HELENA BOUBLIL-EKIMOVA

LACUNES GÉOMÉTRIQUES DES FUTURS ENSEIGNANTS

Abstract. Geometrical Difficulties Among Future Teachers. This article reflects on a study we have conducted in the organization of didactical formation for the teaching of geometry. We seek to draw a portrait of mathematical knowledge among teachers and future teachers in elementary schools. Analysis of research undertaken in the teacher formation relating to the mathematical preparation of teachers in primary education, made it possible for us to emphasize their difficulties and the principal reasons in the gaps in mathematical knowledge among students. In this article, we identified and described the difficulties of prospective teachers in the solving of concrete geometrical tasks and in the teaching of geometry during their practice in the schools.

Résumé. Cet article rend compte d'une analyse que nous avons menée afin de concevoir un dispositif de formation des futurs maîtres à l'enseignement de la géométrie au primaire. Nous cherchons à tracer un portrait des connaissances mathématiques des futurs enseignants du primaire, et plus particulièrement en géométrie. Cette identification des difficultés des étudiants à l'intérieur de la formation didactique se révèle intéressante dans la mesure où elle sert de point de départ à leur analyse, à l'analyse du contexte de leur apparition et à la recherche des conditions permettant leur résolution.

Mots-clés. Difficultés en apprentissage de la géométrie, formation des maîtres.

Introduction

Plusieurs recherches rapportent des difficultés éprouvées par des enseignants du primaire sur certains contenus mathématiques enseignés (Mayberry, 1983 ; Graeber, Tirosh, Glover, 1986 ; Ginther, Pigge et Gibney, 1987 ; Porter, 1989 ; Brown, Cooney et Jones, 1990 ; Fennema et Franke, 1992 ; Bauersfeld, 1994). En géométrie, ces difficultés concernent autant la visualisation et le raisonnement que l'organisation des concepts géométriques (Clements et Battista, 1992 ; Bishop, 1989 ; Hershkowitz, 1989). Notre propre analyse des difficultés des étudiants, futurs maîtres, et notre expérience d'enseignement à ce public corroborent ces résultats. Dans la première partie de cet article, nous décrivons les difficultés rencontrées en géométrie par les futurs maîtres, observées lors de notre enseignement en formation des maîtres. Notre étude porte sur deux groupes, constitués de 110 étudiants et étudiantes inscrits au cours obligatoire « Didactique de la géométrie et de la mesure » du programme du baccalauréat en enseignement primaire. L'analyse présentée dans la deuxième partie montre les éléments que nous avons fait ressortir pour dégager les principales raisons des lacunes en mathématiques des enseignants du primaire. Dans cet article, nous ne donnons que quelques exemples, pour justifier nos propos.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 15, p. 97 – 118.

1. Difficultés en apprentissage de la géométrie

Des recherches sur les obstacles et les difficultés des élèves dans l'apprentissage de la géométrie et dans la résolution de problèmes géométriques (Vladimirskii, 1949 ; Zhuravlev, 1950 ; Landa, 1955 ; Zykova, 1955,1969 ; Yakimanskaya, 1959, 1971 ; Kabanova-Meller, 1970 ; Fennema et Sherman 1977; 1978 ; Guay et McDaniel, 1977 ; Vinner et Hershkowitz, 1980 ; Gardner, 1983 ; Burger et Shaughnessy, 1986 ; Fischbein, 1987 ; Fuys, Geddes et Tischler, 1988 ; Bishop, 1989 ; Hershkowitz, 1989 ; Clements et Battista, 1992 ; Capponi et Laborde, 1995 ; Duval, 1995) ont montré que les difficultés se situent dans la visualisation, le langage, le raisonnement et leur emploi dans la résolution de problèmes (Ekimova, 2005). Dans cette partie, nous allons utiliser ce repérage des difficultés afin de décrire les conceptions et les comportements des étudiants, futurs maîtres, que nous avons pu observer et identifier lors de notre enseignement en formation des maîtres. Bien que nous ne possédions pas d'instruments d'analyse sûrs pour discriminer certaines difficultés qui relèvent de catégories différentes (par exemple, « visuelle » et « langagière »), nous allons essayer de dissocier, au moins partiellement, les différents savoirs géométriques mobilisés pour donner une réponse ou pour résoudre des problèmes, en privilégiant la première action ou l'action que nous jugeons essentielle. En particulier, nous nous intéressons aux difficultés éprouvées par un nombre important d'étudiants et à celles considérées comme des difficultés « typiques ». Pour ces dernières, nous nous rapportons aux recherches sur les obstacles et les difficultés des élèves dans l'apprentissage de la géométrie et dans la résolution des problèmes géométriques citées plus haut. En effet, puisque la majeure partie de nos étudiants, futurs maîtres, n'a pas eu de contact avec le contenu géométrique depuis le secondaire, nous pouvons partir de l'hypothèse que leur niveau de connaissances géométriques est comparable à celui des élèves du secondaire, à nuancer selon les connaissances déclaratives ou procédurales.

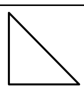
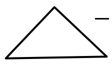
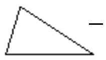
Chacune des sections suivantes sera consacrée à un type de difficultés et sera subdivisée en une partie descriptive et une partie analyse.

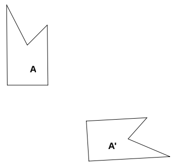
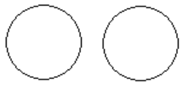
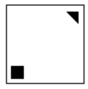
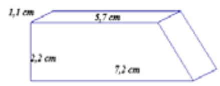
1.1. Difficultés visuelles

Le terme de « visualisation » est employé dans la littérature didactique en lien aux images visuelles, à la capacité spatiale, à la mémoire visuelle, au traitement visuel, aux rapports visuels, à l'attention visuelle et l'imagination visuelle (Bishop, 1980, 1989 ; Clements, 1982 ; Hershkowitz, 1989 ; Presmeg, 1986b). Selon Bishop (1989, p. 7), ce terme réfère à deux aspects différents : le produit, l'objet, ou le « quoi » de la visualisation appelé « image visuelle » et le processus ou le « comment » du fait de visualiser. Le troisième aspect s'entend aux traits éducatifs de visualisation - les activités mathématiques spécifiques et leur rôle dans le développement de processus permettant la construction des images visuelles.

