

GEORGIOS KOSYVAS

PROBLÈMES OUVERTS : NOTION, CATÉGORIES ET DIFFICULTÉS

Abstract. Open problems: concept, categories and difficulties. What is the concept of the open-ended problem? Why is it necessary to pose open problems for research in the class? Which are the essential difficulties of treatment of the open problems in the class? How could we treat them? This text supplements a series of articles of the bibliography devoted to the resolution of the open problems. It presents short data of the practice and exposes many statements of the organized open problems of categories, favourable for research with groups of co-operation in the class with the level of the high school and senior high school. It brings new elements on the subject, and recalls for memory of the already treated questions.

Résumé. Quelle est le sens du problème ouvert ? Pourquoi faut-il poser des problèmes ouverts pour la recherche dans la classe ? Quelles sont les difficultés essentielles de gestion des problèmes ouverts dans la classe ? Comment pourrions-nous les traiter ? Ce texte complète une série d'articles de la bibliographie consacrés à la résolution des problèmes ouverts. Il présente des brèves données de la pratique pédagogique et expose beaucoup d'énoncés de problèmes ouverts organisés en catégories, propices à la recherche avec des groupes de coopération dans la classe au niveau du Collège et du Lycée. Il apporte de nouveaux éléments sur le sujet et rappelle pour mémoire des questions déjà traitées.

Mots-clés. Problème ouvert, résolution de problème.

1. La notion de problème ouvert

En science des mathématiques le terme *problème ouvert* se réfère habituellement aux problèmes qui pendant une longue période restaient non résolus, comme par exemple le dernier Théorème de Fermat qui a été résolu en 1993 ou la Conjecture de Goldbach, qui reste encore sans solution¹. En didactique de mathématiques le terme *problème ouvert* renvoie à un problème de recherche par les élèves qui ne les engage pas à une méthode spécifique de solution. Ce n'est pas un problème de routine quotidienne de la classe. C'est plutôt un problème inhabituel pour lequel l'élève ne dispose d'aucune procédure de résolution éprouvée. Avec son insertion on veut améliorer l'enseignement traditionnel des mathématiques.

L'introduction du terme "problème ouvert" est d'origine japonaise (Shimada, 1977, Becker et al., 1997), il est apparu durant les années 70 et il avait pour but de réformer l'enseignement des mathématiques avec des approches ouvertes en

¹ La Conjecture de Goldbach a l'énoncé suivant : Chaque nombre naturel pair plus grand que 4, peut s'écrire comme somme de deux nombres impairs premiers. (Exemples : $6=3+3$ $8=5+3$ $10=7+3=5+5$ etc.)

pratique de l'enseignement. (Nohda, 2000 ; Pehkonen, 1991). Chez les didacticiens de mathématiques, il n'y a pas une définition commune du problème ouvert. Durant les années 1993-96, il y avait un groupe de discussion de PME (Psychology of Mathematics Education) sur le sujet « *Using Open-ended Problems in Mathematics* ». D'après les résultats de ce groupe, les problèmes ouverts répondent aux catégories suivantes : « *investigations, Problem Posing, situations réelles vivantes, projets, problèmes sans questions, problèmes avec variété de réponses, problèmes de champs (ou problèmes de séquence)* » (Nohda, 1995 ; Silver, 1995 ; Stacey, 1995 ; Pehkonen, 1997). En psychologie cognitive, la classification des problèmes revêt une importance capitale pour les activités de la classe, parce qu'elle présente deux grands types de problèmes : problèmes bien définis et problèmes mal définis (well-structured and ill-structured). Dans les problèmes ouverts ou dans les problèmes mal structurés, les questions ou les données ne sont pas claires ou sont insuffisantes (Davidson et Sternberg, 2003 ; Xun et Land, 2004, Silver, 1995).

La notion de problème ouvert peut être expliquée de la manière suivante : un problème est fermé si la situation initiale et la situation finale sont bien définies. Un problème est considéré comme bien défini dans la mesure où les données initiales, les contraintes et le but sont énoncés de façon explicite et opérationnelle. Dans l'énoncé du problème, la personne a en sa possession, sans devoir les définir elle-même, tous les éléments et les critères concrets et précis pour évaluer la démarche et non le but (Tardif, 1997 ; Jonassen, 1997). Si la situation initiale ou la situation finale est ouverte, nous avons un problème ouvert. Le degré de précision de l'état initial et de l'état final, obtenu à la suite de la résolution des problèmes, comporte le critère du caractère ouvert. Le tableau suivant (Pehkonen, 1995a) montre les trois catégories des problèmes ouverts, qui se forment dans toutes les combinaisons.

	Situation finale fermée (problèmes bien définis)	Situation finale ouverte (problèmes mal définis)
Situation finale fermée (problèmes bien définis)	<ul style="list-style-type: none"> • Problèmes fermés 	<ul style="list-style-type: none"> • Problèmes ouverts • Investigations • Problèmes de champs • Problèmes de variation
Situation finale ouverte (problèmes mal définis)	<ul style="list-style-type: none"> • Situations vivantes réelles • Problèmes de variation 	<ul style="list-style-type: none"> • Situations vivantes réelles • Problèmes de variation • Projets • Problem Posing

On pourrait affirmer que les problèmes mal définis répondent aux catégories de problèmes ouverts qui sont présentés dans le tableau ci-dessus.

Dans les problèmes ouverts, la question est formulée avec clarté seulement du point de vue grammatical-rédactionnel. Contrairement au niveau sémantique, il existe une ambiguïté dans la question. Ceci ne signifie pas que le problème est vague en tant que problème. Il signifie plutôt que sa formulation implique aussi les élèves. Ceci signifie que le problème ouvert n'est pas déterminé de façon univoque : nous ne pouvons pas par exemple déterminer la tangente d'une courbe à un point de celle-ci. Il est exigé de clarifier de nombreuses choses précédemment. Il s'agit de multi-problème, un problème avec de nombreuses directions ouvertes.

Une étude pertinente du "problème ouvert" a été réalisée par un groupe de l'IREM de Lyon, qui a étudié des problèmes posés plutôt à des élèves de collège et de lycée, et vise au développement d'attitudes de recherche et de capacités de méthodologie scientifique (Arsac, et Mante 2007 ; Arsac, et *al.* 1992 ; Arsac, et *al.* 1991 ; Bouvier, 1986 ; Arsac, et *al.* 1985a ; Arsac, et *al.* 1985b). Une recherche scientifique développe des capacités de méthodologie composées, comme la formulation des hypothèses de travail, la préparation du projet expérimental ou de recherche, le choix de l'échantillon, la mise en place des outils d'évaluation, l'analyse et l'interprétation des résultats. Certaines de ces capacités apparaissent à chaque problème ouvert.

Une procédure plus exigeante du problème ouvert constitue le Problem Posing (Silver, 1994 ; Crespo, 2003 ; Cunningham, 2004). Le Problem-Posing focalise l'élève sur une procédure plus ouverte, sur la procédure de la recherche et de la création de problèmes sur la base d'une "situation-cadre". Le terme situation-cadre est un champ initial de référence où les élèves seront encouragés à exercer leur imagination, à poser des questions et à soulever des problèmes qui ont des solutions mathématiques. Dans le Problem-Posing, les enfants suivent leurs propres motivations (Brown et Walter, 1983). Dans la perspective de l'enseignement, les activités du Problem-Posing révèlent beaucoup de sujets essentiels concernant la compréhension, les capacités et les attitudes des enfants et deviennent un bon outil d'évaluation (English, 1997).

Il y a eu des expérimentations de problèmes ouverts dans des classe en Australie (Stacey, 1995), au Japon (Nohda, 1995), en Angleterre (Blanc & Sutherland 1996 ; Wiliam, 1994), en Finlande (Pehkonen, 1995b) et aux pays Bas sous le nom « Realistic Mathematics » (Treffers, 1991 ; Bichop et *al.*, 1996). D'autres recherches pédagogiques réalisées étudient la nature et l'application des problèmes ouverts à l'éducation mathématique (Silver, 1995). Des activités de problème ouvert ont été proposées en France dans les programmes officiels d'éducation préscolaire (ERMEL, 1990) et d'enseignement primaire (ERMEL de 1991 à 1999) et nommés : problèmes de recherche ou problèmes pour chercher (Artigue et Houdement, 2007 ; Coppé et Houdement, 2002 ; Houdement, 1998).

Les problèmes mal structurés sont plus fréquents dans la pratique sociale et professionnelle et les problèmes bien structurés sont dominants en environnement scolaire (Xun et Land, 2004 ; Jonassen, 2003). Les types de problèmes qui sont utilisés dans les classes sont couramment des problèmes d'application classiques permettant le réinvestissement de connaissances et d'outils mathématiques. Des problèmes inhabituels qui incluent tant de difficultés de compréhension, lesquels sont liées à leur caractère spécial, à leurs difficultés de gestion par la classe, sont absents.

C'est pourquoi, les problèmes ouverts restent une activité marginale dans les pratiques de classe les plus courantes et les instituteurs habituellement les évitent. Cependant, il vaudrait la peine de développer l'intérêt pour ces problèmes. Mais quelle est la nature des problèmes ouverts ? Nous commençons avec certains exemples.

