ALAIN KUZNIAK

UN ESSAI SUR LA NATURE DU TRAVAIL GÉOMÉTRIQUE EN FIN DE LA SCOLARITÉ OBLIGATOIRE EN FRANCE[1]

Abstract. On the nature of geometric work at the end of compulsory school in France. The purpose of the study is to define the nature of geometric work implemented in France at the end of compulsory school. To make the study, the notions of geometric paradigms and geometric working spaces (GWS) have been used. The reference GWS study is based on an analysis of the French Curriculum published in 1996 and 2005 and textbooks and classrooms observations have been used to precise the appropriate GWS. From the study, the appropriate GWS appears more and more fragmented and oscillates on a confused way between geometric paradigms. This GWS fragmentation is mostly due to the fact that the geometric work is not longer led by epistemological aims, but by an adaptation to the mathematic level of the students.

Résumé. Le propos de cette contribution est de définir la nature du travail géométrique mis en place en France à la fin de la scolarité obligatoire. Pour conduire cette étude, les notions de paradigmes géométriques et d'Espaces de Travail Géométrique (ETG) ont été utilisées. L'ETG de référence est explicité à partir d'une analyse des programmes officiels de 1996 et 2005 puis les ETG idoines sont étudiés en confrontant les manuels scolaires et des observations en classe. De cette analyse, il résulte que les ETG sont de plus en plus morcelés et oscillent de manière confuse entre les paradigmes géométriques. Cet émiettement de l'ETG est en grande partie dû au fait que le travail géométrique n'est plus piloté par des préoccupations épistémologiques mais par une adéquation au niveau des élèves.

Mots clés. Paradigmes géométrique, travail géométrique, scolarité obligatoire, programmes.

Introduction

Dans cet article, nous allons étudier la nature du travail géométrique mis en place en fin de scolarité obligatoire en France (classes de quatrième, troisième et seconde). Ces niveaux de scolarité correspondent à la fin de l'enseignement obligatoire et aussi à la fin d'un programme d'enseignement unique pour la quasi-totalité des élèves. La troisième est la classe terminale du Collège dit *unique* car il est censé accueillir tous les élèves en leur fixant les mêmes objectifs d'apprentissage. La classe de seconde est la première classe du Lycée et elle constitue une classe de détermination qui permet aux élèves de choisir ensuite des

[1] Le texte de cet article est issu d'une conférence présentée dans le cadre du premier colloque franco-chypriote sur l'enseignement des mathématiques.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 15, p. 75 – 95.

sections plus spécialisées dans certains domaines. Ainsi pour la majorité des élèves, c'est dans cette classe qu'ils reçoivent pour la dernière fois un enseignement de la géométrie. Pour conduire notre étude, nous utiliserons les notions d'espace de travail géométriques (ETG) et de paradigmes géométriques [1] (Houdement & Kuzniak, 2003, 2006). Nous ne revenons pas ici sur les trois paradigmes géométriques, notés Géométrie I, II et III, mais nous allons apporter quelques précisions sur la notion de travail géométrique et d'ETG pour poser dans ce cadre les questions que nous souhaitons étudier. Nous étudierons ensuite la nature de l'ETG actuel en nous basant sur diverses études effectuées au sein du Laboratoire André Revuz.

De la pensée mathématique au travail mathématique

La pensée mathématique

La prise en compte de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques comme thème de recherche est relativement récente puisqu'on peut faire remonter sa naissance à la fin des années soixante. La réforme des mathématiques modernes ou plus exactement les ratés de cette réforme ont suscité en partie ce mouvement de recherche en faisant apparaître les difficultés diverses rencontrées par les élèves et les professeurs. À partir de là, il devenait nécessaire de ne plus penser seulement en terme de contenus mais aussi en termes d'éducation et d'apprentissage.

Très fortement influencée par les idées des psychologues, notamment Piaget, une vision constructiviste de l'enseignement s'est alors imposée : il s'agissait de comprendre et d'accompagner la construction de la pensée mathématique. Cette notion de pensée mathématique réfère au type de pensée que doit déployer un individu quand il fait des mathématiques (Piaget, 1950). Dans le cas de la géométrie, vue comme une science déductive dont le domaine d'appui est l'espace, les thèmes privilégiés dans les études internationales sur l'enseignement de la géométrie sont en rapport avec :

1. le développement des capacités spatiales ;
2. la relation entre monde réel et géométrie à travers le processus de géométrisation ;
3. l'instrumentation et le rôle des artefacts comme les logiciels ;
4. le raisonnement et son développement.

Quelle place peut alors avoir le didacticien des mathématiques dans ce paysage longtemps dominé par l'approche psychologique ? Il nous semble qu'elle réside dans l'observation précise de l'activité des actants (professeurs et élèves) dans le cadre scolaire. Ceci nous conduit à privilégier les approches qui étudient non plus la pensée mathématique en tant que telle mais plutôt sa part visible dans l'activité du mathématicien.

L’activité du mathématicien

Des auteurs comme Giaquinto (2005) distinguent plusieurs phases dans l’activité du mathématicien comme la découverte, l’explication, la justification et les applications. Dans chacune de ces phases, des moments permettent de passer de l’élaboration de ce savoir à sa diffusion la plus large dans la communauté des mathématiciens et au-delà de toucher les professeurs et les étudiants. Ainsi pour le travail relatif à la découverte, il faut faire la découverte, puis la présenter et aussi s’approprier d’autres découvertes.

Cette présentation de l’activité du mathématicien prend en compte le fait que son travail s’intègre dans une communauté d’êtres humains et qu’un acte fort qui permet le développement des mathématiques est l’acte de compréhension, non seulement par l’auteur de la découverte mais aussi par les membres de la communauté. Le mathématicien Thurston (1998) exprime un point de vue semblable en définissant mathématiques comme le plus petit sujet tel que :

– les mathématiques incluent les nombres entiers et la géométrie du plan et des solides ;
– les mathématiques sont ce que les mathématiciens étudient ;
– les mathématiciens sont ces êtres humains qui font avancer la compréhension humaine des mathématiques.

