CAROLINE BULF

LE RÔLE DE LA SYMÉTRIE DANS LA NATURE DU TRAVAIL GÉOMÉTRIQUE DES TAILLEURS DE PIERRE ET DES ÉBÉNISTES

Abstract. The role of symmetry in the geometrical nature of work of stone-cutter and cabinetmacker. Through interviews with stone tailors and cabinet markers, we studied the nature of the treatment of the concept of symmetry. This study shows that the symmetries identified orient the craftsman's gestures towards a large list of techniques relatively rooted. The gestures of a craftsman may come from teaching's residue, contextual adaptation, knowledge or references to expertise. The entanglement of all these factors is such that we can give the concept of symmetry, a status that reflects all these influences : this means that the symmetry is not a familiar concept or a scientific concept, to use the terminology of Vygotsky, but rather refers to an intermediate concept that reflects all these influences, a concept that is "naturalized".

Résumé. A partir d'entretiens-actions auprès de tailleurs de pierre et d'ébénistes, nous avons étudié la nature du traitement du concept de symétrie. Cette étude montre que les symétries repérées orientent leurs gestes vers des répertoires de techniques relativement figés. Les gestes des artisans peuvent provenir de résidus d'enseignement, d'une adaptation au contexte, d'un savoir ou savoir-faire de référence. L'intrication de ces facteurs est telle que l'on peut accorder au concept de symétrie un statut qui rend compte de toutes ces influences, c'est-à-dire un statut non pas de concept familier ou de concept scientifique, pour reprendre la terminologie de Vygotski mais plutôt un concept intermédiaire qui rend compte de toutes ces influences, autrement dit un concept « naturalisé ».

Mots-clés. Didactique des mathématiques, géométrie euclidienne, symétrie, transformations du plan, Espaces de Travail Géométrique (ETG), tailleur de pierre, ébéniste.

Introduction

Cette recherche s'inscrit dans une recherche plus générale sur les effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège (Bulf, 2008). Si on réfère à Vergnaud (1991), l'étude des processus de conceptualisation se réalise à partir de l'observation et de l'analyse de la conduite d'individus en action[1] dans des situations requérant le fonctionnement du concept étudié, ici la symétrie. Tel est le cas des situations professionnelles des artisans tailleurs de pierre et ébénistes, dans une

[1] « Au fond de l'action, la conceptualisation » (Vergnaud, 1996).

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 5, p. 119 – 146.

problématique pratique[2] (au sens de Berthelot et Salin, 1992) soumise à des contraintes professionnelles (telles que l'efficacité, le temps, le coût, le matériel, *etc*.). Le contexte de l'artisanat offre a priori un contexte privilégié pour observer le concept de symétrie dans une perspective non mathématique et dans l'action. On peut même supposer que les artisans tailleurs de pierre et ébénistes sont en quelque sorte des « experts » du concept de symétrie d'un point de vue lié à leur profession que nous chercherons à préciser : leur pratique concerne le plus souvent la réalisation de motifs symétriques qui ornent notre vie quotidienne.

1. Cadre théorique et questions de recherche

1.1 Les paradigmes géométriques et les Espaces de Travail Géométrique

Nous faisons référence au cadre de Houdement et Kuzniak (2006) des paradigmes géométriques et des Espaces de Travail Géométrique (ETG) car ce support théorique nous permet de prendre en compte la spécificité géométrique du travail de l'artisan et son rapport avec la réalité. Inspirés par la définition de paradigme selon Kuhn et des travaux de Gonseth sur les différents modes de pensée tels que l'intuition, l'expérience et le raisonnement déductif, Houdement et Kuzniak ont catégorisé ces modes de pensées selon des paradigmes dits géométriques, qui se caractérisent par leur rapport à la réalité :

- **La géométrie I** (GI) ou « géométrie naturelle » a pour source de validation la réalité, le sensible. […] la géométrie I correspond déjà à un effort d'abstraction du réel, dans la mesure où la pensée sélectionne pour s'exercer certains aspects des objets s'ils sont matériels ou les traduit en schémas, comme par exemple des figures simples (cercles, carrés…). L'intuition, l'expérience et le raisonnement déductif s'exercent sur des objets matériels, ou matérialisés, grâce à la perception ou la mise en œuvre d'expériences mécaniques réelles comme le pliage, le découpage ou leur pendant virtuel. En ce sens, la géométrie d'Euclide n'est pas de la géométrie I.
- **La géométrie II** (GII) ou « géométrie axiomatique naturelle » : dans cette géométrie, la source de validation se fonde sur les lois hypothético-

[2] « Nous avons désigné par *problématique pratique* le type de rapport caractéristique d'une famille de problèmes spatiaux non didactiques (…) les situations correspondantes sont essentiellement des situations d'action. (…) la *vérification* du résultat obtenu se fait sous le mode de l'évidence et de l'instant. Si la solution n'est pas satisfaisante, le sujet va l'ajuster au résultat attendu par une suite de corrections immédiates, sans se soucier de porter un regard réflexif sur la méthode utilisée initialement pour l'obtenir. » (Berthelot R. et Salin M.-H., 2000-2001, 14–15).

déductives dans un système axiomatique aussi précis que possible. Mais le problème du choix des axiomes se pose. La relation avec la réalité subsiste encore dans cette géométrie, dans la mesure où elle s'est constituée pour organiser les connaissances géométriques issues de problèmes spatiaux. L'axiomatisation proposée est certes une formalisation, mais elle n'est pas formelle car ici la syntaxe n'est pas coupée de la sémantique qui renvoie à la réalité. D'où la conservation du qualificatif naturelle ». (Houdement et Kuzniak, 2006, 180–181).

S'ajoute à cette catégorisation la notion d'Espace de Travail Géométrique (ETG) pour décrire plus finement l'activité géométrique, que la simple distinction GI-GII ne permet pas, en général, d'appréhender (schéma 1) :

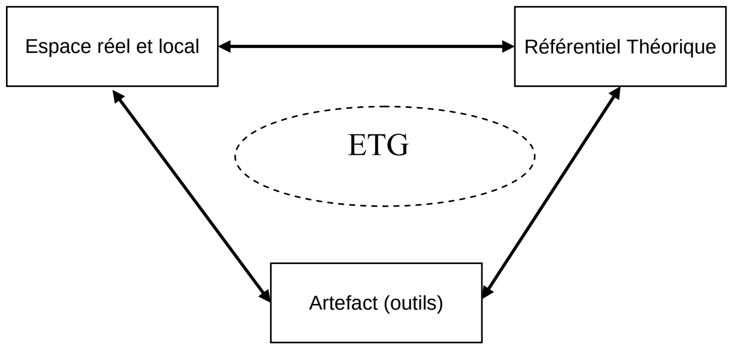


Schéma 1 : définition de l'Espace de Travail Géométrique.

L'« espace réel et local » désigne l'ensemble des objets matérialisés (il peut s'agir par exemple du support matériel de l'artisan, comme le bloc de pierre chez le tailleur de pierre ou la surface du bois chez l'ébéniste) ; le pôle « artefacts » rassemble les outils et instruments mobilisés par l'artisan et enfin la composante dite « référentiel théorique » définit le système logico-déductif dans lequel s'organisent le(s) modèles(s) théoriques et les objets mathématiques en jeu. Cette description de l'Espace de Travail Géométrique fait émerger l'idée d'adaptation des trois pôles qui le définissent : ces derniers s'adaptent au statut du géomètre, au but que celui-ci s'est fixé et de l'institution dans laquelle le géomètre s'inscrit. On peut d'ores et déjà supposer que le paradigme dominant dans lequel s'inscrit l'ETG de l'artisan est un paradigme GI (car il répond à une problématique pratique et non une problématique de la géométrie au sens de Berthelot et Salin (1992)).

1.2. La dimension cognitive de l'ETG

Nous supposons que l'articulation des différents pôles de l'ETG fait écho à ce que Vergnaud entend par conceptualisation : « ce que j'entends par conceptualisation, c'est l'identification des objets du monde, de leurs propriétés, relations et transformations, que cette identification résulte d'une perception directe ou quasi-directe, ou d'une construction » (Vergnaud, 2007, p. 342). Vergnaud place au cœur du processus de conceptualisation la notion de représentation du réel, révélée à travers l'activité humaine. Il s'inspire de la notion de schème[3] proposée par Piaget pour décrire l'organisation de la conduite d'un sujet dans une situation donnée. La notion d'invariants opératoires (Vergnaud, 1991) constitutifs du schème, permet alors de décrire l'articulation entre les pôles de l'ETG et le plan cognitif :

- les concepts-en-acte sont les éléments ou notions qui peuvent être pertinents ou non pertinents, qui sont mis en jeu et se révèlent naturellement lors de l'activité mathématique observée. Leur fonction est d'abord une fonction de sélection qui est de retenir de la situation présentée ce qui est nécessaire et suffisant à l'atteinte du but ;
- les théorèmes-en-acte sont les propositions tenues pour vraies sur le réel, qui sont vraies ou fausses, mises en place instinctivement, et suite aux interactions avec le milieu.

