceci nous conduit à questionner la place qu'occupe cette raison d'être dans l'enseignement de l'intégration au début de l'université.

- Comment cet enseignement intègre-t-il le calcul des grandeurs, tout particulièrement le calcul d'aires ?
- Quelles organisations de cet enseignement sont possibles ?
- Quelles significations prend en conséquence la notion d'intégrale dans ces organisations ?
- Quelles filiations et quelles ruptures résultent de ces différentes organisations possibles ?

Pour répondre à ces questions, nous avons analysé sept ouvrages universitaires que nous prenons comme référence, car certains sont l'œuvre de mathématiciens reconnus comme Serge Lang, et d'autres sont considérés comme des références pour les enseignants algériens[1].

Il s'agit des ouvrages suivants numérotés de 1 à 7 : (1) Gouyon (1958), (2) Cagnac, Ramis et Commeau (1963), (3) Bass (1964), (4) Lang (1964, réédité en 2000), (5) Lelong-Ferrand et Arnaudiès (1977), (6) Lehning (1985), (7) Arnaudiès et Fraysse (1988).

### 1.1. À qui s'adressent ces ouvrages ?

Les ouvrages 1, 2, 5, 6, 7 concernent l'enseignement des mathématiques dans les classes préparatoires aux grandes écoles[2] et aux sections scientifiques du premier cycle d'université.

Le premier ouvrage, Gouyon (1958), a été écrit avant un changement de programme important introduisant des notions de topologie et de mathématiques modernes : ce changement de programme pour les universités en France a eu lieu dans les années 1960.

L'ouvrage 5 de Lelong-Ferrand et Arnaudiès (1977) se place clairement par rapport aux nouveaux programmes de l'époque.

« […] Nous avons tenu à donner au lecteur un exposé moderne aussi complet et aussi clair que possible des nouveaux programmes de mathématiques spéciales et du premier cycle universitaire. […] Cet ouvrage est un livre de base, qui servira aux étudiants tout au long de leurs études et auxquels ils pourront se reporter. En particulier ils y trouveront des éléments de topologie nécessaires à la suite de leurs études. » (op. cité, Avant propos)

Quant à l'ouvrage 7 d'Arnaudiès et Fraysse (1988), c'est encore aujourd'hui un ouvrage recommandé pour la préparation de l'agrégation de mathématiques en France.

L'ouvrage 3, de Bass (1964), s'adresse aux étudiants d'école d'ingénieurs :

« Le présent ouvrage contient, avec quelques compléments, la matière des cours de mathématiques de l'École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'École

[1] Rappelons que, dans la plupart des universités algériennes, l'enseignement des mathématiques se fait en français.

[2] Les classes préparatoires aux grandes écoles préparent, en 2 ou 3 ans, les élèves aux concours d'entrée dans les grandes écoles et les écoles d'ingénieurs. Ces classes, situées dans les lycées, sont accessibles avec un baccalauréat ou un niveau équivalent, après acceptation du dossier par le chef d'établissement. Les manuels étudiés visent ici les classes préparatoires scientifiques de la filière « mathématiques, physique, sciences de l'ingénieur » selon la dénomination actuelle.

normale Supérieure des Mines de Paris. […] Le programme de ce cours devait être choisi de telle sorte que, dans un cadre raisonnable, un futur ingénieur y trouve l'essentiel des mathématiques dont il aura besoin à l'école et peut-être plus tard, présentées dans un langage qui ne le déconcerte pas. » (Op. cité p. VII)

Comme Lelong-Ferrand et Arnaudiès (1977), Bass mentionne les changements dans l'enseignement des mathématiques pour justifier certaines modifications de la deuxième édition, la troisième édition étant peu différente.

« En cinq ans, l'enseignement des mathématiques a subi une évolution rapide. Bien que les programmes de l'enseignement secondaire n'aient pas dans leur ensemble reçu des modifications sérieuses, les programmes propédeutiques, et plus particulièrement ceux des classes de mathématiques spéciales, ont été transformés. » (op. cité p. XI)

Enfin, l'ouvrage 4 (Lang 1964) se présente comme un ouvrage d'enseignement des notions de base en analyse.
«The purpose of a first course in calculus is to teach the student the basic notions of derivative and integral, and the basic techniques and applications which accompany them. The very talented students, with an obvious aptitude for mathematics, will rapidly require a course in functions of one real variable, more and less as it is understood by professional mathematicians. This book is not primarily addressed to them (although I hope they will be able to require from it a good introduction at an early age).
[…] Rigor. This does not mean that so-called rigor has to be abandoned. » (op. cité, in Foreword)

### 1.2. Ordre d'apparition des différents types d'intégrales dans les ouvrages universitaires

L'étude de ces sept ouvrages permet de dégager trois types d'ordre possibles pour l'apparition des différents types d'intégrales enseignées.

*Ordre 1* : intégrale définie $\rightarrow$ intégrale indéfinie (primitive) $\rightarrow$ intégrale impropre (Ouvrages 1, 3, 5 et 7).
Seul l'ouvrage 5 utilise strictement les appellations intégrales définies, indéfinie et impropre (ou généralisée). Les autres parlent d'intégrale ou d'intégrale simple, de primitive. Tous les ouvrages parlent d'intégrales impropres ou généralisées : le plus souvent les deux termes sont présents.
Dans l'ouvrage 1 (Gouyon, 1958), même si les vocables « intégrales indéfinies » et « intégrales généralisées (ou impropres) » sont absents, celui de « primitive » et d'« extensions de la notion d'intégrale définie » les remplacent.

Notons qu'il semble que l'appellation « intégrale indéfinie » a tendance à être supplantée dans les manuels au profit de la notion fondamentale de primitive.

L'ouvrage 7 (Arnaudiès et Fraysse, 1988) parle d'intégrale de Riemann comme cas particulier de l'intégrale de Lebesgue, de primitive et d'intégrale généralisée.

*Ordre 2* : intégrale indéfinie → intégrale définie → intégrale impropre (Ouvrages 2 et 4).
*Ordre 3* : Intégrale propre → intégrale impropre (Ouvrage 6).

| Ordre | Ordre 1<br>définie → indéfinie → impropre | Ordre 2<br>indéfinie → définie → impropre | Ordre 3<br>propre → impropre |
|---|---|---|---|
| Ouvrage | 1, 3, 5, 7 | 2, 4 | 6 |

**Tableau 1 :** Les différents ordres d'apparition des trois intégrales.

L'intégrale impropre ou généralisée est toujours enseignée en dernier, quel que soit l'ouvrage considéré. Dans l'ordre 1, majoritaire dans l'ensemble choisi de référence, l'intégrale indéfinie apparaît comme un outil pour le calcul de l'intégrale impropre, alors que dans l'ordre 2, l'intégrale définie permet de répondre à la question du calcul de l'intégrale dépendant de la borne supérieure, qui est pour Lang (ouvrage 4) une primitive ou intégrale indéfinie.

Nous examinons maintenant comment les enseignements sont organisés dans ces ouvrages, en dégageant d'abord certaines filiations puis les ruptures entre les trois intégrales, et entre les trois intégrales et la notion d'aire.

