LAURENT VIVIER

UN MILIEU THÉORIQUE POUR LA NOTION DE TANGENTE DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Resumen. Un medio teórico para la noción de tangente en la enseñanza segundaria. En Francia, en clases de grado 11, la introducción de la derivación se apoya fuertemente en la consideración de rectas tangentes a una curva ¡Pero la noción de tangente no es definida en forma general! Investigadores en didáctica de las matemáticas abordaron este problema. Una de sus conclusiones fue la necesitad de enseñar la noción de tangente para, después, utilizarla en la introducción de la noción de derivada. Con un punto de vista didáctico e histórico, esbozaremos una solución al problema de enseñanza planteado. Al adaptar el método de René Descartes, se define fácilmente la noción de tangente a las curvas algebraicas. Esta etapa parece importante para cambiar las concepciones de muchos de los estudiantes, que tienen una idea global, y no local, de la tangente. Luego, una introducción de la nueva noción de derivación es posible a partir de la noción de tangente, cuando la tangente ha adquirido el estatuto de objeto matemático.

Résumé. En France, en classes de première, l'introduction de la dérivation s'appuie fortement sur la notion de tangente à une courbe. Mais, hormis le cas très spécial des cercles, aucune notion de tangente n'a été définie au préalable ! Des chercheurs en didactique des mathématiques ont déjà abordé ce problème. Une de leurs conclusions fut la nécessité d'enseigner la notion de tangente pour, ensuite, l'utiliser afin d'introduire la notion de dérivée. Avec un point de vue didactique et historique, nous esquissons une solution à ce problème de l'enseignement des mathématiques. En adaptant la méthode de René Descartes, on définit facilement une notion de tangente pour les courbes algébriques. Cette étape paraît importante pour changer les conceptions de nombreux élèves qui ont souvent une vision globale, et non locale, de la tangente. Une introduction de la dérivation utilisant la notion de tangente devient alors possible puisque la tangente a acquis un statut d'objet mathématique.

Mots-clés. Tangente, courbes algébriques, étude locale, calcul approché, nombre dérivé, enseignement secondaire.

Cette recherche est issue d'une conférence donnée à l'occasion du *Tercer Encuentro Internacional sobre la Enseñanza del Cálculo* qui s'est tenu à Saltillo (Mexique) les 12 et 13 novembre 2009.

Introduction

Nous étudions dans cet article la notion de tangente dans l'enseignement secondaire. Nous nous intéressons essentiellement à l'enseignement de la notion de tangente, qui est problématique, et à un bref historique de la notion de tangente qui

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 15, p. 173 – 199.

permet de proposer des pistes pour résoudre le problème pointé dans l'enseignement.

La première partie dresse un état des lieux de l'enseignement de la notion de tangente en France. Nous constatons que les conclusions de chercheurs en didactique des mathématiques, datant de plusieurs dizaines d'années, sont toujours d'actualité. En particulier, reprenant les travaux de Castella (1995), nous avons proposé un test qui permet de montrer que, avant d'aborder le chapitre sur la dérivation, la notion de tangente est problématique même en classe de première scientifique (grade 11). Ceci n'a rien d'étonnant puisque seules les tangentes aux cercles font l'objet d'un enseignement avant la classe de première. Le problème majeur est que la notion de tangente a un statut pour le moins ambigu dans cette classe de première : les tangentes ne sont réellement définies qu'avec le nombre dérivé mais c'est un travail sur les tangentes qui permet d'introduire la dérivation. Le problème est patent : on ne peut pas se servir d'une notion qui n'a pas été construite auparavant et pour laquelle les conceptions *intuitives* sont loin d'être adéquates.

Dans les trois parties suivantes, afin de résoudre ce problème dans l'organisation des enseignements, nous esquissons les grandes lignes d'un enseignement alternatif de la notion de tangente qui correspond à un milieu théorique au sens de Bloch (2002). Il n'y a pas de bouleversement du curriculum, mais une vision intermédiaire constituée par les tangentes aux courbes algébriques. La proposition d'enseignement que nous faisons dans cet article n'a pas encore été testée, elle se situe en amont d'une nécessaire étude expérimentale.

Plus précisément, en deuxième partie nous discutons de certains points didactiques et historiques afin de baliser le nouvel enseignement que nous envisageons. L'introduction et le développement de la notion de tangente aux courbes algébriques en lien avec les connaissances anciennes – c'est-à-dire les tangentes aux cercles – constituent l'objet de la troisième partie. Enfin, la quatrième partie propose quelques pistes pour élaborer une nouvelle introduction de la dérivation en s'appuyant fortement sur la notion de tangente ainsi construite.

1. Les tangentes dans l'enseignement

1.1. La classe de quatrième

En France, la notion de tangente apparaît en classe de quatrième (grade 8), au collège. Il s'agit de définir la tangente en un point d'un cercle. Les six manuels scolaires étudiés proposent tous ces deux conceptions de la tangente d'un cercle :

C1 : Une droite qui n'a qu'un seul point d'intersection avec le cercle.

C2 : Une droite perpendiculaire au rayon en un point du cercle.

Toutefois, le statut de ces conceptions diffère selon les manuels : les manuels Phare, Transmath et Bréal optent pour C1 comme définition de la tangente en un cercle, C2 étant énoncée comme une propriété ; le manuel Diabolo fait exactement l'inverse, C2 en définition et C1 en propriété ; les manuels Triangle et Dimathème n'institutionnalisent que C2 bien que C1 soit présente, soit en remarque soit dans une activité d'introduction. Il n'y a donc pas de définition faisant l'unanimité mais l'importance de ces deux conceptions de la tangente se dégage nettement. On comprend l'intérêt de C2 pour le travail en géométrie et le lien entre C1 et une conception antique (cf. le livre III des *Éléments* d'Euclide). Seule C2 est à mobiliser pour résoudre les tâches géométriques proposées par les manuels. De fait, C1 ne sert que dans les activités d'introduction où la visualisation est prépondérante. Ces activités d'introduction proposent une esquisse de coordination entre ces deux conceptions, coordination toujours basée sur la visualisation – notons que dans Phare le rôle de la visualisation est réduite.

En prenant le cadre des paradigmes géométriques (Houdement & Kuzniak, 2000, 2006 ; Kuzniak 2009), on peut interpréter C1 comme une définition de la tangente dans le paradigme de la Géométrie I et C2 comme une définition de la tangente dans le paradigme de la Géométrie II.

Finalement, ces deux conceptions C1 et C2 ont une utilité très locale. C2 ne se généralise[1] pas et C1 ne se généralise qu'aux coniques.

1.2. La classe de première scientifique

Pendant presque trois ans il n'y a rien de nouveau sur le sujet. La notion de tangente réapparaît dans le cours sur les dérivées, en classe de première (grade 11). Le choix d'étudier la classe de première scientifique est double : la notion de tangente à une courbe est une notion importante car récurrente dans les cursus scientifiques et cela permet de considérer d'emblée les élèves les plus en phase avec les mathématiques enseignées.

Dans le programme de la classe de première scientifique, la tangente n'apparaît que dans un paragraphe qui fait référence à une définition subordonnée à la dérivabilité. Il est précisé que la notion de dérivée doit être introduite par une approche cinématique ou graphique. Nous délaissons l'approche cinématique puisque, en liaison avec les programmes de sciences physiques, on doit se limiter aux mouvements rectilignes. Ainsi, la notion de tangente ne peut y apparaître. Pour

[1] Nous restons dans le cadre de l'enseignement secondaire : la géométrie euclidienne où l'on considère un unique produit scalaire.

l'approche graphique, le programme spécifie une possibilité d'utiliser l'informatique pour faire des zooms sur une courbe.

Le contenu des manuels scolaires[2] varie très peu. Après un chapitre sur la parabole et les fonctions du second degré – avec parfois un exercice sur les tangentes à une parabole mobilisant la conception C1 –, vient le chapitre sur la dérivation. Comme introduction de cette dernière, on note systématiquement les trois approches suivantes : cinématique, graphique avec zooms et graphique avec limite des sécantes. Dans le cours, on trouve bien entendu la définition des tangentes aux courbes pour les fonctions dérivables comme il est précisé dans le programme. Il y a un problème d'enchaînement. La notion de dérivée s'appuie fortement sur la notion de tangente. Or, c'est à partir de la dérivation que l'on définit la tangente[3] !

