**ATHANASIOS GAGATSIS, ELENI DELIYIANNI,
ILIADA ELIA & ARETI PANAOURA**

EXPLORER LA FLEXIBILITÉ : LE CAS DU DOMAINE NUMÉRIQUE

Abstract. Exploring Flexibility: The case of the numerical domain. Many studies investigate and discuss flexibility in mathematics learning. However researchers use the concept starting from different theoretical backgrounds and examine different dimensions leading to different results. The present paper studies the theoretical definitions stated for flexibility which are based on the mental operations, the strategies and the representations. The notion of experimental-operational flexibility is also pointed out. Research results regarding strategy flexibility and representational flexibility in mathematics learning are presented. Didactical implications are discussed and suggestions for further research are introduced.

Résumé. Beaucoup d'études de didactique des mathématiques analysent et discutent la flexibilité. Cependant, les chercheurs utilisent cette notion à partir de différentes conceptions théoriques et examinent divers aspects de la flexibilité menant à des résultats différents. La présente étude analyse les définitions théoriques de la flexibilité qui sont fondées sur les opérations mentales, les stratégies et les représentations. Est aussi mise en lumière la flexibilité expérimentale-opérationnelle. On présente les résultats de recherches en didactique des mathématiques sur la flexibilité stratégique et sur la flexibilité représentationnelle dans le domaine numérique et la résolution de problème à l'école primaire et au début du secondaire. Des implications didactiques sont discutées et des suggestions en vue de futures recherche sont proposées.

Mots-clés. Flexibilité cognitive, flexibilité stratégique, flexibilité représentationnelle.

---

1. Les Définitions théoriques de la flexibilité

1.1. Définitions fondées sur les opérations mentales

Selon le psychologue Demetriou (2004), la flexibilité renvoie à la quantité de variations qui peuvent être introduites par une personne dans les concepts et opérations mentales qu'elle possède déjà. La réussite et le développement de la compréhension, de l'apprentissage, du raisonnement et de la résolution de problèmes constituent pour une large part un facteur d'augmentation de la flexibilité (Demetriou, 2004). Krems (1995) définit la flexibilité cognitive comme la capacité d'une personne à ajuster la résolution du problème à la modification de la tâche. De même, Chevalier et Blaye (2008) considèrent que la flexibilité cognitive constitue la capacité de changer de posture mentale en réponse aux changements pertinents des signaux environnementaux.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 16, p. 25 –- 43.

1.2. Définitions fondées sur des stratégies

Dans le cas de la résolution des problèmes à l'école primaire, Elia, van den Heuvel-Panhuizen et Kolovou (2009) proposent une définition opérationnelle de la flexibilité qui inclut différents changements de stratégies.

En particulier, ils associent la flexibilité stratégique au fait de changer de stratégie pendant la résolution d'un problème - flexibilité stratégique intra-tâche, ou entre les problèmes - flexibilité stratégique inter tâches. Il est intéressant de remarquer que, dans cette définition, ils ne relient pas la flexibilité stratégique avec la pertinence des stratégies de résolution du problème, assez proche quant à elle de la notion d'adaptation.

En fait, pour certains chercheurs, les notions de «flexibilité» et d'« adaptation» sont synonymes. D'autres chercheurs distinguent entre une utilisation flexible de stratégies, ce qui signifie que les individus font preuve de flexibilité dans le choix entre différentes stratégies mais ne sélectionnent pas nécessairement la stratégie la plus appropriée, et l'utilisation adaptative de stratégies, qui, de plus, inclut le choix de la stratégie la plus opportune (Heinze, Start et Verschaffel, 2009). Quoi qu'il en soit, Heinze et al (2009) indiquent que peuvent être considérées comme beaucoup plus critiquables les questions théoriques fondamentales suivantes : Quand une stratégie devrait-elle être considérée comme appropriée ? Selon quel critère pertinent ? Récemment, Verschaffel, Luwel, Torbeyns et Van Dooren (2009), pour préciser un choix stratégique flexible ou adaptatif, la définissent comme : «la sélection et l'usage conscient ou inconscient du choix stratégique de la solution la plus appropriée à un problème ou objet mathématique donné, pour un individu et dans un contexte donné » (p. 343). Ils incluent donc des critères individuels, contextuels et d'action dans la définition de la flexibilité et de l'adaptation (Heinze et *al.*, 2009).

1.3. Définitions fondées sur les représentations

La capacité à identifier et à représenter le même concept dans différentes représentations et la flexibilité dans le passage d'une représentation à une autre permettent aux étudiants de percevoir la richesse des relations en jeu et de développer une compréhension approfondie du concept (Even, 1998). De faibles liens ou même le manque complet de liens entre différents types de conversions – avec des représentations de départ différentes – du même concept mathématique sont la principale caractéristique de ce compartimentage des représentations. Ils indiquent que les apprenants ne construisent pas la signification complète du concept et n'ont pas saisi la réelle ampleur de ses applications. Ce comportement peut aussi éclairer les perceptions des élèves, pour qui différentes représentations du même concept constituent des objets mathématiques distincts et autonomes et non simplement des manières différentes d'exprimer la signification d'un concept particulier. En d'autres mots, les étudiants confondent « l'objet » ou le concept avec sa représentation sémiotique (Duval, 2002; Elia & Gagatsis, 2008). Ces difficultés cognitives révèlent des déficiences dans la flexibilité représentationnelle, révélatrices d'une compréhension mathématique fragmentaire. Ainsi, cet enseignement peut être accompli via un « décompartimentage » (Duval, 2002).