### 1.3. La notion d'aire dans les différentes organisations possibles de l'enseignement des intégrales

Nous résumons l'étude détaillée faite dans notre thèse (Kouidri, à soutenir) dans trois schémas de base, dont le premier est nettement majoritaire puisqu'il représente 5 ouvrages de références parmi les sept étudiés. Les deux autres schémas correspondent respectivement à l'ouvrage (2) de Cagnac, Ramis et Commeau (1963) et à l'ouvrage (4) de Lang (1964).

Voici ces schémas.

Schéma 1 (1, 3, 5, 6, 7)

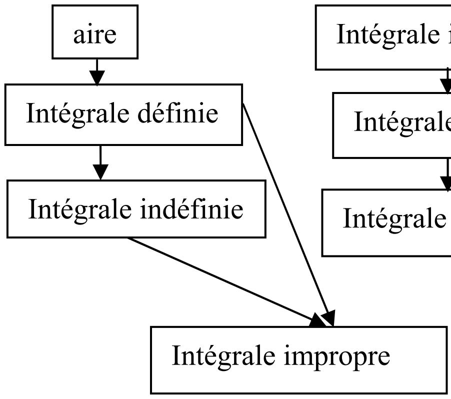



Schéma 2 (2)

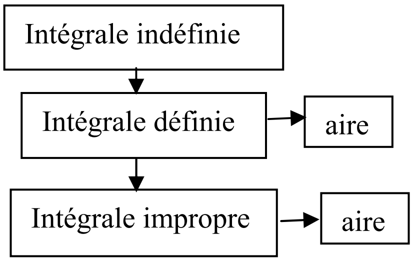
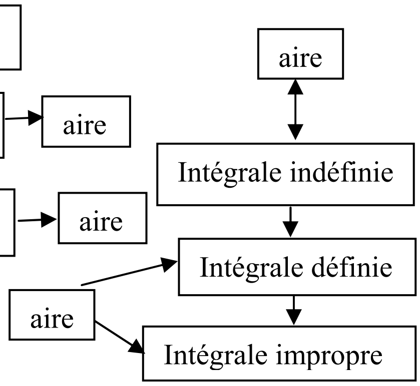
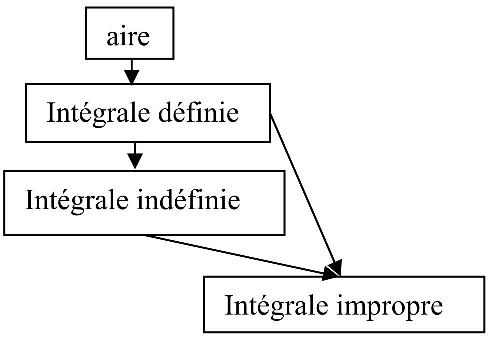



Schéma 3 (4)




Nous allons maintenant commenter ces schémas pour préciser les relations entre les différentes notions, relations que nous présenterons essentiellement en termes de filiation.

**Relations dans le schéma 1**




Prenons l'exemple de l'ouvrage 3 (Bass, 1964).

**• Aire → intégrale définie**

L'aire donne sa signification à l'intégrale définie d'autant plus que tout calcul d'aires se ramène au calcul d'une intégrale définie.

« La notion d'intégrale définie peut être rattachée à la notion intuitive d'aire. […] Il est donc nécessaire de donner une définition précise de la notion d'aire, et si possible une définition qui soit susceptible de se traduire par des méthodes pratiques de mesure des aires de courbes compliquées. » (op. cité, p. 140)

Pour Bass, définir la notion d'aire revient à travailler sur l'intégrale de Riemann :

« Nous nous occuperons surtout de préciser la définition de l'aire, sous la forme de *l'intégrale de Riemann.* Il arrive dans la pratique que l'intégrale de Riemann ne soit pas d'un emploi commode, et *l'intégrale de Lebesgue,* qui en est en un certain sens une généralisation, se prête mieux aux calculs concrets. Mais il n'est pas nécessaire de connaître *la théorie* de l'intégrale de Lebesgue pour savoir mesurer des intégrales. Aussi nous limiterons-nous à l'intégrale de Riemann, qui sera suffisante pour toutes les questions que nous aurons à étudier. » (op. cité, p. 140)

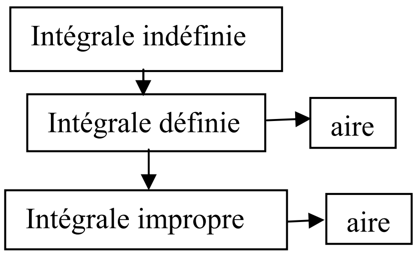
**• Intégrale définie $\rightarrow$ intégrale indéfinie (primitive)**

L'intégrale définie est un outil pour définir l'intégrale indéfinie comme intégrale dépendant de la borne supérieure et pour démontrer que cette intégrale est une fonction primitive. Elle a aussi un autre rôle : celui de définir de nouvelles fonctions primitives et d'élargir ainsi le catalogue des fonctions connues. Et inversement, l'intégrale indéfinie outille le calcul exact d'une intégrale définie.

**• Intégrale définie $\rightarrow$ intégrale impropre**

L'intégrale impropre ou généralisée est présentée comme une extension de l'intégrale définie. Elle lui emprunte certaines propriétés et certaines méthodes de calcul, mais perd certaines autres propriétés et développe des méthodes spécifiques de calcul qui doivent inclure la démonstration de son existence.

**Relations dans le schéma 2**




**• Intégrale indéfinie (primitive) $\rightarrow$ intégrale définie**

L'intégrale indéfinie est seulement un outil pour le calcul pratique de l'intégrale définie (c'est-à-dire le calcul exact), via la formule de Newton-Leibniz (*f* étant une fonction continue sur un segment [$a$, $b$], et $F$ une primitive quelconque de $f$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)).$$

**• Intégrale définie $\rightarrow$ aire**

L'aire se réduit à être l'interprétation géométrique de l'intégrale simple et non à la fonder. Mais cette interprétation est l'occasion de présenter des éléments d'une théorie de la mesure.

« 90. Interprétation géométrique de l'intégrale simple.

1° Notion d'aire. On démontre qu'il est possible d'attacher à tout domaine polygonal plan $D$ un nombre réel positif $A$, dit aire de $D$, vérifiant les deux axiomes suivants :

[Axiome1] les aires de deux domaines égaux sont égales.

[Axiome 2] si $A_1$ et $A_2$ sont les aires de deux domaines disjoints $D_1$ et $D_2$, l'aire du domaine $D_1 \cup D_2$ est $A_1 + A_2$.

En ajoutant une convention d'unité (le carré dont le côté a pour longueur 1 a pour aire 1) on peut alors déterminer l'aire de tout domaine polygonal.

Considérons un domaine du plan D. Nous supposons qu'on peut l'enfermer dans un rectangle assez grand, et qu'il contient l'intérieur de tout polygone dont il contient la frontière. Nous dirons qu'un tel domaine $D$ est quarrable si l'ensemble des aires des domaines polygonaux contenant $D$ et l'ensemble des aires des domaines polygonaux contenus dans $D$ sont adjacents, c'est-à-dire si, quel que soit le nombre positif $\varepsilon$, il existe $Q \supset D$ et $q \subset D$ tels que la différence des aires des domaines polygonaux $Q$ et $q$ soit inférieure à $\varepsilon$. L'aire de $D$ est par définition la borne $A$ commune aux deux ensembles adjacents. On vérifie que cette aire obéit aux deux axiomes 1 et 2.