2. Exemples de problèmes ouverts classés en catégories

Il est évident que tous les problèmes ouverts ne sont pas pertinents d'un point de vue pédagogique. Nous pouvons distinguer entre autres quatre catégories de problèmes ouverts :

2.1. Variété de stratégies de résolution (ou une stratégie originale)

Les stratégies sont les démarches d'approche des problèmes ouverts que les enfants inventent. La stratégie est une composition qui est constituée par un raisonnement mathématique, ou logique, ou une série d'arguments liés, lesquels sont composés pour justifier une proposition (une constatation, une hypothèse, une conjecture, une affirmation, *etc.*). La synthèse de la stratégie est obtenue avec un lien indissoluble, puissant et solide des propositions. Chacune devra avoir été liée aux précédentes et aux suivantes. Nous mentionnons les exemples suivants, qui peuvent avoir une richesse de stratégie ou une stratégie originale :

Premier exemple (problème traditionnel) : *Quelqu'un a une bouteille de 8 litres d'eau et veut donner à son ami 4 litres de cette quantité. Pour la mesurer, il dispose seulement de deux récipients vides : un de 5 litres et un de 3 litres. Quelles sont les actions à faire pour verser les 4 litres d'eau dans le récipient de 5 litres.*

Des problèmes comme le précédent sont habituels dans les manuels traditionnels d'énigmes. Cependant, il appartient à un secteur mathématique moderne qui se nomme "mathématiques discrètes". Des tels problèmes diffèrent de la routine scolaire et habituellement provoquent l'intérêt des élèves pour les découvertes mathématiques et la prise de décisions avec emploi de raisonnement et de stratégies pour l'élaboration d'inventaire des cas. Dans le tableau suivant on présente deux solutions du problème.

Ordre	1 ^{ère} Solution			2 ^{ème} Solution		
	A (8)	B (5)	C (3)	A (8)	B (5)	C (3)
1.	8	0	0	8	0	0
2.	3	5	0	5	0	3
3.	3	2	3	5	3	0
4.	6	2	0	2	3	3
5.	6	0	2	2	5	1
6.	1	5	2	7	0	1
7.	1	4	3	7	1	0
8.	-	-	-	4	1	3
9.	-	-	-	4	4	0

Lorsque nous avons donné ce problème à des élèves de douze ans la plupart l'ont accueilli avec des sentiments de plaisir et de curiosité. Les essais initiaux échouaient habituellement parce qu'ils ne satisfaisaient pas les conditions du problème. De nombreux élèves imaginaient 3-4 transvasements de récipient à récipient ; cependant, ils ne pouvaient pas continuer et ils revenaient au début. Certains ne mettaient pas en valeur leur expérience des efforts antérieurs et manifestaient de la déception ou de la perplexité. D'autres avaient une meilleure organisation et, en enregistrant leurs pas successifs sur papier, surmontaient les impasses. Ainsi, avec inventaire systématique, après des essais successifs persistants, ils ont trouvé la solution, souvent avec plus de pas que ceux qui sont présentés dans le tableau ci-dessus.

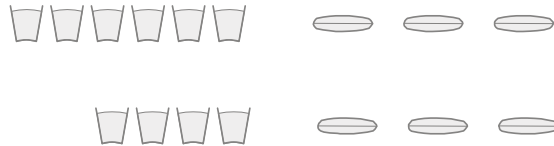
Le problème ne fait intervenir que la connaissance de l'addition. Cependant, ce n'est pas un problème d'application des opérations arithmétiques élémentaires, mais il exigeait une démarche scientifique qu'il fallait retenir avec une validation précise et organisée. Incontestablement, le problème était fécond et il appelait continuellement les élèves à contrôler les nouvelles conjectures, à argumenter et à modifier une partie de leurs stratégies.

Second exemple (Les arabes, problème traditionnel) : *Deux arabes A et B qui voyageaient dans le désert, avaient avec eux l'un 2 pains et l'autre 3. Durant la route ils ont rencontré un voyageur riche C, qui avait faim. Après ils ont mangé tous ensemble et le voyageur leur a laissé 15 livres. Comment faudrait-il faire le partage de l'argent ?*

La solution exige des opérations arithmétiques avec nombres entiers ou fractions et la notion de la proportionnalité. Le choix de stratégie dépend de facteurs liés au type du problème et aux relations qui dépendent des données numériques. Bien qu'au début, le problème semble être un problème de routine, l'énoncé le rend très attractif.

Troisième exemple : Pour 6 jus d'orange et 3 sandwichs nous avons payé 21 €, mais le groupe voisin a payé pour 4 jus d'orange et 3 sandwichs 17 €. Combien coûte le sandwich et combien le jus d'orange ?

C'est un bon problème de recherche pour la sixième. Les enfants peuvent faire des hypothèses sur le prix du jus d'orange et du sandwich, tester ces hypothèses sous la contrainte de l'énoncé. L'enseignant y reconnaît le problème relevant d'un système d'équations à deux inconnues. Les enfants du cycle 2 pourraient faire un dessin comme le suivant :



Le dessin précédent peut aider les enfants à trouver la solution.

Quatrième exemple : (Concours international PISA 2000) : Un fermier plante des pommiers en carré. Afin de protéger ces arbres contre le vent, il plante des conifères tout autour du verger. Compléter un tableau donnant le nombre de pommiers et le nombre de conifères. Puis généraliser le problème donnant le nombre de pommiers et le nombre de conifères pour n séries de pommiers.

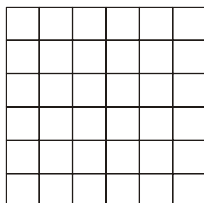
n=1	n=2	n=3	n=4	n	Nombre de pommiers	Nombre de conifères
x x x x o x x x x X= coniferes ●=pommiers	x x x x x x o o x x o o x x x x x x	x x x x x x x x o o o x x o o o x x o o o x x o o o x x x x x x x x	x x x x x x x x x x o o o o x x o o o o x x o o o o x x o o o o x x o o o o x x o o o o x x x x x x x x x x	1	1	8
				2	4	
				3		
				4		
				5		

Une manière de généraliser ce problème exige l'introduction de la variable. Les élèves peuvent constater que les pommiers forment des carrés dont le nombre d'arbres de chaque côté augmente : 1, 2, 3, ... À la nième figure, le nombre de pommiers du côté du carré serait n. Donc, la nième figure a : n×n pommiers. Une manière de réfléchir sur le nombre des conifères est de reconnaître que le nombre des conifères de chaque côté est toujours 1 de plus du double, c'est-à-dire 2n+1. Le nombre des conifères pourrait être 4 fois 2n+1, moins les conifères comptés deux fois, c'est-à-dire les conifères des quatre angles. Par conséquent, on a : 4(2n+1)-4, ou 8n conifères.

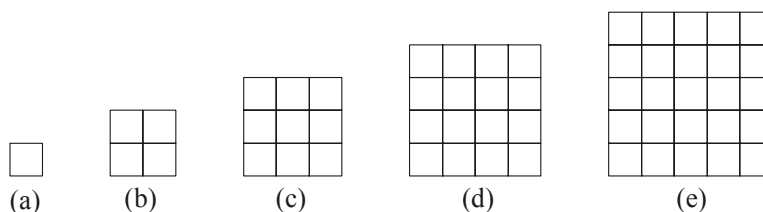
2.2. Résultats multiples

Les problèmes ouverts, qui conduisent à plusieurs solutions ou nombre de résultats corrects, constituent une deuxième catégorie.

Premier exemple : *Combien de carrés différents existent dans le dessin suivant ?*



Deux carrés sont considérés comme différents s'ils ont une taille différente ou une place différente. On peut examiner un cas plus simple, c'est-à-dire un carré avec un côté de 1, 2, 3, 4, 5 unités.



- au dessin (b) il est évident qu'il y a : 1 carré avec un côté de 2 unités et 4 carrés avec un côté d'une unité ($1+4=5$ ou $1^2+2^2=5$),
- au (c) il y a : 1 carré avec un côté de 3 unités, 4 carrés avec un côté de 2 unités et 9 carrés avec un côté d'une unité. ($1+4+9=14$ ou $1^2+2^2+3^2=14$),
- au (d) il y a : 1 carré avec 4 unités, 4 carrés avec un côté de 3 unités, 9 carrés avec un côté de 2 unités et 16 carrés d'une unité. ($1+4+9+16=30$ ou $1^2+2^2+3^2+4^2=30$),
- enfin au (e) il y a : 1 carré avec un côté de 5 unités, 4 carrés avec un côté de 4 unités, 9 carrés avec un côté de 3 unités, 16 carrés avec un côté de 2 et 25 carrés d'une unité. ($1+4+9+16+25=55$ ou $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$).