La « visualisation » en tant que processus fait appel aux processus soit de la construction de l'image visuelle de la figure soit de son emploi. En ce qui concerne la construction de différentes représentations de la figure et de relations entre les éléments de la figure, on retrouve dans les recherches didactiques des références aux processus d'observation, de comparaison (recherche des ressemblances, des différences, des éléments congrus, d'un élément commun à deux figures, *etc*.), de représentation (graphique ou à l'aide des outils physiques ou informatiques), de transformations (pliage, découpage et composition), *etc*. qui permettent de réfléchir aux informations visuelles et de décrire les propriétés de la figure. Quant à l'emploi des images visuelles, on réfère plus aux processus de reconnaître, d'identifier, d'évoquer les figures et les relations entre les éléments de la figure à partir de l'observation de la figure ou de la description de ses propriétés.

Dans le tableau ci-après, nous donnons quelques exemples de difficultés éprouvées par les étudiants, que nous associons plus particulièrement au type « visuel ». Il s'agit de l'identification de la figure à partir de sa représentation graphique ou discursive, de la représentation graphique des éléments de la figure et de l'évocation de plusieurs figures correspondant à la description. Dans la description des difficultés visuelles des étudiants, on préfère utiliser le terme « reconnaissance » des figures au lieu de « dénomination », car ce n'est pas la connaissance de propriétés de la figure qui est en jeu dans les questions posées (les propriétés sont connues des étudiants), mais leur reconnaissance dans les représentations graphiques et discursives des figures.

Difficultés observées	**Exemples**
1. Reconnaissance de plusieurs caractéristiques particulières dans l'identification des figures (et pas seulement de la plus marquante).	 – *triangle rectangle* (triangle rectangle isocèle),  – *triangle isocèle* (triangle rectangle isocèle).
2. Reconnaissance des figures dans des positions inhabituelles.	 – Personne n'a reconnu le triangle isocèle ainsi représenté,   – à la demande de donner les noms les plus précis de certaines figures planes, le « parallélogramme » a été identifié dans la seconde représentation et le « quadri-latère » dans la dernière (les réponses attendues étaient : « losange » et « trapèze rectangle »).

Difficultés observées	**Exemples**
3. Reconnaissance de transformations géométriques dans la représentation de deux figures (initiale et image) disposées inhabituellement.	 A à la question « *De quelle transformation géométrique s'agit-il ?* », une partie considérable du groupe ne reconnait pas la réflexion (mais la réflexion et la rotation). 9 étudiants parmi 54 ont identifié la rotation.
4. Reconnaissance de transformations géométriques possibles dans la représentation de deux figures (initiale et image).	A à la question « *De quelle(s) transformation(s) géométriques s'agit-il ? Indiquer les propriétés de chacune* », un seul type de transformation est donné. 
5. Reconnaissance de certains axes de symétrie des figures (axes obliques ou dans des figures disposées inhabituellement)	Dans 75 % des réponses, la figure ci-dessous n'est pas reconnue comme symétrique. 
6. Reconnaissance et représentation de figures obtenues par projection de solides ou de figures vues lorsque l'on observe un solide sous différents angles (vue de droite, de gauche, de haut, du bas).	À la demande de « *Tracer le dessin de ce qu'on voit lorsqu'on observe un solide de gauche, de droite, de haut* », certains tracent des parallélogrammes. Souvent, seule est représentée la face supérieure dans la vue de haut et dans la vue de droite, le rectangle représentant la face droite (et pas le rectangle 2.2x1.1) . 
7. Reconnaissance et représentation (dessin) du développement du cône.	Pour une partie considérable du groupe, le développement du cône est représenté par un triangle.
8. Reconnaissance des figures selon la description de leurs propriétés visuelles marquantes.	À la question « Qui suis-je ? Je suis un polygone ayant 3 côtés, dont 2 sont isométriques et ayant un angle droit », nous avons obtenu seulement 25 réponses complètes (parmi 110 participants) : triangle rectangle isocèle. La répartition des autres réponses obtenues a été la suivante. Triangle rectangle : 73, triangle isocèle : 6, triangle : 6. D'après ces résultats, il semble que, dans la détermi-nation du nom d'un triangle, la caractéristique locale d'« avoir un angle droit » domine par rapport à celle plus globale d'« avoir deux côtés de mesure égale » (73 contre 6).

Difficultés observées	Exemples
9. Reconnaissance de la figures (de plusieurs figures) correspondant à la description	– À la question « De quels solides s'agit-il ? J'ai au moins une surface courbe » qui prévoit la recherche de différents solides ayant cette caractéristique (cône, cylindre, sphère), 93 étudiants présentent seulement un solide et 10 réponses sont erronées, – à la question « De quelle(s) figure(s) s'agit-il ? « On peut me générer par une translation d'un triangle », à part d'un prisme à base triangulaire (translation dans l'espace, 48/110 réponses), seulement 3 étudiants, parmi les 110 étudiants interrogés, ont identifié aussi les polygones (ex. : trapèze, pentagone) pouvant être obtenus par la translation dans le plan.

Les étudiants manifestent une incapacité à coordonner des données visuelles avec les propriétés du concept en jeu ou avec le contenu de la consigne donnée. La reconnaissance des formes des figures et des propriétés géométriques soulève une difficulté lorsqu'il s'agit d'une représentation inhabituelle d'une figure ou simplement d'une orientation inhabituelle de la représentation[1]

Dans sa théorie des intelligences multiples, Gardner (1983, p. 8) souligne que la capacité spatiale est une des « *compétences intellectuelles humaines relativement autonomes* ». Des relations entre la capacité spatiale et l'accomplissement de tâches mathématiques chez des élèves de différents âges, ont été rapportées par les chercheurs américains Fennema et Sherman (1978) et Guay et McDaniel (1977). Ces travaux mettent en évidence de telles relations dans la résolution de différentes tâches géométriques, où la reconnaissance des figures géométriques dépend des opérations mentales de rotation et de translation des figures, de leur conjonction ou de leur séparation. La reconnaissance des figures disposées inhabituellement exige des élèves un saut qualitatif qui s'exprime par l'opération de rotation mentale d'un objet géométrique (Duval, 1995, p. 194).

De même, Yakimanskaya insiste sur l'importance de la visualisation dans la construction de concepts. « *Visualizations are used as a basis for assimilating abstract [geometric] knowledge and individual concepts*» (1971, p. 145). Par exemple, cette chercheure écrit que la compréhension du concept de rectangle et de ses propriétés exige que les élèves analysent le rapport spatial de ses côtés (opposés et adjacents). Laborde (1988, p. 343) affirme aussi que « *les données issues de la perception sont un des éléments clés dans la construction des savoirs théoriques* ».