**Remarque –** $D$ est quarrable si et seulement si sa frontière peut être enfermée dans un domaine polygonal d'aire aussi petite que l'on veut.

2° Théorème. $F$ étant une fonction réelle de variable réelle, continue et positive sur $[a, b]$, soit $D$ le domaine défini, dans le plan rapporté à un repère xOy, comme l'ensemble des points $(x,y)$ tels que $x \in [a, b]$ ; $y \in [0, f(x)]$, alors, $D$ est quarrable et si le repère est orthonormé son aire est

$$A = \int_a^b f(x)dx\,.$$

[…] 1er Cas : Le repère est orthonormé.

[…] 2e Cas : Le repère n'est pas orthonormé.

[…] 2e : Généralisation. – a) $a < b$ et $f(x) < 0$. […]

$f(x)$ n'a pas de signe fixe sur $[a, b]$.» (Cagnac, Ramis et Commeau, 1963, pp. 163-166).

**• Intégrale définie → intégrale impropre**

Comme dans les ouvrages relevant du schéma 1, l'intégrale généralisée apparaît comme une extension de l'intégrale définie. On parle d'abord d'extension de l'intégrale définie avant d'introduire tardivement le terme d'« intégrale généralisée ».

**• Intégrale impropre → aire**

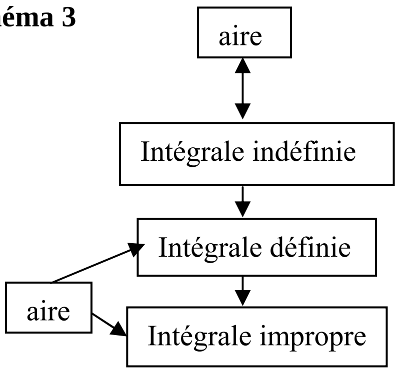
Comme pour l'intégrale définie, l'aire est une interprétation géométrique de l'extension de l'intégrale définie : cela permet de faire remarquer, à propos de l'exemple de référence $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ (α > 0, a > 0) qu'« un domaine dont une dimension est infinie peut néanmoins avoir une aire finie ». Il y a ainsi dans cette organisation une forte filiation entre l'intégrale définie et l'intégrale généralisée.

« II. Extension de la notion d'intégrale simple

[…] En résumé, l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ n'est convergente que si α > 1, et l'on écrit, pour α >1, $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}$. »

Le résultat précédent peut s'interpréter géométriquement. Le graphe de la fonction $y = \frac{1}{t^\alpha}$ étant tracé (fig. 66), l'intégrale $\int_a^{x} \frac{dt}{t^\alpha}$ est l'aire comprise entre cette courbe et l'axe O*x* d'une part, entre les ordonnées A'A et M'M des points qui ont pour abscisses respectives *a et x* d'autre part. Lorsque M s'éloigne indéfiniment, cette aire a une limite finie dans le cas où α est plus grand que 1 ; cette aire devient infinie lorsque α est inférieur ou égal à 1. On voit ainsi qu'un domaine dont une dimension est infinie peut néanmoins avoir une aire finie. » (op. cité, p. 348).

**Relations dans le schéma 3**




Regardons de plus près les relations représentées dans le schéma 3 (organisation de Lang 1964).

**• Aire ↔intégrale indéfinie**

Dans cet ouvrage, on cherche à résoudre quasi simultanément deux problèmes : (1) étant donnée une fonction *f*, trouver une primitive de cette fonction, (2) étant donnée une fonction *f* positive, donner une définition de l'aire sous la courbe de cette fonction.

« In this chapter, we solve, more or less simultaneously the following problems:
(1) Given a function $f(x)$, find a function $F(x)$ such that $F'(x) = f(x)$.

This is the inverse of differentiation, and is called integration.
(2) Given a function $f(x)$.which is $\geq 0$, give a definition of area under the curve $y = f(x)$.which does not appeal to geometric intuition. » (op. cité, p. 287)

La réponse au problème (2) est donnée ainsi dans Lang : sur un intervalle $[a, b]$ et étant donné $x \in [a, b]$, l'intégrale indéfinie $F(x)$ d'une fonction $f(x)$ est la mesure numérique de l'aire sous la courbe $y = f(x)$ entre $a$ et $x$.

« IX, §3. AREA
Let $a < b$ be two numbers and let $f(x)$ be a continuous function defined on the interval $a \leq x \leq b$. This closed interval is denoted by $[a, b]$.
We wish to find a function $F(x)$ which is differentiable in this interval, and such that $F'(x) = f(x)$.
In this section, we appeal to our geometric intuition concerning area. We assume that $f(x) \geq 0$ for all $x$ in the interval. We let: $F(x)$ = numerical measure of the area under the graph of $y = f(x)$ between $a$ and $x$. The following figure illustrates this. » (op. cité, p. 292-293)

Puis il démontre que *F(x)* comme aire sous la courbe est bien une primitive de $f$ (problème (1)).

« Theorem 3.1. The function *F(x)* is differentiable, and its derivative is *f (x)*. » (op. cité, p. 293)

**• Intégrale indéfinie $\rightarrow$ intégrale définie**

Chez Lang (1964), l'introduction de l'intégrale indéfinie (via l'intégrale dépendant de l'une de ses bornes) comme aire sous la courbe « variable » permet de poser le problème de l'existence de l'intégrale.

$$\textbf{Aire} \rightarrow \begin{cases} \textbf{Intégrale définie} \\ \\ \textbf{Intégrale impropre} \end{cases}$$

Lang introduit l'intégrale impropre en posant le problème du calcul de l'aire sous la courbe de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{-1}{2}}$ sur l'intervalle $]0, 1[$. Pour cela il se ramène au calcul de l'intégrale définie $\displaystyle\int_c^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx$ avec $c \in ]0, 1[$, c'est-à-dire au calcul de l'aire sous la courbe de *f* entre c et 1. Puis il définit la notion d'intégrale impropre.

« X, §4. Improper integrals

Exemple 2. However, it is remarkable that an entirely different situation will occur when we consider the area under the curve $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{-1}{2}}$. We take x > 0, of course.

Let 0 < $c$ < 1. We compute the integral $\int_c^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx = 2\text{-}\ 2c^{1/2}$

Then as $c \to 0$, $2c^{1/2} \to 0$ and therefore $\int_c^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx \to 2$ […]

Definition. If the limit $\lim\limits_{c \to a} F(c)$ exits, then we say that the improper integral $\int_a^b f(x)dx$ exits, and then we define $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{c \to a} \int_c^b f(x)dx = F(b) - \lim\limits_{c \to a} F(c)$. » (op. cité, p. 330-331)

Ce que nous avons écrit pour le schéma 1, à propos des relations entre intégrale impropre et intégrale définie en particulier sur les méthodes de calcul, reste valable ici.

### 1.4. Les ruptures liées aux trois organisations possibles de l'enseignement de l'intégration

Une première rupture fondamentale entre intégrale indéfinie et les deux autres intégrales est que l'intégrale indéfinie est une fonction alors que les deux autres intégrales représentent, si elles existent, un nombre, mesure d'une grandeur, le plus souvent d'une aire. On peut dire que le calcul d'une intégrale indéfinie équivaut à la résolution d'une équation différentielle élémentaire.