Il y a également, sans aucun lien avec le cours sur les fonctions, un chapitre sur le cercle avec notamment les équations de cercle. On y retravaille la notion de tangente aux cercles, avec la conception C2 du collège, à l'aide du produit scalaire. Les manuels ne se soucient guère de la nouvelle notion de tangente qui est développée dans le chapitre sur la dérivation.

On voit apparaître, après les conceptions *antiques*, C1 et C2 du collège, deux nouvelles conceptions institutionnelles de la notion de tangente :

C3 : limite des sécantes en un point de la courbe.

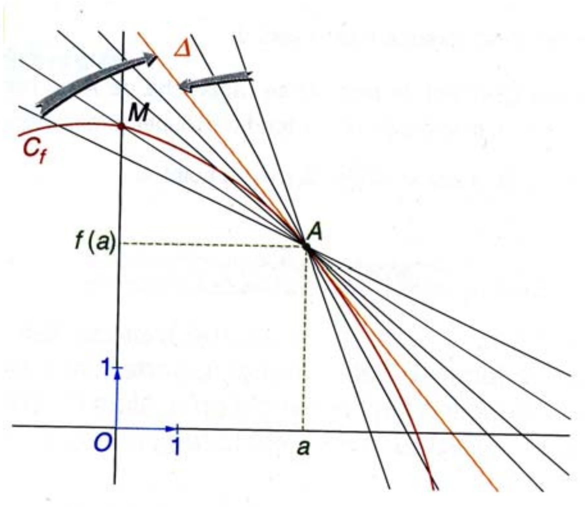
C4 : droite passant par un point d'une courbe dont la pente est le nombre dérivé.

Cette approche C3 par limite de droites, qui fait l'unanimité dans les manuels, n'est pas explicitement au programme, n'est pas opérationnelle, ne permet pas de résoudre des problèmes et sera abandonnée dès l'introduction du nombre dérivé. Elle a une unique valeur ostensive pour introduire la tangente dans le but de faire le lien entre sa pente et la limite du taux d'accroissement – C3 semble jouer le même rôle ostensif que C1 au collège. La figure 1 montre ce que l'on trouve dans les manuels en France.

Mais alors la droite (*OA*) de la figure 1 n'est pas une sécante à la courbe ! On voit qu'implicitement, et localement, le terme « sécante » a changé de sens puisque la définition simple et intuitive « une droite qui coupe » est abandonnée au profit de définition implicite « une droite passant par deux points de la courbe » – cette dernière définit plutôt une corde.

[2] Les manuels étudiés sont : Bréal, Déclic, Fractale, Indice, Math'x et Repère.

[3] Il est à préciser qu'il n'est *a priori* pas nécessaire de définir mathématiquement la notion de tangente à une courbe avant le chapitre sur la dérivation. On peut en effet penser qu'une idée intuitive de cette notion suffisamment correcte et opérationnelle pourrait suffire.



« En bougeant le point *M* vers *A*, la sécante tend vers la tangente. »
(Déclic 1re S, page 71)

Figure 1

1.3. Les conceptions de la notion de tangente

Le chapitre sur la dérivation marque une rupture avec les apprentissages des années précédentes. Or, la notion de tangente n'a été travaillée que sur les cercles. On appuie donc l'enseignement des dérivées sur des conceptions *intuitives* de la notion de tangente. Au-delà du problème flagrant de la rigueur mathématique, on ne peut manquer de penser que les conceptions intuitives des élèves s'inspirent pour une large part des conceptions C1 et C2. Ces dernières sont inadéquates pour l'analyse. De plus, on appuie l'introduction de la dérivation sur C3 qui risque fort d'être loin des conceptions initiales des élèves. Car enfin, pourquoi C3 apparaîtrait-elle spontanément ?

Dans l'enseignement français, on voit donc apparaître quatre conceptions institutionnelles de la notion de tangente : les conceptions du cadre géométrique, C1 et C2, et les conceptions du cadre analytique, C3 et C4. Celles-ci forment deux groupes dont les liens ne sont jamais travaillés. Il y a une nette déconnexion du contenu mathématique relatif au cadre dans lequel on considère la notion de tangente. Cette déconnexion pourrait être réinterprétée en terme de déconnexion des praxéologies (Barbé, Bosch, Espinoza & Gascón, 2005). En particulier, on ne montre pas que la nouvelle notion, avec la dérivation, généralise la définition de la tangente au cercle.

Les élèves n'ont en général qu'une conception très partielle, et souvent fausse, de la notion de tangente. Les études de Sierpinska (1985), Vinner (1991) et de Castella (1995) ont montré une grande disparité de conceptions. En particulier, la

« perception globale » C1, sous-tendue par la tangente au cercle, est fréquente et tenace[4].

Nous avons repris le test au centre de l'étude de Castella (1995) qui proposait une courbe et une droite et demandait si la droite était tangente ou non. Ce nouveau test (cf. annexe A) propose une courbe et un point et demande de tracer la tangente et, si ce n'est pas possible, d'expliquer pourquoi. Le test proposé est ainsi proche du test élaboré par Vinner (1991). Trois classes de première scientifique, dans trois villes différentes, ont été concernées, soit 88 élèves. Le test, d'une durée de 20 minutes, s'est déroulé en octobre 2009, avant tout enseignement de la dérivation – sauf pour les redoublants à l'effectif très faible.

Les premiers résultats montrent un grand nombre d'élèves ayant des conceptions erronées sur la notion de tangente (cf. annexe B) :

- 33% ont des conceptions liées au cercle (C2) : soit il est écrit qu'il est impossible de tracer une tangente car il ne s'agit pas d'un cercle, soit une perpendiculaire à un rayon imaginaire est tracée ;
- 27% ont une conception globale (C1) ;
- 28% pointe l'impossibilité de tracer une tangente à une portion rectiligne ;
- 27% de cas particuliers disparates.

Bien entendu ces conceptions ne s'excluent pas et il est fréquent de constater des associations et même des contradictions. Néanmoins, plus de la moitié des élèves (51%) ont des conceptions de la notion de tangente conformes à l'enseignement du collège (C1 ou C2) et, finalement, seul 22% des élèves ont des conceptions qui semblent adéquates dans le cadre graphique. Ainsi, l'introduction de la dérivation par les tangentes ne peut être raisonnablement envisagée que pour environ un cinquième des élèves des classes scientifiques.

On constate qu'aucun élève ne montre spontanément la conception C3 par la limite des sécantes. Tout au plus un élève s'en approcherait puisqu'il donne à voir une sécante avec deux points proches (cf. annexe B-*e*). En fait, l'utilisation du terme « sécante » est largement problématique. Outre le problème pointé précédemment à propos de la figure 1, si M est un point de la courbe n°6 proche de K, peut-on dire que (KM) est une sécante ?

Même si le cas d'une courbe ayant une portion rectiligne n'est pas envisagé dans les manuels, cette approche C3 ne peut que renforcer l'obstacle de la tangente à une courbe rectiligne. Du point de vue mathématique, pour approcher la notion de

[4] Elle est renforcée par les manuels qui proposent de déterminer, avant le chapitre sur la dérivation, les tangentes aux paraboles.

dérivée on utilise la notion de tangente, mais comme cette dernière n'est pas définie, pour approcher la notion de tangente on utilise la limite dans l'espace projectif réel de dimension 1. Cette fuite en avant n'est pas raisonnable et nous ne pouvons que constater que cette approche C3 n'est pas pertinente pour le problème qui nous occupe.

Ainsi, non seulement 4/5 des élèves de l'étude n'ont pas des conceptions adéquates pour profiter de l'introduction de l'analyse proposée dans l'enseignement, mais en plus on utilise une nouvelle conception C3 qui renforce les obstacles. Il y a des problèmes importants à régler, et il faut les régler avant de plonger les élèves dans le grand océan de l'analyse. Pour cela, nous partirons essentiellement de la conception C1 vue au collège, et nous élaborerons un milieu théorique dont l'aboutissement sera C4. Dans ce processus, nous utiliserons une conception intermédiaire qui permettra de donner une existence mathématique consistante à la notion de tangente qui généralise C1 et C2. Nous délaissons, pour les nombreuses raisons invoquées ci-dessus, la conception C3.

2. Balises pour un enseignement alternatif des tangentes

Avant d'expliciter notre proposition alternative pour l'enseignement de la tangente et de la dérivation, nous exposons trois points de vue qui nous ont guidés.