Les éléments précédents sont résumés dans le tableau suivant :

Taille des carrés	Nombre des carrés 5×5	Nombre des carrés 4×4	Nombre des carrés 3×3	Nombre des carrés 2×2	Nombre des carrés 1×1	Somme
k=1 (1×1)					1=1 ²	1 ² =1
k=2 (2×2)				1=1 ²	4=2 ²	1 ² +2 ² =5

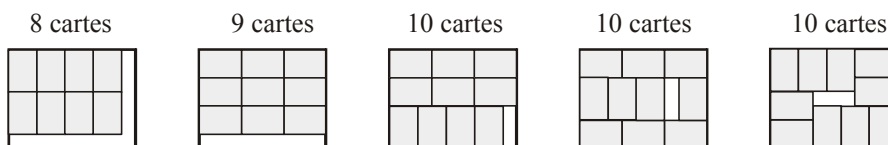
k=3 (3×3)			$1=1^2$	$4=2^2$	$9=3^2$	$1^2+2^2+3^2=14$
k=4 (4×4)		$1=1^2$	$4=2^2$	$9=3^2$	$16=4^2$	$1^2+2^2+3^2+4^2=30$
k=5 (5×5)	$1=1^2$	$4=2^2$	$9=3^2$	$16=4^2$	$25=5^2$	$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$

Nous observons que l'ensemble des carrés est égal à la somme du nombre des carrés -de l'unité jusqu'au chiffre qui désigne le nombre des carrés formant le côté du dessin initial. De ce tableau ressort avec évidence la règle qui peut être utilisée pour le dénombrement de la multitude des carrés différents lorsque le côté du dessin a une longueur de 6 unités. Nous avons : $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2=91$.

Second exemple (Nodha, 1995) : *Melina fête son anniversaire et veut fabriquer des invitations en papier qu'elle distribuera à ses invités. Chaque carte est un rectangle de 15 cm de longueur et 10 cm de largeur. Nous supposons qu'elle dispose d'un grand carton rectangulaire de dimensions : 45 cm de longueur sur 35 cm de largeur. Combien d'invitations pourra-t-elle fabriquer avec ce carton ? Pouvez-vous les dessiner sur une diapositive ? Attention ! Il est interdit d'unir deux morceaux pour fabriquer une invitation.*

De la division des surfaces, il résulte une seule solution numérique (10 invitations). Cependant, selon la coupe du carton, cela nous donnera 8, 9 ou 10 cartes d'invitations.

Au cours d'une expérimentation dans la classe avec des élèves de 12 ans, cinq groupes ont donné les solutions suivantes :



Il est évident que les solutions ci-dessus n'épuisent pas le problème puisqu'il admet aussi d'autres solutions. La solution optimale est celle de 10 cartes. Des problèmes avec variété de réponses correctes confirment le caractère fécond du problème ouvert.

Troisième exemple : *Un cube avec une arête de 10 cm est peint en rouge. Il est ensuite découpé en 1000 petites cubes d'une arête de 1 cm. Pouvez-vous prévoir combien de petits cubes sont colorés en rouges sur 6 faces, combien sur 5, 4, 3, 2, 1 ou aucune ?*

Les élèves doivent concevoir le cube dans leur esprit et ils peuvent alors trouver:

1. 4, 5 et 6 faces rouges : il y a 0 petits cubes.
2. 3 faces rouges : ils peuvent compter 8 petits cubes.

3. 2 faces rouges : ils peuvent calculer $8 \times 4 + 8 \times 4 + 8 \times 4 = 96$ petits cubes.
4. 1 face rouge : ils peuvent calculer : $(8 \times 8) \times 6 = 384$ petits cubes.
5. Aucune face rouge : ils peuvent calculer : $(8 \times 8) \times 8 = 512$ petits cubes, ou $1000 - (8 + 96 + 384) = 512$.

Cette catégorie d'énoncé peut admettre un résultat ou certains résultats ou tous les résultats différents.

2.3. Interprétation ouverte de l'énoncé

Une troisième catégorie de problèmes ouverts comprend des problèmes dont l'énoncé est soumis à une interprétation ouverte. Habituellement il n'y a pas de données arithmétiques.

Un tel problème, que Schoenfeld (1992) a posé, est le suivant : *Combien de cellules existent en moyenne dans le corps d'un homme adulte ?*

Ouverte en ce qui concerne l'interprétation de la situation qu'il décrit : *Comment peux-tu plus efficacement remplir une boîte d'objets de la même forme ?* Ici les élèves vont trouver des solutions différentes selon l'interprétation de la situation. Quelle forme donneront-ils au terme « boîte » ? Au terme « remplir », comprendront-ils qu'il ne faut laisser aucun vide dans la boîte ? Le terme « efficacement » signifie-t-il qu'ils doivent utiliser le plus petit nombre d'objets ou qu'il doit rester le moins d'espace vide possible dans la boîte ?

On donne encore certains exemples avec une interprétation ouverte de l'énoncé :

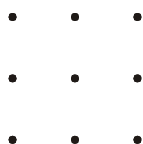
- *À la fin de l'année scolaire votre classe a décidé d'organiser un beach-party. Pouvez-vous prévoir combien cela va coûter ?*
- *Combien coûte-t-il d'avoir un chien à la maison ?*
- *Quelles dépenses aurai-je pour conserver un vélo ?*
- *150 litres d'eau sont-ils suffisants pour les besoins d'un jour d'une famille moderne ?*
- *Une barque commence à traverser une rivière. À quel point de la rive opposée va-t-elle arriver ? (Lycée)*

Dans les problèmes précédents, les questions et les données ne sont pas claires. Les enfants peuvent trouver ou déterminer leurs propres données. Bien évidemment, il y a beaucoup de possibilités. Chaque fois la solution change et dépend du choix des données. Ces problèmes pourraient s'intégrer à la catégorie du Problem-Posing. Cela constitue un sujet particulier sur lequel il n'est pas nécessaire de s'étendre.

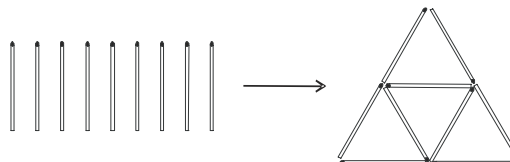
2.4. Des problèmes ouverts-énigmes

Enfin, nous mentionnerons aussi une quatrième catégorie de problèmes ouverts, lesquels sont les problèmes-puzzles ouverts qui exigent une dissociation de la première perception et du changement d'angle optique. Dans cette catégorie de problèmes, l'état actuel et l'état désiré peuvent être clairement définis ou non. Nous donnons sept exemples.

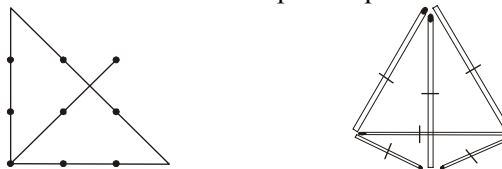
Exemple 1 : Relier les 9 points par 4 traits ininterrompus sans lever le crayon. (CM 1)



Exemple 2 : Avec 9 allumettes, on a construit 4 triangles équilatéraux. Peux-tu avec 6 allumettes, construire 4 triangles équilatéraux ? (CM 2)



Le premier problème exposé est un problème de tracement des lignes. Mais ce n'est pas un problème de géométrie classique ; il ne se résout pas avec des procédures formelles de résolution, exige de sortir de la structure du carré et d'élargir le champ de vision dans le plan. Cet élargissement renvoie au dépassement de la pensée convergente ou de la pensée verticale (Silver, 1987). La première impression est liée à un obstacle, à une interprétation erronée de l'énoncé ou du dessin ou à une restriction inhabituelle que les enfants sont obligés de respecter. Ici, la solution exige la sortie des enfants du cadre du carré que forment les 9 points. Si les enfants se dégagent radicalement de la première perception et montrent de la flexibilité en inventant des changements inhabituels, alors les visions momentanées de l'intuition et de la pensée peuvent conduire à leur succès.



Le deuxième problème exposé est un problème de disposition. La solution exige une réorganisation des éléments présentés. Cependant, alors que l'état actuel du problème est clairement défini et qu'on connaît bien les éléments de départ, la solution finale est inconnue. De plus, cette solution particulière est difficile à prévoir puisqu'elle surgit généralement de façon soudaine. Les problèmes de ce type font donc appel au phénomène découvert, il y a de nombreuses années, grâce à la psychologie gestaltiste et que l'on nomme "insight". En fait, elle vient d'avoir

une appréhension instantanée des relations unissant les divers éléments composants son problème (Duncker, 1945).

On demande dans ce type de problème de disposer six allumettes de façon à former quatre triangles équilatéraux. De plus, chacun des côtés des triangles doit avoir une longueur correspondant à une seule allumette. La plupart des personnes qui doivent faire face à cette situation éprouvent beaucoup de difficultés parce qu'elles se limitent à une seule façon de percevoir le problème. Dans ce cas, le fait de concevoir la solution en seulement deux dimensions, plutôt qu'en trois, empêche la résolution du problème. En effet, la solution paraît évidente lorsque l'on peut considérer le même problème sous une forme tridimensionnelle. Les personnes adoptent ainsi souvent des contraintes non nécessaires qui les éloignent des solutions.