L’intérêt de cette conception est de bien montrer la dépendance des mathématiques de l’activité des mathématiciens, ces êtres humains spécialisés dans l’avancée de la compréhension de ce domaine.

Le travail mathématique : une œuvre et un style

Une autre façon d’envisager la question du travail mathématique consiste à se concentrer sur l’œuvre élaborée par les mathématiciens et à définir le travail mathématique à partir de la conception généralisée du travail donnée par Granger (1963, 1998). Pour lui, le « travail » consiste à mettre en forme un contenu initial non structuré. Ce contenu amorphe n'est pas nécessairement matériel et le travail mathématique illustre de manière exemplaire cette vision généralisée du travail. Dans ce cas le contenu n’est pas tangible et ne devient visible que grâce au travail de mise en forme effectué par le mathématicien. Ceci permet de dépasser l’opposition traditionnelle et caricaturale entre le travail intellectuel qui ne porterait que sur des formes et le travail manuel orienté vers un produit concret et pratique.

Cette mise en relation de la forme et du contenu passe par un travail rhétorique nécessaire sur la forme mais non vide de sens et qui doit permettre d'établir un contact codifié entre le lecteur et l'auteur des propositions. Granger appelle style cette manière de présenter la connaissance rationnelle en la soumettant à des normes codifiées qui participent de la mise en place du sens des objets dans un sens déterminé. Ces normes s'appliquent notamment au langage et aux symboles utilisés dans l'activité mathématique. Cette manière de faire, ce style, contribue à fixer l'orientation du travail et la résolution des problèmes. Elle permet d'exclure certaines pratiques en limitant les possibilités du lecteur ou de l'étudiant.

La notion d'espace de travail géométrique

Vers une définition

Nous avons appelé espace de travail géométrique (ETG) un univers organisé pour le travail du géomètre. Cet espace comporte deux niveaux, l'un que nous appellerons le plan des composantes et l'autre le plan cognitif.

Le premier se structure avec la mise réseau des trois composantes suivantes :

- un espace réel et local avec un ensemble d'objets de nature sensible ;
- un ensemble d'artefacts qui seront les outils et instruments utilisés par le géomètre ;
- un référentiel théorique constitué de propriétés.

Mais un espace de travail de la géométrie ne prend tout son sens que grâce à ses utilisateurs. Les composantes seules ne suffisent pas à le définir car le sens de l'espace de travail va dépendre de la fonction que son concepteur et ses utilisateurs lui attribuent Une première réorganisation de ces différentes composantes sera plutôt de nature épistémologique et son orientation sera guidée par les paradigmes géométriques mis en jeu. Le paradigme de référence permet d'interpréter les contenus des composantes et de les structurer dans le sens souhaité.

La fonction de l'ETG peut évoluer en relation avec le contexte social et économique qui influe sur les institutions éducatives dans lesquelles la géométrie est enseignée. Elle va aussi dépendre fortement d'une dimension cognitive ce qui nous a conduit à introduire un deuxième plan dit cognitif et structuré autour des trois processus suivants : visualisation, construction et preuve (Duval, 1995).

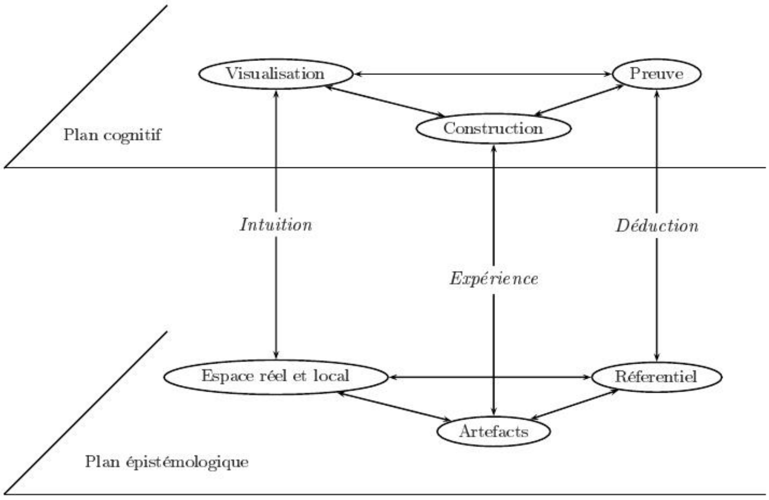


Figure 1 : L'espace de travail géométrique.

Le travail géométrique que nous décrivons s'inscrit dans le cadre des institutions scolaires. Ceci conduit à distinguer un certain nombre de niveaux d'ETG qui ne sont pas sans relations avec le processus de la transposition didactique.

L'ETG de référence : la réorganisation attendue

Le fait pour une communauté d'individus de s'accorder sur un paradigme donné pour formuler des problèmes et organiser leurs solutions en privilégiant certains outils ou certaines manières de pensée, débouche sur ce que nous conviendrons d'appeler l'ETG de référence. Pour connaître cet ETG, il faudra dégager ces manières de faire et de voir en décrivant notamment le style du travail géométrique avec ses règles de discours, de traitement et de présentation. Cet ETG dépendra du paradigme privilégié : Géométrie I, II ou III.

L'ETG idoine ou la question de la didactisation

Une fois posées les bases de la géométrie enseignée, il reste à se préoccuper de son enseignement effectif qui nécessite l'existence d'un espace propice à l'enseignement réussi de la géométrie souhaitée. Cette réussite dépendra naturellement aussi des utilisateurs de cet espace mis en forme pour eux : les élèves bien sûr mais aussi les professeurs chargés de le mettre en place dans les classes.

L'ETG de référence doit être aménagé et organisé pour devenir un espace de travail effectif et idoine dans une institution donnée avec une fonction définie. Les experts concepteurs de la réorganisation didactique des diverses composantes de l'espace de travail, jouent un rôle semblable à celui d'un architecte qui conçoit un espace de travail pour des utilisateurs potentiels futurs. Ils aménagent un ETG qui peut être idoine parce qu'il respecte les intentions et le cahier des charges de l'institution demandeuse mais qui peut n'être pas adéquat à sa fonction attendue en se révélant non performant lors de sa mise en œuvre dans les classes.