[1] Les représentations graphiques des figures peuvent avoir des positions différentes dans le plan, mais les figures planes que les élèves rencontrent dans les manuels sont habituellement tracées en privilégiant les directions parallèles aux bords de la page.

La faible capacité à visualiser les figures géométriques selon la description de leurs propriétés peut être attribuée à une expérience géométrique insuffisante et à une difficulté à imaginer toutes les figures possibles ayant les propriétés décrites. C'est l'appréhension opératoire des figures qui peut servir de support intuitif à la reconnaissance spontanée d'une figure (ou d'une propriété) (Duval, 1995).

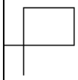
Vergnaud souligne la contribution de la perception et de l'imagination à la conceptualisation, car « *la conceptualisation est, par définition, l'identification des objets du monde et de leurs propriétés et relations* » (Vergnaud, 2001, p. 25). De même, écrit cet auteur, la conceptualisation apporte une contribution décisive à l'énonciation ; elle est une condition de l'énonciation (Vergnaud, 1991).

1.2. Difficultés langagières

Le langage et l'intuition géométriques sont des éléments fondamentaux dans l'acquisition de nombreux concepts et beaucoup d'échecs en mathématiques, souligne Vergnaud (1991), s'expliquent par l'incapacité à lire correctement, à comprendre l'énoncé, à justifier la démarche, *etc.*

Dans le tableau ci-après, nous donnons quelques exemples de difficultés langagières éprouvées par les étudiants. Il s'agit de l'emploi du langage géométrique dans l'identification des figures (de dimensions 3 et 2), des éléments de la figure et de leurs relations, dans l'interprétation des énoncés et des consignes et dans la description des démarches.

Difficultés observées	Exemples
10. Non-connaissance de certains termes géométriques.	– Parmi les droites remarquables du triangle (hauteur, bissectrice, médiane et médiatrice), seule la « hauteur » est bien connue, – la liste des polygones se termine par « hexagone ». Les termes « solide tronqué », « parallélépipède », « polyèdre », « corps rond », « secteur circulaire » (qui représente le développement de la surface latérale du cône) ne sont pas dans le vocabulaire des étudiants.

Difficultés observées	Exemples
11. Description de la figure ne fait pas appel à la recherche de maximum de ses caractéristiques	 – *ligne brisée* (les caractéristiques telles que : ouverte, non simple, *etc*., étaient aussi attendues).
12. Emploi de termes imprécis dans l'identification, la description ou dans la définition des figures	– Dans les définitions du polygone (et du cercle) en tant que figure plane fermée composée de segments de droite (composée d'une ligne courbe …), les étudiants oublient le terme « fermé », – le qualificatif « régulier » n'accompagne pas le terme pentagone, hexagone, *etc*. dans la détermination du nom du polygone régulier, – dans la description des étapes de construction de figures planes, les incorrections langagières principales portaient sur l'emploi des termes géométriques pour - identifier (par exemple, « ligne » (au lieu de « segment », de « corde » ou de « diamètre »), « cercle » au lieu de « disque », « circonférence » au lieu de « cercle » (circonférence est la mesure du contour du cercle et pas le contour). Par exemple, à la question demandant de trouver le centre du cercle, le tiers des 82% qui ont réussi utilise dans la description des procédures l'expression suivante : *Tracer les* ***perpendiculaires*** *aux milieux des* ***segments*** (l'expression attendue était « médiatrices des cordes »), - décrire les procédures (par exemple, « reporter la mesure d'angle A» au lieu de « mesurer l'angle A »), et sur l'absence d'étapes nécessaires (par exemple, il faut trouver le milieu avant de tracer la hauteur du triangle isocèle), *etc*.

Des recherches analysées (Van Hiele, 1987 ; Yakimanskaya, 1971 ; Fuys, Geddes et Tischler, 1988) il ressort que la mise en œuvre par des élèves du processus de conceptualisation nécessaire à l'énonciation, demande que l'enseignement insiste sur la recherche et la description du maximum de propriétés d'une figure géométrique. Cela établit une base permettant plus tard la déduction des propriétés. En effet, ce type de travail permet d'élargir des concepts géométriques particuliers ; il permet aussi d'éviter les obstacles associés à la modification d'un concept déjà mis en place sous une forme réduite (comprendre par exemple qu'il peut arriver qu'un rectangle soit un carré) ou d'un énoncé géométrique appris par cœur sans être compris. Si, précise Yakimanskaya (1971), les enseignants se contentent de signaler par des informations verbales les propriétés de figures, sans se préoccuper de l'organisation des activités pour le développement de l'imagination spatiale des élèves, cet enseignement « formaliste » ne participera pas à la construction des concepts. Dans de telles conditions, l'apprentissage au niveau supérieur exigera une mémorisation (Clements et Battista, 1992).

1.3. Difficultés à raisonner

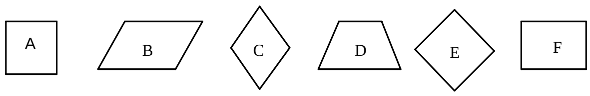
Le raisonnement est l'un des éléments fondamentaux dans la construction de concepts géométriques et son emploi est un indicateur de la progression conceptuelle de l'élève (van Hiele, 1959/1984, p. 246). En ce sens, la géométrie constitue un lieu privilégié, car elle « *entraîne les élèves au raisonnement mathématique, c'est-à-dire à un mélange de raisonnement déductif et d'imagination inductive, activé par une manipulation familière des images* » et « *prépare les élèves à aborder d'autres théories mathématiques* » (Brousseau, 2000, p. 1). Notons d'emblée, à l'instar de Brousseau, que la tendance des « mathématiques modernes » à assimiler le raisonnement mathématique au raisonnement déductif a contribué fortement « […] *à dévaluer la partie du « raisonnement » qui, à l'école primaire consistait à ordonnancer, à annoncer et à justifier un ensemble de tâches, ou un calcul…* » (p. 2).