Habituellement les énigmes sont des problèmes exigeants qui privilégient la curiosité, l'humour, la stimulation de l'intelligence, la réflexion, le plaisir de la recherche, la motivation des élèves à développer le goût et l'esprit des mathématiques et contribuent à donner à cette discipline une meilleure image sociale et culturelle. Pour pouvoir trouver la réponse du problème ouvert-énigme, les élèves doivent construire une représentation adéquate de l'énoncé avant de la symboliser mathématiquement. La résolution de tout problème ne nécessite pas nécessairement de faire des calculs. Dans certains cas, la stratégie du problème peut correspondre à mesurer des dimensions, à faire des arrangements, à tracer des lignes, à dessiner une « carte routière », à organiser un inventaire, à réaliser une disposition, un classement, un tri, *etc.*

3. Une nouvelle tentative de détermination du problème ouvert

Selon le groupe de l'IREM de Lyon, le problème ouvert, proposé et examiné par les élèves, présente les caractéristiques suivantes :

- *L'énoncé est court.*
- *L'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de questions intermédiaires ni de questions "montrer que"). En aucun cas, cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou à l'application immédiate des derniers résultats présentés en cours.*
- *Le problème ouvert se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ainsi, peuvent-ils prendre facilement « possession » de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples. (Arsac et al, 1991, p. 7)*

De manière plus analytique, l'adoption des caractéristiques ci-dessus, que le groupe de recherche de l'IREM de Lyon considère comme nécessaires à chaque problème ouvert, est justifiée comme suit :

L'énoncé du problème est habituellement court et formulé en langage courant ou mathématique. L'énoncé simple et court favorise la lecture rapide et la compréhension et crée des conditions de facilité en ce qui concerne ce qui se maintiendra en mémoire et en ce qui concerne la gestion des données. En outre, il peut donner l'impression que le problème est facile et inciter à s'intéresser à ce problème.

En aucun cas, cette solution ne devra se limiter à l'utilisation simple ou à l'application directe de conclusions ou de règles qui se sont présentées durant les derniers cours, parce qu'alors, il constituera un problème d'application directe et non un problème ouvert. Cependant, ce qui a une importance fondamentale est la manière dont est posé l'énoncé du problème ouvert qui ne résulte pas directement de la méthode et de la solution.

Le problème ouvert doit être fondé sur des notions avec lesquelles les enfants sont assez familiarisés. Ceci est indispensable afin que les enfants, dans le cadre des restrictions habituelles de l'horaire scolaire, puissent calculer des résultats ou produire des idées dans le temps imparti. Le problème peut être ouvert mais cependant, le temps de la recherche reste malheureusement fermé. Dans ces conditions, les enfants doivent pouvoir saisir facilement la situation et prendre part à des essais, formuler des conjectures, établir des voies de vérification, des projets de résolution et des contre-exemples, lesquels visent à la découverte et à la création de la solution ou des solutions du problème ouvert.

On observe que la première et la troisième des caractéristiques ci-dessus du problème ouvert limitent le cadre dans lequel peut se mettre en marche la réflexion des élèves. Il n'est pas certain que seule la formulation laconique facilite la compréhension. L'énoncé du problème ouvert peut se présenter sous la forme d'une longue narration ou encore sous la forme d'un dialogue attractif. En plus, une notion non déjà enseignée constitue toujours un problème ouvert pour les enfants. Par conséquent, les caractéristiques proposées par le groupe de recherche du Lyon, la brièveté de l'énoncé et l'exigence d'assimilation par les enfants des notions sur lesquelles est fondé le problème ouvert, bien qu'elles contribuent favorablement à la gestion pédagogique de la classe, ne sont pas indispensables à chaque problème ouvert. Tout problème ouvert n'est pas forcément approprié à la recherche dans la classe (Lepine, 1996). Présentons un exemple, qui s'avère un défi pour les élèves. C'est un petit problème facile et classique, qu'on trouve dans de nombreux livres de mathématiques du collège, l'intrigue variant selon les adaptations.

LE PROBLEME DES CHEVEUX BLONDS :

Après de longues années, se rencontrent deux anciens camarades de classe qui avaient un intérêt particulier pour les mathématiques et le dialogue suivant a lieu :

PYTHAGORE : As-tu été marié ? As-tu des enfants ? Combien ? De quel âge ?

HYPATIE : Oui. Trois et le produit de leurs âges est 36. (Bien sûr, il s'agit de nombres entiers d'années.)

PYTHAGORE : (Après réflexion). Je ne peux pas trouver leurs âges. Les données sont insuffisantes.

HYPATIE : Très juste. Et si je te dis que la somme des trois nombres est égale au numéro de ta maison ?

PYTHAGORE : (Après y avoir pensé un peu). Ni même maintenant peuvent être déterminés les trois âges.

HYPATIE : Bravo ! Donc, je t'informe que le plus grand enfant a des cheveux blonds !

PYTHAGORE : Maintenant, bien sûr ! Je peux te dire les âges de tes enfants sans aucune hésitation. Et les dit.

Il y a habituellement deux questions chez les enfants qui ont l'habitude de répondre sans trop penser : « *Quelle est la relation entre les cheveux blonds et les âges des enfants ?* » et « *quel est le numéro de la maison de Pythagore ?* ». Leur erreur est qu'ils se sont empressés de répondre, sans analyse attentive des données et leur mise en valeur. Donc ils échouent dès la première étape qui est la lecture du problème.

Puisque les réponses de Pythagore et les observations d'Hypatie sont justes et sont données avec attention ce qui est exigé est le repérage des informations « dissimulées » et leur exploitation. Il est nécessaire de suivre le dialogue pas à pas et de se concentrer sur la question : « *Quelles raisonnements a fait Pythagore et comment a-t-il abouti à la réponse considérée* ». Concrètement, lorsqu'on lui a donné le produit des trois âges, il a répondu qu'il ne pouvait pas trouver leurs âges, parce qu'il existe plus d'un triplet de nombres entiers ayant pour produit 36. Il suffit de trouver comment se décompose le chiffre 36 en produits de trois nombres. Comme c'est un petit nombre, les élèves n'ont pas de mal à écrire tous les triplets :

1·1·36, 1·2·18, 1·3·12, 1·4·9, 1·6·6, 2·2·9, 2·3·6 et 3·3·4.

Pythagore n'a plus qu'à choisir celle de ces combinaisons qui est la bonne, c'est-à-dire telle que la somme des facteurs égale le numéro de sa maison, puisqu'il connaissait évidemment son propre numéro de maison. Mais justement à la deuxième information, Pythagore a déclaré à nouveau son impuissance. Comment cette information peut-elle être mise en valeur ? Comment peut-elle être liée à la précédente ? Les élèves peuvent trouver respectivement toutes les sommes :

$$1+1+36=38, 1+2+18=21, 1+3+12=16, 1+4+9=14, 1+6+6=13, 2+2+9=13, \\ 2+3+6=11 \text{ et } 3+3+4=10.$$

On constate que deux de ces sommes sont précisément égales à 36 et que de là provient la raison de l'incertitude de Pythagore. C'est seulement si la somme des âges est 13 qu'il ne peut pas décider, parce qu'il existe deux possibilités, qui toutes les deux impliquent des jumeaux : 1, 6, 6 ou 2, 2, 9. Cependant, dans la dernière phrase d'Hypatie, en dehors de la couleur des cheveux est mentionné aussi un autre élément. C'est qu'il existe « *un plus grand enfant* ». Ainsi, *un aîné* existe dans la combinaison 2, 2, 9 (qui a des cheveux blonds) et c'est donc la seconde solution recherchée qui est la bonne.

Il est évident que l'énoncé de dialogues incite à la recherche. Si on demande une décomposition en facteurs premiers de 36, ou la liste de ses diviseurs ou celle de tous les produits de trois nombres qui égalent 36, c'est évidemment plus austère que la saynète jouée par Hypatie et Pythagore.

Bien que l'exigence pour une définition acceptable du problème ouvert constitue un autre problème ouvert pour les mathématiciens et les pédagogues, nous pourrions dire que ce qui rend un problème ouvert ou fermé est son type, la manière dont l'énoncé est posé et la relation de la situation qui décrit les expériences des enfants. Plus spécialement, le problème doit être fécond pour la recherche dans la classe, et avoir un caractère vécu. Nous abordons ces sujets de façon détaillée.

3.1. La fécondité de la recherche

Il y a de purs énoncés mathématiques, sans "emballage" attractif, qui peuvent sembler très secs, mais constituent d'efficaces moteurs de recherche. On donne les exemples suivants qui s'adressent-sauf le premier - plutôt aux dernières classes du collège et au Lycée :

Méthode de l'organisation d'un inventaire (Le maraîcher et les quatre poids, problème traditionnel) : *Un maraîcher a dans son magasin une balance et 4 poids avec lesquels il peut peser des objets de n'importe quelle masse entière de 1 jusqu'à 40 kilos. Quels sont les poids dont il dispose et comment pourra-il peser ses produits ? Répétez le problème pour 5 poids et pour des masses de 1 jusqu'à 121 kilos.*

Preuve : On peut examiner systématiquement toutes les possibilités et vérifier la démarche totale :

- Avec des poids d'1 kilo on peut peser des masses d'un kilo.