Une analyse de l'activité des artisans en terme d'invariants opératoires permet de faire le lien entre les pôles de l'ETG qui décrivent l'activité mathématique observée (l'espace réel et local, les artefacts, le référentiel théorique) et le plan cognitif associé (perception, construction, raisonnement) : cela permet de mettre en évidence l'adéquation entre ces deux plans notamment à travers des théorèmes-en-acte qui peuvent parfois être erronés. La notion d'invariant opératoire (dont concept-en-acte, théorème-en-acte) permet donc d'atteindre les concepts mathématiques mobilisés à travers le comportement humain au cours de l'activité géométrique observée et d'aboutir ainsi à une description possible de la conceptualisation en jeu.

1.3. Questions de recherche sur la généricité et spécificité de la géométrie des tailleurs de pierre et des ébénistes

Notre travail de recherche interroge la nature de la géométrie et sa place dans l'espace de travail des artisans, notamment à travers l'étude du concept de

[3] Vergnaud enrichit la notion de schème et définit le schème comme « l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situation donnée. Le schème fonctionne comme un tout : c'est une totalité dynamique fonctionnelle, une sorte de module finalisé par l'intention du sujet et structuré par les moyens qu'il utilise pour atteindre son but » (Merri, 2007) (Vergnaud, 1991, 1996).

symétrie. En effet, la géométrie à laquelle font référence des professionnels tels que les tailleurs de pierre ou les ébénistes dans leur pratique prend ses racines dans la géométrie euclidienne. On peut trouver des traces de cette géométrie dans les *ouvrages de référence* de ces différents corps de métiers tels que l'ouvrage intitulé *Traité d'ébénisterie* de Chanson (1988) ou l'ouvrage intitulé *Tracés d'Atelier et géométrie* (Tome 1 et Tome 2) de Ricaud (1999)[4]. Ces ouvrages proposent en particulier des « problèmes » et leur résolution est donnée sous forme de « planches » qui listent des « théorèmes » et « propositions » (voir annexe1 pour un extrait de ces ouvrages). Nous cherchons à caractériser la généricité et la spécificité de la géométrie qui est en jeu dans la pratique des artisans ; pour cela nous cherchons donc à caractériser l'Espace de Travail Géométrique *personnel* des artisans qui est celui que l'artisan s'approprie selon ses connaissances mathématiques, ses capacités cognitives, son expérience et la contingence. Cette problématique est directement liée à des questions de recherche concernant la place de la dialectique GI-GII dans la progression du raisonnement en géométrie. En effet nous situons a priori la pratique effective des tailleurs de pierre dans un paradigme GI à travers le concept de symétrie qui n'y est pas utilisé sous sa forme mathématique, c'est-à-dire en tant que transformation du plan.

La question principale à laquelle nous tenterons de répondre dans cet article est donc : quelle est la nature du concept de symétrie dans un paradigme a priori exclusivement GI, et quelle est sa place dans l'espace de travail géométrique personnel de l'artisan (ETG) ?

1.4. Apport des recherches sur le rôle des mathématiques en voie professionnelle

Ces dernières années, quelques recherches se sont intéressées aux mathématiques dans l'enseignement professionnel (Bessot et Laborde, 2005) (Laborde et Pastré, 2005) (Straesser, 2000, 2007) (Romo Vazquez, 2009) ou aux mathématiques dans l'activité professionnelle (Noss, Hoyles et Pozzi, 2000) (Williams et Wake, 2007). Bessot et Laborde ont analysé les activités de lecture-tracé du bâtiment, en particulier les activités de contrôle. Les auteurs ont observé cette situation dans une institution de formation professionnelle avec des élèves de BEP en atelier. Les auteurs ont dans un premier temps décrit l'activité observée en termes de procédures, puis à partir de leurs observations et des formulations des élèves, elles ont dégagé certains invariants dans l'activité observée « dans les termes d'une géométrie en acte en se référant à la géométrie euclidienne ». Elles mettent ainsi en évidence l'existence d'objets géométriques analogues à ceux de la géométrie euclidienne, que l'on peut exprimer en termes de concepts-en-acte et théorèmes-en-

[4] Ces ouvrages ont été ceux principalement cités par les artisans interrogés dans cette recherche.

acte et définissent ainsi une véritable « géométrie en acte des tracés, instrumentée et contrainte par le système de cotes ». Noss et al. ont analysé les mathématiques impliquées dans des contextes professionnels très différents : ceux des employés de banque, des infirmières et des pilotes. Leur activité mathématique commune consiste à minimiser la marge d'erreur. Les auteurs nous rapportent alors que les savoirs mathématiques repérés par les professionnels portent sur des savoirs relativement élémentaires. Ils fonctionnent de façon locale, contextualisés, avec un fort niveau d'implicite dans les modèles utilisés et ayant une connexion étroite avec les outils. Les savoirs mathématiques visibles dans les pratiques sont ceux dérivés des savoirs scolaires. Ils utilisent le symbolisme mathématique conventionnel et les représentations usuelles tels que : nombres, représentations graphiques, tables, formules, *etc.* ainsi que des concepts, méthodes et techniques scolaires qui ont été quelquefois adaptées à la contingence ou routinisées[5] par la pratique. D'autres recherches montrent que les mathématiques dans la pratique fonctionnent comme des « boîtes noires » (Straesser, 2000) ou comme des « mathématiques cristallisées » (Williams et Wake, 2007) : « les concepts et procédures mathématiques sont si intégrés dans la pratique et le fonctionnement du monde du travail qu'ils ne sont plus perçus comme quelque chose de spécifique par rapport aux mathématiques ». Elles ne surgissent qu'en cas de difficulté : « breakdown », qui signifie que le professionnel se retrouve en difficulté (voire régresse) lorsque la situation est légèrement différente de celle qu'il a l'habitude de résoudre.

2. Objectif de la recherche et méthodologie associée

2.1. Approcher l'ETG des artisans : des entretiens-actions dans les ateliers

D'après les travaux de Bessot et Laborde (2005), nous supposons que la pratique des tailleurs de pierre et des ébénistes peut s'exprimer à travers des invariants opératoires qui renvoient à une géométrie en acte. Aussi, dans le but de rendre compte de ces invariants opératoires, composants de l'activité des tailleurs de pierre et ébénistes, nous avons choisi de mener des entretiens exploratoires semi directifs à partir de photos de motifs de la Cathédrale Notre Dame de Paris, révélant différents cas de symétries (tableau 3). Les questions portent principalement sur le tracé du motif et sa réalisation, en revenant de façon insistante sur une demande de justification des techniques et de l'usage des instruments, et des moyens de contrôle de l'action (ainsi que sur la justification des moyens de contrôle). Il s'agit d'une situation d'action évoquée afin de faire parler et donc réfléchir les artisans sur leur pratique. Comme Bessot et Laborde le rappellent : « moins une tâche est problématique, plus les actions pour la réaliser

[5] Nous entendons par « routinisé » (ou « routinier ») le caractère habituel d'une tâche, qui relève d'un acte mécanique acquis notamment par l'expérience.

sont transparentes et donc difficiles à expliciter » (Bessot et Laborde, 2005). Pour faciliter l'explicitation des actions, nous avons choisi de réaliser l'entretien dans l'atelier de chacun des artisans : ils se retrouvent ainsi dans leur environnement familier et peuvent alors s'appuyer et enrichir leur discours par de courtes démonstrations effectives avec leurs propres outils (dont le large spectre est souvent une spécificité de leur profession).