Les ETG personnels

Les ETG idoines doivent être investis par des élèves qui se les approprient avec leurs connaissances et leur fonctionnement cognitif particuliers. Ces espaces de travail sont ce que nous appelons des ETG personnels. Ils se constituent de manière progressive et peuvent n'être parfois pas opérationnels. La notion d'ETG personnel ne concerne pas les seuls élèves et étudiants, mais elle concerne aussi les professeurs. En effet, ces derniers doivent avoir une conscience claire de la nature des espaces de travail géométrique idoines afin d'éviter les malentendus résultant d'une gestion floue et implicite du jeu entre les paradigmes.

Espaces de travail et paradigmes géométriques

Une diversité d'articulations

Dans la pratique, les ETG, notamment les ETG personnels et idoines, ne reposent pas sur un seul paradigme mais plutôt sur une articulation entre les paradigmes et celle-ci peut être maîtrisée ou non. Nous parlerons, dans le premier cas d'un jeu entre paradigmes et, dans le second, d'un glissement pour insister sur l'aspect non maîtrisé et subi de la relation entre les paradigmes. Plusieurs articulations possibles sont envisageables que l'étude des différents niveaux d'ETG permet d'affiner dans une institution donnée. Voici quelques exemples que nous avons déjà rencontrés.

La Géométrie I assumée (GI / gII) [2]. Le but de cette géométrie est l'étude des configurations du monde réel avec la possibilité encouragée de mesurer sur les figures pour établir une conclusion. D'autre part, un certain nombre de théorèmes, éventuellement démontrables en GII, sont utilisés comme des outils techniques évitant la mesure ou facilitant le calcul.

La Géométrie II assumée (GII / gI) dont le modèle de référence est la géométrie d'Euclide. L'horizon axiomatique est clairement assumé et l'organisation logique de l'ensemble du référentiel est recherchée. Cependant cette géométrie n'est pas aveugle et les propriétés s'appuient pour leur genèse sur l'intuition de l'espace.

La Géométrie II morcelée (GII / GI). Comme la précédente, cette géométrie prend appui sur un ensemble de propriétés et d'expériences issues de la Géométrie I. Mais ici, il s'agit plutôt de développer des îlots hypothético-déductifs autour des propriétés de quelques figures de base. Ces îlots sont fondés sur une propriété souvent validée par la mesure ou l'observation.

La Géométrie III subreptice (GII / GIII). Dans ce cas, l'enseignement de la Géométrie II est orienté, voire piloté, par des nécessités intra mathématiques qui ne s'expliquent que par un horizon caché de type GIII. Elle est ainsi organisée de manière subreptice (Robert, 2003) par des considérations affines et euclidiennes ou par la structuration, toujours cachée, des propriétés autour de la notion de groupes de transformation.

La Géométrie III assumée (GIII / gI, gII). En privilégiant d'autres cadres et registres dans le travail géométrique (cadre vectoriel, analytique, numérique), l'enseignement de cette géométrie réalise sciemment l'évacuation de la géométrie élémentaire discursive et figurale que l'on rencontre déjà, de manière progressive, dans les autres approches de la géométrie enseignée.

Nos questions et un cadre pour l'étude

Nous pouvons enfin exprimer les deux questions que nous souhaitons éclaircir dans cet article.

Question 1 : Quel est l'ETG de référence actuellement proposé en fin de scolarité obligatoire en France ?

Nous faisons l'hypothèse qu'il s'agit d'une Géométrie II (GII/GI) morcelée.

Question 2 : Quelle est la caractéristique de l'ETG idoine correspondant ?

Nous souhaitons étudier plus particulièrement les conséquences du morcellement annoncé de l'ETG de référence sur ces ETG et aussi sur les ETG personnels des élèves.

Notre recherche des caractéristiques du travail géométrique s'accorde bien avec l'approche systémique privilégiée par l'étude internationale TIMSS. Dans cette étude les auteurs se concentrent sur différents types de curricula qu'ils appellent *Intended*, *Implemented* et *Attained* (Kaiser, 1994 et Kuzniak, 2005). Cette étude utilise aussi une méthodologie (SMSO) qui précise le type d'étude à effectuer pour analyser ces différents niveaux et dont nous ne retenons que quelques éléments adaptés à la question de la géométrie et en phase avec notre travail.

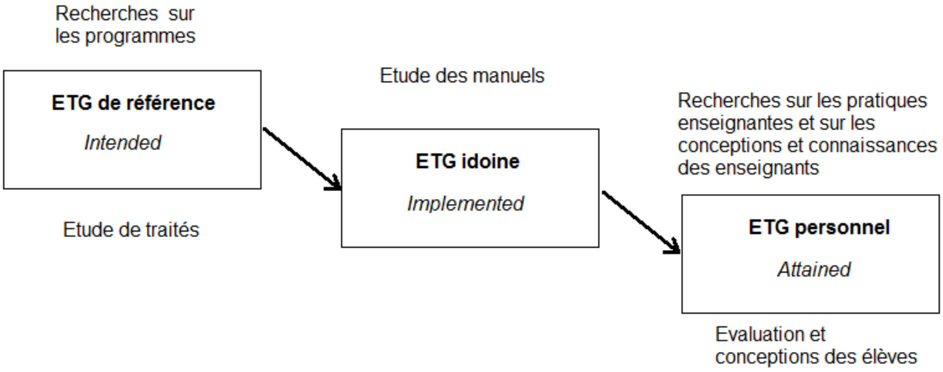


Figure 2 : L'organisation et l'étude des différents ETG.

Sur l'ETG de référence en fin de scolarité obligatoire en France

Dans les périodes de stabilité éducative, l’accès à l'ETG de référence est facilité par ce qu’on peut appeler des « traités » qui regroupent et organisent le corpus de référence. Pendant très longtemps, les éléments d'Euclide ont joué ce rôle et fixé la nature du travail géométrique. Ce n'est plus le cas aujourd'hui dans notre enseignement et le dernier « traité » qui visait à asseoir le référentiel théorique de la géométrie enseignée au collège en France fut celui de Cousin-Fauconnet (1995) et son impact resta très limité.