- Avec des poids d'1 kilo et 3 kilos on peut peser toutes les masses d'un kilo jusqu'à 4 kilos :

$$2=3-1 \text{ και } 4=3+1.$$

- Avec des poids d'1 kilo, 3 et 9 kilos on peut peser toutes les masses d'un kilo jusqu'à 13 kilos :

$$5=9-3-1, 6=9-3, 7=9+1-3, 8=9-1, 10=9+1, 11=9+3-1, 12=9+3, 13=9+3+1.$$

- Avec des poids d'1 kilo, 3, 9 et 27 kilos on peut peser toutes les masses d'un kilo jusqu'à 40 kilos :

$$14=27-9-3-1, 15=27-9-3, 16=27+1-9-3, \text{ etc.}$$

Pour le second problème il faut ajouter un poids de 81 kilos.

Méthode du contre-exemple : Dans l'expression $n^2 + n + 41$, si on remplace le n par n importe quel nombre naturel trouvons-nous toujours un nombre premier naturel ?

Preuve : Pour $n=0, 1, 2, \dots, 40$ nous trouvons des nombres premiers, tandis que pour $n=41$ il résulte un nombre composé (41·43). Bien qu'il existe 41 essais réussis, il suffit d'un seul contre-exemple pour démentir la conjecture.

Méthode de la réduction à l'absurde : Les 15 élèves d'une classe ont au total dans leurs sacs 115 cahiers. Si chaque élève a au moins un cahier, prouvez que deux au moins des élèves ont le même nombre de cahiers.

Preuve : En supposant que tous les élèves ont un nombre différent de cahiers, alors le nombre minimum de cahiers qu'ils peuvent avoir tous ensemble est

$$1+2+3+\dots+15=120>115.$$

Par conséquent, il n'est pas possible que tous les élèves aient un nombre différent de cahiers, donc deux au moins auront le même nombre de cahiers.

Méthode de cas : Prouvez que le produit de trois entiers successifs est divisible par 6.

Preuve : Puisque $n=6q+r$, où $r \in \{0,1,2,3,4,5\}$ on a :

$$n^3 - n = (6q+r)^3 - (6q+r) = r^3 - r + \text{mult}6.$$

Pour $r=0,1,2,3,4,5$ on trouve respectivement $v^3 - v=0, 0, 6, 24, 60, 120$. Par conséquent :

$$n^3 - n = r^3 - r + \text{mult}6 = \text{mult}6.$$

Combinaison des méthodes (démonstration directe, examen des cas) : Est-ce qu'il y a un nombre positif entier k tel que $k^2 - 4$ soit premier ?

Preuve : Pour ce problème il n'y a pas un algorithme prêt pour la solution. Mais on a :

$$k^2-4=(k+2)(k-2) \text{ (factorisation de différence des carrés).}$$

Pour que le produit précédent soit un nombre premier, il faudra qu'un des facteurs soit l'unité (définition du nombre premier). Le nombre $k+2$ ne peut pas être égal à 1 car $k>0$.

Donc $k-2=1$, c'est-à-dire $k=3$.

Combinaison des méthodes (examen des cas, démonstration directe) : Si p est un nombre premier, examiner si le nombre $A=27p+1$ est premier ou non ?

Preuve : Pour $p=2$ on a : $A=27\cdot 2+1=55=5\cdot 11$.

Pour $p\neq 2$ le $27p$ est impair, alors A est pair. Plus précisément :

$$A=27p+1=27(2n+1)+1=54n+27+1=54n+28=2(27n+14)=2k \text{ (pair).}$$

Un problème ouvert doit être fécond du point de vue de la recherche, ou plus exactement l'être plus qu'un problème fermé analogue. Il y a la conviction qu'un problème ouvert a de nombreuses solutions.

La fertilité du problème n'est pas épuisée du fait que le problème admet de nombreuses solutions. C'est l'originalité des arguments qui le rend fécond ou fructueux. L'important, ce n'est pas la découverte d'Ithaque par Ulysse, qui représente la solution ou les solutions du problème, mais surtout le voyage admirable des élèves vers Ithaque, les trajets d'apprentissage et la recherche mathématique féconde avant le dénouement. S'il existe une fin, elle fermera la recherche tandis que toute la recherche reste ouverte.

Puisque le problème ouvert est nouveau pour les élèves, et sa construction elle-même, il n'exige pas une combinaison linéaire habituelle de ses connaissances antérieures et il révèle des « originalités et diversités » : le problème ouvert peut donner des solutions à des niveaux différents et couvrir un large éventail d'idées, de raisonnements empiriques simples en tant que raisonnements déductifs composés qui n'exigent pas certaines connaissances spéciales. Il peut révéler une diversité tant d'arguments de démonstration que d'arguments pragmatiques, qui dépassent le domaine scientifique des mathématiques. Il peut encore conduire à des interprétations différentes de l'énoncé, conduire à une variété de résultats et de réponses, admettre plusieurs approches de solutions (voies ou stratégies de résolution) ou exiger des changements radicaux d'interprétation.

Si certains des éléments ci-dessus sont présents, alors le problème est ouvert. Si toutes ces caractéristiques manquent, il n'est pas ouvert. Dans ce cas, si les élèves ne dépassent pas le problème, il est probable qu'ils l'interpréteront de façon très semblable, qu'ils feront les combinaisons habituelles des données, qu'ils suivront

la même stratégie stable et pour trouver le même résultat, en manifestant de l'uniformité et de la pratique. Si le type de problème est pauvre en ce qui concerne la production « de diversités » et oblige les élèves à faire presque les mêmes choses, il limite l'articulation d'arguments convaincants puissants et il diminue la qualité du questionnement et du dialogue. Donc si le problème n'inclut pas l'élément de la fertilité de recherche, il ne peut pas être un problème ouvert (Charnay, 1993).

Le fait que le problème soit ouvert, en ce qui concerne les questions posées ou en ce qui concerne les données, peut être fécond, non seulement du point de vue mathématique. Le caractère fécond n'est pas réduit au champ des mathématiques, mais il constitue de l'oxygène pour d'autres efforts d'acquisition des connaissances en liant les mathématiques au monde.

3.2. L'énoncé ouvert

L'énoncé du problème ouvert est une « problématisation » avec une question générale, c'est-à-dire qu'il ne limite pas le champ des recherches. L'énoncé ouvert ne « trahit » pas directement la solution ni l'outil mathématique qui sera recherché, utilisé, constitué mais sera à construire. Les hypothèses sont données, mais les élèves ignorent leur validité. On donne certains exemples :

Est-ce qu'il existe un triangle équilatéral et rectangulaire ?

Est-ce qu'il existe un triangle avec des côtés de 3 cm, 4 cm et 8 cm ?

Est-il possible que des angles soient opposées et complémentaires ?

La somme de deux impairs est paire ? Pourquoi ?

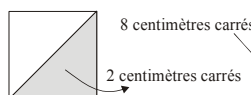
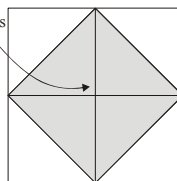
Aux problèmes précédents, les élèves doivent formuler des conjectures, trouver une réponse et la justifier.

La formulation d'un problème peut se concrétiser avec l'énoncé ouvert ou fermé. Nous mentionnons le problème classique de la duplication du carré en deux énoncés, un ouvert et un fermé :

Énoncé ouvert : *On a un carré avec un côté de 2 centimètres et nous voulons en construire un autre avec une surface double. Peux-tu trouver une méthode de construction ?*

Énoncé fermé : *On a un carré avec un côté de 2 centimètres et nous voulons en construire un autre avec une surface double. Peux-tu constater (ou prouver) que la solution est trouvée si nous prenons comme côté du deuxième carré demandé la diagonale du premier ?*

Le carré et sa diagonale

Le schéma du *Menon*

Il est évident que l'énoncé fermé va conduire l'élève à la résolution du problème. Bien qu'il soit ouvert, l'énoncé peut varier et conduire jusqu'à la suppression des données.

Une activité créative qui a un intérêt pour le chercheur en didactique des mathématiques est la transformation de problèmes fermés en problèmes ouverts. Une telle activité, bien qu'elle soit un exercice assez difficile, serait peut-être possible dans des situations appropriées et à condition qu'elle soit engagée par le groupe d'enseignement de la classe scolaire (Banks, 1988).

3.3. Le caractère vécu

L'énoncé ouvert et le caractère fécond sont deux caractéristiques qui concernent l'objet, c'est-à-dire le problème ouvert ; cependant, le sujet vivra le problème proposé en tant qu'ouvert : ceci dépend principalement du mode de conduite de la classe par l'instituteur et l'instauration d'un climat propice au dialogue. Néanmoins, une condition importante est de qu'il ne faudra pas que soit ignoré le caractère vécu du problème ouvert.

Ce n'est pas seulement le type de problème et le mode de formulation de l'énoncé qui rendent un problème ouvert. Il faudra en outre qu'il s'avère ouvert pour le sujet. Il faudra qu'il soit relié avec les caractéristiques individuelles et sociales des enfants et principalement avec leurs expériences personnelles et la motivation scolaire, c'est-à-dire l'engagement, la participation et la persistance de l'élève dans une tâche (Tardif, 1997). **Le problème ouvert doit être vécu comme un défi.** Les enfants ne font pas une recherche mathématique formelle. Un problème qui peut être ouvert pour le mathématicien, ne peut pas toujours être propice pour une recherche dans la classe. Un problème peut être favorisé par des conditions de la classe si y sont associées des situations familières des enfants ou des éléments de leur environnement social, lesquels rendent la procédure d'apprentissage vécue et communicative. Donnons un exemple :

Le problème ouvert des poignées de main : *Les 7 filles de la classe lorsqu'elles se sont rencontrées après les vacances d'été, se sont toutes donné une poignée de main (l'une à l'autre). Si chaque fille a serré la main à chacune des autres une fois seulement, pourriez-vous calculer combien de poignées de main y a-t-il eu au*

total ? Répétez le problème pour les 16 enfants d'une classe et pour les 1.000 enfants d'une école.