En ce qui concerne le raisonnement visé par l'enseignement primaire, on peut décrire son emploi en référant aux processus mentaux qui favorisent la formation des idées et des jugements destinés à construire la connaissance, à mettre de l'ordre dans la connaissance, à choisir et appliquer les concepts et les processus appropriés à la tâche, à justifier, à convaincre, à prouver ou à réfuter et à développer des relations de dépendance entre des propositions pour aboutir à une conclusion. Il s'agit pour nous plus du fonctionnement « naturel » du raisonnement qui est commandé par les représentations des sujets (Duval, 1995) en le distinguant du raisonnement « logique »[2] qui est commandé par des règles de validité.

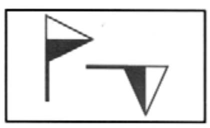
Dans le tableau ci-après, nous donnons quelques exemples de difficultés éprouvées par les étudiants qui peuvent être associées aux processus décrits ci-haut.

[2] Duval (1995, p. 250) distingue les formes suivantes de raisonnement :

- le syllogisme aristotélicien qui a été si longtemps considéré comme le raisonnement logique,
- le raisonnement déductif et le raisonnement par l'absurde qui sont, en mathématiques, les formes de raisonnement pour la démonstration,
- l'argumentation, forme de raisonnement plus adaptée aux situations ouvertes de discussion ou de recherche

<table>
<tr><th>Difficultés observées</th><th>Exemples</th></tr>
<tr><td>13. Reconnaissance de la forme du quadrilatère ne fait pas appel à la définition et à la recherche des propriétés communes de classes, même si la consigne le demande.</td><td>A la question suivante : Faites la classification en considérant les propriétés et les définitions habituelles des quadrilatères suivants selon le tableau ci-dessous :


<table><tr><th>Quadrilatères</th><th>Réponses</th></tr><tr><td>Carré</td><td></td></tr><tr><td>Losange</td><td></td></tr><tr><td>Rectangle</td><td></td></tr><tr><td>Parallélogramme</td><td></td></tr><tr><td>Trapèze</td><td></td></tr></table>
Parmi 16 (sur 110) réponses complètes pour les quatre premières classes (carrés, losanges, rectangles, parallélogrammes), 6 participants ont identifié le trapèze seulement dans sa représentation habituelle.</td></tr>
<tr><td>14. Compréhension de la consigne ou des mots particuliers de la consigne (comme « est », « s'appelle », « au moins », « certainement », etc.), qui participent à la réponse attendue.</td><td>À la question « Comment appelle-t-on ?
c) Un quadrilatère dont les côtés sont isométriques s'appelle _________________ ».
il y avait seulement 7 réponses correctes (losange). Et encore, 7 contenaient deux noms « carré, losange» ; 95 étudiants ont répondu « carré».</td></tr>
<tr><td>15. Détermination des figures selon la description de leurs propriétés (définitions constructives).</td><td>En demandant de déterminer le quadrilatère défini par des énoncés du genre suivant « Mes diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu », etc., nous avons observé les difficultés chez presque la moitié du groupe (qui a répondu le carré au lieu du losange).
(Les étudiants confondent ainsi l'appartenance d'une figure à une classe de quadrilatères définie par une propriété et la détermination d'une classe par une propriété).</td></tr>
<tr><td>16. Distinction entre une définition et une description.</td><td>Les étudiants font peu de distinction entre une définition et une description. Pour eux, « définir » signifie souvent nommer une propriété ou plusieurs appartenant à la figure.</td></tr>
</table>

Difficultés observées	Exemples
17. Classification des figures géométriques.	– La classification des triangles fait appel aux quatre classes suivantes : isocèles, équilatéraux, scalènes et rectangles. (Les critères de classification selon les côtés et selon les angles ne sont pas utilisés), – les étudiants ont une représentation erronée des relations entre les classes de triangles : les « triangles isocèles » et « triangles équilatéraux » sont vus comme deux classes distinctes, les triangles isocèles sont vus comme une sous-classe des « triangles scalènes ».
18 Connaissance de propriétés des transformations.	À la question : « *Dans cet encadré, on a dessiné un objet qui a ensuite été déplacé. Quelle transformation a été effectuée ? Indiquer les propriétés de cette transformation* », la rotation (ou la rotation et la translation) a été facilement reconnue. Cependant peu de réponses correctes ont été obtenues quant aux propriétés (centre et angle de rotation). c) 
19. Conversion des unités de mesure.	À la question : *« Combien y a-t-il de mètres carrés dans* 2 *kilomètres carrés ? dans 1 centimètre carré* ? », les taux de réussite ont été respectivement de 15/110 et 14/110.
20. Emploi des concepts principaux.	Dans la question : « *L'aire d'un cercle est de 320 cm^2. Parmi les réponses suivantes (*31.4, 94.2, 62.8), *laquelle se rapproche le plus de la mesure de la circonférence ? Entourer la réponse. Justifier.* », l'application des formules d'aire et de circonférence du cercle a été effectuée par 33 participants (parmi 110).
21. Justification des résultats.	– À la question « Vrai ou Faux ? Justifier la réponse. » a) *Si on double les côtés d'un rectangle, son aire aussi double*, la majorité des participants répond à la question sans justification. (Les justifications données contiennent des exemples concrets.)

Le phénomène de la non-reconnaissance d'une figure dans une de ses représentations dessinées appelée « dessin/figure », « figural concept », *etc.* (cité dans Capponi et Laborde, 1995, p. 265) est dû au traitement théorique du dessin et dépend du niveau conceptuel de l'étudiant.

Vinner et Hershkowitz (1980) déclarent qu'en pensant à des objets géométriques, les élèves n'emploient pas des définitions de concepts, mais plutôt des images, des combinaisons de toutes les images mentales et des propriétés qui ont été associées au concept. Leur recherche démontre qu'une même représentation de figure peut être associée par les élèves à des concepts géométriques différents et que telle ou telle représentation peut trouver sa source dans un enseignement inopportun et dans le choix limité des exemples présentés dans les manuels.

Les autres études (Zykova, 1969 ; Kabanova-Meller, 1970 ; Burger et Shaughnessy, 1986 ; Fuys, Geddes et Tischler, 1988) attestent que les conceptions limitées d'élèves s'expliquent par l'habitude d'apprendre les exemples particuliers et de considérer comme l'élément essentiel du concept des particularités non essentielles, mais communes. Hershkowitz (1989) constate également que les élèves peuvent avoir des difficultés dans l'application d'une définition qu'ils connaissent, s'ils ont aussi une image visuelle spécifique associée à ce concept. Cela aide à expliquer la résistance des élèves aux rapports hiérarchiques entre les quadrilatères particuliers : les images attachées à chaque figure fonctionnent cognitivement non pas comme des cas particuliers, mais comme des modèles généraux (Fischbein, 1987).