Récemment, Deliyianni, Elia, Gagatsis et Panaoura (2011) ont suggéré le terme de flexibilité multi-représentationnelle. En particulier, ils considèrent la flexibilité multi-représentationnelle comme la capacité de changer de posture mentale en réponse aux altérations (reconnaissance, traitement, conversion) de la représentation du même objet mathématique. En d'autres termes, Deliyianni et al. (2011) assument que la flexibilité multi-représentationnelle se réfère à un changement entre différents systèmes de représentation d'un concept ou à la reconnaissance de ce concept (flexibilité inter-représentationnelle) aussi bien qu'à la manipulation du concept via de multiples représentations (flexibilité intra-représentationnelle).

1.4. Flexibilité expérimentale-opérationnelle

D'un point de vue statistique fondé sur l'idée que la flexibilité se réfère au dé-compartimentage, on pourra montrer la flexibilité par l'association de variables ou classes de variables distinctes. Ces variables pourraient correspondent à des conceptualisations mathématiques différentes ou à des stratégies de résolution de problèmes différentes, ou encore à différentes représentations, différents processus cognitifs liés au même concept, ayant entre eux une forte relation statistique (corrélation, implication, similitude). Autrement dit, la flexibilité expérimentale-opérationnelle est un phénomène opposé au compartimentage expérimental-opérationnel tel que décrit par Elia et Gagatsis (2008).

2. Recherches concernant la flexibilité dans le domaine numérique à l'école primaire et au début de secondaire

2.1. Exemples d'études concernant la flexibilité stratégique

2.1.1. Saut ou compensation ? La flexibilité stratégique dans le domaine des nombres jusqu'à 100 (Torbeyns, De Smedt, Ghesquiere, & Verschaffel, 2009)

Les caractéristiques individuelles en tant que facteur influençant l'utilisation flexible de stratégies sont un domaine de recherches étudié par Torbeyns et *al.* (2009). Plus particulièrement, leur étude analyse l'utilisation flexible de stratégies mentales de calcul chez les élèves de l'école primaire à propos des additions et soustractions de nombres entre 20 et 100. Soixante élèves de CE2 de trois niveaux différents en mathématiques ont résolu individuellement une série d'additions et de soustractions à deux chiffres dans des environnements avec choix et sans choix. Dans l'environnement avec choix, les enfants pouvaient choisir entre la stratégie de compensation (56 + 29 = ? ; 56 + 30 = 86, 86 - 1 = 85) et la stratégie de saut (56 + 29 = ? ; 56 + 20 = 76, 76 + 9 = 85) pour chaque item. Dans l'environnement sans choix, les enfants avaient à résoudre chaque item soit avec la stratégie de compensation, soit avec la stratégie de saut.

Les résultats de Torbeyns et *al.* (2009) montrent que les enfants, quel que soit leur niveau, ont spontanément appliqué à la fois la stratégie de compensation et celle de saut pour résoudre les opérations avec choix. De plus, ils ont tous exécuté la stratégie de compensation de manière également précise, mais plus rapidement que la stratégie de saut dans l'environnement sans choix. Enfin, dans les choix stratégiques des enfants, il n'apparaît pas de flexibilité en fonction des caractéristiques de la tâche, par exemple lorsqu'il s'agissait d'addition ou de soustraction comportant un entier dont le chiffre des unités est 8 ou 9. Toutefois, les enfants ont pris en considération d'autres caractéristiques de la tâche pendant le processus de choix de la stratégie, c'est-à-dire l'opération du problème. Ils ont appliqué la stratégie de compensation plus fréquemment sur les soustractions que les additions. Les données pertinentes de l'environnement sans choix indiquent que c'était un choix stratégique adaptatif pour ces enfants : ils ont exécuté la stratégie de compensation plus pertinemment que la stratégie de saut sur les soustractions, mais pas sur les additions. Ce dernier résultat peut être dû à leurs difficultés avec le regroupement dans des soustractions telles que 64 – 29. Attendu que la stratégie de saut exige d'eux qu'ils dépassent la dizaine dans la dernière étape du processus de résolution (44 - 9 = __), ils n'ont qu'à compter à rebours pour la dizaine et ajouter 1 à la dernière étape de la stratégie de compensation (34 + 1 = __). De plus, ce qui est étonnant, les élèves n'ont jamais pris en compte les caractéristiques de la performance de leur stratégie individuelle pendant le processus du choix de leur stratégie. Seuls les enfants les plus avancés ont tendu vers une adaptation de leurs choix stratégiques à leur niveau d'exactitude (mais cette corrélation reste sous le seuil de signification statistique). Cela peut être expliqué en prenant en compte le fait que les professeurs qui ont participé à l'étude ont commencé leurs enseignements dans le domaine des additions et soustractions à deux chiffres en se focalisant fortement sur la stratégie séquentielle standard (stratégie linéaire), et n'ont apporté des enseignements explicites sur la variation de stratégie qu'après de nombreux mois de pratiques intensives de la stratégie séquentielle. Ce fort accent mis sur la stratégie séquentielle standard pendant les premiers mois de l'enseignement n'a probablement pas stimulé le développement des outils conceptuels, procéduraux et la motivation pouvant amener l'enfant à une application flexible des diverses stratégies.