On peut facilement constater que ce problème est un excellent problème, riche, vécu et très intéressant pour les enfants. Il développe la communication et le goût de la recherche. Les enfants peuvent l'aborder avec des stratégies diverses dans plusieurs cadres (numérique, symbolique, algébrique, graphique, géométrique, dramatique, ...). Ce problème est ouvert en ce qui concerne la richesse des stratégies de résolution et s'avère fécond. Les enfants mettent en valeur des stratégies différentes et originales, ce qui nous surprend. Il est remarquable que leurs stratégies habituellement soient si spontanées : les enfants ne se limitent pas seulement à l'usage d'algorithmes tout prêts, mais de leur propre initiative, ils ouvrent des chemins cognitifs particuliers et ils découvrent de nouvelles connaissances.

Si le problème ouvert proposé est séparé du vécu des enfants, il ferme les horizons de la recherche. Il peut être ouvert pour le chercheur en mathématiques, mais les portes de la communication avec l'élève seront fermées. Le caractère vécu de la situation contribue à maintenir la situation problématique ouverte et féconde du point de vue pédagogique. Cependant, il est aussi relié directement au cadre de chaque problème, ouvert ou fermé. Le cadre du problème doit correspondre aux motivations et au vécu de l'élève et répondre à ses doutes et à ses interrogations. Les problèmes ouverts devront être vivants, permettre aux enfants de participer activement, mobiliser leurs curiosité, susciter l'enthousiasme et générer des motivations intrinsèques, des incitations intérieures. De plus, il faudra que nous inventions et que nous préparions des situations problématiques ouvertes, qui ont une importance pour l'expérience quotidienne des enfants, qui provoquent un vif intérêt chez eux, enrichissent leurs expériences, réveillent la curiosité et le désir d'apprentissage des enfants et qui peuvent également entraîner les élèves les plus faibles à les résoudre de manière simple, en développant chez eux le plaisir de la découverte.

Les élèves devront renverser la procédure formelle d'une liaison directe des données avec les questions. En faisant preuve d'imagination et d'inventivité, ils sont appelés à suivre une voie scientifique non linéaire qui implique des progrès et des retours en arrière, des balancements et des renversements d'obstacles, des contrôles et des reconstructions : ils commencent en fouillant et en effectuant des essais pour élaborer une hypothèse initiale de solution, ils vérifient ou infirment l'hypothèse en la testant plusieurs fois et à la fin, la découverte de la solution (ou des solutions) "démontre" la valeur de l'hypothèse. La preuve de l'élève, c'est une voie personnelle, qui diffère des démonstrations mathématiques formelles, et dans cette perspective, il est peut-être mieux que nous parlions de preuve ou d'argumentation et non de démonstration (Balacheff, 1987). Et bien évidemment,

on développe la confiance des enfants dans leurs propres compétences. Il est nécessaire de les prendre en compte en tant que sujets.

4. Difficultés de la gestion des problèmes ouverts dans la classe et recherche de propositions de traitement

Pendant la gestion des problèmes ouverts dans la classe on constate des difficultés spécifiques, qui surgissent. Nous mentionnerons certaines de celles-ci :

4.1. Le peur devant la liberté

Le caractère différent du problème ouvert crée certaines difficultés spécifiques. De l'énoncé ne résultent ni la méthode ni la solution. Le problème ouvert peut suggérer de nombreuses interprétations différentes de l'énoncé, conduire à de nombreux résultats différents mais corrects ou à une solution pouvant découler de nombreuses stratégies. Toute cette variété ne résulte pas de jonctions habituelles des données avec les questions, ou même d'une combinaison linéaire de notions connues et d'outils. La cession de la responsabilité du problème aux élèves établit encore une rupture de l'autorité de l'enseignant, alors que celui-ci décide habituellement de l'erreur et de la validité du processus. Ces particularités créent chez les enfants un climat d'incertitude (il n'y a pas une vérité unique) qui les empêchent de trouver en premier l'idée appropriée pour le démarrage, de mobiliser leurs connaissances acquises, de formuler des propositions et de les vérifier (Arsac et Mante, 2007 ; Arsac et *al.* 1991). On peut soutenir qu'il existe une peur devant la liberté, devant ce voyage admirable vers une mer ouverte et inconnue, qui fait que l'élève est désorienté. Cependant, ceci est aussi un avantage qui distingue les problèmes ouverts d'autres activités formelles. Avec la pratique fréquente, l'élève est encouragé par ses succès, acquiert une confiance en soi et, au lieu de craindre la liberté, la résolution des problèmes ouverts devient pour lui **l'occasion créative d'exercer sa liberté**.

4.2. Les restrictions du programme officiel

Le succès de la gestion du problème ouvert dans la classe exige des expérimentations nombreuses et persistantes pour que l'enseignant tire profit de son expérience et pour qu'il s'habitue à un mode performant de travail. Cependant, les contraintes du programme officiel demeurent.

Un obstacle est qu'une importance fondamentale est attribuée aux activités de mémorisation des connaissances et des techniques de calculs exigées par les critères d'évaluation, les divers contrôles et examens. L'importance qui est attribuée à la résolution de toute sorte de problèmes (non seulement ouverts) vient en seconde position. La recherche du problème ouvert remet en question les

mécanismes formels du travail scolaire habituel. Cependant, l'apprentissage n'avance pas dans un temps fractionné, ni soumis aux conditions des manuels scolaires et il exige des procédures ouvertes pour pouvoir fructifier.

La tentative d'application des problèmes ouverts à l'école diminue l'effort d'imposition et exige un espace pour la quête collective et l'activation du groupe scolaire. Une proposition, dans ces conditions données, serait **l'adoption de semaines de problèmes ouverts** dans le programme, durant lesquelles les élèves s'occuperaient de la recherche de problèmes ouverts.

4.3. Les difficultés des représentations et du transfert de la connaissance

Lorsque l'élève entre dans une démarche de résolution d'un problème ouvert, il construit progressivement une certaine représentation de ce problème. La représentation d'un problème nécessite l'interprétation des informations du problème, le processus de structuration qui est le noyau central de l'activité de représentation et le processus d'opérationnalisation qui permet l'élaboration des stratégies conduisant à la solution du problème (Julo, 1995). Le transfert de la connaissance signifie la possibilité d'utiliser à bon escient un savoir ou un savoir-faire dans un contexte différent de celui où il a été acquis (Hameline, 1991). Il s'agit de connaissances inertes. Lorsqu'un problème connu est transposé dans un cadre différent, les élèves ne réussissent pas à reconnaître les ressemblances, ne peuvent effectuer des abstractions facilement intelligibles et que nous considérons comme automatiques. Bien sûr, au fur et à mesure que nombreux éléments changent, de plus en plus de difficultés apparaissent (Tardif, 1999 ; Julo, 2002). Les problèmes ouverts exigent plus qu'une simple manipulation par application des règles algorithmiques. Ils exigent un transfert au niveau intradisciplinaire ou transdisciplinaire (Schneider, 2004). Dans les problèmes ouverts, dont les moyens de transfert sont nombreux, les combinaisons ne se distinguent pas au premier coup d'œil et les niveaux d'abstraction augmentent. Il se peut qu'ils conduisent les enfants à une transférabilité insuffisante et une représentation inadéquate du problème. Le transfert réussi est lié à la réactivation efficace d'informations qui sont stockées dans la mémoire de longue durée. L'élève devra principalement avoir une réserve riche en expériences stockées dans la mémoire à court terme. Cependant, des recherches ont démontré (Richard, 1982) que la possibilité que l'élève retrouve une information dans sa mémoire dépend de la différence qui existe entre le cadre dans lequel cette information s'est inscrite et le cadre où il est demandé qu'il se la rappelle. En plus, les données structurelles conduisent à la résolution effective du problème ou à la réalisation effective de la tâche (Tardif, 1999). Le problème ouvert, en mettant l'élève devant la nouvelle situation, crée des difficultés de reconnaissance d'informations existantes, lesquelles cependant restent inaccessibles ou sont difficilement localisées. C'est pourquoi, le choix de

problèmes adéquats une importance primordiale et l'enseignant doit leur accorder une très grande attention.