À partir de l'école primaire, la nécessité de raisonner se présente plus particulièrement dans des situations de classification, de construction et de résolution de problèmes. Ces activités participent à une structuration des connaissances, à la construction de concepts géométriques, permettent de faire le choix de concepts et de les appliquer correctement, de réduire l'information à ce qui est nécessaire et suffisant pour comprendre et traiter une situation. Cependant les différentes activités qu'on peut observer dans les manuels scolaires sont proposées comme des faits géométriques établis, ce qui ne donne pas à l'élève l'occasion ni d'observer et de découvrir des relations d'objets géométriques ni de mettre en jeu de telles relations dans des activités plus conceptuelles. Avec une telle approche, tout ce qui reste à l'élève est de retenir par cœur les énoncés des propriétés des figures et des classes.

Dès l'école primaire, on doit offrir aux élèves des occasions de construire leur pensée géométrique, et si les élèves n'atteignent pas le niveau suffisant pour employer le raisonnement, écrit Van Hiele (1986) c'est, en partie, parce qu'on ne leur offre pas de problèmes géométriques appropriés. Cette « *période prolongée d'inactivité géométrique* » (Wirszup, 1976, p. 85) dans les premières années d'apprentissage rendrait les élèves « *geometrically deprived* » (Fuys, Geddes et Tischler, 1988). Laborde (1994, p. 386) affirme que la sélection des éléments pertinents d'un dessin pour les interpréter géométriquement et les rattacher à des concepts géométriques ne sont pas des compétences spontanées chez les élèves, mais le résultat d'un apprentissage.

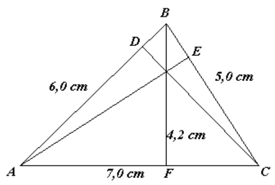
Les enseignants devraient orienter leur travail tout d'abord vers le niveau où « *des figures géométriques deviennent les porteurs de propriétés* » (Wirszup, 1976, p. 88) pour ensuite, viser la compréhension des relations entre les propriétés de la figure et entre les figures.

1.4. Résolution de problèmes

La résolution de problèmes se situe parmi les activités les plus complexes et exige beaucoup d'autonomie, d'initiative intellectuelle et de compréhension de la part du sujet. L'analyse de recherches portant sur les difficultés des élèves dans la résolution de problèmes géométriques qui emploient le dessin (Yakimanskaya, 1958 ; Zykova, 1955 ; Zhuravlev, 1950), démontre que la démarche de recherche de la solution dépend du niveau de visualisation et de conceptualisation. Il s'agit de la reconnaissance et de l'identification des éléments (indiqués ou supposés) nécessaires à la résolution d'un problème géométrique, de la capacité de tirer des informations supplémentaires de l'observation visuelle (visualiser les éléments non-tracés et les procédures permettant la résolution d'un problème) et de déterminer les conséquences logiques de certaines données.

Dans le tableau ci-après, nous donnons quelques exemples de difficultés éprouvées par les étudiants dans la résolution de problèmes géométriques. Il s'agit de difficultés visuelles, langagières et conceptuelles.

Difficultés observées	Exemples
22. Coordination entre les éléments visuels et les concepts et/ou les théorèmes pertinents.	– À la question demandant de trouver le périmètre de l'hexagone régulier inscrit dans un cercle de l'aire de π cm^2, presque la moitié du groupe ne répond pas à la question. Les difficultés des étudiants sont dues à l'absence du dessin (hexagone inscrit), à l'interprétation du terme « inscrit », à l'identification et à la représentation sur le dessin des axes divisant l'hexagone en six triangles, à la détermination de la nature de ces triangles (équilatéraux), à l'identification d'un élément commun (rayon/côté de l'hexagone) et l'emploi de formules (A et P).

Difficultés observées	Exemples
	– À la question : « *Voici le triangle ABC dont les mesures des côtés sont : mAB=6cm, mBC=5cm, mAC=7cm et de la hauteur mBF=4,2cm. Trouvez les mesures de deux autres hauteurs* », la majorité essaye d'appliquer la formule de Pythagore, quelques-uns mesurent à la règle (bien que toutes les données nécessaires à la résolution soient présentes et que chacun connaisse la formule de l'aire du triangle). Cet exemple correspond à un échec permanent et peut aussi être considéré comme « problème canonique ». 

La lecture du dessin demande soit de reconnaître un tout à partir de ses éléments ou de « disséquer » les parties d'un tout, soit d'analyser la figure selon son arrangement spatial, soit encore d'établir des relations entre les éléments de la figure et de découvrir de nouvelles informations (Zhuravlev, 1950 ; Zykova, 1955 ; Yakimanskaya, 1958).

Rubinshtein (1958) explique que les figures (ou les éléments nécessaires pour résoudre un problème) ne heurtent pas l'œil quand on « regarde » simplement le dessin et que le processus de perception d'un dessin n'est pas un acte instantané qui aurait pour résultat une découverte immédiate de la complexité entière d'un objet géométrique. La diversité des éléments du dessin apparaît seulement par l'activité mentale analytique-synthétique active du sujet, qui définit les divers critères de l'analyse. Ce processus d'analyse permet à l'élève d'évoquer certains éléments de la figure, les relations entre les éléments, de relier cette figure à une figure ou à la démarche connue, de représenter ces éléments sur le dessin ou de les employer afin de répondre à la question ou résoudre un problème.

Dans une revue de l'Institut de la psychologie de l'Académie des sciences pédagogiques de RSFSR[3] (1958), les recherches sur les difficultés des élèves dans l'étude des preuves géométriques expliquent les erreurs commises par un processus d'abstraction ou par une « vision mathématique »[4] insuffisamment développés (Zhura-

[3] L'abréviation de la république russe (l'une des quinze républiques de l'U.R.S.S).

[4] Ce terme est employé dans la recherche de Zhuravlev (1950) sans être précisé. Nous comprenons par la « vision mathématique » le comportement attendu dans la résolution des tâches mathématiques (et géométriques en particulier) exigeant la reconnaissance des éléments (présents ou supposés) nécessaires à la résolution, la capacité à tirer des informations supplémentaires de l'observation visuelle (déterminer les conséquences logiques de certaines données) et l'anticipation de la stratégie

vlev, 1950 ; Zykova, 1955 ; Yakimanskay, 1959) et notent que les élèves ont des difficultés à coordonner mentalement le dessin avec la condition du problème contenue dans la consigne (Vladimirskii, 1949, Landa, 1955, Kabanova-Meller, 1959).