Depuis, il semble que seuls les textes des programmes officiels et les documents qui les accompagnent remplissent ce rôle de référence. Les mathématiciens sont pratiquement absents du processus d'élaboration de ces programmes qui est à la charge de l'institution scolaire et des enseignants. D'autre part, nous verrons que l'absence d'organisation du référentiel théorique en un traité explique l'impression d'espace de travail morcelé que nous attribuerons à l'ETG de référence actuel. Les programmes qui nous préoccupent sont ceux publiés en 1996 et 2005.

En collège, les deux versions du programme, l'ancienne comme la nouvelle, insistent sur la notion d'activité mathématique définie comme le fait d'« identifier un problème, conjecturer un résultat en expérimentant sur des exemples, bâtir une argumentation et contrôler le résultat obtenu. ». Quant à la géométrie, il lui est assigné le rôle de « passer de l’identification perceptive de figures et de configurations à leur caractérisation par des propriétés ». Dans les documents d'accompagnement du programme, il est précisé que les propriétés à démontrer « se voient » sur la figure mais que les élèves doivent comprendre la nécessité de démontrer ce résultat.

En utilisant la terminologie des paradigmes, nous pouvons affirmer que les programmes mettent au cœur de leurs préoccupations la question de la transition entre GI et GII. Cependant, le passage d'une géométrie à l'autre n'est pas établi une fois pour toute à un moment du curriculum, et la transition semble sans cesse remise à l'œuvre sur chaque nouvelle notion. Celles-ci sont introduites et structurées autour d'objets géométriques : les triangles, les cercles, les polygones dont il est rappelé qu'ils sont aussi des objets de l'espace sensible. Les programmes s'appuient aussi sur les transformations géométriques comme élément structurant. Dans les programmes de 1996, une transformation nouvelle (symétrie orthogonale, symétrie centrale, translation et rotation) est introduite dans chaque classe du collège. Dans ceux de 2005, la translation et la rotation disparaissent, ce qui a pour effet de diminuer la structuration globale du référentiel théorique qui apparaît de plus en plus en plus comme le résultat d'une juxtaposition d'objets.

Cette indécision sur le choix définitif du paradigme se manifeste particulièrement par l'importance accordée dans chaque classe aux études expérimentales afin de conjecturer des propriétés. Les constructions (à l'aide d'instruments, de l'outil informatique ou de schémas à main levée) jouent un rôle clé dans ce processus. Mais dans le même temps, la notion de socle est imposée par l'institution scolaire pour définir dans toutes les matières un niveau minimal exigible pour tous les élèves. Or dans le cas des constructions en mathématiques, aucune démonstration n'est exigible et les connaissances de base se limitent à la maîtrise de techniques utiles pour faire des constructions. À la fin du collège, un élève doit savoir construire et maîtriser les techniques sans forcément connaître les justifications théoriques issues de la Géométrie II. À travers cette reconnaissance exclusive des techniques, on devine déjà le glissement possible vers des ETG idoines et personnels guidés par un horizon GI avec l'accent mis sur la perception et les artefacts. Nous appellerons Géométrie I subreptice ce glissement non assumé vers la Géométrie I.

A contrario, toujours dans les programmes de 2005, l'apprentissage de la démonstration fait l'objet d'une attention plus soutenue. Un paragraphe intitulé « une initiation progressive à la démonstration » explique que « la question de la preuve a une place centrale en mathématiques ». La pratique de la preuve permet progressivement d'aboutir à la mise en place de la démonstration. Cette distinction entre preuve et démonstration est une nouveauté dans l'enseignement français. La preuve dépend du contexte social et elle peut revêtir différentes formes tandis que la démonstration est fondamentalement une forme rhétorique caractéristique du style mathématique. Cette distinction entre preuve et démonstration conduit les auteurs à différencier deux phases dans le processus d'apprentissage de la démonstration : le raisonnement et sa mise en forme. Dans le même temps les auteurs insistent sur la phase de découverte. Cela ne va pas être sans conséquence sur le travail mis en place dans les classes car elle suggère l'introduction dans l'ETG idoine de deux contextes différents : celui de la découverte et celui de la justification.

L’utilisation de logiciels de géométrie dynamique est aussi présentée comme un outil facilitateur pour ne plus considérer la figure uniquement sous sa forme iconique. En donnant la possibilité de déplacer les points et de multiplier les expériences, les logiciels sont censés favoriser l'accès à la notion générale de figure qu'il faut distinguer du dessin. Dans cette optique optimiste, l’utilisation de logiciels de géométrie dynamique favorise les conjectures et le raisonnement pour valider cette conjecture.

Mais, l'ambiguïté de l'espace de travail idoine est à nouveau accentuée par le rôle attribué aux logiciels qui peuvent, dans certains cas, se substituer à une démonstration lorsque les élèves ne sont pas en mesure de produire les raisonnements correspondants en Géométrie II. Ainsi, non seulement les logiciels peuvent être à la source de conjectures mais ils peuvent être aussi les garants de la validité d'un résultat. Il y a là un glissement implicite et potentiel vers un ETG où l'expérience et les artefacts guident le travail.

En classe de seconde, dans une autre institution, le Lycée, la volonté annoncée des auteurs des programmes est de stabiliser le travail géométrique développé au Collège. Les nouvelles notions introduites (triangles isométriques et semblables) ne doivent pas l'être pour elles-mêmes mais pour utiliser les outils de preuve développés au Collège. La démarche de travail préconisée reste très proche de celle mise en œuvre au Collège. Le point de départ de la géométrie doit être intuitif et expérimental et s'appuyer sur la perception. Les logiciels restent une source de conjectures de propriétés. Celles-ci doivent être ensuite prouvées puis démontrées.