Cette rupture de signification entre intégrale indéfinie (fonction) d'un côté et intégrales définie et impropre (nombre, lié à la notion d'aire) est rendue potentiellement visible par les ostensifs[3] qui les représentent : absence ou présence

[3] Bosch et Chevallard (1999) distinguent deux types d'objets : les objets *ostensifs*, les objets *non ostensifs*.
Un « *objet ostensif* – du latin *ostendre*, 'montrer, présenter avec insistance' – pour nous référer à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible. » (op.cité, p. 90)

de bornes pour le signe somme « ∫ », ce dernier signe étant commun aux trois intégrales.

Il y a une rupture de signification entre intégrale définie et intégrale impropre dans les calculs (de grandeurs), puisqu'il est nécessaire de se poser le problème de la convergence seulement dans le cas du calcul d'une intégrale impropre. Mais les ostensifs du calcul sur un intervalle (*a*, *b*), *a* et *b* réels, sont les mêmes : « Calculer $\int_a^b f(x)dx$ ». Il faut donc, dans ce cas et si rien d'autre n'est précisé, étudier si la fonction *f* est bornée sur l'intervalle *(a, b)*[4], pour différencier une intégrale définie d'une intégrale impropre (ou généralisée). Soulignons que, le plus souvent dans l'enseignement effectif, on guide les étudiants pour ce calcul en ne le proposant que pour une intégrale définie ou une fois démontrée la convergence de l'intégrale impropre.

L'intégrale impropre est présentée dans tous les ouvrages que nous avons consultés comme une extension de l'intégrale définie, d'où la filiation institutionnelle entre l'intégrale définie et l'intégrale impropre. Par là, elle emprunte à l'intégrale définie certaines propriétés et certaines méthodes de calcul, mais aussi perd certaines autres propriétés et développe des méthodes spécifiques de calcul qui doivent inclure la démonstration de son existence pour les fonctions qui ne sont pas localement intégrables. En cela, elle est en rupture avec l'intégrale définie.

Soulignons le rôle central dans la théorie de Riemann de l'intégrale dépendant de l'une de ses bornes pour établir des liens entre primitive (ou intégrale indéfinie) et intégrale définie (Théorème de Newton-Leibniz) et pour définir la convergence ou la divergence d'une intégrale impropre : en cela l'ouvrage de Lang (1964) est exemplaire puisque son organisation (schéma 3) souligne ce rôle.

Pour le schéma 1 (majoritaire), la notion d'aire se rattache seulement à l'intégrale définie. Dans le schéma 2, la notion d'aire se rattache aussi bien à l'intégrale définie qu'à l'intégrale impropre (ou généralisée) mais apparaît comme une application du calcul intégral ou comme une interprétation géométrique d'une

---

« Les objets *non ostensifs* sont alors tous ces 'objets' qui, comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent institutionnellement – au sens où on leur attribue une existence – sans pourtant pouvoir être vus, dits, entendus, perçus ou montrés par eux-mêmes : ils ne peuvent qu'être évoqués ou invoqués par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés (un mot, une phrase, un graphisme, une écriture, un geste ou tout un long discours). » (*Ibid.*)
Dans les usages humains, les objets ostensifs se distinguent des objets non ostensifs par le fait qu'ils peuvent être concrètement manipulés.

[4] Condition suffisante.

intégrale simple. Et enfin, dans le schéma 3, la notion d'aire se rattache aux trois intégrales. La rupture de signification entre aire et intégrale diffère donc selon les choix des auteurs conduisant à des organisations différentes de l'enseignement.

## 2. Analyse didactique du rapport institutionnel au concept d'intégrale en début d'université : le cas de l'université de Boumerdes (Algérie)

Dans notre travail de thèse, nous nous sommes placée dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1999) pour analyser l'enseignement et l'apprentissage du concept « intégrale » dans l'institution « Enseignement des mathématiques en tronc commun d'université pour les futurs ingénieurs dans les deux universités de Boumerdes et Djelfa en Algérie » que nous nommons ***A*** par la suite.

Cette théorie considère que, en dernière instance, toute activité humaine consiste à accomplir une tâche t d'un certain type T, au moyen d'une technique $\tau$, justifiée par une technologie $\theta$ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui à son tour est justifiable par une théorie $\Theta$. En bref, elle part du postulat que toute activité humaine met en œuvre une organisation que Chevallard note $[T/\tau/\theta/\Theta]$ et nomme praxéologie, ou organisation praxéologique. L'analyse praxéologique nous permet de caractériser le rapport institutionnel au concept d'intégrale dans l'institution ***A***.

Avant d'entreprendre l'étude des praxéologies mathématiques enseignées et apprises, nous situons les choix d'enseignement de l'intégrale dans ***A*** par rapport aux organisations possibles dégagées dans la partie 1, car ce sont ces choix qui conditionnent les praxéologies enseignées.

La caractérisation du rapport institutionnel au concept d'intégrale dans ***A*** s'appuie ici sur l'analyse des 140 pages consacrées à l'intégration dans la brochure d'enseignement (Osmanov et Khelifati 2003) de l'université de Boumerdes[5]. Cette brochure, en même temps :

- sert de support pour le cours de l'enseignant chargé de cours ;
- fournit une liste d'exercices pour les enseignants de TD ;
- est un outil de travail autonome pour les étudiants à qui il fournit un rappel des définitions et principaux théorèmes ainsi qu'une liste d'exercices avec réponses et exemples de corrections détaillées.

---

[5] Cette brochure est également utilisée par les enseignants de Djelfa dont l'université vient juste, à l'époque de notre travail, d'être créée.

### 2.1. Caractérisation des choix effectués dans l'institution *A*

La brochure ne s'intéresse, comme la majorité des ouvrages étudiés dans la partie 1, qu'à l'intégration des fonctions d'une variable réelle.

L'ordre des enseignements dans la brochure est celui du schéma 2 :
Indéfinie → définie → impropre, ordre minoritaire dans les traités où l'ordre majoritaire est : Aire → définie → indéfinie → impropre.

L'intégrale indéfinie est un outil pour le calcul de l'intégrale définie (c'est-à-dire le calcul exact), via la formule de Newton-Leibniz, l'intégrale impropre apparaissant comme une extension de l'intégrale simple, comme dans tous les traités consultés.

La notion d'aire n'est pas absente, mais n'apparaît que comme application de l'intégrale définie.

Les principaux objets d'étude sont les calculs d'intégrale indéfinie et définie, puis, dans le cas des intégrales généralisées, l'étude de la convergence de ces dernières. Parmi les exercices, ceux à caractère plus technique que théorique (selon l'appellation des auteurs de la brochure) sont prédominants par rapport aux exercices à caractère plus théorique que technique, et ceux de calcul d'intégrales (qu'elles soient indéfinies, définies ou impropres) sont majoritaires.

La conception majoritaire de l'intégrale indéfinie de *f* est « une primitive sur un intervalle ».

Comme dans les traités, l'intégrale dépendant de la borne supérieure permet d'établir la relation fondamentale entre intégrale indéfinie et intégrale définie (Théorème de Newton-Leibniz), relation qui attribue à la recherche de primitive ou d'intégrale indéfinie un objet principal : le calcul d'une intégrale définie.

Contrairement à l'ouvrage de Bass (1964), on ne trouve pas de trace flagrante, dans la brochure, du second rôle de l'intégrale indéfinie : celui de définir de nouvelles fonctions primitives et d'élargir ainsi le catalogue des fonctions connues.