2.1.2. L'exploration de l'utilisation des stratégies et la flexibilité stratégique dans la résolution de problèmes complexes par les élèves de l'école primaire avancés en mathématiques (Elia et al., 2009)

L'étude d'Elia et *al.* (2009) analyse l'usage des stratégies et la flexibilité stratégique, ainsi que leurs relations avec la performance dans la résolution de problèmes non habituels. Dans ce contexte, les chercheurs ont proposé et analysé deux types de flexibilité stratégique, c'est à dire la flexibilité inter-tâches (changement de stratégies d'un problème à l'autre) et la flexibilité intra-tâche (changement de stratégies dans les problèmes). Les données ont été collectées via trois problèmes non habituels à partir d'élèves hollandais de CM1 (âgés de 9 à 10 ans) ayant de très bons résultats en mathématiques. Les trois tâches étaient :

1. Angela a 15 ans maintenant et Johan 3. Dans combien d'années Angela sera-t-elle deux fois plus vieille que Johan ? (« problème de l'âge »).
2. Liam a des jetons d'une valeur de 5 et 10 uniquement. Au total, elle a 18 jetons. La valeur totale de ces jetons est de 150. Combien de jetons d'une valeur de 5 Liam possède-t-elle ? (« problème de la monnaie »).
3. Dans un quizz, vous gagnez 2 points par réponse correcte. Si vous ne répondez pas à une question ou si votre réponse est fausse, vous perdez 1 point. Le quizz contient 10 questions. Tina a obtenu 8 points au total. A combien de questions Tina a-t-elle répondu correctement ? (« problème du quizz »).

Un certain nombre de stratégies heuristiques peuvent être appliquées dans la résolution de ces problèmes : essai-et-erreur, dénombrement systématique, calcul de l'extrême, preuve ou test, partage en deux du nombre de jetons ou de la valeur (dans le problème de la monnaie uniquement).

Les résultats ont montré que les élèves n'ont que rarement appliqué les stratégies heuristiques dans la résolution des problèmes. Parmi ces stratégies, celle de l'« essai-et-erreur » s'est révélée avoir le plus grand potentiel d'obtention de succès. Les deux types de flexibilité n'étaient souvent pas visibles dans le comportement stratégique des élèves. Cependant, d'un côté, les élèves qui ont montré une flexibilité stratégique inter-tâches ont été plus couronnés de succès que ceux qui ont persévéré dans la même stratégie ; de l'autre côté, contrairement aux attentes des chercheurs, la flexibilité stratégique intra-tâche n'a pas soutenu les élèves dans la recherche de la réponse correcte. Cela provient de la construction d'une représentation mentale incomplète du problème par les élèves.

2.2. Exemples d'études concernant la flexibilité représentationnelle

2.2.1. Un modèle structurel pour la compréhension des nombres décimaux au primaire et au secondaire (Deliyianni, Elia, Panaoura, & Gagatsis, 2009)

Deliyianni et *al.* (2009) ont testé si la flexibilité dans des représentations multiples et la capacité à résoudre un problème ont un effet sur la compréhension des additions de nombre décimaux. Pour cela, ils ont analysé la structure factorielle des résultats obtenus auprès des élèves du primaire et du secondaire grâce à la CFA (Confirmatory Factor Analysis - Analyse Factorielle Confirmatoire). Une population de 1701 élèves du primaire grec (CM2 et 6^{e}) et du secondaire (5^{e} et 4^{e}) âgés de 10 à 14 ans a participé à cette étude. Le test, qui a été établi de manière à examiner les hypothèses de l'étude, consiste en 19 multi-représentations et 4 tâches de résolution de problèmes. Plus particulièrement, le test inclut :

1. Des tâches de reconnaissance dans lesquelles on demandait aux élèves d'identifier l'addition d'un et/ou de deux nombres décimaux sur une droite (ligne) arithmétique (ReLt1, RELh4, ReLth7), des diagrammes de zone rectangulaires (ReRt2, ReRh5, ReRth8) et circulaires (ReCh3, ReCth6).
2. Des tâches symboliques de traitement d'addition dans lesquelles la somme atteint le centième ou le millième (TrSt9, TrSh10, TrSth11, TrSh12, TrSt13).
3. Des tâches de conversion d'une représentation symbolique en une représentation en diagramme (CoSLth14, CoSRh15, CoSCt16) et inversement (CoRSh17, CoLSth18, CoCSt19), dans lesquelles la somme atteint le centième ou le millième.
4. Des problèmes d'addition de nombres décimaux dans des diagrammes (PrD20).
5. Des problèmes d'addition verbale de nombres décimaux accompagnés par une représentation auxiliaire par diagramme (PrD21).
6. Des problèmes d'addition verbale de nombres décimaux (PrV22).
7. Des tâches de justification de solutions de problème présentés verbalement et liés à l'addition de nombres décimaux (PrV23).

La codification de toutes les variables ci-dessus est basée sur la terminologie anglaise, qui dans les plusieurs cas coïncide avec les mots équivalents français. Cette codification est basée sur :

a) le type de transformation des représentations : reconnaissance (Re), traitement (Tr), conversion (Co) ;
b) le type de représentation : symbolique (S), diagramme (D), verbale (V) ;
c) le type de diagramme : rectangle (R), ligne (L), cercle (C) ;

d) le type de chiffres décimaux de nombres qui interviennent aux tâches : dixième-tenth (t) et centième-hundredths (h) ;

e) le numéro de la tâche (1, 2, 3, *etc*.).

Ainsi, par exemple : ReCh3 est la tâche 3 de reconnaissance d'addition de centièmes dans le diagramme de cercle.