Pour conclure cette partie, nous parlerons d'une Géométrie (GI /GII) mixte car si les auteurs insistent sur la différence entre démonstration et preuves expérimentales, les deux cohabitent sans cesse et semblent également légitimes. De plus, le référentiel théorique morcelé ne permet pas d'assumer complètement le passage à la Géométrie II par manque d'horizon axiomatique. Seuls des îlots argumentatifs isolés sont développés et ils doivent à chaque fois pouvoir être étayés par des expériences. Cette évanescence d'un référentiel théorique organisé n'est pas une nouveauté car tel était déjà le cas dans la période de réaction au tout axiomatique des mathématiques modernes. Ce qui est nouveau, c'est, d'une part, le statut ambigu donné aux instruments et aux constructions et, d'autre part, la multiplicité des îlots démonstratifs dépendants de configurations mal reliées les unes aux autres. Cette multiplicité contribue à la déstructuration du référentiel théorique.

ETG idoines d'aujourd'hui

Nous allons maintenant tenter d'apprécier les effets de cette Géométrie mixte et morcelée sur les ETG idoines que nous avons rencontrés. Autrement dit, comment cette évolution de l'espace de référence se répercute-t-elle dans les manuels et dans la pratique des enseignants ?

La description des ETG idoines est bien plus complexe que celle des ETG de référence car il est rare de pouvoir disposer d'une source unique pour définir ces ETG. Pour comprendre leur fonctionnement, il faut recourir à différentes sources parfois contradictoires comme les cours des professeurs et les manuels, très nombreux en France où il n'existe pas de manuels accrédités par le ministère. De plus, il n'est souvent possible d'aborder les ETG que de manière locale à partir de l'étude d'un thème voire d'un type de taches prescrites. Pour notre approche des ETG idoines, en plus de nos observations personnelles en classe, nous nous appuierons sur divers travaux réalisés au sein du Laboratoire André Revuz et qui donnent des informations issues des manuels mais aussi de la pratique en classe.

Pour décrire le processus de didactisation qui s'opère dans les classes et déterminer l'ETG idoine, nous présenterons successivement :

- une étude de la notion d'angle inscrit en classe de troisième qui nous donnera une première caractérisation de l'ETG idoine standard ;
- le glissement introduit dans cet ETG par l'emploi massif des logiciels de géométrie à partir des années 2000 ;
- la rupture entre l'ETG idoine standard et une grande partie des élèves engagés dans un autre type de travail géométrique que celui attendu par le professeur.

ETG idoine standard

Nous allons observer le traitement de la notion d'angle inscrit en troisième. Cette notion nous semble pertinente car elle se place en fin du cursus de Collège et elle force les professeurs et les manuels à l'intégrer dans un ETG déjà en place et dont nous pouvons ainsi voir certaines des caractéristiques stables.

Deux propriétés figurent dans les programmes de troisième qui correspondent aux propriétés énoncées par Euclide dans son livre III : la propriété 20 portant sur la relation entre l'angle au centre et un angle inscrit interceptant le même angle et la propriété 21 sur l'égalité des angles inscrits qui en est une conséquence. Dans l'enseignement classique de la géométrie, la démonstration de la propriété 20 s'appuie sur l'étude de trois cas de figure, elle est donc relativement complexe, par contre il est facile de déduire la propriété 21 de la propriété 20.

Dans les programmes de 1996, les notions d'angles inscrit et au centre sont incluses dans une partie intitulée « rotation, angles, polygones réguliers ». Le programme précise « comparer un angle inscrit et l'angle au centre qui intercepte le même arc ». Il est dit que cette comparaison permet celle de deux angles interceptant le même arc. Dans les nouveaux programmes, ces notions ne font plus partie des notions exigibles et elles se rattachent aux figures planes dans le mouvement de déstructuration que nous avons signalé (les rotations ne font plus partie du programme).

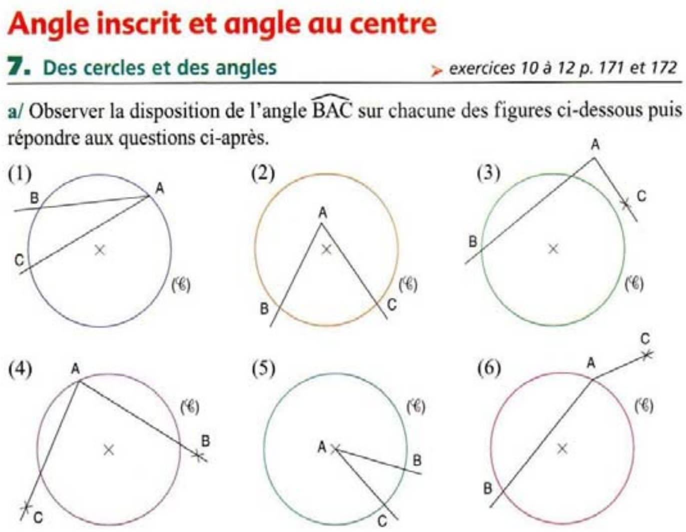
La mise en place de la notion d’angle inscrit en classe a fait l’objet d’un travail de Roditi (2004) qui a pu montrer à cette occasion la proximité de l’approche développée par un enseignant avec la proposition du manuel que nous avons retenu pour notre étude. Le manuel choisi (Triangle, 2003) a été développé par des auteurs proches de l’Institut National de la Recherche Pédagogique qui assument de manière cohérente et constante un même parti pris pour introduire les notions mathématiques. Roditi signale que ce manuel est bien connu pour être bien adapté au niveau des élèves. Ainsi dans ce cas, la mise en place de l'ETG idoine est déjà très influencée par le niveau des élèves.

Une activité (p. 165) présente la notion d’angle inscrit et d’angle au centre. Les élèves sont invités à dégager ces deux notions à partir de deux questions portant sur un corpus de six figures.

Sur les figures (1) et (4), on dit que l’angle BAC est un angle inscrit dans le cercle (C). Ce n’est pas le cas de BAC sur les autres figures.

En déduire qu’elles semblent être les caractéristiques d’un angle inscrit.

Sur la figure (5), on dit que l’angle BAC est un angle au centre. Ce n’est pas le cas de BAC sur les autres figures. En déduire quelles semblent être les caractéristiques d’un angle au centre.