Pour l'intégrale définie, le genre de tâches privilégié est le calcul. Mais seul le calcul exact de l'intégrale définie est présent, la place du calcul approché étant simplement évoquée lors d'un travail sur l'approximation par encadrement[6].

---

[6] Notre travail de thèse (Kouidri, à soutenir) montre la variabilité de la présence du calcul approché dans les ouvrages étudiés en 1, cf. tableau ci-dessous :

| Place du calcul approché | importante | réduite | Absente |
|---|---|---|---|
| ouvrage | 3, 6 | 1, 2, 5 | 4, 7 |

L'aire est vue comme application de l'intégrale de Riemann et non pas comme un fondement :

« L'intégrale définie (de Riemann) est un puissant outil mathématique dont les applications sont nombreuses, telles que le calcul des aires, le travail d'une force, le calcul de limites des suites *etc*. » (p. 61)

Comme dans la plupart des traités de référence étudiés dans la partie 1 :

- l'intégrale généralisée apparaît comme une extension de l'intégrale définie
- les deux termes « impropre » et « généralisée » se côtoient.
- le découpage en intégrales de 1ere espèce et de 2eme espèce est respecté, dans l'ordre historique (González-Martín 2004) : 1ere espèce → 2eme espèce. Mais, contrairement aux ouvrages de référence où ces termes n'apparaissent pas, ils sont ici objets d'enseignement.

Rappelons que la 1ere espèce se réfère à l'intervalle d'intégration où l'une des bornes au moins est infinie, la 2eme espèce se référant à une fonction à intégrer non bornée sur un intervalle borné.

La brochure ne laisse aucune place, dans l'étude des intégrales impropres, à l'interprétation géométrique, ni à la représentation graphique de l'aire sous la courbe, aucun graphique n'étant présent dans cette étude. Le calcul approché est également complètement absent.

## 2.2. Praxéologies effectivement présentes dans l'institution *A*

L'étude de la brochure nous a permis d'identifier 5 praxéologies effectivement présentes dans l'institution ***A***. Nous ne les présentons ci-après que sous la forme d'un triplet [T/τ/θ], la théorie Θ étant la théorie de l'intégration de Riemann, la même pour toutes ces organisations mathématiques.

*1. Organisation mathématique du calcul de l'intégrale indéfinie*

Type de tâches $T_1$ : Calculer $\int f(x)dx$

Technique $\tau_1$ : rechercher une primitive en utilisant une méthode d'intégration adéquate.
Eléments technologiques θ1 : propriétés fondamentales de l'intégrale indéfinie, table des primitives usuelles et méthodes de calcul des primitives.

*2. Organisation mathématique du calcul de l'intégrale définie*

Type de tâches $T_2$ : Calculer $\int_a^b f(x)dx$

Technique $\tau_2$ : rechercher une primitive $F$ de $f$ ; calculer $F(b)-F(a)$

Eléments technologiques $\theta_2$ : propriétés fondamentales des intégrales définies, formule de Newton-Leibniz, table des intégrales indéfinies usuelles, méthodes de calcul adaptées de l'intégrale indéfinie.

*3. Organisation mathématique du calcul de l'« aire sous la courbe »*

Type de tâches $T_3$ : Calculer l'aire de la surface limitée par deux courbes d'expressions $y = f_1(x), y = f_2(x)$.

Technique τ3 : Ecrire $\sigma = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$, puis chercher une primitive *F* de $f_1$- $f_2$ ; calculer $F(a)$-$F(b)$.

Eléments technologiques $\theta_3$ : $\theta_2$ + théorème faisant le lien entre intégrale définie et aire.

*4. Organisation mathématique du calcul d'une intégrale impropre (ou généralisée)*

Type de tâches $T_4$ : Calculer $\int_a^b f(x)dx$ $a < b$ ; $a, b \in \overline{R}$ ou établir sa divergence

Technique $\tau_4$ : déterminer les points de singularité de *f* ; partager l'intervalle d'intégration en autant d'intervalles que nécessaires ; écrire que l'intégrale est égale à la somme des limites d'autant d'intégrales dépendant d'une de leur borne que nécessaires ; chercher une primitive sur chaque intervalle ; calculer les limites de chaque primitive ; si ces limites sont finies, les ajouter, sinon conclure à la divergence.

Eléments technologiques $\theta_4$ : intégrale dépendant de sa borne supérieure, méthodes de calcul des intégrales définies ; propriétés fondamentales (relation de Chasles et propriétés de linéarité) des intégrales impropres ; limites de fonctions.

*5. Organisation mathématique de l'étude de la nature d'une intégrale impropre*

Type de tâches $T_5$ : Etudier la nature d'une intégrale impropre

Technique $\tau_5$ :

– si la fonction est positive sur l'intervalle d'intégration, essayer de majorer (respectivement minorer) l'intégrale $\int_a^r f(x)dx$ (resp $\int_s^b f(x)dx$), ou de majorer la fonction *f* par une fonction *g* dont l'intégrale existe sur le même intervalle, ou de remplacer la fonction *f* par un équivalent *g* au voisinage du point de singularité dont l'intégrale existe sur le même intervalle ;

– sinon étudier l'intégrale de la valeur absolue de la fonction sur le même intervalle. Éléments technologiques θ5 : critères de convergence et notion de convergence absolue.

### 2.3. Règles de contrat et rapport institutionnel dans *A*

C'est surtout dans les exercices (et pas seulement dans le cours) que se forge le rapport institutionnel à un objet de savoir. L'étude de ces derniers nous a non seulement conduite à décrire les précédentes organisations mathématiques, mais aussi à formuler l'hypothèse de l'existence des 4 règles de contrat suivantes :

R1 : « Lors du calcul de $\int f(x)dx$, on doit déterminer l'intervalle sur lequel l'intégrale existe seulement dans le cas où cela est explicitement demandé dans l'énoncé. »

R2 : « Pour calculer l'intégrale indéfinie d'une fonction *f(x),* il suffit de chercher une primitive *F(x),* puis de lui ajouter une constante C. »

R3 : « Lors du calcul de $\int_a^b f(x)dx$, l'étudiant doit vérifier l'existence de l'intégrale sur [a, b] seulement dans le cas où cela lui est explicitement demandé. »

R4 : « L'étudiant n'a pas la responsabilité de se demander si la fonction est intégrable ou non sur l'intervalle d'intégration. »

Ces règles de contrat participent à la mise en place du rapport institutionnel dans ***A*** et font apparaître le problème important suivant.

Les deux types de tâches autour desquelles s'organisent les praxéologies existant effectivement autour de l'intégrale impropre rendent incontournables les relations entre intervalle d'intégration et fonction à intégrer. Cependant, la notion topologique d'intervalle, associée soit à l'existence d'un ensemble de primitives pour l'intégrale indéfinie, soit à l'intégrabilité d'une fonction pour l'intégrale définie, fondamentale pour l'intégration, est absente des praxéologies existant effectivement dans ***A***.

## 3. Étude des conséquences de ces choix institutionnels sur le rapport personnel des étudiants au concept d'intégrale

L'expérimentation conduite a eu lieu en mai 2006 à l'université de Boumerdes, où nous enseignions l'année précédente, et au centre universitaire de Djelfa où nous enseignons actuellement. Signalons que depuis la rentrée suivante (septembre 2006), l'étude de l'intégrale impropre a été, dans le cadre de la mise en place du LMD (licence, master, doctorat) dans les universités algériennes, repoussée en 2ème année d'université (L2). La population totale à laquelle a été proposé le test comporte 108 étudiants dont 57 à Djelfa et 51 à Boumerdes.