2.2. L'ETG personnel des artisans et les ETG idoine et de référence

Une caractérisation de l'ETG personnel des tailleurs de pierre et ébénistes passe par une recherche de ses influences. Pour cela nous faisons référence aux différents types d'ETG que l'on peut également identifier (Houdement et Kuzniak, 2006, 188–189) :

- l'ETG de référence est « l'espace de travail défini de manière idéale en fonction des seuls critères mathématiques ». Nous désignons ici l'ETG de référence comme étant celui proposé par les Eléments d'Euclide et qui s'inscrit donc sans ambiguïté dans un paradigme GII (car les problématiques abordées sont de l'ordre de « problématique de la géométrie[6] » au sens de Berthelot et Salin) ;
- l'ETG idoine est l'ETG de référence qui doit être « aménagé et organisé pour devenir un espace de travail effectif et idoine dans une institution donnée avec une fonction définie. […] le choix de l'adjectif idoine suppose que cet espace est bien conçu et opérationnel pour les questions qu'on pose dans cette institution ». Nous supposons alors que la géométrie décrite dans les *ouvrages de référence* cités précédemment décrivent une géométrie conçue pour répondre aux questions que se pose l'institution des artisans tailleurs de pierre et ébénistes ; c'est donc en ce sens que nous supposons que les ouvrages de référence sont une trace de l'ETG idoine des pratiques des tailleurs de pierre (et peuvent aussi être des traces d'un d'enseignement antérieur), et s'inscrit donc dans un rapport dialectique entre GI et GII (car cet ETG idoine rend plutôt compte d'une « problématique spatio-

[6] « Nous désignons par *problématique de la géométrie* les problèmes qui font spécifiquement appel aux connaissances permettant de maîtriser les questions de consistance théorique du discours sur l'espace, questions qui caractérisent l'émergence historique d'une géométrie de la démonstration chez les grecs » (Berthelot et Salin, 2000-2001, p. 11).

géométrique[7] » au sens de Berthelot et Salin car le lien y est encore fort avec l'ETG de référence : la géométrie euclidienne).

D'après le modèle proposé par Kuzniak (2009, p. 77) l'ETG de référence et l'ETG idoine influencent directement l'ETG personnel ; nous proposons donc une version adaptée de ce modèle dans le cas de l'ETG personnel de l'artisan (d'un point de vu générique) (voir schéma 2).

Notre méthodologie d'analyse se base donc sur une analyse de la conduite des tailleurs de pierre dans les termes d'une géométrie en acte (ETG personnel) que nous caractériserons à travers une comparaison des ouvrages de référence (ETG idoine) et des éléments d'Euclide (ETG de référence). L'un des objectifs de ce papier est de mettre en évidence l'intrication complexe entre ces différentes influences, l'expérience propre de l'artisan et la contingence mais aussi de montrer comment le concept de symétrie est un facteur déterminant de l'adaptation de la conduite de l'artisan.

ETG de référence

Les éléments d'Euclide : « Problématique de la géométrie » (GII)

ETG idoine

Les ouvrages de référence : « problématique spatio-géométrique » (GI-GII)

ETG personnel

Une géométrie en acte : « problématique pratique » (GI aménagé)

Schéma 2 : Modèle adapté des liens entre les différents ETG
(dans le cas particulier de la pratique des tailleurs de pierre et ébénistes)

[7] « Nous nommons *spatio-géométrique* la modélisation de l'espace par des connaissances issues du savoir géométrique. Cette modélisation d'un espace s'accompagne la plupart du temps de représentations de cet espace dans l'espace d'une feuille de papier, représentations qui conservent une partie plus ou moins importante des propriétés de l'espace représenté (schéma, croquis, dessins, plans, *etc.*) » (*ibidem*, p. 12)

2.3. Les tâches choisies

Des tâches routinières[8]

Nous avons demandé aux artisans comment ils s'y prendraient pour reproduire chaque motif présenté[9] (tableau 3). La question est volontairement posée sous peu de contraintes afin de laisser l'artisan libre de choisir ses propres contraintes. De plus, le motif révèle dans chacune des figures des éléments semblables qui se répètent dans le plan ; ces derniers sont parmi les plus courants dans les situations de restauration, de création, ou encore de simple copie (que ce soit en taille de pierre ou en ébénisterie). Nous mettons ainsi l'artisan dans une situation[10] (et donc dans des contraintes) qui lui est familière.

Une tâche « hors contrat » : la trisection de l'angle

La dernière tâche proposée aux artisans est celle de la trisection de l'angle : après avoir dessiné un angle quelconque (aigu et ouvert) sur une feuille de papier, j'ai demandé à l'artisan comment il le diviserait en trois parties égales. Cette tache est clairement une tâche anecdotique car elle ne fait pas partie des tâches routinières de l'artisan au même titre que celles annoncées précédemment (et dont l'analyse est développée dans le paragraphe suivant). Vérifier l'existence théorique d'une solution à la règle non graduée et au compas[11] ne fait pas partie du « contrat professionnel » car l'artisan ne se situe pas dans une « problématique de la géométrie » au sens de Berthelot et Salin. Cependant il existe des solutions « adaptées » de ce problème si l'on se situe dans « une problématique pratique » ; nous avons donc proposé cette tâche dans le but d'observer les adaptations dont fait preuve l'artisan dans ce type de situation « hors contrat ».

---

[8] Nous rappelons que nous entendons par « routinier » (ou « routinisé ») le caractère habituel d'une tâche, qui relève d'un acte mécanique acquis notamment par l'expérience.

[9] Je commençais l'entretien par : « Si vous aviez à reproduire ce type de motif, comment feriez-vous ? » Je complétais ensuite les questions en fonction des précisions demandées par l'artisan qui généralement demandait s'il ne disposait que de la photo (dans ce cas il s'agirait de faire un agrandissement) ou du motif d'origine (dans ce cas, il faut faire un « relevé »). Comme nous le verrons par la suite, dans les deux cas, la préparation au calque est prépondérante et se fera donc soit directement sur la photo soit sur le motif d'origine. Toute l'analyse qui suit est valable dans les deux cas, et se concentre donc sur cette préparation des tracés.

[10] Le terme de situation est employé dans cet article dans un sens beaucoup plus large que celui employé par Brousseau dans la théorie des situations des didactiques. Le terme de situation désigne ici la tâche que j'ai donnée à résoudre à l'artisan mais aussi l'ensemble de tous les éléments qui la caractérisent (support matériel, outils à disposition, *etc.*).

[11] Notons que les ouvrages de référence consultés indiquent « diviser un angle en deux et en trois » : (Ricaud, 1999, 94–95).

Analyse mathématique et degré de complexité

Pour chacune des figures à reproduire (tableau 3), l'analyse mathématique présentée dans ce paragraphe consiste à déterminer les transformations du plan qui laissent invariantes la figure considérée puis de définir le degré de complexité de ces figures :

Figure 1 : la fleur de Lys.

Figure 2 : rotation d'ordre 4.

Figure 3 : le trèfle.

Tableau 3. Extrait des figures proposées aux artisans.

- La figure 1 dite de la *fleur de Lys* est globalement invariante par symétrie axiale d'axe vertical dans le sens de la gravité, suggéré par la tige *centrale* et le centre du cercle situé à sa base ;
- la figure 2 est globalement invariante par symétrie centrale de centre le centre de la figure et par rotation de même centre dont une mesure de l'angle peut être $\pi/2$ [π] ;
- nous appelons *volute simple* le motif qui est globalement invariant par symétrie centrale (ou rotation de mesure d'angle $\pi[\pi]$ (on reconnaît plusieurs volutes simples dans la figure 2) ;
- la figure 3 (dite *trilobe*) est une figure globalement invariante par rotation de centre le centre de la figure et d'angle $2\pi/3[\pi]$ et par symétrie axiale (3 axes possibles) ;

Nous définissions le degré de complexité pour chaque figure d'une part par le nombre et le type de transformations qui laissent globalement invariante la figure et d'autre part par la nature de sa composition (la nature des motifs, leur enchevêtrement, *etc.*). Précisons que le degré de complexité que nous accordons à une figure peut être différent de celui que les artisans donneraient. En particulier, nous considérons la figure 1 comme la figure la moins complexe par rapport à celles présentées car d'après nos critères, seule la symétrie axiale laisse la figure globalement invariante et l'axe de symétrie est médian et vertical. De plus, le motif de la fleur de Lys est un motif largement répandu dans la taille de pierre ou l'ébénisterie. La figure 2 n'est pas un motif symétrique par symétrie axiale : nous qualifions cette figure de plus complexe car les motifs sont plus intriqués et se répètent (notamment à partir d'un quart de la figure) par rotation. La figure 3 est également plus complexe que la figure 1 car elle peut être décomposée par symétrie axiale et rotation mais les rosaces ou les trilobes sont également des motifs courants de la taille de pierre ou de l'ébénisterie[12].

Analyse de la tâche de reproduction du point de vue des artisans

D'après les différentes tâches de reproduction proposées, deux démarches sont possibles :

– avoir à disposition le motif répété (la moitié, le tiers ou le quart selon la figure considérée) à une échelle accessible ; on suppose alors que la technique du calque ou du gabarit va être la plus sollicitée ;

– n'avoir à disposition que cette photo comme modèle, on peut alors supposer que l'artisan va chercher à tracer le motif répété et dispose alors de techniques propres à son corps de métier (taille de pierre ou ébénisterie) pour retracer les courbes et volutes qui composent les différentes figures considérées.

De plus, le degré de complexité évoqué dans le paragraphe précédent implique une prise d'information pouvant être plus spécifique selon la figure, et donc implique des moyens différents pour y parvenir, c'est ce qui fait l'objet de l'analyse a posteriori présenté dans le paragraphe suivant.