Cette identification des difficultés se révèle intéressante pour l'organisation de la formation de futurs maîtres, dans la mesure où elle peut servir de point de départ à leur analyse, à l'analyse du contexte de leur apparition et à la recherche des conditions permettant leur résolution.

2. Préparation mathématique des enseignants, compte tenu de leurs lacunes

Si les recherches analysées (Mayberry, 1983 ; Graeber, Tirosh, Glover, 1986 ; Ginther, Pigge et Gibney, 1987 ; Porter, 1989 ; Brown, Cooney et Jones, 1990 ; Fennema et Franke, 1992 ; Bauersfeld, 1994 ; Burton, Detheux-Jehin et Fagnant, 1997) proviennent de différents pays (ayant des programmes différents de formation et différents critères d'évaluation), plusieurs de ces études notent une préparation faible en mathématique des enseignants du primaire.

Brown, Cooney et Jones (1990), en faisant le bilan d'un ensemble d'études en formation initiale des maîtres, rapportent qu'en général les enseignants du primaire aux États-Unis ne possèdent pas un niveau suffisant de compréhension des mathématiques pour enseigner cette discipline. Graeber, Tirosh, Glover (1986) précisent qu'ils ont des difficultés dans le choix des opérations appropriées pour résoudre les problèmes mathématiques. Dans leur étude de 1989, ils associent les difficultés des enseignants aux erreurs que font les élèves du primaire.

L'étude de Fennema et Franke (1992), par la description des erreurs des enseignants en résolution de tâches mathématiques, conclut aussi que la responsabilité des enseignants est engagée pour les difficultés observées chez leurs élèves dans l'apprentissage des mathématiques.

Bauersfeld (1994) souligne que le « bagage mathématique et pédagogique » des futurs maîtres, accumulé dans les années d'études pré-universitaires, peut engendrer des conséquences importantes sur leur formation universitaire. Notre propre analyse de 184 cas d'échec à l'examen de classement en mathématiques pour la formation à l'enseignement primaire (en 1999) montrait que le tiers de ces étudiants en échec n'avait pas suivi de cours de mathématiques en dernière année d'enseignement secondaire et que 150 étudiants n'avaient pas eu de formation mathématique au niveau collégial (Ekimova, 2005). Cependant, d'autres chercheurs (Ginther, Pigge et Gibney, 1987) ont montré que le nombre de cours suivis en ma-

---

de résolution (le choix et l'emploi de concepts et de méthodes permettant la résolution d'un problème).

thématiques n'explique pas à lui seul le niveau insuffisant de la connaissance de la discipline d'une grande partie des professeurs du primaire.

Quelles autres raisons pourraient alors expliquer la faible préparation mathématique (et géométrique en particulier) des enseignants du primaire ? L'étude de Porter (1989) démontre que la géométrie est le sujet le plus fréquemment identifié par les étudiants comme étant appris simplement pour « être récité », c'est-à-dire que le contenu géométrique a été couvert de façon brève et superficielle (p. 11). Mayberry (1983) signale qu'apparemment, beaucoup de concepts géométriques ont été appris par cœur. De plus, souligne Porter (1989), les enseignants n'enseignent pas souvent certains contenus prescrits par le programme d'études de la géométrie.

Dans l'étude portant sur le premier degré de l'enseignement secondaire, les chercheurs belges Burton, Detheux-Jehin et Fagnant (1997) dégagent le contenu géométrique évalué par les enseignants et le relient à la connaissance que les enseignants possèdent. La géométrie évaluée est surtout la géométrie plane (seulement six pour cent de questions font référence à la géométrie dans l'espace). Les questions sont posées (dans la majorité des cas) sur un aspect précis de la matière. Parmi les questions portant sur les constructions, 84 % des exercices se résument à une simple construction au moyen des instruments, 3 % demandent de rédiger les étapes et seulement 13 % imposent de donner des justifications de la construction. Aucun exercice de démonstration n'est proposé aux élèves. Quant à la technique d'apprentissage de la démonstration, les auteurs mentionnent qu'elle se réalise en trois étapes « *apprendre par cœur, compléter des démonstrations lacunaires, rédiger et résoudre des démonstrations innovantes* ». Les questions portant sur une démarche explicative et justificative sont peu représentées dans les tests d'évaluation. Les résultats montrent d'importantes variations dans les évaluations des élèves et cette diversité, concluent les auteurs, a des conséquences sur la réussite ou l'échec de l'élève, sur le bagage géométrique acquis et sur les méthodes employées par l'élève dans ses préparations aux tests et aux examens.

De façon implicite ou explicite, ces études font ressortir le fait que les connaissances mathématiques des enseignants influent considérablement sur l'enseignement de cette discipline. Cela s'observe dans le choix du contenu, dans les évaluations des apprentissages et surtout dans la manière d'enseigner. Quant aux raisons principales des lacunes mathématiques des enseignants, nous pensons que le nombre de cours suivis, le contenu étudié et surtout la façon dont ce contenu a été enseigné et appris jouent un rôle décisif.

La préparation géométrique (et surtout la formation d'une culture géométrique) nous apparaît donc un enjeu important, sur lequel nous devons agir dans le cadre de notre formation. Nous admettons volontiers qu'une bonne connaissance mathématique n'est pas une condition suffisante pour un bon enseignement. Cependant, il nous faut aussi admettre qu'il est très difficile pour le formateur en didactique des mathématiques de parler de didactique pour l'acquisition de connaissances, lorsque celles-ci sont ignorées du public auquel le formateur s'adresse. De plus les connaissances didactiques que le formateur transmettra lors de son enseignement seront interprétées selon les théories personnelles des étudiants et probablement ne seront pas mobilisées dans la pratique, donc ne deviendront pas utiles pour l'enseignement. Peut-être se trouve ici l'une des raisons qui expliqueraient l'écart existant entre le contenu didactique de la formation et son utilisation dans la réalité scolaire.