L'objet principal de cette expérimentation était de nous permettre d'évaluer le rapport personnel des étudiants de fin de 1ère année d'université aux objets suivants : intégrales indéfinies, définies et impropres, au travers de leur maîtrise des techniques de calcul enseignées et des justifications associées. Autrement dit, de mesurer l'impact des choix institutionnels sur les savoir-faire des étudiants face au calcul intégral.

Nous avons fait le choix de recueillir des productions écrites. Pour cela, nous avons élaboré quatre exercices à proposer dans des conditions de devoir surveillé, situation propice à l'observation de l'assujettissement des étudiants au rapport institutionnel (Coppé, 1993).

### 3.1. Raisons du choix et caractérisation des exercices proposés

Nous dirons qu'une question est *routinière* lorsque sa résolution, attendue par l'institution, consiste en une procédure se ramenant à une suite de pas, clairement identifiée dans cette institution. Au contraire, une question pour laquelle les étudiants ne disposent pas de procédure connue et doivent donc chercher par eux-mêmes comment y répondre sera qualifiée de *non-routinière*.

**L'exercice 1** propose des spécimens du type de tâches T1 routinier dans $A$ : Calculer $\int f(x)dx$.

Ce premier exercice a pour but d'évaluer la maîtrise par les étudiants du calcul de l'intégrale indéfinie. Il comporte le calcul de 4 intégrales indéfinies dont 3 correspondent à des méthodes typiques d'intégration dans $A$.

**Dans l'exercice 2** il s'agit d'évaluer le rapport institutionnel dans $A$ aux intégrales impropres, en position d'étudiant. Pour ce faire nous avons choisi de proposer des spécimens d'un type de tâches non-routinier dans $A$ : reconnaître, dans une liste d'intégrales $\int_a^b f(x)dx \quad a < b$ et $a, b \in \overline{R}$, les intégrales qui sont impropres. Les étudiants sont mis pour cet exercice dans une situation de rupture de contrat.

**L'exercice 3** a pour but d'évaluer la maîtrise par les étudiants des praxéologies enseignées pour les types de tâches routinières dans l'institution $A$, T4 : calculer une intégrale impropre ou montrer sa divergence et T5 : étudier la nature d'une intégrale impropre. Les 3 intégrales proposées dans cet exercice sont deux intégrales de 1$^{\text{ère}}$ espèce, l'une convergente, l'autre divergente, et une intégrale de 2$^{\text{ème}}$ espèce convergente.

**Dans l'exercice 4** nous étudions quel lien est fait par les étudiants entre une aire associée à la courbe représentative d'une fonction $f$ et l'intégrale impropre : $\int_a^b f(x)dx \quad a < b$ et $a, b \in \overline{R}$. En effet, nous avons constaté, dans certains ouvrages de référence (Cagnac, Ramis et Commeau 1963, Lang 1964), la forte présence de la représentation graphique de l'intégrale généralisée alors qu'elle est absente dans d'autres ouvrages, comme dans la brochure étudiée.

De plus, González-Martín et Camacho (2004) montrent que de nombreuses difficultés, dans la construction de la connaissance de l'intégrale impropre d'étudiants espagnols de 1$^{\text{ère}}$ année d'université, relèvent de leur difficulté à articuler les différents registres de représentation sémiotique au sens de Duval (1993) : le registre algébrique et le registre graphique.

Pour Duval (1993) la compréhension d'un concept passe par l'utilisation et la coordination de différents registres de représentation sémiotique. Il définit « les représentations sémiotiques comme des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement » (*ibid.* p. 39). Pour lui, « les représentations sémiotiques ne sont pas seulement des moyens d'extériorisation des représentations mentales pour des fins de communication, mais elles sont également essentielles pour l'activité cognitive de la pensée » (*ibid.*, p. 39). Elles jouent un rôle dans le développement des représentations mentales, dans l'accomplissement de différentes fonctions cognitives (objectivation, calcul, *etc.*), ainsi que dans la production même des connaissances. Duval distingue trois types d'activités : la formation d'une représentation identifiable comme appartenant à un registre donné, le traitement et la transformation d'une représentation à l'intérieur du registre où elle a été créée, et enfin la conversion, c'est-à-dire la transformation d'une représentation sémiotique d'un registre dans un autre. Il souligne l'importance de la troisième activité comme un passage nécessaire pour permettre la coordination des registres attachés à un même concept. Il soutient de plus que la possibilité de conversion est une des conditions essentielles de la conceptualisation : « la compréhension (intégrative) d'un contenu conceptuel repose sur la coordination d'au moins deux registres de représentation, et cette coordination se manifeste par la rapidité et la spontanéité de l'activité cognitive de conversion » (*ibid.* p. 51).

Le type de tâches proposé dans l'exercice 4 : associer des graphiques aux intégrales impropres qui leur correspondent, est non-routinier. Il exige, pour être résolu, la coordination des deux registres algébrique et graphique.

### 3.2. Texte des exercices[7]

**Exercice 1** : *Trouver les intégrales suivantes*

$I_1 = \int \frac{dx}{(2x-1)^2}$, $I_2 = \int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$, $I_3 = \int x^2 e^x dx$, $I_4 = \int \frac{(1-\cos x).\sin x}{\cos^2 x} dx$

**Exercice 2** : *Lesquelles des intégrales suivantes sont impropres ? Pourquoi ?*

$I_1 = \int_1^2 \frac{dx}{2x-1}$ ; $I_2 = \int_0^2 \frac{dx}{2x-1}$ ; $I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+1} dx$ ; $I_4 = \int_0^2 \frac{2x dx}{\sqrt{|x^2-x|}}$ ;

$I_5 = \int_1^2 \frac{1}{2x-3} \ln(x-1) dx$ ; $I_6 = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$

**Exercice 3** : *Etudier la nature des intégrales impropres suivantes :*

$I_8 = \int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$, $I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+1} dx$ , $I_9 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

**Exercice 4** :

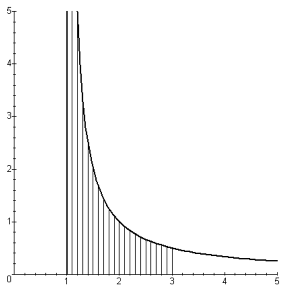


**Figure 1**

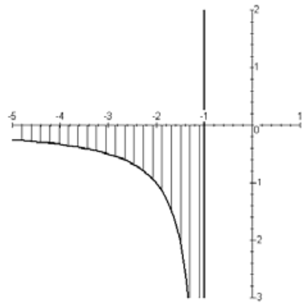


**Figure 2**

[7] Nous avons repris dans les consignes des exercices le type de formulation utilisé dans la partie exercices de la brochure d'enseignement.