3. Analyse du rôle de la symétrie axiale dans l'organisation de l'ETG personnel des artisans

L'analyse a posteriori des tâches de reproduction effectuées par les artisans rencontrés porte principalement sur l'identification des transformations du plan en acte : l'enjeu des entretiens porte sur le rôle joué par la symétrie axiale et les concepts qui la caractérisent. Rappelons que nous nous intéressons à l'Espace de Travail Géométrique personnel de l'artisan, dans ses relations avec le concept de symétrie au travers de l'organisation des tracés et de l'instrumentation sollicitée.

---

[12] Bien que ces modèles soient tirés de modèles spécifiques de la taille de pierre (car viennent directement de Notre de Dame de Paris), ces motifs sont également courant en taille de bois (le lecteur est invité à consulter les ouvrages de références cités dans la bibliographie car on y trouve des chapitres entiers consacrés aux tracés de volute et à ceux du trilobe ou encore des rosaces).

Nous nous sommes entretenu avec quatre tailleurs de pierre (nous noterons TPi, i=1 à 4) et trois ébénistes (TBi, pour Tailleur de Bois : i = 1 à 3) dans leurs ateliers ; précisons d'ores et déjà la spécificité de certains d'entre eux : TB1 est ébéniste pratiquant beaucoup de marqueterie, TB2 est ébéniste et TB3 a eu une formation d'ébéniste mais se définit maintenant comme une sculpteur sur bois uniquement (car il ne travaille que l'ornementation). Ce paragraphe décrit la mise en place de l'Espace de Travail Géométrique des ces différents artisans aux formations et spécificités diverses. Notre travail de recherche s'applique donc à considérer et analyser ces diverses pratiques : nous avons veillé (dans la mesure du possible) à éclairer certaines de nos analyses étant donnée la spécificité évoquée de certains artisans.

Le corpus sur lequel se fonde notre analyse regroupe les retranscriptions de tous les entretiens dont certains extraits sont donnés dans le développement de cet article, quelques photos et vidéos, ainsi que le recueil des dessins et figures réalisés lors des entretiens. Comme déjà annoncé, nous avons développé une approche similaire à celle de Bessot et Laborde, c'est-à-dire qu'à partir de nos observations et de leurs formulations, nous avons dégagé certains invariants opératoires des actions évoquées « dans les termes d'une géométrie en acte en se référant à la géométrie euclidienne » (Bessot et Laborde, 2005). Comme nous l'avons déjà décrit dans la partie 2.2., un moyen choisi pour décrire l'ETG personnel des artisans rencontrés est de le comparer avec certains éléments de l'ETG idoine dont on trouve des traces dans les ouvrages de référence et l'ETG de référence qui est celui décrit par les Eléments d'Euclide.

Tout d'abord, les artisans rencontrés commencent toujours par « préparer » leur espace personnel en déterminant les repères extra-figure (le support et le cadre de la figure sont indépendants de la figure) qui supporteront la figure. Les repères intra-figure (dépendants de la figure) « structurent » la figure de manière la plus adaptée d'après l'artisan, au problème pratique posé. Chaque artisan s'approprie la situation en construisant oralement et dans la pratique son ETG personnel qui décrit le rapport particulier entre :

- la figure donnée ;
- l'environnement dont l'artisan dispose ;
- et l'artisan.

Nous proposons, pour commencer, une analyse spécifique de l'activité évoquée par les tailleurs de pierre que nous avons rencontrés dans le cas des figures proposées dans le tableau 3.

3.1. Structuration de l’espace et déconstruction de la figure chez les tailleurs de pierre

Nous commençons d’abord par présenter l’ETG personnel des tailleurs de pierre rencontrés pour cette étude ; le cas des ébénistes sera relaté plus particulièrement à la partie 4. Dans tous les cas observés, le premier rapport est celui de la perception « d’un œil entraîné». Puis, les tailleurs de pierre cherchent un référentiel pour situer le motif dans un autre ensemble :

> (à propos du motif 1) TP1 : « Il faut que j’aie les dimensions, pour pouvoir me dire dans quel cadre ça rentre et dans quel bloc capable : j’entends par là les dimensions maximales de l’ouvrage, une fois que j’ai les dimensions par rapport à un axe ou des cotes. (…) Il est inscrit dans une surface plane. (…) Pour vérifier que le motif est bien cadré sur cet axe et que j’ai le bon axe. (…) c'est-à-dire on trace un trait droit, qui sera l’axe, on prend les dimensions capables, on prend les contours, ensuite on reprend les cotes déterminantes, et ça va nous déterminer l’emplacement du motif (…) donc l’axe vertical me permet de faire une symétrie correcte, en fait, c’est une croix, ça cale quelque chose, je ne sais pas comment vous expliquer ça, c’est une cible en fait. Si je trace la même croix sur un morceau de pierre et que je la fixe au calque à cet endroit, ça me permet de caler les choses. »

La symétrie axiale apparaît ici comme un repère topographique essentiel dans la réalisation de ce « cadre » qui détermine la surface travaillée. L’axe de symétrie sert de repère de mesure (et constitue l’origine de ce repère) et se comporte comme un véritable outil puisqu’il « cale quelque chose ». La contrainte réelle de l’espace (en 3D) est permanente et l’épaisseur nécessaire du bloc de pierre et la nature de celle-ci sont des éléments importants qui conditionnent le reste du travail. Le motif doit être situé « par rapport » à un autre ensemble et non pas aléatoirement : il doit être « bien » situé. Cet espace détermine alors le support de l’ETG réel et personnel du tailleur de pierre. Ce dernier peut ensuite s’appliquer à la déstructuration du motif (à partir des éléments intra-figure). Les tailleurs de effectuent alors un travail de reconnaissance des objets connus (cercle, carré…). Et plus généralement, ils recherchent « des rythmes, des régularités » mesurables, comme le montre l’extrait suivant, à propos de la figure 2 :

> TP2 : « Il y a un point central, il y a des lignes de convergence, il y a un cercle par ici. (…) Il suffit de partir d’un carré comme ceci ».

La reconnaissance d’éléments symétriques et d’axes de symétrie apparaît comme systématique et consciente chez le tailleur de pierre :

> (toujours à propos de la figure 3) TP4 : « C’est simple, tout motif a un axe».

On retrouve la volonté de construire une esquisse d’un système de mesure analogue à un système de coordonnées de type cartésien. Ils recherchent des axes dits

« cibles » qui sont orthogonaux (paire d'axe horizontal et vertical) et sont clairement utilisés comme repères de mesures. Finalement, ils mettent en évidence les caractéristiques, les « régularités » qui révèlent les invariances de la figure d'abord par symétrie axiale. C'est une préparation souvent nécessaire à la construction du calque, outil prépondérant chez les tailleurs de pierre, et qui amène donc l'artisan à certains invariants opératoires propres à cette préparation. L'ETG s'habille progressivement dans le but de devenir l'ETG *personnel* du tailleur de pierre. Mais quels sont les moyens mis en œuvre pour réaliser cette structure ?

3.2. Mise en œuvre de l'ETG : répertoire d'objets de référence et de postulats

– **Le point** est cité dans la pratique par les tailleurs de pierre en tant que repère de mesure (« cote », « épure ») ou en tant que support de construction (point d'intersection d'arcs de cercle) ou encore est reconnu comme un point particulier (« le point de centre » d'un cercle). Dans les ouvrages de référence la définition proposée, *« le point n'a pas de dimension, il n'est pas mesurable »*, est une définition proche de celle des Eléments d'Euclide : *« un point est ce qui n'a pas de partie (indivisible) »* ;

– **la droite** est citée en tant que « ligne », « trait » ou « axe » et sera support de mesure (pour mesurer le milieu par exemple), support de position (repère visuel en donnant une « structure » comme explicité précédemment) ou encore support de construction (construire un angle droit par exemple). Dans le tracé des tailleurs de pierre, une droite est définie par deux points, ils admettent donc implicitement le postulat 1 du livre premier d'Euclide : *« de tout point à tout point on peut tracer une ligne droite »*. Il y a également toutes les déclinaisons de droites : parallèles, perpendiculaires, tangentes, sécantes et confondues, qui sont remarquées, recherchées et construites par les artisans. Dans les ouvrages de référence, la droite est *« une succession de points se déplaçant dans une même direction »* (et le plan est *« engendré par le déplacement ininterrompu d'une droite »)* (Ricaud, 1999), cette définition est basée sur le mouvement, considération naturellement très prégnante chez les artisans ;

– **le cercle** est également cité par les artisans en tant que « rond », « courbe » ou « arc ». Il est utilisé en tant que support de construction (les points sont des « croisés d'arc »), ou comme repère de mesure via le compas (report de distance par petits arcs de cercle). Il est également support de structure d'un autre motif ou figure (cercle inscrit ou circonscrit : fig. 3) ou simple ornementation. D'après leur tracé et le discours associé, il suffit :

  – **d'un centre et d'un rayon** pour définir un cercle, TP4 : « Toujours un axe et un point de centre dans un cercle ». La formulation de ce théorème-en-acte par les artisans correspond au postulat 3 du livre premier d'Euclide : «

avec tout point comme centre et tout rayon, on peut tracer une circonférence »I ;

– **ou de trois points**, TP1 : « Si on prend trois points, il n'y a qu'un arc qui passe par ces trois points». De même, ce théorème-en-acte correspond au théorème de géométrie : « par trois points non en ligne droite on peut faire passer une circonférence et une seule » (Hadamard, 1988) ; on retrouve ces définitions du cercle dans les ouvrages de référence.