Les résultats ont apporté des éléments importants sur le rôle essentiel que jouent la flexibilité multi-représentationnelle et la capacité à résoudre des problèmes pour la compréhension de l'addition de nombres décimaux par les élèves du primaire et du secondaire. Les résultats valorisent la capacité de reconnaître une addition de nombres décimaux, de manipuler symboliquement des additions de nombres décimaux et d'opérer de manière flexible une conversion d'une représentation d'une addition de nombres décimaux en une autre. D'ailleurs, il s'avère que la valeur des chiffres joue dans l'exécution des tâches de reconnaissance d'une addition de nombres décimaux. Toutefois, l'emploi de la notation décimale de position n'a pas d'incidence sur la capacité des élèves à faire un calcul numérique de somme de décimaux, car des processus algorithmiques sont automatisés à l'âge des élèves concernés ici. De plus, la capacité à convertir une équation présentée par un diagramme en équation symbolique apparaît comme un aspect de la performance distinct de la capacité à convertir une équation mettant en jeu une addition de nombres décimaux en une représentation par diagramme. Cela suggère que différents types de représentations affectent de manière différentielle le processus de résolution, parce que les élèves activent des processus mentaux différents quand ils sont confrontés à des tâches. En fait, les résultats ont révélé que la flexibilité multi-représentationnelle constitue une construction multi-facette dans laquelle les transformations représentationnelles interagissent avec les modes de représentation et le concept de système décimal positionnel.

La figure 1 présente les résultats du modèle élaboré, où les données apparaissent raisonnablement bien représentées [$x^2(201)$ =380,61, CFI=0,98, RMSEA=0,02]. Le modèle de troisième ordre, qui est jugé approprié pour l'interprétation de la compréhension d'addition de nombres décimaux, comporte sept facteurs de premier ordre, deux facteurs de second ordre et un facteur de troisième ordre.

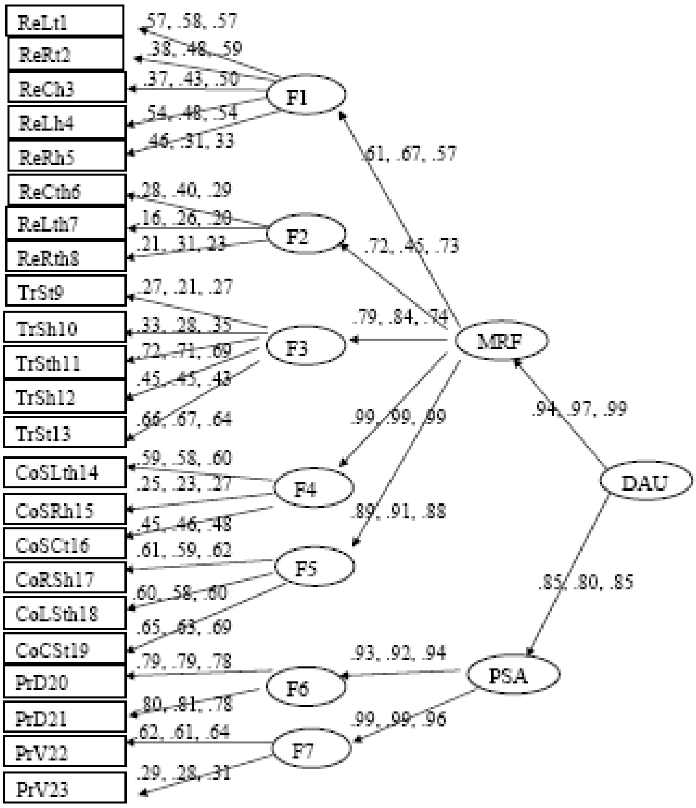

Figure 1 : Le modèle de CFA de compréhension de l'addition de nombres décimaux.

Indications pour la lecture de la figure 1 :

1) Les premier, deuxième et troisième coefficients de chaque facteur représentent l'application du modèle respectivement dans la population complète, dans la sous-population des élèves du primaire et dans la sous-population des élèves du secondaire.
2) Les erreurs de variables sont omises.
3) Par régression, les deux facteurs de second ordre qui correspondent à la flexibilité multi-représentationnelle (MRF : Multiple-Representation Flexibility) et à la capacité de résolution de problèmes (PSA : Problem Solving Ability) sont regroupés en un facteur de troisième ordre qui représente la compréhension de la notion d’addition des nombres décimaux (DAU : Decimal Addition Understanding). Le facteur de premier ordre F1 se réfère aux tâches de reconnaissance dans lesquelles les termes de la somme ont les mêmes nombres

de chiffres, tandis que le facteur F2 de premier ordre réfère aux tâches de reconnaissance dans lesquelles les termes de la somme ont des nombres de chiffres différents. Le facteur F3 de premier ordre réfère aux tâches de traitement de l'addition des nombres décimaux, que les termes de la somme aient ou non les mêmes nombres de chiffres. Les tâches de conversion dans lesquelles la formation initiale est l'équation des nombres décimaux et la représentation cible est la représentation schématique constituent le facteur F4 de premier ordre. Le facteur de premier ordre F5 fait référence aux tâches de conversion des nombres décimaux d'une représentation schématique en une représentation symbolique. Les deux autres facteurs de premier ordre, F6 et F7, se regroupent sur un facteur de second ordre qui représente la capacité de résolution de problèmes. Le facteur de premier ordre F6 se compose des problèmes accompagnés d'un schéma, alors que le facteur F7 est constitué des problèmes verbaux.