Des définitions sont proposées un peu plus loin par les auteurs du livre. Elles sont alors associées à des images prototypiques des notions d'angle aigu et d'angle au centre dans un lien très fort de l'image colorée et codée avec le texte. Ainsi le mode de production des définitions est nettement de type empirique. En s'appuyant sur quelques dessins particuliers, il fonctionne aussi d'une manière abductive qui va se trouver confirmée dans l'activité suivante (p. 165) consacrée aux deux propriétés fondamentales des angles inscrits et au centre.

« *Tracer un cercle de centre O. Tracer plusieurs angles inscrits dans un cercle qui interceptent un même arc BC. Mesurer ces angles.*

Quelle conjecture peut-on faire ?

Tracer un cercle de centre O. Tracer un angle au centre et un angle inscrit de ce cercle qui interceptent le même arc BC. Mesurer ces deux angles. Recommencer plusieurs fois ces tracés.

Quelle conjecture peut-on faire ? »

Cette activité permet de dégager les deux propriétés, écrites en rouge dans le livre et présentées dans un ordre différent de l'ordre euclidien.

« *Si deux angles inscrits dans un cercle interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure.*

Si, dans un cercle, un angle au centre et un angle inscrit interceptent le même arc, alors la mesure de l'angle au centre est le double de la mesure de l'angle inscrit. »

Les deux propriétés ont été dégagées à partir de très peu d'exemples. On peut réellement parler ici d'abduction puisque l'idée de propriété étant présente, il suffit de l'extraire à partir de petit nombre d'exemples qui la vérifient. L'usage de la mesure est recommandé pour dégager la propriété même si le processus abductif incite à négliger les approximations et tend à rendre inutile la réalisation effective d'un mesurage. Ainsi, l'espace idoine qui se met en place s'appuie résolument sur la Géométrie I mais entre-t-on vraiment dans GII ? Trancher la question n'est pas évident dans ce livre puisque les deux propriétés ne sont pas démontrées. Elles sont admises sans que l'on sache exactement quelle a été la validation retenue. Autrement dit, ces propriétés font-elles partie de GII ou de GI ?

De plus, les propriétés ne sont pas présentées dans l'ordre qui habituellement permet de déduire la propriété des angles inscrits de celle des angles au centre. Cette absence d'un souci d'organisation globale du schéma déductif éloigne l'ETG idoine de la Géométrie II. Cette impression se confirme par l'étude du seul exemple d'application de la propriété dans le manuel. Il s'agit de prouver un alignement sur une figure bien particulière sans le degré de généralité qu'aurait pu introduire une formulation plus générale. Ainsi, le travail reste fixé sur une figure particulière sans atteindre le niveau des figures génériques.

L'ETG idoine se caractérise ainsi par l'absence de figure générique et par un appui sur des figures particulières. Il est également possible de mesurer. Le raisonnement fait la part belle à l'abduction pour dégager des propriétés qui sont ensuite utilisées comme techniques pour donner des valeurs numériques. Tous ces éléments nous semblent caractériser un ETG situé, de fait, plutôt dans une Géométrie I subreptice. Dans son étude, Roditi a observé une séance conduite par un jeune professeur. Ce dernier utilise le manuel précédent pour préparer son cours tout en opérant un certain nombre de transformations toutes destinées à limiter les degrés de liberté dans l'activité des élèves. Le fait de limiter le travail et les initiatives des élèves permet au professeur de gérer plus facilement la conduite de la classe. On remarque que :

- l'activité sur les définitions est supprimée et remplacée par la donnée immédiate des définitions. Chaque définition est associée à une figure comme dans le livre cité ;
- l'activité d'émission de la conjecture est nettement plus fermée que dans le livre, les élèves ne dessinent plus des angles sur leur feuille. Les dessins (trois en tout) figurent sur la fiche donnée aux élèves ce qui permet de donner les mêmes angles à mesurer à tous les élèves. De plus, la mesure des angles choisis permet une division simple. Comme dans le livre, une conjecture, qui relève plus du constat, est demandée à la fin.

Dans son étude, Roditi affirme que les élèves en font encore moins que ce que le professeur attendait, notamment au niveau des calculs et de l'émission de la conjecture. Ainsi, nous voyons à l'œuvre un phénomène de délitement progressif de l'ETG idoine de plus en plus piloté par le professeur qui tente de l'adapter au niveau des élèves. Ces derniers, dans un jeu de rôle bien huilé, tentent encore de le simplifier pour alléger leur travail d'élève.

L'impact des logiciels sur l'ETG idoine

Dans un travail de master, Boclé (2008) a déterminé une situation prototypique proposée dans les manuels français pour introduire une nouvelle notion en géométrie en fin de Collège. Son étude fait apparaître, dans les manuels conçus juste après 1998, la structure prototypique SP1 suivante :

1. construction de figures particulières avec des instruments de dessins,
2. mesurage sur ces figures à l'aide des instruments,
3. émission d'une conjecture d'une propriété,

4. institutionnalisation de la propriété admise ou démontrée plus tard.

Dans les manuels qui suivent les programmes de 2005, une nouvelle tendance émerge. L'introduction d'une nouvelle notion se fait par le biais d'un logiciel de géométrie. La situation prototypique SP2 est alors la suivante :

1. construction d'une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie,
2. mesure donnée par le logiciel,
3. déplacement de points afin de constater que la propriété reste vraie,
4. institutionnalisation de la propriété admise ou démontrée plus tard.

Dans les deux cas, pour introduire une propriété, les élèves construisent plusieurs figures répondant à des critères donnés. Les mesures effectuées sur ces figures permettent de constater un invariant puis d'émettre une conjecture. Dans les manuels qui suivent les programmes de 2007, les activités de construction et de mesure supposent l'usage d'un logiciel de géométrie. Le début de chaque activité se situe clairement dans GI avec un ETG qui favorise la perception et l'instrumentation. Dans les deux approches, avec et sans logiciel, le point crucial pour déterminer le type de géométrie réellement en jeu dans l'ETG idoine se situe au niveau du point 4. Si la propriété est démontrée uniquement de manière déductive sans recours à la mesure, il est possible de basculer en Géométrie II. Par contre, que se passe-t-il si la propriété n'est pas démontrée ?