4.4. Les difficultés de contrôle

On constate que les élèves présentent des difficultés **dans le contrôle de l'activité** (Richard, 1990). Le contrôle intervient aux différents moments de l'activité : lors de la formation de la représentation mentale du problème, de la création du cadre interprétatif commun, du choix de la stratégie appropriée, de l'application de cette stratégie et pendant le contrôle des résultats. La stratégie choisie peut ne pas être correcte, tandis que la représentation des enfants est appropriée ou le cadre interprétatif collectif est correct. L'exécution de la stratégie peut être encore erronée (Mante, 1993). Dans tous les cas, il est utile que nous développions chez les enfants des outils d'autocontrôle. Nous pouvons leur proposer de prendre du recul pendant l'activité afin d'établir une hypothèse virtuelle, des bilans, des appréciations, et de réfléchir partiellement ou en totalité à leurs activités pour développer des stratégies efficaces de vérification : *Qu'est-ce qui vous a permis de résoudre le problème ? Quel a été l'obstacle pour vous ? Avez-vous déjà résolu des problèmes de ce type ? Quels facteurs avez-vous pris en compte pour choisir cette stratégie ? Est-ce que le résultat est correct ? Pourquoi ? Pourriez-vous réfléchir et vérifier votre solution ?* Habituellement, ce type d'approche a peu d'effet et les élèves sont peu enclins à se lancer spontanément dans une démarche d'autorégulation de leur travail (Margolinas, 1993). Le travail de l'autocontrôle est plutôt négligé et cela pourrait attirer l'intérêt des chercheurs.

4.5. Les meilleurs, les moyens et les faibles et leurs erreurs respectives

Quand les enfants ne disposent pas de stratégies appropriées à la solution d'un problème, ils inventent des stratégies erronées, de la même manière qu'ils construisent des stratégies correctes (Ravestein et Sensevy, 1994). Conformément au constructivisme, l'erreur constitue une forme de connaissance.

« L'erreur n'est pas seulement le résultat de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard, comme dans les théories d'apprentissage empiriques et behavioristes, mais le résultat d'une plus ancienne connaissance, laquelle a connu ses succès, mais maintenant s'est avérée erronée, ou simplement inadéquate. Les erreurs de ce type ne sont pas rares et imprévisibles, mais constituent des obstacles. Tant pour l'enseignant que pour l'élève, l'erreur constitue un élément constitutif du sens de la connaissance acquise. » (Brousseau, 1983, p. 171)

Les erreurs commises par les enfants ont un caractère formateur et sont pour l'enseignant une source précieuse d'informations qui offrent des possibilités de discussions créatives avec les autres membres de la classe. Lors de ces discussions collectives sur l'analyse des erreurs, les enfants en bas âge réfléchissent à leurs

erreurs, apprennent de celles-ci et constatent que les erreurs sont source de progrès. Le dialogue avec les enfants donne à l'enseignant la possibilité d'évaluer la démarche de la procédure d'apprentissage, qui à son tour reflète la qualité de l'enseignement. L'enseignant tire profit des erreurs des enfants et il peut prendre des décisions pour améliorer l'enseignement (Charnay R, Mante M., 1993).

Les élèves qui sont habituellement appelés "premiers en maths", lorsqu'ils sont confrontés aux problèmes ouverts, n'ont pas de succès dans tous les cas et ils sentent que leur confiance en soi est ébranlée, alors que les algorithmes tout prêts ou les outils préfabriqués dont ils disposaient ou la vitesse d'opération qu'ils avaient acquise ne les aident pas beaucoup. Puisqu'ils se distinguent habituellement en classe, ils s'énervent et dans, certains cas, ils contestent les problèmes ouverts. D'autre part, les élèves moyens et faibles, qui ont des lacunes de connaissance, ou apprennent avec un rythme plus lent, sont habitués aux difficultés et à être distancés. Bien sûr, certains d'entre eux sont encouragés alors en voyant "les premiers de la classe" confrontés à des difficultés majeures. Cette situation les pousse à sortir de l'ombre et à entreprendre des tentatives audacieuses, à agir créativement, à se valoriser au sein de la communauté de la classe. Les élèves qui étaient en marge entrent sur scène et revendiquent la place qui leur appartient en paraissant étranges à leurs camarades de classe et en surprenant l'enseignant.

4.6. La gestion du temps

Nos expérimentations sont réalisées pendant une durée de deux heures d'enseignement. Les observations ont démontré que le travail trop bref en groupes rend impossible la coopération, la recherche en profondeur et l'examen complexe du problème ouvert, et déstabilise toutes les modalités d'échange de vues. La phase de la coopération des enfants doit laisser assez de temps pour que les enfants puissent examiner le problème et formuler par écrit leur solution.

Durant la phase du débat ouvert devant toute la classe, nous laissons non seulement le temps indispensable aux «meilleurs», mais aussi aux élèves faibles pour qu'ils réfléchissent et expriment leurs opinions sur les arguments qu'ils ont devant eux, pour qu'ils les approuvent ou les réfutent. La méthode que nous proposons est parfois plus lente, mais parfois plus rapide que la méthode traditionnelle. Ce n'est pas un gaspillage de temps, mais un gain de temps, puisque l'élève acquiert une compréhension plus profonde des mathématiques. Les élèves sont actifs et s'appuient sur leurs propres forces, pour arriver à des résultats créatifs d'apprentissage. Finalement, nous ne considérons pas qu'il existe des solutions toutes prêtes face à la gestion et de la répartition du temps. Ce sont des problèmes plutôt ouverts pour l'enseignant, liés au degré de difficulté du problème ouvert et aux particularités de la classe.

4.7. D'autres difficultés

La pratique du problème ouvert dans la classe, avec la méthode que nous avons esquissée ci-dessus, présente encore certaines difficultés pour l'enseignant et les élèves. Lorsque la classe est séparée en groupes, des difficultés de gestion et de suivi des groupes et, plus spécialement, de répartition de notre attention sur cinq ou six groupes persistent. Il existe encore des difficultés à percevoir les erreurs, à comprendre le raisonnement spontanée et l'argumentation ordinaire des élèves, à observer les enfants sans influencer leurs raisonnements, à analyser les représentations et les stratégies de résolution, *etc.* Lors de discussions en groupes, les enfants sont ennuyés d'être réunis pour un travail commun, d'avoir à écouter leurs camarades de classe et à prendre en compte les avis des autres *etc...* Les élèves les plus avancés, ou les plus dominants, s'imposent aux autres et reconstituent la hiérarchie habituelle ; ils s'imposent grâce à des interventions appropriées dont nous nous occupons afin que puissent s'exprimer librement tous les membres de chaque groupe sans qu'il soit observé de marginalisation des enfants hésitants (Arsac et Mante, 2007).

Durant la discussion commune, certains élèves s'adressent souvent à l'enseignant pour essayer de convaincre leurs camarades de classe. L'enseignant ne doit pas regarder dans les yeux les élèves, afin de ne pas risquer de les influencer. Finalement, ce type d'activité présente l'inconvénient d'être bruyant par rapport au cours traditionnel, quelque chose qui, si certaines précautions indispensables ne sont pas prises, peut conduire à des commentaires négatifs de la part des autres collègues, des parents, et même des élèves eux mêmes. La préparation soignée de l'expérimentation peut prévenir de nombreux problèmes. Pour limiter les difficultés liées aux problèmes ouverts, il faudra cultiver chez l'enfant **un climat agréable** dans lequel la résolution de problèmes ouverts est une joie et un jeu. La résolution d'un problème n'est pas seulement un "question intellectuelle". Le développement d'attitudes positives, la détermination et le sentiment jouent un très grand rôle (Brechêt, 1994). Le désir des élèves de comprendre et de résoudre le problème, leur volonté d'aller jusqu'au bout, leur curiosité ou leur motivation à écouter les autres, constituent certaines des conduites observées lors d'un travail agréable et intéressant.

5. Conclusion

On vit à une époque de changements. Dans le siècle qui a déjà commencé, l'histoire avance plus vite. On sait que le facteur primordial pour cette voie, c'est l'évolution de la connaissance. La révolution technologique, les progrès scientifiques, la rapidité de la transmission des informations changent tout. Ils contribuent à un monde sans frontières. Ce monde se développe à un rythme spectaculaire et les connaissances de l'humanité augmentent avec une vitesse

incomparable. Mais elles sont éphémères. Une découverte actuelle ne résiste plus au temps, elle se trouvera peut-être très vite au musée.

Le système scolaire d'aujourd'hui forme les adultes de demain pour des activités professionnelles que nous ne connaissons pas encore. Cette école n'est plus actuelle. Il est exigé de l'école qu'elle redéfinisse son rôle en donnant un accent particulier à la participation des élèves, dans le cadre de la communauté scolaire. L'objectif exclusif du transfert de connaissances fragmentées dans le cadre traditionnel devra être réévalué et il faudra conférer une importance primordiale à la recherche de situations vécues de problématisation par les enfants. Cette perception correspond au besoin inhérent à l'être humain d'action et de quête, sur la base d'incitations intérieures, de ses intérêts personnels et de ses problèmes, de ses motivations intrinsèques, pour qu'il puisse trouver des solutions fiables, en recherchant des modes d'activation de sphères le concernant directement. Simultanément, soulignons que l'enjeu majeur de nos sociétés contemporaines, c'est le renforcement de la collégialité et de la dimension sociale de l'individu, au détriment de la passivité, de l'égoïsme pur et de l'isolement, au bénéfice donc de l'action sociale et de la co-décision.