2.1. Le projet AHA

Pour résoudre les problèmes dans l'apprentissage de l'analyse, le projet AHA (Approche Heuristique de l'Analyse) se propose de repenser l'enseignement de l'analyse dans sa globalité. Il s'agit d'un projet ambitieux proposé par des chercheurs en didactique. Un manuel et un guide méthodologique ont été publiés en 1999.

En ce qui concerne l'enseignement des tangentes et conformément aux recherches en didactique mentionnées en section 1, les auteurs du projet proposent un travail sur cette notion avant l'entrée dans l'analyse. Ils s'appuient sur la partie affine d'un polynôme en 0 : la tangente en $(0,y_0)$ à la courbe représentative de la fonction polynomiale $f(x)=y_0+y_1x+x^2g(x)$ a pour équation $y=y_0+y_1x$. Cette technique d'obtention des tangentes n'est pas généralisée, ni à des courbes plus générales, ni à des points d'abscisses non nuls. On travaille certes sur la notion de tangente, mais cette notion n'a toujours pas reçu de définition mathématique. Seule la mention d'une droite qui « frôle la courbe » est donnée, expression non définie mathématiquement et qui ne pourra être reprise pour une courbe rectiligne. De plus, le lien avec une approximation affine n'est pas si évident. En effet, si $1-x \approx 1-x+x^2+x^3$ au voisinage de zéro comme il est écrit en page 56 (AHA, 1999), il en est de même de beaucoup d'autres applications affines, à moins de mieux préciser le signe « ≈ ». Le recours à une « meilleure approximation affine » poserait d'autres problèmes comme l'a précisé Perrin-Glorian (1999).

Toutefois, hormis ce point précis concernant la notion de tangente, ce projet est d'un grand intérêt et nos préoccupations sont très proches de celles du projet AHA :

- donner des problèmes à résoudre : c'est essentiel pour entrer dans le processus d'apprentissage même si nous n'abordons pas ce point dans cet article ;
- proposer un travail intermédiaire dans le cadre algébrique : c'est le cœur de notre proposition (cf. section suivante) ;
- délaisser la conception globale C1 pour une conception locale en étudiant le cas d'un polynôme du troisième degré (Schneider 1991, 2001) : nous nous inspirerons de ce point en section 3.2 ;
- appui sur le développement historique en plaçant les limites au cœur du processus (AHA, 1999) : nous nous appuierons également sur l'histoire des mathématiques, mais en prenant une référence délaissée par les auteurs du projet AHA.

2.2. Les jeux local/global et calcul exact/calcul approché

Maschietto (2002, 2004) a mis en place des séances d'enseignement utilisant des zooms sur une courbe exploitant ainsi les idées de Tall (1985). Elle met en évidence l'importance du jeu entre les points de vue local et global que cela induit. Regardons un premier exemple de zooms exploitant les potentialités des logiciels de tracés de courbes. Nous utilisons ici le logiciel *GeoGebra* pour la courbe d'équation $y = 2x^3 - x^2 - x + 1$ au point $A(1,1)$.

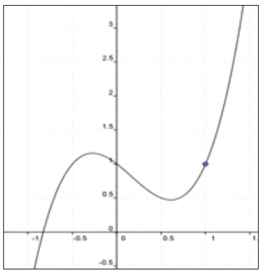


Figure 2-a : grille 0,5×0,5.

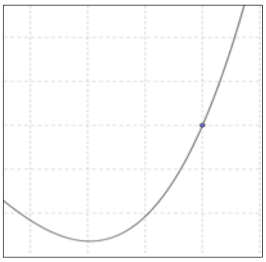


Figure 2-b : grille 0,05×0,05.

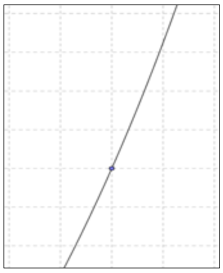


Figure 2-c : grille 0,02×0,02.

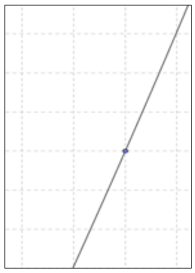


Figure 2-d : grille 0,01×0,01.

On voit apparaître, après neuf zooms centrés sur le point indiqué en figure 2-*a*, une droite en Figure 2-*d* – une propriété des courbes nommée *micro-linéarité* dans Maschietto (2002, 2004). Il est ainsi possible de déterminer, au point indiqué, l'équation de la tangente – une des tâches données aux élèves par Maschietto.

On peut également tracer la tangente de manière très satisfaisante à l'aide du logiciel : la droite est tracée en tirets entre le point initial marqué par un petit disque et un autre point marqué par une croix (figure 2-*d'*). Puis, après des zooms inverses, on peut revenir à la fenêtre initiale qui fait désormais apparaître la courbe et sa tangente (cf. les figures 2-*d'* à 2-*a'*).

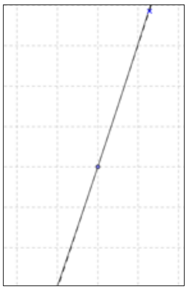


Figure 2-d' : grille 0,01×0,01.

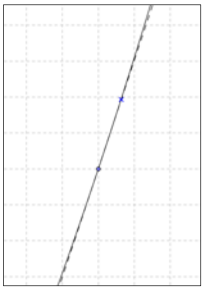


Figure 2-c' : grille 0,02×0,02.

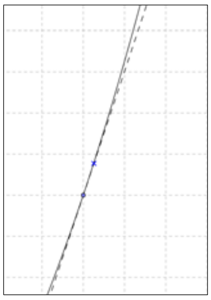


Figure 2-b' : grille 0,05×0,05.

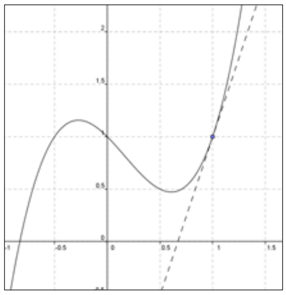


Figure 2-a' : grille 0,5×0,5.

Ce jeu entre le local et le global, comme le pointe Maschietto, est essentiel pour comprendre la notion de tangente. Une tangente, c'est un objet global (voir la figure 2-*a'*) dont la définition est locale (voir la figure 2-*d'*). À ce propos, on ne peut manquer de citer Perrin-Glorian (1999) lors de la conclusion de son étude sur les approximations affines des courbes : « La tangente est vraiment une notion locale ! […] La seule utilisation vraiment adéquate de l'ordinateur pour faire apparaître naturellement la tangente serait de faire des zooms jusqu'à voir la courbe devenir droite. »

Ce jeu entre les points de vue local et global est également essentiel pour entrer dans l'analyse comme le préconise la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques en France dirigée par Kahane (2002). Il y est par ailleurs spécifié l'importance des ordres de grandeur dans le calcul, ordres de grandeur qui constituent un nouveau jeu entre calcul exact et calcul approché.

Outre les zooms dont nous nous servirons pleinement, nous nous appuierons sur ces deux points : le jeu local/global et le jeu calcul exact/calcul approché.

2.3. Un bref éclairage historique

Un éclairage historique permet de mieux cerner ce que peut être une proposition alternative pour l'enseignement des tangentes et de la dérivation. Lorsque l'on met en regard l'enchaînement des notions enseignées et des notions telles qu'elles apparaissent dans l'histoire, on se rend compte qu'il manque une étape du déroulement historique : les travaux de Descartes. Descartes (1637) définit une classe de courbes pour lesquelles on dispose d'une méthode de détermination des tangentes. C'est une avancée décisive qui dépasse largement la petite classe des coniques. La méthode de Descartes est entièrement algébrique et facilement compréhensible. Sa méthode s'appuie pour l'essentiel sur la conception antique C1, mais du point de vue local. Nous y reviendrons dans la partie suivante.

La méthode de Fermat permet également de trouver facilement les tangentes aux courbes algébriques – voir par exemple (Barbin, 2006) ou (Cercle d'Histoire des Sciences, 1999). Mais elle est difficile à expliquer puisque, de fait, elle est déjà en grande partie dans l'analyse. En effet, l'*adégalisation* consiste à faire comme si la courbe et la tangente étaient confondues et ce n'est pas un hasard si sa méthode s'adapte pour certaines courbes transcendantes comme la cycloïde contrairement à la méthode de Descartes (Cercle d'Histoire des Sciences, 1999). Pour reprendre les termes de Chevalard (1999), on peut dire que la méthode de Fermat est une *technique* algébrique dont la *technologie* est analytique. C'est donc une méthode qui donne les résultats attendus mais qui ne permet ni de comprendre pourquoi elle fonctionne ni, surtout, de définir convenablement une tangente à une courbe. Par ailleurs, Fermat ne donne pas, contrairement à Descartes, une classe de courbes pour laquelle sa méthode permet de déterminer les tangentes.