Dans le cadre de notre enseignement en formation des maîtres et lors des observations des futurs maîtres en stages, nous avons pu confirmer à maintes reprises la nécessité d'approfondissement des connaissances disciplinaires. Souvent, le manque de connaissances spécifiques ne permettait pas aux stagiaires de se servir des occasions d'explorer l'inconnu, de profiter d'une situation pour aller plus profondément dans la recherche du sens de la notion, de répondre de façon adéquate aux questions des élèves, d'utiliser les réponses non complètes pour continuer dans la même direction en modifiant la question ou en utilisant le contre-exemple, *etc*. Dans certains cas provoqués par des imprévus qui demandaient une prise de décision dans le feu de l'action, les étudiants faisaient des erreurs géométriques (Ekimova et Portugais, 2001).

Les étudiants ont un réel besoin de formation aux différentes démarches géométriques, aux diverses formes qu'elles peuvent prendre, à leur emploi. Par exemple, ils ne connaissent qu'une méthode d'enseignement de la notion de cercle, celle qui consiste à montrer les propriétés essentielles du cercle, les nommer, montrer les formules, proposer les exercices d'application.

Réflexions pour la formation des enseignants

L'analyse des recherches portant sur les difficultés en apprentissage de la géométrie nous montre l'importance du développement progressif et harmonieux de la visualisation, du langage géométrique et du raisonnement, lesquels participent à la construction des concepts géométriques et à la résolution de problèmes. Quant à la performance de nos étudiants au niveau de la visualisation, de l'identification des propriétés géométriques, de la conceptualisation, de l'imagination spatiale, de l'abstraction et de la résolution de problèmes géométriques, elle n'est certes pas élevée, surtout en début de la formation. Les activités telles que la classification de figures ou la résolution de problèmes continuent de constituer un obstacle chez certains même à la fin de formation.
L'enseignement de la géométrie à l'école primaire exige de l'enseignant une mise en œuvre d'une multitude de connaissances susceptibles de développer les aptitudes et les connaissances spatiales des élèves. Pour pouvoir atteindre ces objectifs,

l'enseignant lui-même doit posséder ces aptitudes et avoir connaissance de cet environnement. Pour ce qui est des objectifs géométriques de la formation didactique à l'enseignement primaire, nous pensons qu'elle doit présenter une organisation qui mette l'accent sur la « manière » d'apprendre et dans laquelle les étudiants seront amenés à revivre le développement progressif de concepts géométriques. En formation, la focalisation sur des contenus géométriques particuliers posant problème aux élèves s'avère insuffisante compte tenu du faible niveau de préparation géométrique des futurs maîtres. Pour être à l'aise dans leur enseignement, les futurs enseignants ont besoin d'un système cohérent de connaissances géométriques et non d'une collection de savoirs géométriques particuliers.

Comment organiser la formation didactique à l'enseignement de la géométrie de telle sorte qu'il y ait chez les futurs enseignants une progression de niveaux de la pensée géométrique et une appropriation et mise en œuvre des concepts didactiques ? Cette question suppose la recherche d'un équilibre dans l'articulation entre les savoirs géométriques et les activités géométriques et entre les savoirs géométriques et la pratique enseignante.

Bibliographie

BATTISTA, M.T., WHEATLEY, G.H. & TALSMA, G. (1982), The importance of spatial visualization and cognitive development for geometry learning in preservice elementary teachers, Journal for Research in Mathematics Education, **13**, 332–340. In S. I. Brown, T. J. Cooney & D. Jones, Mathematics teacher education, in W. Robert Houston (ed.), *Handbook of Research on Teacher Education*, 1990, New York: Macmillan.

BAUERSFELD, H. (1994), Réflexions sur la formation des maîtres et sur l'enseignement des mathématiques au primaire, *Revue des sciences de l'éducation*, **20(1)**, 175–198.

BISHOP, A.J. (1980), Spatial ability and mathematics education, *Studies in Mathematics Education*, **11**, 257–269.

BISHOP, A.J. (1989), Review of visualization in mathematics education, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, **11(1)**, 7–16.

BROUSSEAU, G. (2000), *Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire : l'étude de l'espace et de la géométrie*, [En ligne]. http://dipmat.math.unipa.it/~grim/brousseau_geometrie_03.pdf. 8 (Page consultée le 15 mai 2002).

BROWN, S.I., COONEY, T.J. & JONES, D. (1990), Mathematics teacher education, In W. Robert Houston (ed.), *Handbook of Research on Teacher Education*, 1990, New York: Macmillan, 639–657.

BURGER, W. & SHAUGHNESSY, J. (1986), Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry, *Journal for Research in Mathematics Education*, **17**, 31–48.

BURTON, J., DETHEUX-JEHIN, M. et FAGNANT, A. (1997), *Comment les enseignants évaluent-ils la géométrie au premier degré secondaire ?*, Liège : Service de Pédagogie expérimentale de l'Université.

CAPPONI, B. et LABORDE, C. (1995), Modélisation à double sens, Dans R. Noirfalise et M.-J. Perrin-Glorian, *Actes de la VIIIe École didactique d'été*, Saint-Sauves d'Auvergne, France, 265–272.

CLEMENTS, K. (1982), Visual imagery and school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, **2 (2 &3)**, 2-–9, 33–38.

CLEMENTS, D. & BATTISTA, M. (1992), Geometry and Spatial Reasoning, In D. Grows, (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, NewYork: Macmillan Publishing Co., 1992.

DUVAL, R. (1992), Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ?, *Petit x*, **31**, IREM de Grenoble, 37–61.

DUVAL, R. (1995), Sémiosis et pensée humaine : registre sémiotique et apprentissages intellectuels, Berne : Peter Lang.

EKIMOVA, E. et PORTUGAIS, J. (2001), L'emploi de manuels scolaires et du référentiel des compétences par de futurs enseignants en enseignement de la géométrie au primaire, *Actes du colloque de GDM*, Montréal, 94–119.

EKIMOVA, E. (2005), *Une approche de formation didactique à l'enseignement de la géométrie au primaire*, Thèse de Doctorat, Université de Montréal.

FENNEMA, E. & FRANKE, M.L. (1992), Teachers' knowledge and its impact, In D.A. Grows (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and learning*, New York: The National Council of Teachers of Mathematics, 147–164.

FENNEMA, E. & SHERMAN, J. (1978), Sex-related differences in mathematics achievement and related factors: a further study, *Journal for Research in Mathematics Education*, **9**, 189–203.

FISCHBEIN, E. (1987), *Intuition in Science and Mathematics*, Dortrecht, The Netherlands: D. Reidel Publishing Company.