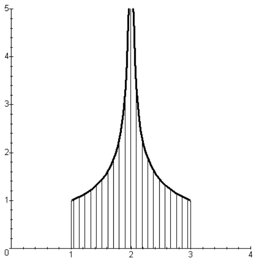


**Figure 3**

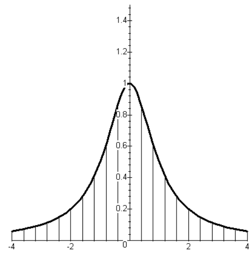


**Figure 4**

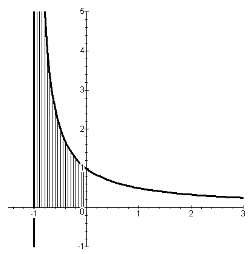


**Figure 5**

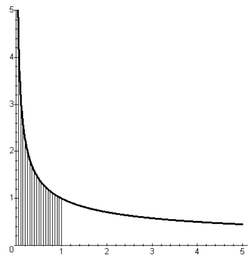


**Figure 6**

*Associer les graphiques aux intégrales qui leur correspondent*

$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x+1}$, $I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+1}$, $I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$, $I_5 = \int_1^3 \frac{dx}{1-x}$, $I_6 = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x}$, $I_7 = \int_0^1 \frac{-dx}{x}$,

$I_8 = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$, $I_9 = \int_1^3 \frac{dx}{x^2-4}$, $I_{10} = \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{|x-2|}}$, $I_{11} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$, $I_{12} = \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$, $I_{13} = \int_1^3 \frac{dx}{2x-1}$.

### 3.1. Caractéristiques du rapport personnel des étudiants à l'intégration mises en évidence dans les tâches routinières

**Concernant le calcul des primitives**, comme outil de base pour le calcul de toute intégrale, définie ou impropre, la majorité des étudiants savent mettre en relation un type de fonction à intégrer avec un type de méthode d'intégration enseigné dans le cours : méthode directe, changement de variable ou intégration par parties, sans que cela les conduise pour autant forcément à la réussite. Le tableau 2 permet une comparaison des résultats selon l'intégrale définie à calculer.

| | $I_1$ | $I_2$ | $I_3$ | $I_4$ |
|---|---|---|---|---|
| % réponses | 82% | 49% | 82% | 42% |
| % résultats exacts | 55% | 31% | 61% | 21% |

**Tableau 2 :** Comparaison des résultats des 4 intégrales de l'exercice 1.

Les échecs proviennent essentiellement :

- de la non maîtrise de techniques de transformation algébrique élémentaires nécessaires au calcul des primitives, comme la réduction au même dénominateur de deux fractions, les formules de décomposition des fractions rationnelles en éléments simples, les formules trigonométriques usuelles ;
- d'une difficulté de calcul des primitives des fonctions puissances quand l'exposant est négatif ou d'une confusion entre primitives des fonctions trigonométriques usuelles ;
- d'une tendance à se rabattre sur les primitives $\ln x$, *Arctgx* pour toute fonction à intégrer de la forme $\frac{1}{(f(x))^n}$ ou $\frac{1}{1+(f(x))^2}$ ;
- d'une difficulté de calcul des primitives des fonctions trigonométriques : difficultés dans la transformation des fonctions trigonométriques ;
- en cas de changement de variable : de l'oubli de l'élément de différentiation ou d'erreurs lors du passage de *dx* en *dt* ou de la généralisation de cette méthode hors de son domaine de validité ;
- de difficultés propres à l'intégration par parties : usage de l'ostensif *dx*, choix de *u* et de *v*, oubli de *uv*, *etc*., oubli des résultats des étapes intermédiaires dans le résultat final.

Il est important de noter de plus que, dans le cas où les étudiants aboutissent à la donnée d'une primitive, ils ne précisent jamais sur quel intervalle cette primitive existe.

Ceci nous amène à nous demander si les étudiants savent bien que :

- une primitive est nécessairement une fonction continue ;
- le domaine de définition d'une primitive ne peut pas être une réunion d'intervalles ouverts.

Ce qui aura des conséquences lors de l'étude de la convergence d'une intégrale impropre par le calcul de primitives, la primitive de *f* étant alors envisagée comme la même sur tout l'intervalle d'intégration comme l'attestent certains calculs pour l'exercice 3.

Étudiant 86

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{\left|1-x^2\right|}} = \lim_{x\to -1} \int_{r}^{2} \frac{dx}{\sqrt{\left|1-x^2\right|}} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{2}\sqrt{\left|1-x^2\right|} = \lim_{x\to -1} [\frac{1}{2}\sqrt{3}]-[\frac{1}{2}\sqrt{1-r^2}] = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$I_8$ converge

**En ce qui concerne la convergence des intégrales impropres**

Pour ceux des étudiants pour lesquels l'intégrale impropre a un sens, le calcul de primitives est une technique largement majoritaire, seule une infime minorité d'étudiants dispose d'autres techniques de recherche de convergence s'appuyant sur des théorèmes d'équivalence ou de reconnaissance d'intégrales impropres classiques. Le tableau 3 donne les résultats globaux de l'exercice 3.

| | **Convergente** | **Divergente** | **Non Réponse** |
|---|---|---|---|
| $I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+1}dx$ | 11% | 46% dont la moitié de justification correcte | 43% |
| $I_8 = \int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{\left|1-x^2\right|}}$ | 33% dont aucune justification correcte | 14% | 53% |
| $I_9 = \int_{1}^{+\infty} \frac{.dx}{x^2}$ | 71% dont les trois quarts de justification correcte | 16% | 13% |

**Tableau 3 :** Réponses globales pour l'exercice 3.

Même quand ils trouvent les points de singularité de la fonction à intégrer, en cherchant son domaine de définition, ils ont des difficultés, en particulier pour l'intégrale $I_8$, à :

- subdiviser l'intervalle d'intégration en autant d'intervalles que nécessaire ;
- partager l'intégrale en autant d'intégrales dépendant de l'une de leurs bornes que nécessaire.

Étudiant n° 81

$$\int_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{\left|1-x^2\right|}}=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\lim_{s\to 1}\int_{s}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$ x=1, x= -1 points singuliers

$$\int_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{\left|1-x^2\right|}}=\lim_{s\to -1}\,[\text{arcsinx}]_s^1\ +\ \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\Big]_s^2=\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{2}+\ln\left|2+\sqrt{3}-1-\sqrt{0}\right|$$

$$=\ -\pi+\ln\left|1+\sqrt{3}\right|\ ;\ \int_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{\left|1-x^2\right|}}$$ converge.

Et même quand ils font ces deux opérations correctement, ils peuvent attribuer la même primitive dans chacun des intervalles déterminés.

### 3.2. Ce que nous apprennent les tâches non routinières

**La résolution de tâches d'identification d'intégrales impropres parmi d'autres**

Les étudiants qui traitent ces tâches malgré leur caractère non routinier savent reconnaître une intégrale impropre lorsque l'une au moins des deux bornes est infinie.

Par contre, ce type de tâches fait apparaître une confusion entre intégrale définie et intégrale impropre dans le cas de l'écriture $\int_a^b f(x)dx$ où $a$ et $b$ sont des réels, ce qui révèle une non prise en charge, par les étudiants, de l'articulation entre l'intervalle d'intégration et le domaine de définition de la fonction à intégrer, problème que nous avions anticipé lors de la formulation des règles du contrat didactique à propos du calcul intégral dans ***A***.

Étudiant 8

$I_2=\int_0^1\frac{dx}{2x-1}$ définie car les bornes sont finies.

Étudiant 31

$I_2=\int_0^1\frac{dx}{2x-1}$ n'est pas impropre car la fonction est définie en 1 et en 0.

Une conséquence de cette absence d'articulation est que les réponses de certains étudiants semblent réglées par l'un et/ou l'autre des éléments technologiques *ad-hoc* suivants.