Nous ne développons pas les points de vue de Newton et de Leibniz qui ont permis l'émergence de l'analyse (voir par exemple Barbin, 2006). Nous précisons seulement quelques points sur lesquels nous nous appuierons. Leibniz se place en opposition à Descartes en critiquant la faible portée des seules courbes *géométriques*. Mais, en voulant définir les tangentes pour une vaste classe de courbes, Leibniz s'inscrit finalement dans la logique cartésienne. Plus spécifiquement, la détermination des tangentes montre également des similitudes entre les travaux de Descartes et de Leibniz. Ils se basent tous deux sur le même principe : en un point d'une courbe donnée, il passe plusieurs droites qui constituent un faisceau de droites concourantes, la tangente est l'une de ces droites qui a une propriété particulière. Cette propriété est le cœur des travaux de Leibniz comme de Descartes sur les tangentes. Tout le problème est donc un problème de caractérisation et de sélection d'une droite parmi les sécantes où, bien entendu, la nature de la courbe joue un rôle central.

Nous tenons à préciser que dans la suite, une *sécante* à une courbe est une droite qui passe par un point de la courbe, point où l'on veut déterminer la tangente. En particulier, l'approche C3, par « la limite des sécantes », omniprésente dans les manuels d'enseignement actuel semble totalement absente des travaux du XVII^e siècle – même si certaines conceptions de Newton (1740) s'en approchent. En outre, caractériser une droite parmi les sécantes permet d'éviter un des problèmes posés par la conception C3 que Sierpinska (1985) mentionne en citant des élèves : « Quand on arrivera au point [A] on n'aura plus qu'un seul point, mais par un seul point on peut mener beaucoup de droites. » Nous proposons dans la partie suivante de considérer le problème *par le bon bout* : on n'a effectivement qu'un seul point pour la tangente, caractérisons donc la tangente dans ce faisceau de droites concourantes.

3. Les tangentes aux courbes algébriques : constitution d'un milieu théorique

Avant d'entrer dans l'analyse, nous allons dans cette section construire une notion de tangente qui dépasse largement les seuls cercles (sans se restreindre aux coniques comme par exemple en Italie ou en Grèce). L'idée est la même que celle de Ibarra et Velásquez (2007) : faire émerger d'abord les concepts dans le cadre algébrique avant d'entrer dans le cadre analytique.

Le choix des courbes algébriques n'est pas un hasard car nous disposons de méthodes simples d'obtention des tangentes comme la méthode de Descartes. À l'origine, cette méthode consiste à rechercher un cercle tangent à une courbe. Il est tout de même plus simple de chercher directement une droite comme le propose dès 1849 Florimond de Beaune (Barbin, 2006 p. 216). La technique est simple à comprendre et simple à mettre en œuvre. En particulier, il n'y a aucune notion nouvelle à incorporer au curriculum. On se sert pleinement de l'algèbre enseignée jusqu'au grade 11 : équations de courbes, calcul algébrique, équations, systèmes de deux équations. Il faudrait toutefois appuyer sur certaines de ces notions comme les équations de courbes – sans forcément se restreindre aux cercles – et la factorisation par $x–a$ d'un polynôme de racine a.

Nous développons sur des exemples trois points-clé de notre proposition. Pour d'autres exemples montrant la portée de la méthode de Descartes nous référons à Vivier (2006, 2010) où, outre les coniques, les cas suivants sont envisagés et traités : point double, point de rebroussement, demi-tangentes, points isolé.

3.1. La méthode : l'exemple de la fonction carrée

Considérons une parabole, la plus simple des courbes algébriques après la droite. Pour déterminer la tangente à $y = x^2$ en un point $A(a,a^2)$, nous caractérisons la tangente parmi les droites qui passent par A. Nous considérons donc les sécantes en A qui ont une équation de la forme $y = k(x–a)+a^2$.

1. On forme le système des deux équations pour identifier les points d'intersection : $y = x^2$; $y = k(x–a)+a^2$

2. On écrit l'équation donnant les abscisses des points d'intersection :

$$x^2 = k(x–a)+a^2$$

On factorise l'équation par $x–a$ puisque $x=a$ est nécessairement une solution :

$$(x–a)\cdot(x+a–k) = 0$$

3. On obtient deux solutions $x = a$ et $x = k–a$ correspondant à deux points d'intersection entre la courbe et une droite passant par A (cf. figure 3). Comme on veut la tangente, il faut qu'il n'y ait qu'un seul point d'intersection. En identifiant le deuxième point d'intersection au premier, on trouve $a = k–a$ soit $k = 2a$.

On obtient alors une équation de la tangente : $y = 2a(x\text{-}a)+a^2$

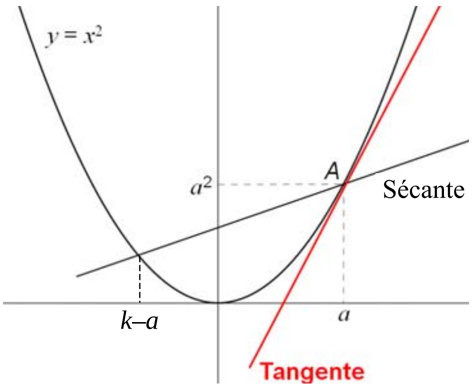


Figure 3

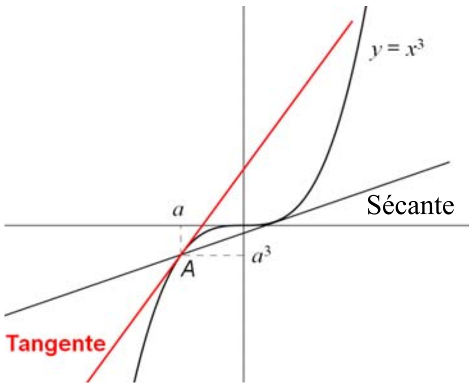


Figure 4

Avant d'aller plus loin, faisons plusieurs remarques :

– On s'appuie sur la notion C1 du collège, donc cet exemple de la parabole ne requiert aucune nouvelle conception des tangentes de la part des élèves. Il n'y a rien de nouveau, toutes les notions nécessaires sont enseignées en classe de seconde (grade 10) ;

– on obtient la tangente par la recherche d'une solution double ;

– la forme fonctionnelle des droites passant par A a l'intérêt de montrer que seul le paramètre k est à déterminer pour trouver la tangente parmi les droites du faisceau ;

– la forme fonctionnelle a l'inconvénient de ne pas prendre en compte les droites *verticales*. À ce propos on pourra faire remarquer que le point d'intersection entre la parabole et la droite d'équation $x=a$ mène à un point d'intersection qui n'est pas double, ce qui justifie *a posteriori* la forme fonctionnelle. Pour faciliter la compréhension, il serait préférable de revenir sur ce point au moment de déterminer les tangentes aux cercles ;

– le point 3 peut être abrégé puisqu'il revient exactement à annuler le second facteur lorsque $x=a$. Cette remarque simplifie la méthode, puisqu'il n'est pas nécessaire de déterminer toutes les solutions à l'équation ainsi formée, et augmente l'efficacité de la méthode pour les courbes de degré 3 ou plus, puisqu'il n'existe pas de méthode générale pour résoudre les équations algébriques.

3.2. Vers une conception locale : l'exemple de la fonction cube

Plus généralement, les courbes de la forme $y=f(x)$ où f est un polynôme mènent toujours à la recherche d'une solution au moins double. On obtient par ailleurs la formule de dérivation des polynômes (cf. Vivier, 2010). En particulier, pour une équation comme $y = x^3$, la technique algébrique est identique :

1. Système : $y = x^3$; $y = k(x–a)+a^3$.
2. Équation et factorisation : $(x\text{-}a).\ [x^2+ax+a^2–k] = 0$.
3. Annulation du deuxième facteur : $a^2+a.a+a^2–k = 0$ et obtention du coefficient directeur de la tangente : $k = 3a^2$.

Même si, ici encore, on pourrait déterminer toutes les solutions de l'équation, on comprend l'intérêt d'abréger le point 3 comme nous le proposons en annulant le deuxième facteur, sans chercher tous les points d'intersection. Cela évite en outre de devoir considérer des solutions imaginaires. Dans le cadre d'un enseignement effectif, il faudrait bien entendu guider un peu les élèves pour la factorisation et surtout donner une valeur au paramètre a.