FISCHBEIN, E. (1993), The theory of figural concepts, *Educational Studies in mathematics*, **24(2)**, 139–162.

FUYS, D., GEDDES, D. & TISCHLER, R. (1988), The van Hiele Model of Thinking in Geometry Among Adolescents, *Journal for Research in Mathematics Education Monograph*, **3**, Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

GARDNER, H. (1983), *Forms of mind. The theory of multiple intelligence*, New York: Basic Books.

GINTHER, J.L., PIGGE, F. & GIBNEY, T.C. (1987), Three decade comparison of elementary teachers' mathematics courses and understandings, *School Science and Mathematics*, 587–597.

GRAEBER, A., TIROSH, D. & GLOVER, R. (1986), Perservice teachers' beliefs and performance on measurement and partitive division problems, In G. Lappan & R. Even (Eds.), *Proceedings of the Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, East Lansing, MI : Michigan State University, 262–267.

GUAY, R.B. & MCDANIEL, E. (1977), The relationship between mathematics achievement and spatial abilities among elementary school children, *Journal of research in Mathematics Education*, **8**, 211–215.

GUTIÉRREZ, A., JAIME, A. & FORTUNY, J.M. (1991), An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels, *Journal for Research in Mathematics Education*, **22(3)**, 237–251.

HERSHKOWITZ, R. (1989), Visualization in geometry – Two sides of the coin. *Focus on learning problems in mathematics*, **11**, 61–76.

HERSHKOWITZ, R., BEN-CHAIM, D., HOYELES, C., LAPPAN, G., MITCHELMORE, M. & VINNER, S. (1990), Psychological aspects of learning geometry, In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition. A research synthesis by the International group for the Psychology of mathematics Education*, Cambridge, MA: Cambridge University press, 70–95.

HOFFER, A. (1983), Van Hiele-based research, in *Acquisition of mathematics concepts and processes* (Eds. R. Lesh & M. Landau), Academic Press, New York, USA, 205–227.

KABANOVA-MELLER, E.N. (1959), Positive and negative abstraction in the process of solving geometry problems, Institute of Psychology, Academy of Pedagogical Sciences of the RSFSR, *Published in Reports (Doklady) of the Academy of Pedagogical Sciences of the RSFSR*, **1**, Translated by Joan W. Teller, 3l–34.

KABANOVA-MELLER, E.N. (1970), The role of the diagram in the application of geometric theorems, In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*, **4**, Chicago: University of Chicago, 7–49.

KRUTETSKII, V.A. (1976), *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*, Chicago: University of Chicago press.

LABORDE, C. (1988), L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, **9(3)**, 337–364.

LABORDE, C. (1994), Les rapports entre visuel et géométrie dans un EIAO, Dans M. Artigue, R. Gras, C. Laborde et P. Tavignot (dir.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, Grenoble : La Pensée Sauvage, 387–394.

LANDA, L.N. (1955), *The Psychology of Forming Methods of Reasoning*, (dissertation), Moscow.

LEINHARDT, G. (1988), Expertise in instructional lessons: An example from fractions, In D. Grows, T. Cooney & D. Jones (Eds.), *Perspectives on research on effective mathematics teaching*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 47–66.

MAYBERRY, J. (1983), The Van Hiele levels of geometry thought in undergraduate preservice teachers, *Journal for Research in Mathematics Education*, **14**, 50–59.

PORTER, A. (1989), A curriculum out of balance. The abc of elementary school mathematics, *Educational Researcher*, **18**, 9–15.

PRESMEG, N.C. (1986b), Visualization in high-school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, **6**, 42–46.

RUBINSHTEIN, S.L. (1958), *Bowing Consciousness*, Moscow.

VAN HIELE, P.M. (1986), *Structure and Insight: A theory of MathematicsEducation*, Academic Press Inc., London.

VAN HIELE, P.M. (1959/1984), The child's thought and geometry, In D. Fuys, D. Geddes & R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writing of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*, Brooklyn, NY: Brooklyn College, School of Education, 1985, 243–252, (ERIC Document reproduction Service n. 289 697).

VAN HIELE-GELDOF, D. (1957/1984), The didactics of geometry in the lowest class of secondary school, In D. Fuys, D. Geddes & R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writing of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*, Brooklyn, NY: Brooklyn College, School of Education, 1985, 1–214, (ERIC Document reproduction Service n. 289 697).

VERGNAUD, G. (1991), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques*, **10(2-3)**, 133–170.

VERGNAUD, G. (2001), Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance, *Actes du colloque de GDM*, Montréal.

VINNER, S. & HERSHKOWITZ, R. (1980), Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts, *4th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Berkeley.

VLADIMIRSKII, G.A. (1949), The Experimental Basis of a System and Methodology of Exercises in the Development of Spatial Imagination, *Proceedings of the APS*, **27**.

WIRSZUP, I. (1976), Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry, In J. L. Martin & D. A. Bradbard. (Eds.), *Space and geometry*, *Papers from a research workshop*, Athens, GA: University of Georgia, Georgia Center for the Study of Learning and Teaching Mathematics, 75–97. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 132 033).

YAKIMANSKAYA, I.S (1959), Individual differences in solving geometry problems on proof, Institute of Psychology, Academy of Pedagogical Sciences of the

RSFSR, Published in *Reports (Doklady) of the Academv of Pedagogical Sciences of the RSFSR*, **1**, 3l–34. (Translated by Joan W. Teller).

YAKIMANSKAYA, I.S. (1971), The development of spatial concepts and their role in the mastery of elementary geometric knowledge, In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*, ***5***, 145–168, Chicago: University of Chicago.

ZHURAVLEV, B.B. (1950), Mathematical Vision, *Mathematics in the School*, **5**.

ZYKOVA, V.I. (1955), Essays oh the Psychology of Mastering Elementary Geometric Knowledge, Moscow, 1955. Of the Institute of Psychology, Academy of Pedagogical Sciences of the RSFSR. Published in *Report (Doklady) of Academy of Pedagogical Sciences of the RSFSR*, 1958, **3**, 49–54. Translated by Linda Norwood.

ZYKOVA, V.I. (1969), Operating with concepts when solving geometry problems, In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*, **1**, 93–148, Chicago: University of Chicago.

HELENA BOUBLIL-EKIMOVA
Université Laval
Département d’études sur
l’enseignement et l’apprentissage
Québec, Canada, G1V 0A
helena.boublil@fse.ulaval.ca