- Une intégrale est définie si les bornes de l'intervalle d'intégration sont finies ;

- une intégrale est définie si la fonction à intégrer est définie (ou continue) aux bornes de l'intégrale d'intégration ;
- une intégrale est impropre si la fonction à intégrer est non définie (ou discontinue) en une borne de l'intégrale d'intégration ;
- une intégrale est impropre si la fonction à intégrer est non définie (ou discontinue) en un point, où qu'il soit par rapport à l'intervalle d'intégration.

**L'intégrale impropre comme calcul d'aire sous la courbe**

L'absence totale dans le chapitre de la brochure du cadre géométrique *via* le registre graphique, seulement présent dans les applications de l'intégrale définie, explique sans doute que le tiers des étudiants ne répondent pas à l'exercice 4.

Néanmoins entre 30% et 40% des étudiants ayant répondu associent correctement à certaines intégrales impropres l'aire sous la courbe représentative de la fonction à intégrer, prolongeant ainsi d'eux-mêmes ce qu'ils ont appris sur l'intégrale définie.

Le caractère non routinier de la tâche fait qu'ils ont des difficultés à justifier leur réponse et que, quand ils donnent des explications, celles-ci s'appuient sur des critères souvent insuffisants, comme par exemple le domaine de définition ou la variation de la fonction à intégrer.

Examinons le cas des figures 2 et 5. Nous les avions choisies de façon qu'aucune intégrale de la liste ne leur corresponde, mais que certaines intégrales puissent leur être associées si on s'appuie sur des critères insuffisants. Nous donnons dans le tableau 4 les résultats concernant ces deux figures, pour les 2/3 des étudiants qui ont répondu à l'exercice 4.

| Choix | Aucune | $I_6$ | $I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_9, I_{11}, I_{12}, I_{13}$ | Non Réponse |
|---|---|---|---|---|
| Fig.2 | 1% | 57% | 23% | 19% |
| | | | | |
| Choix | Aucune | $I_6$ | $I_1, I_2, I_3, I_4, I_7, I_8, I_9, I_{19}, I_{11}, I_{13}$ | Non Réponse |
| Fig.5 | 3% | 45% | 25% | 27% |

**Tableau 4 :** Pourcentage des solutions proposées pour les figures 2 et 5.

Par exemple un étudiant (59) justifie ses choix erronés pour ces deux figures par des propriétés communes entre courbes et fonction à intégrer (critères des bornes et de variation), sans prendre en compte les points de singularité de la fonction ou les asymptotes du graphique.

Étudiant n°59

$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$ pour figure 2 puisqu'elle est décroissante + les bornes de l'intégrale sont $-\infty$ , -1 respectivement.

$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x}$ pour figure 5 décroissante + bornes de l'intégrale -1 et 0 respectivement

Enfin près d'un quart des étudiants qui donnent une réponse ne coordonnent pas la lecture des bornes délimitant l'aire sous la courbe et les bornes des intégrales proposées : ils proposent une intégrale avec au moins l'une des bornes incorrectes dans le cas où l'aire est délimitée par une asymptote, notamment quand elle est verticale. On retrouve encore ici une incidence du manque de travail, dans l'institution ***A***, sur la relation entre intervalle d'intégration et caractéristiques de la fonction à intégrer, relation qui pourrait précisément être traitée à partir d'un travail sur l'articulation entre registre graphique et registre algébrique (Duval, 1993).

## Conclusion

Du point de vue de la raison d'être du calcul intégral, tout ce qui concerne le calcul de différentes sortes d'intégrales (indéfinie, définie et impropre), concerne en fait un seul type de tâches « calculer une grandeur ». Or la 1ère partie de notre étude montre bien que certaines organisations de l'enseignement de l'intégration, comme l'organisation 2, évacuent cette raison d'être en réduisant le calcul d'une grandeur à une application du calcul intégral, rompant ainsi les liens fondateurs.

Comme nous l'avons montré, l'un des intérêts de cette 1ère partie est de permettre, lorsqu'on s'intéresse à un enseignement universitaire donné, de mieux comprendre et interpréter les choix faits pour l'organisation de l'intégration dans l'enseignement, et leurs conséquences sur la signification des objets enseignés et donc sur les apprentissages des étudiants.

C'est ainsi que l'expérimentation atteste notamment de la vie difficile de la notion topologique d'intervalle dans l'intégration, induite par le fonctionnement dans l'institution **A** des deux règles de contrat R3 et R4 (§ 2.3.). L'interrelation entre intervalle d'intégration et fonction à intégrer est problématique à mettre en œuvre par les étudiants pour lesquels l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ (avec a et b finis) se limite le plus souvent à être une intégrale définie sans référence à la notion géométrique d'aire qui la fonde.

## Bibliographie

ARNAUDIÈS, J.M. et FRAYSSE, H. (1988), *Cours de mathématiques-2*, Bordas, Dunod Université, Paris, 305–322.

BASS, J. (1964), *Cours de mathématiques, Tome I*, Masson & Cie, 3ième édition.

BOSCH, M. et CHEVALLARD, Y. (1999), La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **19(1)**, La Pensée Sauvage, Grenoble, 77–124.

BOURBAKI, N. (1976), *Eléments de mathématiques. Fonction d'une variable réelle*. Hermann, Paris.

CAGNAC, G., RAMIS, E. et COMMEAU, J. (1963), *Nouveau cours de mathématiques spéciales*, Analyse, Masson et Cie.

CHEVALLARD, Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **19(2)**, La Pensée Sauvage, Grenoble, 221–266.

COPPÉ, S. (1993), *Processus de vérification en mathématiques chez les élèves de première scientifique en situation de devoir surveillé*, Thèse, Lyon : Université Claude Bernard.

DUVAL, R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de didactique et de sciences cognitives,* **5**, IREM de Strasbourg, 35–65.

GONZÁLEZ-MARTÍN, A.S. (2004), *La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje*, Thèse de doctorat, Université de La Laguna.

GONZÁLEZ-MARTÍN, A.S. et CAMACHO, M. (2004), What is first-year Mathematics students'actual knowledge about improper integrals ? *International Journal of Mathematical Education in Sciences and Technology*, **35(1)**, 73–89.

GOUYON, R. (1958), *Précis de mathématiques spéciales*, Vuibert, Paris, 435–468.

KOUIDRI, K. (à soutenir) *Analyse didactique du rapport institutionnel au concept d'intégrale en début d'université et conséquence sur le rapport personnel des étudiant*s. Thèse préparée à l'Ecole Normale Supérieure de Kouba et au sein du laboratoire LIG de l'Université de Grenoble 1.

LANG, S. (1964), *A first course in calculus*, (réédition 2000), Addison-Wesley, Springer.

LEHNING, H. (1985), *Intégration et sommation*, Masson, Paris.

LELONG-FERRAND, J. et ARNAUDIÈS, J.M. (1977), *Cours de mathématiques*, Tome 2, Bordas, Dunod Université Paris.

OSMANOV, H. et KHELIFATI, S. (2003), *Brochure d'exercices d'analyse mathématique I, première et deuxième partie*, Faculté des Sciences, Université de Boumerdes.

**KHEDIDJA KOUIDRI**
Centre universitaire de Djelfa
Cite Benjermain
N:14 B:344 Djelfa
Algérie
kouidri_kh@yahoo.fr