Comme l'a déjà signalé le groupe AHA, cet exemple est important : on montre que la tangente peut très bien recouper la courbe en un autre point. Le troisième point d'intersection s'obtient en prolongeant le tracé de la tangente sur la figure 4 (voir aussi l'Annexe B-*b*). La propriété qui permet de définir et d'obtenir les tangentes est donc locale ce qui permet de se dégager de la conception rudimentaire C1.

Dans certains pays, ce type de démarche est parfois enseignée pour les coniques (comme en Italie ou en Grèce). Les élèves ont alors des réflexes : poser le système et annuler le discriminant Δ de l'équation qui résulte du système, sans factorisation (Maschietto, 2004). Mais cette technique reste d'une portée bien restreinte car elle ne peut s'appliquer qu'aux courbes algébriques de degré au plus 2. Or, il ne faut surtout pas s'arrêter aux coniques car ce sont des courbes pour lesquelles la conception globale C1 est valide. Il faut s'en écarter pour, entre autres, comprendre que la notion de tangente est une notion locale.

3.3. Le cas du cercle ou le problème de la généralisation

Nous présentons ici cette technique pour le cas du cercle, un cas important pour l'enseignement. Le cas générique est un peu complexe car il nécessite de distinguer le cas particulier des points où les tangentes sont *verticales*. Nous traitons donc le cas du cercle en deux temps avec un cercle centré en l'origine du repère.

Déterminons la tangente au cercle de centre $O(0,0)$ de rayon r au point $A(a,b)$. Nous utilisons ci-dessous pleinement l'identité $a^2+b^2 = r^2$.

1. Système : $x^2+y^2 = a^2+b^2 \quad ; \quad y = k(x-a)+b$
2. Équation et factorisation : $x^2+[k(x-a)+b]^2 = a^2+b^2$

$$\Rightarrow (x-a)\cdot[x+a+k^2(x-a)+2kb] = 0$$

3. Annulation du deuxième facteur : $a+a+k^2(a-a)+2kb = 0 \Rightarrow k = a/b$.

Mis à part le début avec la substitution de l'expression de y dans l'équation du cercle, tout est identique aux cas précédents.

Une fois trouvée la valeur de k, et donc la tangente, on peut alors montrer le théorème vu au collège. Le produit scalaire $\overrightarrow{OA}\cdot\vec{u}$, où $\vec{u}=(1,k)$ est un vecteur directeur de la tangente en A, permet d'obtenir facilement l'orthogonalité entre le rayon et la tangente. On entre alors dans une perspective de généralisation.

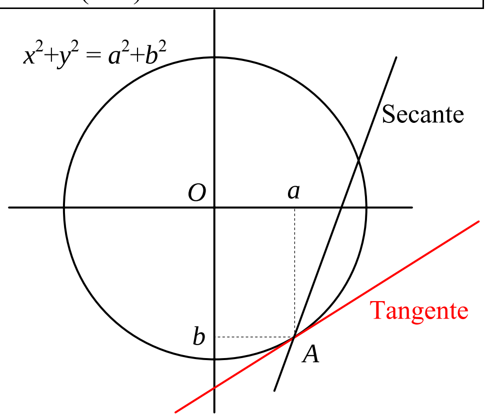


Figure 5

Toutefois, lorsque b=0, la méthode semble mise en défaut. En fait, ce que l'on vient de montrer c'est qu'aucune droite non parallèle à l'axe des ordonnées n'est tangente au cercle au point B. Ainsi, s'il y a une tangente, ce ne peut être que la droite d'équation $x = a$. Faisons à nouveau la méthode :

1. Système : $x^2+y^2 = a^2$; $x = a$
2. Équation et factorisation : $a^2+y^2 = a^2 \Rightarrow y^2 = 0$

Le point 3. est inutile, on obtient ici un unique point double d'intersection entre la droite candidate, d'équation $x = a$, et le cercle : c'est donc bien la tangente.

3.4. Le milieu théorique des tangentes

Le cas particulier précédent – les tangentes *verticales* aux cercles – peut paraître abstrait[5] mais il est important pour deux raisons. D'une part il justifie la méthode de recherche des tangentes qui s'appuie sur les équations fonctionnelles des sécantes – donc en délaissant volontairement les droites *verticales* – et, d'autre part, elle permet de mettre l'accent sur l'importance d'obtenir un point d'intersection d'ordre au moins 2. On peut alors faire un retour sur le cas de la parabole où l'intersection avec une droite parallèle à son axe de symétrie ne donne qu'un point d'intersection simple.

La méthode présentée provient d'une étude mathématique, épistémologique et historique de la notion de tangente. Elle a été élaborée à partir de l'identification de connaissances génériques que possèdent des élèves de fin de première année du lycée. Ainsi, nous avons élaboré un milieu théorique (Bloch, 2002) pour la notion de tangente aux courbes algébriques. Plus précisément, le savoir visé par ce milieu théorique est constitué par la définition mathématique de la tangente qui émerge de ce premier travail algébrique : *Une tangente est une sécante qui forme une intersection d'ordre de multiplicité au moins 2 avec la courbe.*

Les trois exemples proposés peuvent être organisés en un jeu dont l'entrée est possible à partir des connaissances des acteurs et des conceptions initiales. Il semble toutefois que, comme dans (Bloch, 2000, chapitre 6, page 279) des interventions du professeur soient nécessaires pour certains points comme la mise en évidence des nécessaires solutions doubles, l'obtention d'une tangente *verticale* à un cercle ou la forme algébrique adéquate d'une sécante.

L'élaboration d'un scénario d'enseignement et d'un milieu expérimental *a priori* (Bloch, 2002) avec une analyse *a priori* restent à faire. Il s'agira en particulier de bien préciser les rétroactions attendues dans l'objectif de faire évoluer les conceptions des acteurs de la notion de tangente. En particulier, nous signalons ci-dessous les principales variables de la situation :

---

[5] On pourrait d'ailleurs s'en dispenser puisque l'on a une caractérisation géométrique des tangentes indépendante du repère considéré.

- la possible contextualisation des activités (dans le cas d'une contextualisation, il faut alors se poser la question de la présence ou non d'un repère) ;
- le choix du type de courbes avec en particulier les deux types principaux : courbes de fonctions $y=f(x)$ et courbes implicites $f(x,y)=0$. Le premier type principal donne lieu à plusieurs autres choix de variables : fonctions polynômes (dont, notamment, le degré est à préciser), fonctions homographiques, fonctions avec une racine carrée, etc. Précisons que le deuxième type principal ne peut tout à fait être absent à cause des cercles ;
- le choix des points où déterminer la tangente (notamment pour la fonction cube – afin de faciliter la visualisation du fait que la tangente et la courbe se recoupent – ou pour les cercles – afin de proposer, ou non, un point où la tangente est *verticale*). Il est par ailleurs possible d'envisager un point générique pour certaines courbes simples comme la parabole.

3.5. Le cas particulier des tangentes aux droites

La méthode présentée peut s'appliquer à toutes les courbes algébriques. Néanmoins, la solution n'est pas forcément double et il peut y avoir plusieurs solutions pour le paramètre k comme pour les points multiples ou les demi-tangentes (Vivier, 2006, 2010). Mais malgré la grande portée de cette méthode[6], il n'est sans doute pas utile d'étudier des courbes plus complexes de cette manière algébrique. L'étude est évidemment intéressante et riche, mais il ne faut pas perdre de vue notre objectif : nous voulons préparer le terrain à une introduction de l'analyse et non pas développer un enseignement parallèle. En particulier, si la définition de la tangente que nous venons de donner suffit largement pour le travail envisagé, il faudrait l'adapter de cette manière pour poursuivre l'étude des courbes dans le cadre algébrique : *Les sécantes en un point A d'une courbe algébrique forment une intersection de même ordre de multiplicité v, sauf pour au plus v d'entre elles qui forment une intersection d'ordre de multiplicité strictement supérieur à v. Ces dernières sont appelées tangentes en A à la courbe.* (Cf. (Vivier, 2010) pour une justification de ce résultat.)

En revanche, comme nous l'avons constaté en section 1, un travail spécifique sur la tangente à une *courbe rectiligne* est nécessaire. Cherchons ainsi la tangente à la *courbe* d'équation $ax+by+c = 0$ au point $A(x_A,y_A)$. Nous supposons ici que b n'est pas nul afin de ne pas avoir à distinguer deux cas.