Les artisans « disposent » ainsi d'un certain nombre de « postulats » du type d'Euclide définissant des objets de référence géométriques et les relations entre eux. Etant donné que les éléments sont visibles dans le discours des artisans - les formulations étant proches de celles relevées dans les ouvrages de référence - on peut supposer que ces connaissances en acte sont soit des traces d'un enseignement antérieur, soit le fruit d'une conception intuitive qui peut venir de situations qu'ils ont déjà rencontrées. Certains énoncés sont tenus pour vrais par l'artisan car ils se vérifient par perception ou construction immédiate. Par exemple, à propos de l'existence et de l'unicité d'un cercle à partir de trois points, un tailleur de pierre explique :

TP1 : « C'est logique… j'arrive pas… j'ai pas de théorie, je perçois.

C : Il ne peut pas y avoir un deuxième arc ?

TP1 : Ben ça sera le même !

C : Il ne peut pas y en avoir un autre ?

TP1 : Ben par superposition, il peut y avoir autant d'arcs que vous voulez, mais comment dire, il ne peut pas y avoir, passant par ces trois points, un autre… Si le rayon qui passe par ces trois points est de 10, on pourra pas faire passer un arc avec un rayon de 2. »

3.3. Mise en œuvre de l'ETG : techniques routinisées

L'ETG personnel de l'artisan tailleur de pierre se construit à partir de son « œil entraîné », de la mise en œuvre d'une instrumentation spécifique (fil à plomb, réglé[13], perroquet[14], compas, calque, *etc.*) et de l'application de certaines techniques géométriques, comme par exemple la technique de la médiatrice pour tracer un système de mesures comme l'illustre cet extrait à propos de la figure 1 :

[13] Un réglé ou règle : « Toute baguette ou latte parfaitement rectiligne, graduée ou non, utilisée pour le tracé de traits droits. » (Une particularité du réglé est qu'il n'y a pas de bords contrairement à la règle ordinaire graduée de l'écolier).

[14] Un perroquet : « Règle plate incurvée, utilisée pour tracer de longues courbes ». Ces définitions proviennent de l'ouvrage de J. VIGAN (1994) Dictionnaire général du bâtiment, Le petit Dicobat, Rig-Orangis : Arcanture.

> « C : Comment vous tracez ce deuxième axe ?
>
> TP1 : Alors soit je prends une équerre et un réglé qui va remplir entre les deux colonnes, soit même chose, je reprends à l'endroit où les axes vont se croiser et je reprends le milieu d'un segment compris sur l'axe vertical de symétrie et je reprends un coup de compas à égale distance des deux côtés, j'écarte le compas un peu plus grand que le centre. »

Il obtient ainsi deux axes orthogonaux pour « caler » sa figure de manière instrumentée : soit en mesurant avec un réglé, soit avec le compas tout en appliquant la technique de construction de la médiatrice. Il s'agit de « mathématiques visibles » (Noss et al., 2000) car certains des artisans me confirment qu'il s'agissait d'une technique de l'école (certains me prenaient même à partie : « vous savez… ») que l'on retrouve dans leur ouvrage de référence : *« tracer une perpendiculaire au milieu AB. Avec une ouverture de compas un peu plus grande que la moitié de AB et en prenant successivement comme centre A et B, tracer les deux arcs mn et nm. La corde des deux arcs mn coïncide avec la perpendiculaire cherchée »* (Chanson, 1988, p. 18). La technique de la médiatrice permet de répondre à plusieurs tâches courantes des tracés de tailleurs de pierre (ou ébénistes), comme par exemple :

- trouver le milieu d'un segment ;
- tracer un couple de droites perpendiculaires ;
- retrouver le centre d'un cercle.

Cette technique reprise par presque tous les artisans observés pour répondre au moins à l'une de ces tâches est clairement une routine, mais semble avoir un domaine de validité limité. En effet, dans le cas des techniques disponibles pour retrouver un centre de cercle, un même tailleur de pierre se souvient de la technique de la médiatrice pour tracer un milieu ou un angle droit mais ne va pas jusqu'au bout de la technique pour en déduire le tracé du centre d'un arc de cercle donné alors qu'il commence bien par tracer la médiatrice à partir de deux points de ce cercle :

> TP1 : « Je vais prendre un segment [la corde] ; je vais trouver son milieu, soit par cote soit par croisé d'arc avec le compas [technique de la médiatrice]. Je prends la pointe de mon compas sur un côté que j'aurai déterminé ; j'envoie à l'œil plus loin que la moitié ; je trace un arc de cercle, la même chose sur l'autre point et je rejoins forcément, clac. (…) Et là-dessus je peux retrouver mon rayon… mais je ne me souviens plus très bien…. »

Il finit par chercher à « tâtons » avec le compas le centre sur la médiatrice. On assiste à ce que Noss et Hoyles qualifient de *breakdown*, lorsqu'on tente d'ouvrir les *boîtes noires,* c'est-à-dire que l'artisan se retrouve dans une situation difficile car il cherche à expliquer la technologie d'une technique[15] routinisée et finalement va se contenter de la méthode « essais-erreurs », autrement dit à « tâtons ». Il s'agit de mathématiques visibles mais la raison mathématique semble opaque car l'artisan tente de nous faire comprendre que *« le centre appartient toujours à la médiatrice d'une corde »* qui fait écho à une forme d'axiome cristallisé que l'on retrouve dans le manuel de référence (Chanson, 1988, p. 14), *théorème 23 : « la perpendiculaire élevée au milieu d'une corde passe par le centre »,* puis *« tracer deux cordes quelconques et élever les perpendiculaires au milieu de ces cordes. L'intersection des perpendiculaires nous donne le centre recherché. C'est une application du théorème 23 ».* L'enchaînement ne se fait pas toujours mais l'origine de son utilisation dans la pratique vient donc vraisemblablement d'un enseignement antérieur.

4. Le concept de symétrie, fondateur et organisateur de la conduite

Nous élargissons maintenant la présentation de nos analyses en considérant également dans cette partie le cas des ébénistes. Dans des situations plus complexes comme le cas des rotations d'ordres 3 et 4 (fig. 2 et 3 tableau 3), les artisans s'adaptent et reconstruisent la figure proposée afin de retrouver une situation connue : ils reconstruisent la situation pour exhiber un (ou des) cas simple(s) de symétrie axiale. Ils procèdent donc à la reconnaissance et la mise en place des repères intra- et extra- figures, à la reconnaissance d'objets de référence inscrits ou circonscrits à la figure, au tracé d'axes (de symétrie, ou autres axes particuliers) et vérifient la conservation par superposition :

> (à propos de la figure 2) TP1 : « Alors vu que c'est symétrique, enfin pas symétrique, mais régulier, c'est un rythme régulier, en fait <u>si mon point de centre</u> est ici, je vais hop <u>prendre ce rayon et tracer un cercle</u> » (…) Bon imaginons je vais appeler 1, 2, 3 et 4 ; et puis a, b, c et d. Par exemple 1 devient a et b, donc l'autre ainsi de suite. (…) Il y a un <u>rythme carré</u> en décalé. Je vais <u>chercher cet angle</u> ; je trace <u>donc mes perpendiculaires</u> sur mon premier rythme puis le deuxième (…) s'il est à reproduire <u>par rapport à un point de centre</u>, il suffit que je reproduise cette première partie <u>par rapport à un axe</u>. **C'est toujours par rapport à un axe.** Enfin moi je travaille toujours par rapport à un axe, enfin sur deux perpendiculaires. (…) Ça

[15] Notre référence à la Théorie Anthropologique du Didactique de Chevallard se limite à l'utilisation des termes *technique* et *technologie*, parfaitement appropriés à notre discours : « La technique τ est la manière de faire, d'accomplir et de réaliser des tâches t relevant d'un type de tâche T. (…) la technologie θ est un discours rationnel (le logos) sur la technique τ (la tekhnê) ayant pour objet de justifier *rationnellement* la technique τ (…). » (Chevallard, 1999, 224–227)

tourne par rapport à un point de centre, je vais tracer toutes les lignes nécessaires pour faire tourner toutes les structures du motif ».