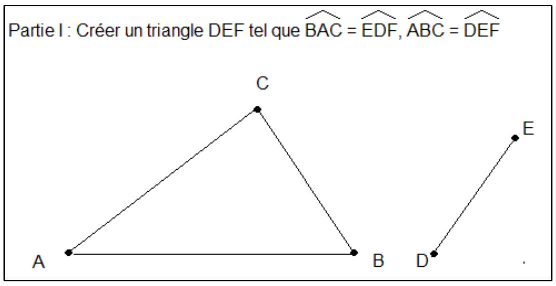
Ces situations prototypiques répondent bien aux instructions des programmes recommandant la mise en place d'activités aboutissant à la conjecture de propriétés. L'insistance dans les nouveaux programmes sur l'utilisation d'un logiciel de géométrie a été prise en compte dans les manuels mais l'apport réel de ces logiciels dans le passage de la GI à GII mérite d'être questionné. En effet, plusieurs manuels justifient l'utilisation d'un logiciel de géométrie par l'amélioration de la précision de la mesure et la possibilité de multiplier les exemples. Or une mesure reste une approximation et elle est donc imprécise. C'est justement cette imprécision qui peut créer une contradiction au sein de la classe et conduire à la volonté de convaincre puis à la nécessité de prouver sans usage de la mesure. Insister sur la précision des logiciels et sur leur avantage par rapport aux constructions à la règle et au compas risque d'éloigner de la nécessité de fournir une preuve qui était un des enjeux de l'ETG de référence.

Dans son travail en classe, Boclé a essayé de voir si l'utilisation de l'outil informatique dans ces situations prototypiques favorisait le passage vers GII ou bien si au contraire elle constituait un élément bloquant. Elle a pu constater que la force de la preuve par expérimentation l'emportait sur un travail classique sur la démonstration comme une preuve purement déductive. Dans ce cas, il semble que l'usage des logiciels en situation standard stabilise plutôt un ETG de type GI et non une transition vers la GII.

La rupture consommée en classe de seconde ou quand la monstration devient démonstration.

Nous allons retrouver cette contradiction entre le travail attendu par l'institution et le travail effectivement mis en place dans le cas de l'étude des triangles semblables dans une classe de seconde ordinaire. Les triangles semblables ont été réintroduits dans l'enseignement obligatoire français en 2000. La notion avait disparu des programmes depuis la réforme des mathématiques modernes et elle est réapparue dans un tout autre contexte en 2000 en classe de seconde. Les triangles semblables ne sont pas vus par les programmes comme une notion nouvelle mais comme l'occasion de stabiliser le travail géométrique en fin de scolarité. Nous regarderons ici uniquement les résultats d'une séance menée par un professeur qui suit la démarche prototypique SP1 dans un premier temps mais qui, au moment de la phase 4 d'institutionnalisation, développe une démarche SP2 avec un usage exclusif du logiciel par lui-même.

L'activité suivante est donnée aux élèves. Il s'agit de la première activité sur les triangles semblables.



Les questions suivantes figurent sur la fiche :

Que peut-on dire des angles ACB et DFE ?

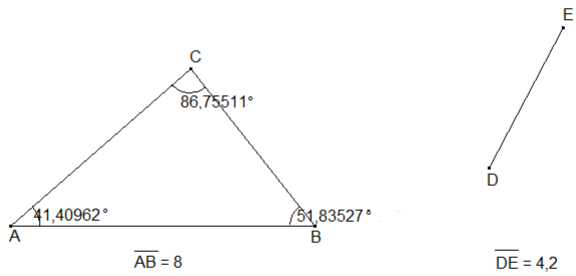
Comparer les côtés des triangles avec votre règle. Que constate-t-on ?

Finir la phrase : *On peut conjecturer que si deux triangles ont ... alors leurs côtés sont ...*

Pour le professeur la phase de construction ne pose pas de problème. Il a anticipé deux triangles possibles, ce qui lui semble une difficulté intéressante. Pour lui, il s'agit clairement de motiver dans GI l'origine d'une propriété qui sera pleinement dans GII une fois qu'elle aura été démontrée dans la leçon suivante. La figure est pour lui un exemple générique et il n'a pas vraiment réfléchi aux mesures qui figuraient sur la fiche.

La grande majorité des élèves, mais pas tous, s'engage pleinement dans l'activité de construction qui s'avère longue et complexe. Les élèves ont des difficultés à utiliser leurs instruments de dessin et la tâche « faire un angle égal » ne correspond pas pour eux à une technique immédiatement mobilisable. De plus, les deux possibilités de figures suscitent des problèmes dans la classe car les élèves travaillent sur des figures particulières et non générales.

Une autre partie des élèves a compris que la construction n'avait pas d'importance pour le professeur et ils attendent tranquillement que le cours se déroule. Ils émettent, par abduction, des conjectures purement linguistiques en essayant d'adapter au mieux leurs connaissances mathématiques avec la situation. Dans le même temps, les élèves engagés dans la tâche de construction produisent des résultats très divers et contradictoires mais de fait ces résultats et le travail de ces élèves vont être laissés de côté par le professeur qui va privilégier la solution construite avec l'aide du logiciel Geogebra et présentée avec un vidéoprojecteur. Pour cela, le professeur suit alors la structure prototype SP2 mais sans faire de dévolution aux élèves. L'usage du logiciel est à sa seule charge et il procède ainsi à une institutionnalisation qui nie tout le travail antérieur des élèves. Le point de départ sur l'ordinateur est cette figure où les mesures affichées sont données avec cinq chiffres décimaux et ceci même pour les angles. Le rapport de proportionnalité calculé par l'ordinateur était de l'ordre de 1,905 et était exactement le même pour les trois rapports.