2.2.2. Étude des profils de flexibilité représentationnelle des élèves du primaire et du secondaire sur les nombres décimaux (Gagatsis, Deliyianni, Elia, & Panaoura, 2010)

En prolongeant l'étude de Deliyianni et *al.* (2009), l'étude de Gagatsis et *al.* (2010) analyse une hiérarchie (classement croissant) de la flexibilité représentationnelle des additions de nombres décimaux par l'identification et le classement des profils de raisonnement des élèves et de leurs caractéristiques. Afin de classer les profils de réponse des élèves par rapport à la flexibilité représentationnelle dans les additions de nombres décimaux, on a appliqué la méthode de Ward de classification hiérarchique en classes. Quatre classes, correspondant à quatre niveaux hiérarchiques de flexibilité, ont été identifiées.

Plus particulièrement, les élèves de la Classe 1 (Premier Niveau de Représentation) atteignent de faibles performances dans les tâches de conversion d'une représentation symbolique en une représentation en diagramme et des performances moyennes dans les tâches de reconnaissance et de traitement. Cependant, ils échouent aux tâches de conversion d'une représentation en diagramme en une représentation symbolique. Leur performance dans les tâches de résolution de problème, elle aussi, est faible. Les étudiants de la Classe 2 (Niveau Symbolique) diffèrent des élèves de l'Ensemble 1 en ce qu'ils montrent de faibles performances dans les conversions d'une représentation en diagramme en une représentation symbolique. Les élèves de la Classe 3 (Niveau Transitionnel de Multi-Représentation) atteignent des performances moyennes dans les tâches de reconnaissance, de conversion et de résolution de problème. Cependant, ils atteignent de hautes performances dans les tâches de traitement. Enfin, l'appartenance à la Classe 4 (Niveau Multi-Représentationnel) implique de hauts succès dans toutes les tâches. Les élèves concernés manifestent de la flexibilité dans les tâches de conversion et démontrent un haut niveau de performance dans les tâches de résolution de problème.

Le tableau 1 présente les scores moyens et écarts types dans la flexibilité multi-représentationnelle et les dimensions de la capacité à résoudre des problèmes selon les classe (Gagatsis et *al.*, 2010).

Type de tâche	Classe 1		Classe 2		Classe 3		Classe 4	
	Score moyen	Écart-type	Score moyen	Écart-type	Score moyen	Écart-type	Score moyen	Écart-type
Reconnaissance, pour une somme dont les termes comprennent des dixièmes, ou des centièmes	0,51	0,27	0,58	0,26	0,68	0,24	0,82	0,20
Reconnaissance, pour une somme dont les termes comprennent respectivement des dixièmes et des centièmes	0,39	0,34	0,41	0,33	0,44	0,36	0,54	0,37
Traitement	0,65	0,30	0,73	0,24	0,84	0,21	0,95	0,13
Conversion d'équation en schéma	0,17	0,17	0,46	0,21	0,65	0,22	0,93	0,14
Conversion de schéma en équation	0,04	0,11	0,21	0,21	0,50	0,24	0,90	0,15
Problèmes accompagnés d'un schéma	0,27	0,39	0,40	0,44	0,63	0,43	0,87	0,29
Problèmes verbaux	0,22	0,25	0,32	0,27	0,41	0,27	0,51	0,25

Tableau 1 : Scores moyens et écarts types dans la flexibilité multi-représentationnelle et dimensions de la capacité à résoudre des problèmes.

Le test du chi-deux révèle que l'éducation primaire et secondaire développe la flexibilité représentationnelle. Toutefois, le classement des élèves en niveau hiérarchique est le même au primaire et au secondaire et indique qu'il n'évolue pas d'un degré de l'enseignement au degré suivant.

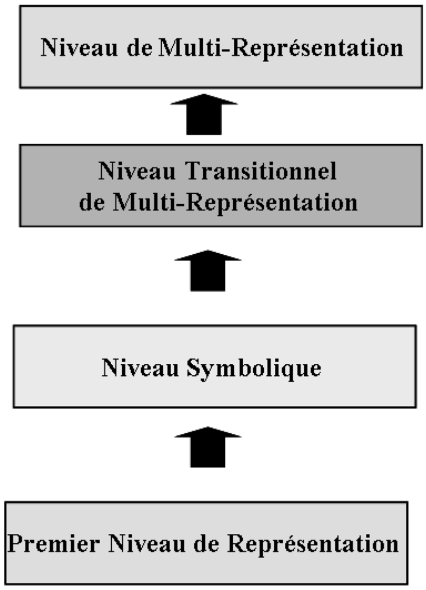

Figure 2 : Les niveaux hiérarchiques de flexibilité dans l'addition des nombres décimaux.

Gagatsis et *al.* (2010) comparent leurs résultats avec les résultats correspondants fournis par Gagatsis, Deliyianni, Elia, Monoyiou et Panaoura (2009). En particulier, Gagatsis et *al.* (2009) ont récemment analysé la nature évolutive de la flexibilité représentationnelle dans les additions de fractions, en déterminant quatre niveaux hiérarchiques dans le raisonnement des élèves et en identifiant leurs caractéristiques. Les résultats de la recherche dans le domaine des nombres décimaux (Figure 2) sont généralement en accord avec les profils des réponses des élèves relativement à la flexibilité représentationnelle dans le domaine des additions de fractions (Figure 3). Toutefois, le Niveau de Représentation Multi-Représentationnel dans les additions de fractions est divisé en deux classes, le «Symbolique» et «En diagramme», fondé sur le comportement des élèves dans la tâche de conversion. Les élèves des deux classes ont atteint des performances moyennes dans la reconnaissance et la résolution de problème et de bons résultats dans les tâches de traitement. D'un côté, les élèves de la classe «Symbolique» ont eu de faibles résultats dans les tâches de conversion d'un diagramme à une équation, tandis qu'ils ont eu des résultats moyens dans les tâches de conversion d'une équation à un diagramme. De l'autre côté, les élèves de la classe « En diagramme » affichent une faible performance dans les tâches de conversion d'une équation à un diagramme et des performances moyennes dans les tâches de conversion d'un diagramme à une équation. Ainsi, la classe « Symbolique » dans les additions de fractions semble correspondre au Niveau Symbolique dans les additions de nombres décimaux.