4.1. Le cas de la symétrie centrale (*une volute simple*)

L'analyse de l'activité des artisans dans le cas de reproduction d'une volute simple (motif qui constitue par exemple la figure 2) qui est invariante par symétrie centrale permet de mettre en évidence des théorèmes-en-acte intéressants et révélateurs de l'influence de la symétrie axiale sur la pratique des artisans. Nous proposons dans les deux prochains paragraphes l'analyse de deux théorèmes en acte intéressants observés auprès de deux ébénistes parmi ceux rencontrés. Nous mettrons en évidence en quoi la spécificité de leur profession peut être à l'origine de ces théorèmes en acte.

- **Symétrie centrale vue comme composée de deux symétries orthogonales**

TB1 (à propos d'une volute simple) : « On est obligé de développer une première fois puis d'inverser pour qu'il se retrouve complètement à l'opposé »

La symétrie centrale est interprétée (et mimée) comme composée de deux symétries axiales dont les axes sont : un horizontal puis un vertical dans un même plan. On retrouve le rôle prépondérant de cette paire d'axes, signifiants de la composée de deux symétries axiales. On « développe » en deux temps : il s'agit de la succession de deux « dépliages ». Ce schème met en relation les concepts-en-acte de conservation, d'invariance globale et d'orientation. On peut faire l'hypothèse que l'origine de cette conception vient d'une technique propre à l'ébénisterie : la marqueterie. En effet, cette technique consiste à reproduire un motif issu d'une fine tranche de bois par « développement » en 3D (puisqu'on plie et déplie une feuille de bois) en suivant des composées de symétries axiales d'axe horizontal ou vertical, ou des composées de translation (développement 2D), ou encore des composées de symétries axiales et translations, autrement dit des symétries glissées. Ainsi, dans le cas de la volute simple, on retrouve les gestes quotidiens et routiniers associés à ceux de la marqueterie, qui est une spécificité de l'ébénisterie, d'où la mise en œuvre naturelle de composées de symétries axiales. L'ébéniste est partie intégrante du système et nous décrit une géométrie qui s'anime autour de lui.

- **Symétrie centrale vue comme un demi-tour**

TB3 (toujours à propos d'une volute simple) : « Ah oui. Elle est pas symétrique. Ah ben il faut tourner autour de l'axe, c'est tout. Pas besoin de faire l'autre côté. A ce moment-là, pas besoin de faire l'autre côté : je prends ça et je tourne comme ça et je la fais ici, c'est une histoire de pivotage, ça reste un axe comme celui du compas.

C : [en me parlant à moi-même en prenant des notes] : Retournement du calque…
TB3 : Euh non j'appellerai pas ça un retournement, c'est un pivotement. Pour moi un retournement c'est ça [il mime le retournement d'une feuille comme pour la symétrie axiale]. Et j'ai fait la figure à l'envers. Pivotement, ça ne fait pas très français, je ne sais pas quel mot il faudrait employer… rotation autour de l'axe, rotation de la feuille ou rotation en opposition. »

Pour lui, cette transformation n'est pas *symétrique* (on suppose qu'il entend symétrique dans le sens où ce n'est pas symétrique par rapport à un axe contenu dans le même plan). Il conçoit la symétrie centrale comme une rotation de centre le « centre » de la volute et d'angle π, mais non pas explicitement autour d'un point, mais autour d'un axe, perpendiculaire au plan de la volute : « comme le compas ». Il situe son ETG en 3D (de la même manière qu'un tailleur de pierre passe en 3D avec le fil à plomb pour repérer la verticale normale au plan). TB3 associe une fois de plus ses gestes à la transformation (tout comme TB1 et la technique de la marqueterie). On peut faire l'hypothèse que cela vient d'une « mémoire gestuelle ». Cet artisan dispose en fait d'un répertoire de tâches et de techniques routinisées mais aussi des «gestes routinisées », notamment avec le compas, qu'il adapte selon le type de tâches, car il est sculpteur de bois, et ne réalise pas autant de marqueterie que TB1, qui lui est ébéniste.

4.2. Le cas particulier de la trisection de l'angle : une situation de *breakdown*

- **Théorème-en-acte issu du schème de bidécomposabilité[16]**

Un des ébénistes explique qu'il diviserait d'abord en douze, en traçant de manière itérative des bissectrices d'angles et « comme trois est un diviseur de douze, j'aurai ma trisection » :

TB1 : « On divise en 2 avant, je diviserais en 12 et je prendrais 4 parties de 12.

C : Comment vous faites pour diviser en 12 ?

TB1 : Ben c'est un multiple de 3.

C : Oui mais comment vous faites pour arriver à 12 ?

TB1 : Ben je divise en 2, puis je redivise en 2, ça me donne 4 et si je divise en 2… [Il se rend alors compte que ça ne marche pas… après quelques instants]… Bon ben je prendrais mon rapporteur une fois de plus ! »

On peut faire l'hypothèse que cette stratégie vient des schèmes de la symétrie axiale : décomposer en deux parties égales (ici deux demi-plans). La bissectrice est

[16] Ce schème, que nous appelons donc schème de bidécomposabilité, consiste à décomposer la figure - ou la configuration - proposée en deux parties superposables.

alors un axe de symétrie. Leur gestuelle quotidienne (telle que le pliage/dépliage issue de la marqueterie, le calque/décalque et la manipulation du compas) semble concourir à la mise en œuvre de cette stratégie qui semble finalement assez naturelle. Elle peut également être une trace altérée d'un enseignement antérieur ; on trouve dans les ouvrages de référence des problèmes du type « *diviser une droite en 2, 4, 8, 16 etc. segments égaux* » : « *Prendre une ouverture de compas un peu plus grande que la moitié de la droite, et tracer de A comme centre, un arc en c, en faire autant de B comme centre. Descendre la perpendiculaire de c sur la droite. Procéder de même entre mA et mB pour trouver les points n et n' et ainsi de suite* » (Chanson, 1988, p. 16). On retrouve cette technique « institutionnalisée » d'itérations de division par deux. L'existence d'une solution au problème n'est pas remise en cause : seulement, comme pour la technique de la corde, l'artisan pense que s'il n'y arrive pas c'est parce qu'il ne sait pas ; il s'adapte donc, car la réalisation de la trisection reste pour lui toujours possible et il se résout à utiliser des outils moins « exacts » tels que le rapporteur ou la règle graduée. Vérifier l'existence théorique d'une solution à la règle non graduée et au compas[17] ne fait pas partie du « contrat professionnel » ; et il est clair que l'on peut réaliser la trisection d'un angle au rapporteur. La réalité rend alors possible tout problème de construction grâce à l'existence avérée d'outils de mesure adaptés. Notons que la trisection de l'angle est possible par pliage (annexe 2).

- **Un théorème-en-acte issu de la confusion entre grandeurs : *diviser un segment en n parties égales équivaut à diviser un angle en n parties égales***

> TB3 : « Il faut faire une ligne. C'est comme les assemblages en *queue d'aronde* pour les tiroirs, donc on fait une ligne, alors comment ça marche déjà… Oui ici on va reporter mettons trois traits au compas et ici on va faire trois parallèles, c'est ça ? Heu… non… il faut arriver ici à <u>partager une ligne en trois</u> … Il faut partir de là… il faut partir de celle du bout, de la troisième, et ensuite on fait des parallèles. Vous n'avez pas compris ? (…) C'est un problème de répartition, pour les balustrades ou les escaliers, c'est pareil. »

Il s'agit d'une autre stratégie inspirée de la conservation des longueurs par la projection de droites parallèles (application du théorème de Thalès). Il s'agit de « mathématiques visibles » ou résidus altérés d'enseignements et de pratiques. L'explication est erronée (du fait que la trisection de l'angle n'est pas possible à la règle et au compas) et la confusion principale est l'association spontanée de grandeurs différentes (ici : longueur de segment/ surface angulaire) associée à une restitution inexacte du théorème de Thalès. Dans les ouvrages de référence on trouve de manière détaillée la technique dite de la : « *division d'un segment de*

[17] Rappelons que les ouvrages de référence consultés proposent le problème : « diviser un angle en deux et en trois » : (Ricaud, 1999, 94–95).

droite [ab] en 7 parties égales (méthode valable pour toute autre division) : du point a, tracer une oblique (ax) suivant un angle quelconque y du point a, et à l'aide d'un compas réglé approximativement à 1/7ème de (ab), porter sur (ax) 7 divisions égales (1 à 7). Joindre le point (7) au point (b) ; positionner le grand côté d'une équerre sur (7b) et appliquer une règle sous le petit côté de l'équerre. Maintenir fermement la règle et, en faisant glisser l'équerre vers la gauche, descendre les points 6 à 1 sur ab. Les points 1' à 6' divisent ab en 7 parties égales » (Ricaud, 1999, p. 34).