En dehors des connaissances qui sont considérées indispensables pour l'homme moderne, l'école devra viser à la formation d'élèves qui disposent de certaines caractéristiques qualitatives : pour formuler des arguments personnels cohérents, pour juger des activités personnelles rationnelles et indifférenciées, pour examiner, pour discuter, pour développer des initiatives créatives, pour apprendre collectivement, à travers la coopération et la solidarité, pour "apprendre à apprendre". Avec le développement de ces facultés et les expériences de l'élève actuel, celui-ci pourra sans doute devenir un **participant actif, critique et créatif face au changement du monde contemporain**. À chaque changement dans ce monde dynamique qui glisse sans cesse vers l'inconnu, l'individu se trouve confronté à de nouveaux problèmes ouverts et il lui faudra s'enquérir avec lucidité de toutes les options possibles et trouver les meilleures solutions. Il devient **de plus en plus un sujet** au sens philosophique du terme. De cette manière, l'élève améliore ses capacités et peut affronter plus efficacement des situations qui pourraient se présenter plus tard dans sa vie. Dans cette perspective, sa relation vivante avec les problèmes ouverts dans l'environnement scolaire constitue une préparation pertinente minimale. Au lieu d'attendre qu'autrui lui offre une solution toute prête, il est préférable qu'il résolve avec une joie nouvelle et inédite les problèmes, seul ou en coopération avec d'autres personnes concernées ou intéressées. Ce n'est pas important si les solutions proposées par des élèves ne répondent pas aux exigences précises des mathématiques. L'essentiel est de donner la priorité à l'auto-épanouissement individuel et/ou collectif.

Bibliographie

- ARSAC, G., CHAPIRON, G., COLONNA, A., GERMAIN, G., GUICHARD, Y., MANTE, M. (1992), *Initiation au raisonnement déductif au collège*, Presses Universitaires de Lyon.
- ARSAC, G., GERMAIN, G., MANTE, M. (1991), *Problème ouvert et situation-problème*, IREM de Lyon.
- ARSAC, G., GERMAIN, G., MANTE, M., PICHOT, D. (1985a), *La pratique du problème ouvert*, IREM de Lyon.
- ARSAC, G., GERMAIN, G., MANTE, M., PICHOT, D. (1985b), *Varions notre enseignement avec les problèmes ouverts*, IREM de Lyon.
- ARSAC, G., MANTE, M. (2007), *Les pratiques du problème ouvert*, IREM de Lyon, CRDP, Villeurbanne.
- ARTIGUE, M., HOUEMENT, C. (2007), Problem solving in France: didactic and curricular perspectives, *ZDM*, **39(5-6)**, 365–382.
- BALACHEFF, N. (1987), Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics*, **18**, 147–176.
- BANKS, J.A. (1988), Ethnicity, Class, Cognitive, and Motivational Styles: Research and Teaching Implication, *The Journal of Negro Education*, **57**, 452–466.
- BECKER, J., SHIMADA, S. (1997), *The open-ended approach: a new proposal for teaching mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- BICHOP, A.J., CLEMENTS, K., KEITEL, C. KILPATRICK, J., LABORDE, C. (Eds.) (1996), *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- BOUVIER, B. (1986), *Didactique des Mathématiques : le lire et le faire*, CEDIC.
- BRECHET, M. (1994), La résolution des problèmes, *Math Ecole*, **163**, Neuchâtel.
- BROUSSEAU, G. (1983), Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherche en didactique des mathématiques*, **4.2**, Grenoble, La pensée sauvage, 6–42.
- BROWN, S.I., WALTER, M.I. (1983), *The art of problem Posing*, LEA Publishers.
- CHARNAY, R., MANTE, M. (1991), De l'analyse d'erreurs en Mathématiques aux dispositifs de remédiassions : quelques pistes. *Grand N*, **48**, 37–64.
- CHARNAY, R. (1993), Problème ouvert problème pour chercher, *Grand N*, **51**, 77–83.

- COPPE, S., HOUEMENT, C. (2002), Réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire. *Grand N*, **69**, 53–63.
- CRESPO, S. (2003), Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices, *Educational Studies in Mathematics*, **52**, 243–270.
- CUNNINGHAM, R. (2004), Problem posing: an opportunity for increasing student responsibility, *Mathematics and Computer Education*, **38**, 83–89.
- DAVIDSON, J.E., STERNBERG, R.J. (2003), *The psychology of problem solving*, Cambridge University Press.
- DUNCKER, K. (1945), On problem solving, *Psychological Monographs*, **58** (5, 270).
- ENGLISH, L. (1997), Promoting a Problem Posing Classroom, *Teaching children Mathematics*, **3**, 172–179.
- ERMEL (1990), *Apprentissages numériques en grande section de maternelle*, Paris, HATIER.
- ERMEL (de 1991 à 1999), *Apprentissages numériques et résolution de problèmes : CP, CE1, CE2, CM1 et CM2*, Paris, HATIER.
- HAMELINE, D. (1991), *Les objectifs pédagogiques*, Paris, ESF.
- HOUEMENT, C. (1998), Le choix des problèmes pour la résolution de problèmes. *Grand N*, **63**, 59–77.
- JONASSEN, D.H. (1997), Instructional design models for well-structured and ill-structured problem-solving learning outcomes, *Educational Technology Research and Development*, **44.1**, 65–94.
- JONASSEN, D.H. (2003), Using cognitive tools to represent problems, *Journal of Research on Technology in Education*, **35** (3), 362–381.
- JULO, J. (1995), *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*, Presses Universitaires de Rennes, Rennes.
- JULO, J. (2002), Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ?, *Grand N*, **69**, 31–52.
- LEPINE, L. (1996), Tout problème ouvert n'engage pas nécessairement une bonne recherche, *Grand N*, **60**, 57–62.
- MANTE, M. (1993), L'élève face à un problème concret, *Math Ecole*, **158**, 21–29.
- MARGOLINAS, C. (1993), *De l'importance du vrai et du faux*, Pensée sauvage, Grenoble.

- NOHDA, N. (1995), Teaching and evaluating using «open-ended problems» in classroom, *ZDM*, **95(2)**, 57–61.
- NOHDA, N. (2000), Teaching by Open-Approach Method in Japanese Mathematics Classroom. In: NAKAHARA, T. KOUAMA M. (Eds.), *Proceedings of the PME-24 Conference*, Hiroshima University (Japan), **1**, 39–53.
- PEHKONEN, E. (1991), Introduction: Problem solving in mathematics, *ZDM*, **23(1)**, 1–4.
- PEHKONEN, E. (1995a), Using open-ended problems in mathematics, *ZDM*, **95(2)**, 55–57.
- PEHKONEN, E. (1995b), On pupils' reactions to the use of open-ended problems in mathematics. In: *Nordic Studies in Mathematics Education*, **3(4)**, 43–57.
- PEHKONEN, E. (Ed.) (1997), *Use of open-ended problems in mathematics classroom*, Department of Teacher Education, Research Report 176, University of Helsinki.
- RAVENSTEIN, I., SENSEVY, G. (1994), Statuts de l'erreur dans la relation didactique, *Grand N*, **54**, IREM de Grenoble.
- RICHARD, J. (1982), Mémoire et résolution des problèmes, *Revue française de pédagogie*, **60**, INRP, Paris, 67–76.
- RICHARD, J. (1990), *Les activités mentales. Comprendre, raisonner, trouver des solutions*, Armand Collin, Paris.
- SCHNEIDER, M. (2004), Trois compétences transversales conceptualisées au sein de l'enseignement des mathématiques, *Repères-IREM*, **55**, 51–70.
- SCHOENFELD, A.H. (1992), Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. GROUWS (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, Macmillan, New York, 334–370.
- SHIMADA, S. (1977), Open-ended approach in arithmetic and mathematics. A new proposal towards teaching improvement, Tokyo, Mizuumishobo.
- SILVER, E.A. (1994), On Mathematical Problem Posing, *For the Learning of Mathematics*, **14(1)**, 19–28.
- SILVER, E.A. (1995), The nature and use of open problems in mathematics education: Mathematical and pedagogical perspectives, *ZDM*, **95(2)**, 67–72.
- SILVER, E.A. (1997), Fostering Creativity Through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing, *ZDM*, **97(3)**, 75–80.

STACEY, K. (1995), The challenges of keeping open problem-solving open in school mathematics, *ZDM*, **95(2)**, 62–67.

TARDIF, J. (1997), *Pour un enseignement stratégique*, Les éditions Logiques, Montréal.

TARDIF, J. (1999), *Les transferts des apprentissages*, Les éditions Logiques, Montréal.

TREFFERS, A. (1991), *Realistic mathematics education in the Netherlands 1980–1990*, In: STEEFLAND L. (Eds.) *Realistic mathematics education in primary school*, Freudenthal Institute, Utrecht 11–20.

WILLIAM, D. (1994), Assessing authentic tasks: alternatives to mark-schemes. – In: *Nordic Studies in Mathematics Education*, **2(1)**, 48–68.

XUN, G. et LAND, S.M. (2004), A conceptual framework for scaffolding ill-structured problem-solving processes using question prompts and peer interaction, *Educational Technology Research and Development*, **52(2)**, 5–22.

GEORGIOS KOSYVAS
Sevastoupoleos 92-94
11526 Ambelokipi
Athènes, Grèce
gkosyvas@yahoo.com