[6] La détermination de k revient à déterminer les racines d'un polynôme en k. Le calcul exact de k n'est donc pas toujours possible.

1. Système : $ax+by+c = 0$ $\quad\quad y = k(x–x_A)+y_A$
2. Équation (obtenue par substitution) : $ax+bk(x–x_A)+by_A+c = 0$
Comme $by_A+c = -ax_A$, on obtient : $ax+bk(x–x_A)–ax_A = 0 \Rightarrow (x–x_A)\cdot(a+bk) = 0$
3. Annulation du deuxième terme : $a+bk = 0 \Rightarrow k = -a/b$.

L'annulation du second facteur pour $x=x_A$ est un peu étrange puisque x n'apparaît pas dans ce deuxième terme et que l'équation disparaît pour cette valeur de k. Mais, si l'on s'en tient à la méthode, on a su déterminer la tangente à une droite. Notons qu'il n'y a ici aucune adaptation de la méthode. En revanche, l'explication de la méthode est bien différente des autres cas envisagés : on passe d'un point simple d'intersection pour les sécantes à une infinité de points d'intersection pour la tangente dont la multiplicité reste mystérieuse – car le degré $-\infty$ du polynôme nul n'explique rien. Il s'agit d'un cas très particulier.

Bien évidemment, le cas des tangentes aux droites est à considérer après un premier travail sur des fonctions simples (comme les fonctions polynômes, les fonctions homographiques, *etc.*).

4. Une introduction de l'analyse

L'objectif de cette section n'est pas d'élaborer un milieu théorique pour le nombre dérivé. Notre objectif est plutôt d'exposer les grandes lignes d'un possible déroulement permettant d'aboutir au nombre dérivé à partir de la notion de tangente afin de justifier la pertinence de notre proposition avec le curriculum actuel du lycée.

Après le travail algébrique exposé en section 3 sur la notion de tangente, nous pouvons nous appuyer sur les trois points suivants pour aboutir à la limite du taux d'accroissement :

- la tangente a une véritable consistance mathématique ;
- la notion de tangente est perçue comme locale ;
- pour déterminer l'équation d'une tangente il n'y a qu'un paramètre à déterminer pour la caractériser parmi les sécantes.

En reprenant l'idée de la commission Kahane (2002), nous proposons un changement de cadre pour entrer dans une perspective de calcul approché. On peut par exemple donner une courbe tracée dans un repère en leur demandant de déterminer l'équation de la tangente en un point donné[7]. Le premier travail, pour s'approprier la tâche, peut se faire sur papier.

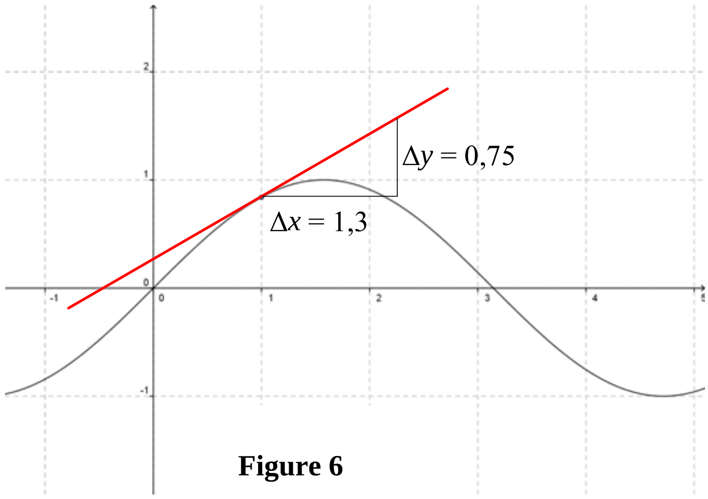


Figure 6

Par exemple, pour la courbe de la fonction sinus en $x = 1$, on trace la tangente de la manière la plus précise possible pour ensuite déterminer son équation fonctionnelle à l'aide des coordonnées relevées dans le repère (cf. figure 6 où, pour simplifier la tâche, le repère est gradué en cm). On trouve $k \approx 0{,}75/1{,}3 \approx 0{,}58$.

L'important ici est le processus de détermination de k et notamment l'utilisation du triangle rectangle. La technique utilisée est très approximative car elle demande de tracer « à vue d'œil » une tangente, puis de mesurer les côtés perpendiculaires d'un triangle rectangle pour ensuite calculer la pente de la tangente.

Le problème de l'approximation de la technique étant posé, il est alors possible d'utiliser l'informatique pour améliorer la précision des résultats. À l'aide des zooms on peut avoir un triangle rectangle de plus en plus petit et donc avoir une précision de plus en plus grande pour k puisque le tracé de la tangente est de plus en plus précis (le calcul de $\Delta y/\Delta x$ est entièrement géré par l'informatique). L'adaptation des triangles rectangles aux zooms successifs constitue une grande différence avec le problème de la disparition de ces triangles que montre Schneider (1991) dans une conception de type C3.

[7] Il faut noter que ce type de tâche apparaît dans les manuels pour un calcul approché d'un nombre dérivée, mais ces tâches sont bien isolées.

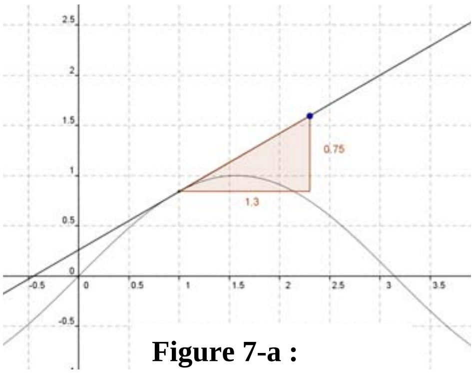


Figure 7-a :
k ≈ 0,75/1,3 ≈ 0,58.

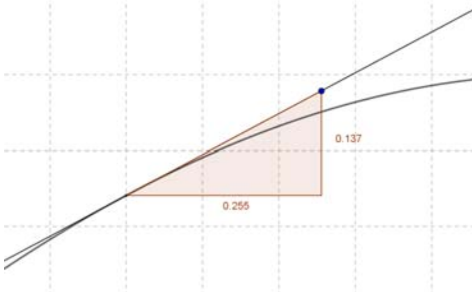


Figure 7-b :
k ≈ 0,137/0,256 ≈ 0,537.

Figure 7-c :
k ≈ 0,00196/0,00363
≈ 0,54046.

L'estimation par le quotient Δ*y*/Δ*x* devient plus précise au fur et à mesure des zooms jusqu'à ce que la courbe coïncide avec sa tangente en figure 7-*c* (figure à rapprocher des figures 2-*d* et 2-*d'*). Dans les trois cas présentés en figures 7, on se rapproche de la valeur exacte de la pente de la tangente (cos(1) ≈ 0,540302) en jouant également sur la précision des valeurs affichées par le logiciel.

Notons toutefois que cette méthode est limitée car, une fois que la courbe est représentée sur l'écran par une droite (figures 2-*d*, 2-*d'* et 7-*c*), des zooms supplémentaires ne permettent plus d'améliorer la précision. Mais le principe de faire des zooms pour avoir une valeur meilleure pour la pente *k* permet de lier le problème de la précision du calcul approché du paramètre *k* avec le jeu local/global. Les deux principes analytiques suivants peuvent ainsi émerger :

- le triangle caractéristique de Leibniz apparaît et montre que l'on peut localement considérer que courbe et tangente sont confondues (voir à ce propos (Tall, 1985)),

– affiner les valeurs approchées pour déterminer une valeur exacte est, dans le principe, proche du concept de limite.

Ainsi, avec le deuxième point, la valeur exacte recherchée pour le paramètre k est la *limite* du quotient $\Delta y/\Delta x$ qui est, en utilisant le premier point, la limite du taux d'accroissement au point considéré[8].

On aboutit donc au nombre dérivé, ce qui était l'objectif. Mais on a bien plus :

– le lien entre tangente et dérivée est une conséquence de la construction mathématique (au moins pour les courbes algébriques) et non une affirmation à la rigueur mathématique douteuse,

– on dispose des dérivées des polynômes et d'autres fonctions simples avant l'enseignement de la notion de limite (Vivier, 2010).

Notons enfin qu'il s'agit d'une véritable généralisation aux courbes non algébriques. En particulier, pour notre exemple, le système $y=\sin(x)$; $y=k(x-1)+\sin(1)$ donne lieu à une équation inexploitable du point de vue algébrique.