Ce type de confusion renvoie à ce que Schneider (1991) appelle « l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions [qui] rend compte de ces conceptions mêlant des grandeurs de dimensions distinctes (des solides avec des surfaces ou des surfaces avec des lignes). En gros, cet obstacle consiste en glissements inconscients et indus entre le domaine des grandeurs et celui de leurs mesures » (ibidem, p. 241) ; pour certains des artisans rencontrés : partager un angle en *n* parties égales revient à partager un segment opposé qui délimite la surface angulaire en *n* parties égales. De manière plus générale, ce type d'obstacle est liée à une conception du solide (resp. une surface) comme un assemblage, un agrégat de surfaces (resp. de segments) ; un solide (resp. une surface) comme engendré par le mouvement d'une surface (resp. d'un segment) (Schneider, 1991, p. 252) ; et rappelons (partie 3.2.) que c'est exactement sous cette forme que sont définis les éléments de la géométrie plane dans les ouvrages de référence des artisans : *« la **droite** : elle se définit par une succession ininterrompue de points en se déplaçant dans une même direction. (…) le **plan** : figure plane engendrée par le déplacement ininterrompu, sur un même plan, d'une droite. (…) un **volume** peut être engendré par le déplacement d'un plan »* (Ricaud, 1999, p. 9).

Une autre technique qui rend compte de cette confusion des grandeurs est développée par TB2 : il « ferme » l'angle donné, et obtient ainsi un triangle dont il divise le côté opposé à l'angle, en mesurant. Puis, il joint le sommet opposé avec les points marquant les tiers du segment. On peut induire de cette technique un théorème-en-acte un peu différent : *dans un triangle, on divise un angle en n parties égales en divisant en n parties égales le côté opposé*.

Lors de la réalisation de la tâche de la trisection de l'angle, on constate que les artisans ont à leur disposition un répertoire de tâches et un répertoire de techniques mais que ces dernières semblent relativement figées. Ici, la tâche reconnue par les artisans est « diviser en n parties égales » et les techniques correspondantes sont :

– soit diviser par deux de manière successive ;

– soit la technique de Thalès et la projection par parallèles.

La question de l'adaptation des objets en jeu dans la situation rencontrée ne se pose pas, d'où une restitution qui peut être erronée. On parle alors de « mathématiques cristallisées » (Straesser, 2007, p. 179). L'impossibilité de la tâche produit alors un *breakdown* et révèle l'inefficacité de la technique. On retrouve un phénomène semblable dans les situations dites a-didactiques : l'élève se rend compte que ses connaissances anciennes sont inadaptées au problème et l'adaptation au milieu va générer la construction de nouvelles connaissances (rappelons que Berthelot et Salin développe la thèse que la problématique pratique constitue un obstacle didactique à l'instauration des autres problématiques (1992, p. 127)). Ici, le but de la situation n'implique pas une telle adaptation car la solution « exacte » (théorique) du problème est masquée par l'existence d'une solution pratique (et le problème n'est pas posé dans un but « didactique »). En effet, les artisans ont finalement réalisé la tâche en mesurant l'angle à l'aide d'un rapporteur et en divisant par trois sa mesure (ou en ajustant les précédentes techniques décrites précédemment). Les artisans ont bien sûr conscience de l'existence d'une sphère GII mais celle-ci ne leur semble pas adaptée à leurs problèmes « pratiques » : TP1 : « Tout est mathématique. (…) Il y a toujours moyen mathématiquement de trouver ce qu'il y a à faire. »

5. Conclusion : une géométrie en acte organisée mais figée

5.1. Vers une théorie de l'approximation dans la pratique

La mise en pratique de connaissances géométriques acquises au cours d'un enseignement antérieur et les connaissances acquises au cours de l'expérience propre de l'artisan sont fortement intriquées. Autrement dit, les liaisons existantes entre les deux ont été polies par la pratique. On ne peut définir l'origine de certains postulats tirés de leurs discours qui accompagnent leur geste : comme par exemple *« par trois points passe un unique cercle »* ou *« un point de centre et un rayon suffisent pour définir un cercle »*. La formulation est semblable à celle de leurs ouvrages de référence de géométrie mais l'explication se fait de manière pragmatique. Leurs techniques de tracé, pour construire une droite orthogonale (verticale) ou un milieu ou un centre, sont dérivées de techniques de constructions géométriques telles que celle de la médiatrice, de la bissectrice ou encore de certains théorèmes de projection de droites, d'intersection des médiatrices de cordes, *etc*. Ces techniques se retrouvent dans leurs manuels de référence mais ont été tellement routinisées dans leur pratique qu'elles ne sont pas adaptables à des situations un peu différentes (comme celle de la trisection d'un angle).

L'Espace de Travail Géométrique *personnel* de l'artisan se décrit comme l'interaction entre l'espace réel, les modèles théoriques et les artefacts. L'ensemble des objets de référence, des tâches et des techniques semble figé et est sollicité quel que soit l'espace local en jeu ; cet espace est décomposé et déstructuré. L'ensemble des outils permettant cette réalisation est dense et très spécifique au corps du métier (comme par exemple le recours au perroquet pour trouver le centre d'un arc de cercle). Cette très forte instrumentalisation semble accentuer alors le phénomène de cristallisation et condamne l'existence « des boîtes noires ».

L'ETG personnel est centré sur l'artisan ; son point de vue est une autre composante importante qui oriente ses gestes. Il évolue dans une géométrie intuitive, mesurable, manipulable, en mouvement, dans un paradigme GI « sophistiqué ». Il ne semble se détacher du système uniquement en situation de breakdown. Les artisans mettent alors au point des « stratégies d'ajustement » : ils approchent le résultat recherché par des techniques qui leur sont familières et qui leur donnent un résultat satisfaisant dans la pratique. On assiste à une volonté de « théoriser » leur Espace de Travail Géométrique pour le rendre le plus efficace possible et le plus proche de la solution exacte possible, d'où le détournement de certaines techniques mathématiques à des fins pratiques.

5.2. Le concept de symétrie comme principe organisateur dans l'action

Les invariants opératoires propres à la symétrie axiale se retrouvent dans tous les répertoires d'objets géométriques, de tâches et de techniques. Le schème de bidécomposabilité se révèle être le plus prégnant. La déstructuration des figures rencontrées ici a impliqué un vaste réseau de droites largement dominé par la recherche d'axes de symétrie dont le statut est variable (origine de mesure, repère de position, pli, frontière…). La recherche des « rythmes réguliers » est le moteur organisateur de l'ETG des artisans. Le concept de conservation étant induit, leur moyen de contrôle repose sur le principe de superposition des parties « semblables ». Ces invariants opératoires, caractéristiques de la symétrie axiale (bidécomposabilité et axes) se retrouvent alors adaptés dans les situations des rotations d'ordre 3, 4 et même dans le cas de la symétrie centrale, mais peuvent conduire à un retour à des méthodes plus « naïves » (« essais-erreurs »). Dans tous les cas, il s'agit d'une géométrie dynamique animée par une mémoire gestuelle dont les invariants opératoires laissent présager une théorie de l'ajustement. L'intrication des objets de référence, des postulats et des techniques tirés des apprentissages précédents des artisans ou de leurs propres conceptions nous incite à penser que le concept de symétrie auquel ils réfèrent n'est ni une conception experte du concept familier (c'est-à-dire d'un point de vue géométrique : uniquement vue comme la répétition d'un motif par rapport à une droite) ni une conception antagoniste à une conception scientifique (c'est-à-dire comme une transformation du plan dans lui-même) mais plutôt comme un concept intermédiaire, que l'on pourrait qualifier de « naturalisé ». Ce type de concept fait écho au « concept pragmatique » que Pastré (2002) définit dans le cadre de la didactique professionnelle, par son caractère organisateur qui se construit dans l'usage et qui présente une dimension sociale. Il nous resterait à approfondir une telle approche notamment au niveau méthodologique et à observer des situations professionnelles « réelles » et non pas « fictives », comme cela a été le cas dans nos entretiens-actions.

5.3. Perspectives dans l'institution scolaire

Cette étude a révélé l'influence fondamentale de la symétrie axiale dans la construction de l'Espace de Travail Géométrique *personnel* de l'artisan qui se situe dans une GI « sophistiquée », du fait qu'il gère l'approximation par des techniques mathématiques cristallisées et routinisées dans la pratique. On distingue justement la rupture entre GI et GII par cette gestion de l'approximation. Le collège cherche à détacher l'élève de cette GI en reniant cette approximation (même efficace). L'élève doit « démontrer » et ses réponses doivent être exactes. Quelle est alors l'adaptation et l'organisation des signifiés du concept de symétrie (bidécomposabilité, conservation, invariance, *etc.*) dans une géométrie qui ne se veut plus figée mais au contraire qui tend vers GII ? Il s'agit alors maintenant d'étudier les ETG personnels des élèves, ce qui est l'objet du reste de notre thèse (Bulf, 2008).