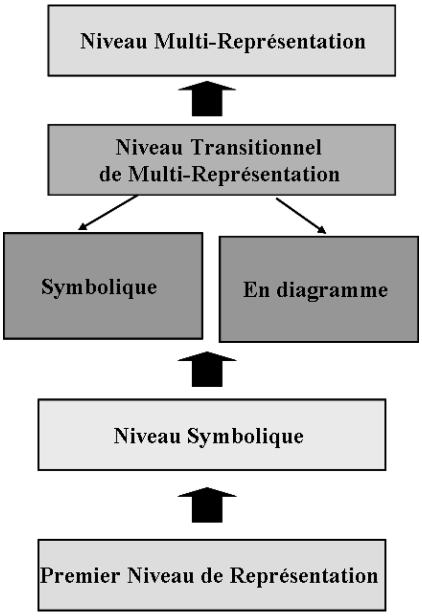

Figure 3 : Les niveaux hiérarchiques de la flexibilité dans l'addition des fractions.

2.2.3. Conceptualiser, rechercher et stimuler la flexibilité représentationnelle dans la résolution de problèmes mathématiques et dans l'enseignement : une analyse critique (Nistal, Van Dooren, Clarebout, & Verschaffel, 2009)

Nistal et *al.* (2009) font une analyse critique de la littérature concernant les choix flexibles représentationnels dans la didactique des mathématiques. Ils soutiennent que, alors que la flexibilité dans la sélection d'une représentation pour achever une tâche mathématique a été traditionnellement comprise comme le choix de la ou des représentations qui correspondent aux caractéristiques de la tâche à résoudre, les éléments de fait suggèrent qu'elle inclut aussi la capacité de prendre en compte les caractéristiques des sujets interagissant avec les représentations, ainsi que le contexte dans lequel une telle interaction prend place. Les caractéristiques des sujets sont a) la connaissance antérieure conceptuelle et procédurale sur les représentations, b) la connaissance abstraite conditionnelle sur les représentations, c) la connaissance spécifique au domaine et d) la préférence représentationnelle et des facteurs affectifs, tandis que les caractéristiques liées au contexte sont a) l'environnement qui fournit un guide actif dans la sélection représentationnelle et b) l'environnement qui encourage une comparaison active et une évaluation des représentations.

Conclusion

Cet article a considéré les définitions théoriques de la flexibilité qui sont fondées sur les opérations mentales, les stratégies et les représentations. Une caractéristique commune à toutes ces définitions est que la flexibilité se réfère au comportement qui consiste à modifier son attitude mentale, ses stratégies et ses représentations afin de s'ajuster aux besoins d'une situation donnée. En résolution de problème, la flexibilité permet des développements et apporte succès et compréhension. La flexibilité expérimentale-opérationnelle a notamment été l'un des sujets du présent article.

Flexibilité stratégique concernant des opérations

La compréhension mathématique implique principalement une flexibilité stratégique et représentationnelle. L'étude qui est décrite dans cet article offre à la fois des implications pratiques et des idées pour de futures recherches afin de mettre en lumière la notion de flexibilité. En particulier, les résultats de Torbeyns et *al.* (2009) plaident pour qu'une plus grande attention didactique soit donnée à la stratégie compensatoire. Toutefois, ces chercheurs indiquent que des recherches futures sont nécessaires pour retrouver et affiner leurs résultats, avant que de fortes recommandations éducatives puissent être faites. Un certain nombre de chercheurs (par ex. Torbeyns et *al.*, 2009 ; Klein, Beishuizen, & Treffers, 1998) mettent aussi en avant le fait que les élèves qui, dès le début de l'enseignement, sont sensibilisés à la flexibilité, à appliquer diverses stratégies, choisissent entre différents stratégies lorsqu'ils ont à recourir à des sommes. A l'inverse, les élèves qui ont d'abord appris un type donné de stratégie sur toutes les sommes et n'ont qu'ensuite reçu un enseignement d'application flexible de diverses stratégies pour effectuer des sommes, ne sont pas capables de mettre de tels choix en œuvre. Toutefois, des études récentes dans le domaine des équations linéaires et des estimations de calcul (par ex. Rittle-Johnson, Star, & Durkin, 2009) ont révélé que la comparaison de multiples méthodes ou stratégies de résolution n'est bénéfique pour les enfants qu'avec la connaissance préalable d'une des stratégies à comparer. Ces études suggèrent que les enfants avec une connaissance antérieure faible ou nulle pourraient davantage tirer profit d'une approche didactique du type suivant : en premier lieu familiarisation avec une des méthodes à apprendre, puis présentation d'autres stratégies, et enfin analyse et comparaison de l'efficacité des différentes stratégies. De futures études sont nécessaires afin de tester et valider l'effectivité des différentes approches didactiques pour promouvoir la variété stratégique et la flexibilité dans le domaine des nombres de 20 à 100, en prenant en compte la connaissance antérieure des élèves dans ce domaine (Torbeyns et *al.*, 2009).