Conclusion

Dans cette étude et contrairement aux programmes du lycée, nous avons considéré que la notion de tangente constituait un véritable savoir. Nous avons donc élaboré un milieu théorique pour ce savoir mathématique. Le passage proposé par les courbes algébriques avant d'entrer dans l'analyse nous paraît essentiel, car cela permet d'avoir à disposition une vraie notion de tangente avant d'aborder l'analyse. De plus, l'enchaînement proposé distingue clairement les deux étapes : 1- les tangentes et 2- les dérivées, alors que dans l'enseignement actuel les deux objets sont introduits en même temps.

Les perspectives ouvertes par ce travail nous semblent particulièrement riches. Il conviendra en premier lieu de tester notre proposition de manière effective. Mais il ne faut pas oublier le problème de l'épistémologie des professeurs : cette conception alternative de la notion de tangente est peu connue et est souvent regardée avec suspicion comme nous avons pu le constater lors de conférences en lycée. Cet enseignement peut être proposé dès la classe de seconde, mais il nous semble préférable de le réserver à la classe de première avant, en classe de terminale, de véritablement entrer dans l'analyse. Une expérimentation est en cours au Mexique en formation continue de professeurs de lycée. Cette première

[8] Il s'agit évidemment d'un point délicat. C'est pour cette raison que nous ne prétendons pas aboutir à la constitution d'un milieu théorique pour le nombre dérivé. En particulier, un travail préalable sur la notion de limite nous paraît crucial.

expérimentation permet de limiter les problèmes liés à l'utilisation de l'algèbre, problèmes qu'il conviendra de ne pas négliger pour des lycéens. Notons que pour ce public d'enseignants, les conceptions de la notion de tangente ne sont pas totalement adéquates (voir par exemple (Biza, Nardi & Zachariades, 2008)).

On pourrait développer l'approche algébrique des courbes par la recherche du rayon de courbure. On peut en effet travailler sur la puissance d'un point par rapport à un cercle tangent dont le centre se situe donc sur la normale : le cercle osculateur s'obtient, comme pour la tangente, en factorisant – le point de contact donne une solution – puis en annulant un deuxième facteur. L'ordre 2 et l'étude de la convexité sont ainsi à portée. Malheureusement, le traitement algébrique est plus long, même dans le cas simple d'une parabole.

Nous ne nous sommes pas attardés sur les applications de la notion de tangente en focalisant notre attention sur les liens forts entre tangente et dérivée. Ces liens sont escamotés dans l'enseignement alors qu'ils peuvent constituer un fort point d'appui. Mais toute cette étude n'a de sens que si la notion de tangente est motivée, si elle permet effectivement de résoudre des problèmes. C'est important pour l'entrée dans le processus que nous proposons, même si, ultérieurement, la dérivation se révélera être un outil plus puissant. On pourra pour ce point se référer au projet AHA et à (Vivier, 2006).

Enfin, on ne peut passer sous silence la question qui est sous-jacente à beaucoup d'études et que nous n'avons qu'effleurée ici : *qu'est-ce qu'une courbe ?* Cette question pose de grandes difficultés aux étudiants, à tous les niveaux. La question est difficile car elle n'appelle pas une réponse, mais des réponses.

Bibliographie

Groupe AHA (1999), *Vers l'infini pas à pas, Approche Heuristique de l'Analyse – Guide méthodologique*, De Boeck Wesmael.

ANDREU IBARRA, M. & RIESTRA VELAZQUEZ, J. A. (2007), Et si nous en restions à Euler et Lagrange ? Mise à l'essai d'un enseignement d'analyse à des étudiants non mathématiciens en début d'études supérieures, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **12**.

BARBIN, E. (2006), *La révolution mathématique du XVIIe siècle*, Ellipses.

BARBÉ, Q., BOSCH, M., ESPINOZA, L. & GASCÓN, J. (2005), Didactic restrictions on the teacher's practice, The case of limits of functions in spanish hight school, *Educational Studies in Mathematics*, **59**.

BIZA, I., NARDI, E. & ZACHARIADES, T. (2008), Persistent images teacher beliefs about visualisation: the tangent at an inflection point, *Proceedings of PME 32 and PME-NA XXX*, Morelia – México.

BLOCH, I. (2002), Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations, *Actes de la 11e École d'été de didactique des mathématiques 21-30/08/2001*, Corps – France, La Pensée Sauvage.

BLOCH, I. (2000), L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université. *Thèse*, Université Bordeaux I.

CASTELA, C. (1995), Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **15(1)**.

CERCLE D'HISTOIRE DES SCIENCES – IREM DE BASSE-NORMANDIE (1999), *Aux origines du calcul infinitésimal*, Ellipses.

CHEVALLARD, Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **19(2)**.

DESCARTES, R. (1637), *La géométrie*, Editions Jacques Gabay, réédition de 1991, Téléchargeable à http://gallica.bnf.fr.

HOUDEMENT, C., KUZNIAK, A. (2000), Formation des maîtres et paradigmes géométriques, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, **20(1)**.

HOUDEMENT, C., KUZNIAK, A. (2006), Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **11**.

KAHANE, J.-P. (2002), *Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*, Odile Jacob.

KUZNIAK, A. (2009), *Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France*, in Chypre et France, Recherche en didactique des mathématiques, GAGATSIS, A., KUZNIAK, A. DELIYIANNI, E. & VIVIER, L. éditeurs. Lefkosia, Chypre 2009.

MASCHIETTO, M. (2002), Quelques éléments de l'étude de la transition algèbre.analyse au lycée, *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques 21-30 août 2001*, la Pensée Sauvage éditions.

MASCHIETTO, M. (2004), Le jeu entre point de vue local et point de vue global en analyse : une ingénierie didactique à visée diagnostique au niveau première, *Actes du colloque de Mulhouse 8-9 mars 2002*, IREM de Strasbourg.

NEWTON, I. (1740), La méthode des fluxions, et les suites infinies, par M. le chevalier Newton, traduction de Buffon, téléchargeable à http://gallica.bnf.fr.

PERRIN-GLORIAN, M.-J. (1999), La tangente est-elle vraiment la droite qui approche le mieux la courbe au voisinage d'un point ?, *Repères IREM*, **34**.

SCHNEIDER, M. (1991), Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente, *Repères IREM*, **5**.

SCHNEIDER, M. (2001), Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques – à propos d'un enseignement des limites au secondaire, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, **21(1.2)**.

SIERPINSKA, A. (1985), Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, **6(1)**.

TALL, D. (1985), Chors, Tangents and the Leibniz Notation, *Mathematics Teaching*, **112**, 48–52.

VINNER, S. (1991), The role of definitions in the teaching and learning of mathematics, in *Advanced Mathematical Thinking*, Edited by David Tall, Mathematics Education Library, Kluwer, Academic Publishers, **5**, 65–81.

VIVIER, L. (2006), *La Géométrie analytique*, Le Pommier, collection *Quatre à Quatre*.

VIVIER, L. (2010), La noción de tangente en la enseñanza segundaria, *Actes du Tercer Encuentro Internacional sobre la Enseñanza del Cálculo*, Saltillo – México, 12-13/11/2009, À paraître.

LAURENT VIVIER
Université Paris-Diderot, Laboratoire de Didactique André Revuz, France
Université d'Orléans – IUFM Centre Val de Loire, France
laurent.vivier@univ-orleans.fr

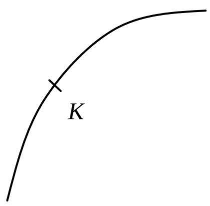
Annexe A. Le test proposé

Pour chacune de ces courbes, est-il possible de tracer une tangente au point K ?

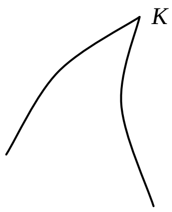
- si oui, tracez cette tangente,

- si non, expliquez rapidement pourquoi (écrivez à côté de la courbe).