Bibliographie

BERTHELOT, R. et SALIN, M-H. (1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans l'enseignement obligatoire.* Thèse de doctorat, université de Bordeaux 1.

BERTHELOT, R. et SALIN, M-H. (2000-2001), L'enseignement de la géométrie au début du collège – Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? *Petit x,* **56,** 5–34.

BESSOT, A. et LABORDE, C (2005), *Vers une modélisation d'une géométrie en acte dans les activités de lecture-tracé du bâtiment*. In : C. CASTELA & C. HOUDEMENT (Eds.) (39–76) Paris : Éditions ARDM et IREM de Paris 7.

BULF, C. (2008), *Étude des effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège*, thèse de doctorat, Université Paris Diderot, Irem Paris 7.

CHEVALLARD, Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques,* **19**-**2**, 221–266.

EUCLIDE, (1994), *Les éléments d'Euclide, traduction et commentaires de B. Vitrac* Paris : PUF.

HADAMARD, J. (1898), *Géométrie Plane - leçons de géométrie élémentaires*, Sceaux : Éditions Jacques Gabay 1988.

HOUDEMENT, C. et KUZNIAK, A. (2006), Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **11**, 175–193.

KELLER, O. (2004), *Aux origines de la géométrie : le paléolithique et le monde des chasseurs cueilleurs*, Paris : Vuibert.

KELLER, O. (2006), *La figure et le monde, Une archéologie de la géométrie : peuples paysans sans écriture et premières civilisations*, Paris : Vuibert.

KUZNIAK, A. (2009), *Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de scolarité obligatoire en France* in : A. GAGATSIS., A. KUZNIAK, E. DELIYIANNI, L. VIVIER (EDS.) *Chypre et France recherche en didactique des mathématiques* (71–90) Lefkosia : University of Cyprus.

LABORDE, C. et PASTRE, P. (2005), *Activités et formation professionnelles : simulations informatiques comme aide à la conceptualisation*. Grenoble : Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier.

MERRI, I. (dir.) (2007), *Activité humaine et conceptualisation, questions à Gérard Vergnaud,* Toulouse : Presse Universitaire du Mirail.

NOSS R., HOYLES C. et POZZI S. (2000), *Working knowledge: Mathematics in use*, in: BESSOT A & RIDGWAY J. *Education for Mathematics in the workplace*, Mathematics Education Library Kluwer Academic Publishers, **24**, 17–35.

PASTRE, P. (2002), L'analyse du travail en didactique professionnelle, *Revue française de Pédagogie*, **138**, janvier-février-mars, 9–17.

CAROLINE BULF
Université de Bordeaux
Laboratoire LACES, Équipe DAESL (France)
caroline.bulf@u-bordeaux4.fr

Annexe 1 (extrait des ouvrages de référence) : Chanson, 1998, p. 9

Planche 5

LE CERCLE

Fig. 1 – Problème : Retrouver le centre d'un cercle.
Tracer deux cordes quelconques et élever les perpendiculaires au milieu de ces cordes.
L'intersection des perpendiculaires nous donne le centre recherché. C'est une application du théorème 23 pl. 2.

Fig. 2 – L'équerre à centrer représente une perpendiculaire élevée au milieu d'une corde AB. Elle nous évite tout le tracé de la figure précédente.

Fig. 3 – L'équerre à centrer de cette figure est basée sur le théorème suivant :
« Deux tangentes au périmètre d'un cercle et issues d'un même point sont égales ».
La bissectrice de l'angle formé par ces deux tangentes passe donc par le centre du cercle.

Fig. 4 – Le même problème peut se résoudre également avec une équerre de dessinateur. C'est la réciprocité du théorème 16 pl. 2.

Fig. 5 – Ce théorème nous permet également la vérification d'une cannelure demi-circulaire :
Faire glisser les côtés de l'angle droit sur les arêtes A et B. Le somm. t C de l'angle droit doit toujours rester en contact avec le fond de la cannelure.

TRACÉS DE CERCLES OU ARCS DE CERCLES

Fig. 6 – Problème : Tracer un arc de cercle passant par trois point A, B, C.
Joindre AB et BC.
Élever la perpendiculaire au milieu de ces deux droites, leur intersection nous donne le centre O du cercle dont le périmètre passe par A B et C (voir théorème 23 pl. 2).

Fig. 7 – Tracer un arc de cercle passant par A, B, C, dont le centre est inaccessible.
Fixer deux règles ensemble suivant l'angle ABC. Faire glisser cet angle de façon à ce que les chants des deux règles restent en contact avec A et C. Le sommet de l'angle décrit alors l'arc de cercle cherché (voir théorème 25 pl. 2).

Fig. 8 – Problème : Tracer le cercle circonscrit à un triangle ABC.
Le centre du cercle circonscrit est donné par le point de rencontre des perpendiculaires élevées sur le milieu de chaque côté du triangle (voir *fig.* 29 pl. 1).

Fig. 9 – Problème : Tracer le cercle inscrit dans un triangle.
Le centre du cercle inscrit est donné par le point de rencontre des bissectrices des angles du triangle (voir *fig.* 29 pl. 1).

Fig. 10 – Problème : Tracer à main levée un arc de cercle passant par A, B, C.
Joindre AB et BC.
De A et de C comme centres, tracer deux arcs de cercle égaux.
Sur chacun de ces arcs de cercle et à partir de O porter des petits arcs égaux comme l'indique la figure. Pour l'arc de centre A, nous baptiserons ces points par des chiffres en-dessous de O et par des lettres au-dessus. Pour l'arc de centre C, en chiffres au-dessus et lettres en-dessous.

Annexe 2 : la trisection de l’angle

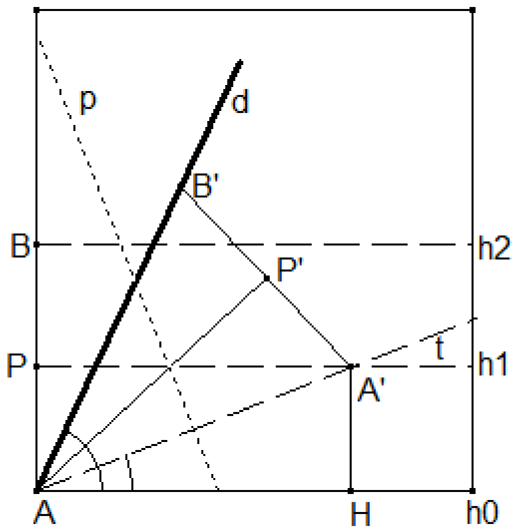
« La trisection de l'angle est en revanche réalisable en pliant une feuille de papier, par une construction due à Hisashi Abe (1980), qu'illustre la figure ci-contre :

• On trace la droite *d* passant par le coin A de la feuille de sorte qu'elle forme, avec le bord inférieur *h*0 de la feuille, l'angle à couper en trois.

• Deux bandes horizontales de même largeur (arbitraire) sont tracées en bas de la feuille (ceci peut se faire facilement par pliage.) On appelle *h*1 et *h*2 les nouvelles droites qui les délimitent.

• Il faut maintenant plier la feuille le long d'un pli *p* de sorte que le coin A se trouve déplacé sur la droite *h*1 (en un point A'), en même temps que le point B (intersection du bord gauche avec la droite *h*2) se trouve déplacé sur la droite *d* en un point B'.

• La droite *t* passant par A et A' est alors la trisectrice de l'angle donné: l'angle formé par *h*0 et *t* vaut 1/3 de l'angle formé par *h*0 et *d*. La démonstration est simple : par symétrie autour de la droite p le milieu P de AB donne le milieu P’ de A’B’ et, de même que A’P est perpendiculaire à AB, on a AP’ qui est perpendiculaire à A’B’. Les deux triangles rectangles P’A’A et P’B’A sont donc égaux.



D’autre part soit H la projection orthogonale de A’ sur h0. Puisque les triangles HAA’ et PA’A sont égaux comme moitiés d’un même rectangle et que les triangles PA’A et P’AA’ sont aussi égaux par symétrie autour de p, il en résulte que les triangles HAA’ et P’AA’ sont égaux. Par conséquent l'égalité des trois triangles HAA', P'AA' et P'AB' montre que les segments AP’ et AA’ partagent bien l’angle dAh0 en trois angles égaux ».

(Jean Aymes, *Ces problèmes qui font les mathématiques (la trisection de l'angle)*, publication de l'A.P.M.E.P. n°70)