Flexibilité stratégique concernant la résolution des problèmes non habituels

Quant à l'enseignement de la résolution de problèmes non habituels à l'école primaire, Elia et *al.* (2009) suggèrent que, lors de la résolution de différents problèmes non habituels, même de structure similaire, il pourrait être utile et efficace pour les élèves de cet âge d'utiliser des stratégies multiples. Ainsi, ils recommandent que les professeurs puissent fournir un support aux élèves pour qu'ils sachent maitriser des compétences de logique et organiser les informations fournies dans un problème complexe, avant de les presser à prendre une décision sur les stratégies de résolution du problème. Cependant, Elia et *al.* (2009) soulignent le fait que de plus amples recherches sont nécessaires, afin de trouver les méthodes didactiques pour développer la flexibilité inter-tâches stratégique dans les problèmes complexes et pour explorer l'impact de ces types d'instruction sur les performances en résolution de problème. Les chercheurs indiquent aussi qu'il pourrait être intéressant pour de futures études d'examiner si le schéma entre les stratégiques heuristiques et le succès dans la résolution de problèmes change quand les élèves reçoivent un enseignement systématique portant sur la stratégie de résolution de problèmes complexes. Une problématique finale demandant de plus amples discussions réside dans la question : Comment mesurer l'utilisation de stratégie et la flexibilité chez les élèves ? Dans l'étude d'Elia et *al.* (2009), l'accent a été mis sur ce qui était visible dans les brouillons des tests des élèves. Le raisonnement intérieur de l'élève n'a pas été analysé. Dans de futures études, des techniques plus qualitatives pourraient être utilisées pour collecter les données sur les processus cognitifs des élèves, spécialement dans le cas de stratégies alternatives en résolution d'un problème ou de plusieurs (intra, inter) (Elia et *al.*, 2009).

Flexibilité représentationnelle concernant le domaine numérique : des niveaux hiérarchiques

Quant à la flexibilité représentationnelle, le développement des capacités de reconnaissance de l'addition d'un et/ou de deux nombres numériques dans diverses représentations en diagramme, des capacités de manipulation symbolique de l'addition d'un et/ou plusieurs nombres numériques, de la capacité à convertir un et/ou deux nombres numériques d'une représentation en diagramme à une représentation symbolique et réciproquement peut contribuer au développement d'une flexibilité multi-représentationnelle, qui est de première importance dans la compréhension du concept de somme de nombres (Deliyianni et al., 2009). D'ailleurs, Deliyianni et al. (2009) font remarquer qu'il est important de développer les processus cognitifs correspondants à la fois dans l'éducation primaire et l'éducation secondaire, afin d'aménager aux élèves de l'école primaire une transition plus souple au secondaire.

Allant plus loin, les résultats de l'étude de Gagatsis et al. (2010) distinguent quatre niveaux hiérarchiques distincts de flexibilité représentationnelle. Les niveaux ont un profil clair puisque chacun d'eux correspond à des réponses caractéristiques différentes. Tandis que le contraste le plus saillant est situé entre le Premier Niveau de Représentation et le Niveau Multi-Représentationnel, on peut semble-t-il relever une augmentation régulière et systématique de la sophistication d'un niveau à un autre. Ces résultats peuvent avoir une utilisation pratique, car ils peuvent faciliter l'organisation progressive des activités d'enseignement des nombres décimaux par degré de difficulté, ce qui peut offrir un soutien aux élèves de capacités diverses. Même si de légères différences peuvent être relevées entre les hiérarchies de croissance des fractions (Deliyianni et al., 2011) et des nombres décimaux, les résultats de Gagatsis et al (2010) révèlent un potentiel de développement d'une hiérarchie croissante intégrée de la flexibilité représentationnelle dans le domaine des nombres rationnels, ce qui pourrait être l'objet de recherches futures. Gagatsis et al. (2010) soulignent le besoin de recherches plus poussées sur les implications en didactique de ce sujet. Plus particulièrement, ils suggèrent qu'il pourrait être intéressant et utile d'examiner les effets de programmes d'intervention qui prennent en compte les quatre niveaux hiérarchiques. Des recherches plus avancées sont aussi nécessaires pour examiner l'application de ces niveaux dans d'autres concepts et niveaux d'âge, avant de pouvoir avancer une définition opérationnelle de la flexibilité représentationnelle (Gagatsis et al., 2010). Nistal et al. (2009) relèvent aussi la faiblesse de la recherche traditionnelle sur la flexibilité représentationnelle, par ex. le fait qu'elle se focalise presque exclusivement sur l'importance de l'adéquation de la représentation à la tâche à résoudre, alors que les caractéristiques du sujet et spécialement du contexte sont rarement envisagées ou étudiées.

Flexibilité et Espace de Travail Mathématique

Comment introduire la notion de flexibilité dans une définition de l'Espace de Travail Mathématique (ETM) sur un modèle inspiré de l'Espace de Travail Géométrique (Houdement et Kuzniak, 2003 ; Kuzniak, 2009) ?