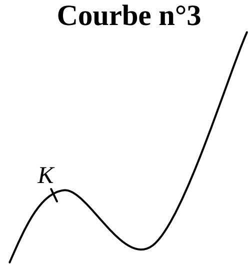
Courbe n°1



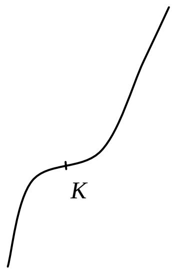
Courbe n°2



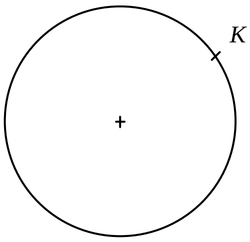
Courbe n°3



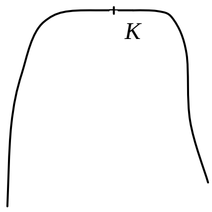
Courbe n°4



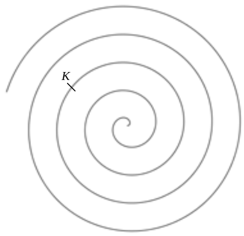
Courbe n°5



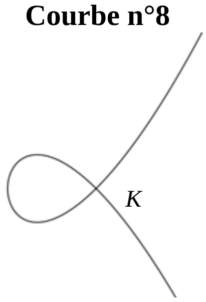
Courbe n°6



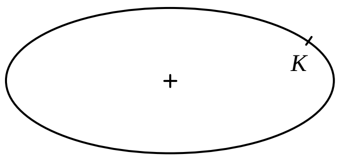
Courbe n°7



Courbe n°8



Courbe n°9

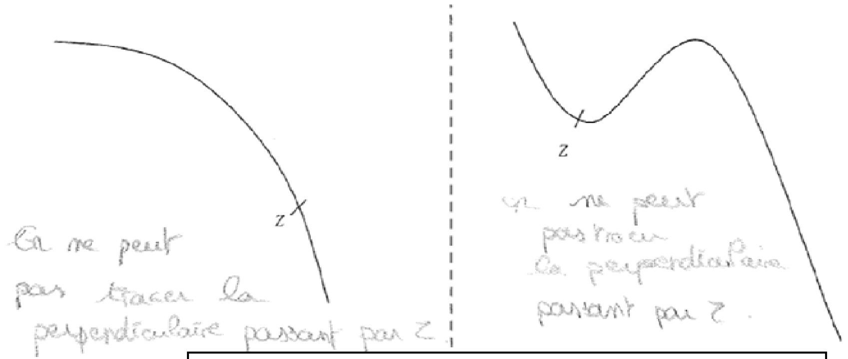


Les courbes, réduites ici à 50%, étaient réparties en deux pages (courbes 1 à 4 et courbes 5 à 9). Pour éviter les influences entre deux élèves voisins, le même test était proposé avec un point *Z* avec des courbes dans un ordre différent (1-3-5-6-8 pour la première page et 7-2-4-9 pour la seconde). Ces « courbes *Z* » sont formées sur le modèle des « courbes *K* » avec de légères différences (des symétries ou des rotations) exceptée pour l'homologue de la courbe n°8 qui est une courbe *en huit*.

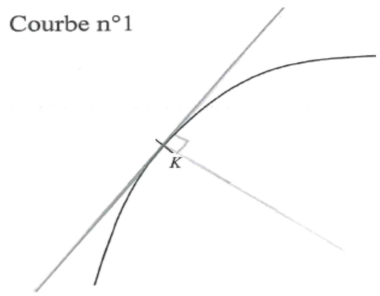
Les courbes n°2 et n°8 ne sont pas prises en compte dans les pourcentages donnés en section 1.

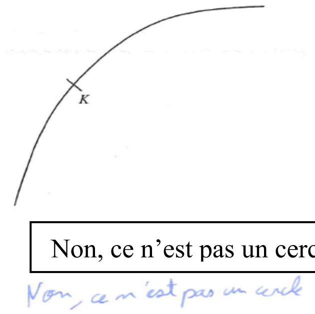
Annexe B. Quelques exemples de conceptions intuitives des élèves

a– Conceptions liées au cercle (C2)



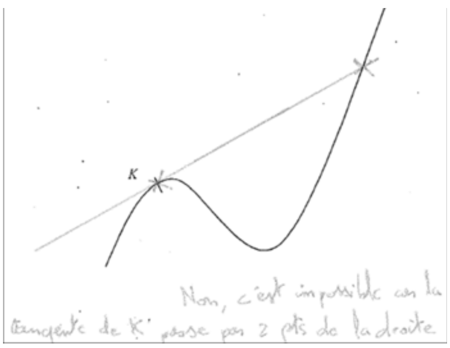
On ne peut pas tracer la perpendiculaire passant par *Z*.



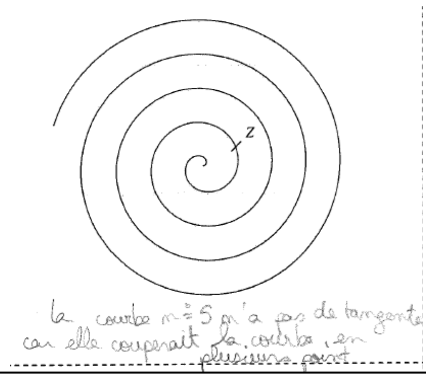


Non, ce n'est pas un cercle.

b– Conception globale (C1)

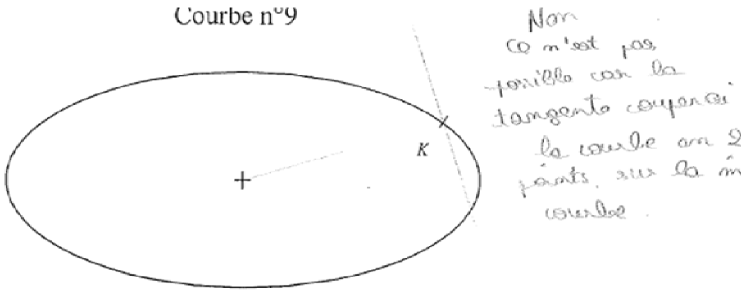


Non, c'est impossible car la tangente de *K* passe par 2 points de la droite.



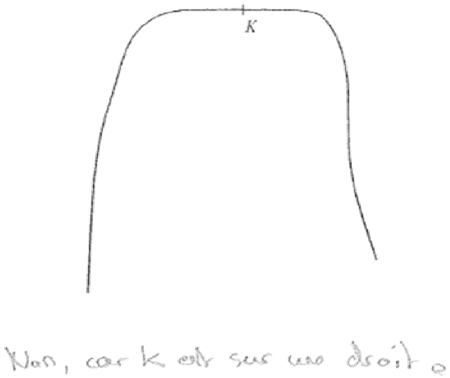
La courbe n°5 n'a pas de tangente car elle couperait la courbe en plusieurs points.

c– Conceptions C1 et C2 simultanées

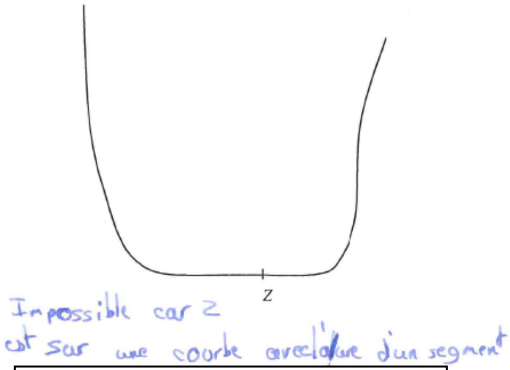


Non ce n'est pas possible car la tangente couperait la courbe en 2 points sur la même courbe.

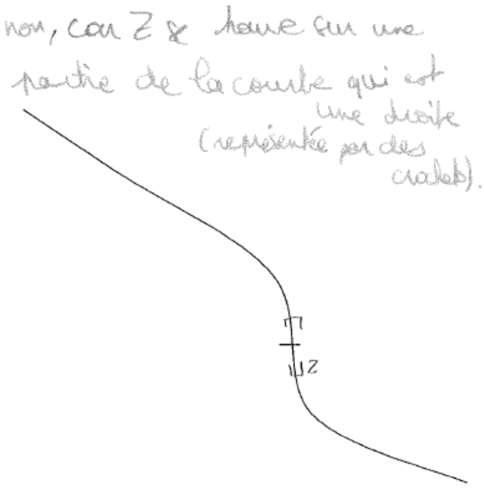
d– Impossibilité de tracer une tangente à une portion rectiligne



Non, car *K* est sur une droite.



Impossible car *Z* est sur une courbe avec l'allure d'un segment.



Non, car *Z* se trouve sur une partie de la courbe qui est une droite (représentée par des crochets).

<u>***e*– La conception proche de C3**</u>

La tangente est tracée à partir de deux points proches de *Z* et situés de part et d'autre du point *Z* (cf. Sierpinska, 1985).