La précision des mesures indiquées sur l'ordinateur fait d'autant plus violemment apparaître aux élèves l'imperfection de leur travail avec les instruments. Leur travail proprement dit est de peu d'utilité puisqu'il est laissé de côté. De plus la précision du logiciel le transforme et, ceci, à l'insu du professeur, en outil de preuve et en source de vérité comme en témoigne le dialogue qui clôt le cours après l'énoncé de la conjecture.

Le professeur : « A-t-on démontré la propriété ? »

Les élèves dans une quasi-unanimité : « Oui ! On a fait une démonstration. »

Le professeur interloqué : « Ben Non c'est trop imprécis ! »

Ainsi après plus de trois années d'entrée progressive en Géométrie II et malgré les programmes qui insistent sur la vigilance nécessaire sur le statut des énoncés, admis ou démontrés, le décalage entre le travail attendu et le travail effectué est profond mais cela résulte en grande partie du fait que l'ETG idoine proposé aux élèves est lui-même très ambigu et probablement fondamentalement de type GI subreptice.

Conclusion

Notre étude nous permet de conclure d'une manière assurée sur quelques points caractéristiques des ETG rencontrés en fin de scolarité en France.

L'ETG de référence peut être caractérisé comme relevant de la Géométrie II morcelée. Un grand nombre d'îlots démonstratifs sont introduits pour bien montrer le lien entre la géométrie et l'intuition de l'espace. Puis, l'accent est mis sur la nécessité de développer le travail démonstratif en le distinguant des preuves expérimentales et des affirmations perceptives. Cependant, cet ETG de référence laisse la porte ouverte, dans certains cas, à la mise en place de techniques et de propriétés validées par la seule expérimentation par les élèves avec des logiciels. De plus, son insistance constante sur une transition vers la Géométrie II appuyée sur la Géométrie I, peut laisser supposer qu'une Géométrie mixte est possible.

Cette porte ouverte devient un boulevard lorsqu'on envisage les ETG idoines qui se révèlent particulièrement instables et dépendants du niveau des élèves et des choix du professeur. Le jeu traditionnel entre les Géométries I et II s'avère particulièrement ambigu du fait de la puissance probatoire des logiciels pour les élèves.

Dans les exemples que nous avons pu observer [4], le glissement vers la Géométrie I a été favorisé par l'usage des logiciels qui instituent une preuve informatique qui vient à l'encontre de la preuve axiomatique. Cette dernière est d'autant plus affaiblie que le référentiel théorique mis à disposition des élèves n'apparaît pas, même en filigrane.

Enfin, la réorganisation des ETG semble de plus en plus piloté par un professeur s'adaptant au niveau des élèves plus que par des choix épistémologiques assumés. Le travail géométrique fonctionne par appauvrissements successifs ce qui peut expliquer la tentative récente de supprimer la géométrie discursive et figurale en classe de seconde au profit de la seule géométrie analytique. Une autre voie serait possible, en adéquation avec la demande sociale actuelle : assumer une Géométrie I dans la scolarité obligatoire. Cela permettrait de remettre en place un travail géométrique riche et de restructurer les ETG de manière cohérente.

Notes

[1] La notion de paradigme, due à Kuhn, recouvre l'ensemble des croyances, des techniques et des valeurs que partage un groupe scientifique. Elle permet de fixer la manière correcte de poser et d'entreprendre la résolution d'un problème. (Houdement & Kuzniak, 2006).

[2] Nous désignons l'ETG en utilisant le paradigme dominant, le couple entre parenthèses précise les paradigmes en jeu dans cet ETG.

[3] Manuel collection Triangle mathématiques de 3e édité par Hatier.

[4] Nous avons pu observer, chez des professeurs débutants, un grand nombre de séances qui allaient toutes dans le même sens.

Bibliographie

BOCLÉ, C. (2008), *Utilisation des logiciels de géométrie dynamique et espace de travail géométriques en classe de quatrième*, Master de didactique des mathématiques, Université Paris-Diderot.

COUSIN-FAUCONNET, A. (1995), *Enseigner la géométrie au collège*, Paris : Armand Colin.

DUVAL, R. (1995), Why to teach geometry in *ICMI Studies on Geometry*, 53–58, Catania.

GIAQUINTO, M. (2005), Mathematical activity in *Visualization, Explanation and Reasoning styles in Mathematics*, Springer, 75–87.

GRANGER, G.G. (1963), *Essai d'une philosophie du style*, Paris : Odile Jacob.

GRANGER, G.G. (1998), *L'irrationnel*, Paris : Odile Jacob.

HOUDEMENT, C., KUZNIAK, A. (2003), Elementary geometry split into different geometrical paradigms. *Proceedings of CERME 3*, Bellaria, Italie.

HOUDEMENT, C., KUZNIAK, A. (2006), Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **11**, 175–193.

KAISER, G., LUNA, E. & HUNTLEY, I. (1999), *International Comparisons in Mathematics*, Education Falmer Press.

KUZNIAK, A. (2005), Diversité des mathématiques enseignées “ici et ailleurs”: l'exemple de la géométrie, In Copirelem (Ed) *Enseigner les mathématiques en France, en Europe et ailleurs*, 47–56, Strasbourg : IREM de Strasbourg.

KUZNIAK, A. (2006), Paradigmes et espaces de travail géométriques. Eléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, **6(2)**, 167–188.

KUZNIAK, A., & VIVIER, L. (2009), A French look on the Greek Geometrical Working Space at secondary school level, *Proceedings of Cerme6*. Lyon, France

PIAGET, J. (1950), *Introduction à l'épistémologie génétique, La pensée mathématique.* Paris : PUF

ROBERT, A. (2003), Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la quatrième : l'organisation des connaissances en niveaux de conceptualisation, *Petit x*, **63**, 7–29.

RODITI, E. (2004), Le théorème de l'angle inscrit au collège : analyse d'une séance d'introduction, *Petit x*, **66**, 18–48.

THURSTON, W.P. (1995), On Proof and Progress in Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, **15(1)**, 29–35. **90**

ALAIN KUZNIAK
Laboratoire de Didactique André Revuz,
Université Paris Diderot, France
kuzniak@math.jussieu.f