D'après le cadre général du symposium franco-chypriote, le travail mathématique vise à l'élaboration et la mise en relation d'un certain nombre d'objets constitutifs du domaine mathématique. L'accès à ces objets s'appuie sur un ensemble de processus, de genèses, d'artefacts et de représentations sémiotiques. Pour clarifier le rôle de la flexibilité au sein de ces différentes composantes et de leurs relations, afin de mieux comprendre le travail mathématique, il faut adapter des questions fondamentales du symposium en se référant à cette notion :

- quelle est la contribution de la flexibilité au soutien de la dynamique qui permet d'animer le travail mathématique entre les objets, les artefacts, les aspects sémiotiques et les aspects théoriques ?

– Dans quelle mesure peut-on préciser le rôle de la flexibilité dans chacun des termes de l'ordre : sémiotique, instrumental, épistémologique, institutionnel ?

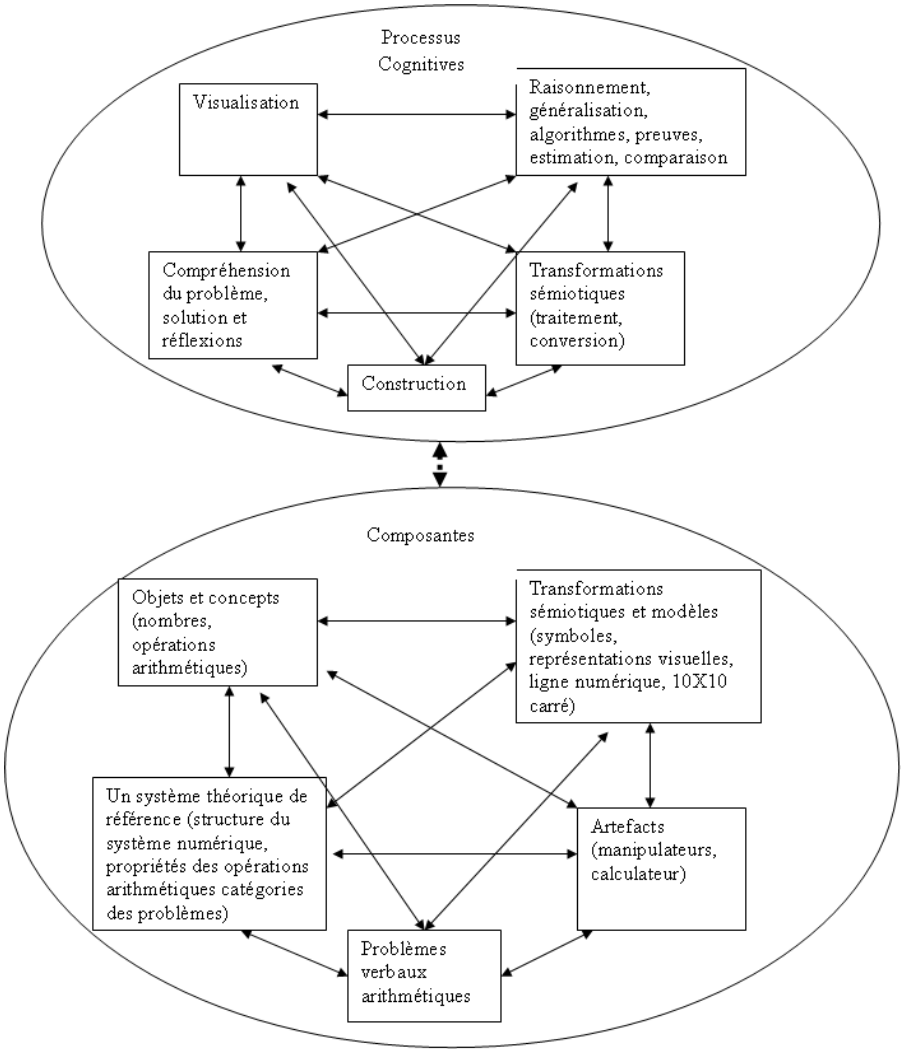

Figure 4 : Une ébauche d'« Espace de Travail Arithmétique ».

Par conséquent, il semble que la recherche qui s'intéresse à la notion de flexibilité offre un certain nombre d'idées utiles et pratiques pour préciser l'Espace de Travail Mathématique (ETM) et par conséquent pour améliorer l'enseignement. Pour cette raison, la figure 4 propose une ébauche d'« Espace de Travail Arithmétique ».

Pour autant, de plus amples recherches sont nécessaires afin de couvrir le spectre entier de cette notion et par conséquent son rôle dans la validation du modèle présenté dans cet article.

Bibliographie

CHEVALIER, N. & BLAYE, A. (2008), Cognitive flexibility in preschoolers: The role of representation activation and maintenance, *Developmental Science*, **11.3**, 339–353.

DELIYIANNI, E., ELIA I., PANAOURA, A. & GAGATSIS, A. (2009), A Structural model for the understanding of decimal numbers in primary and secondary education, in *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Eds. Tzekaki, Kaldrimidou & Sakonidis), **2**, 401–408, Thessaloniki, Greece, PME.

DELIYIANNI, E., ELIA, I., GAGATSIS, A. & PANAOURA, A. (2010), submitted for publication), A Structural Model of Representational Aspects of Fraction-Addition Understanding Related to Multiple-Representation Flexibility and Problem Solving in Primary and Secondary Education, *Educational Studies in Mathematics*.

DEMETRIOU, A. (2004), Mind intelligence and development: A cognitive, differential, and developmental theory of intelligence, In *Developmental change: Theories, models and measurement* (Eds. Demetriou & Raftopoulos), 21–73, Cambridge, UK, Cambridge University Press.

DUVAL, R. (2002), The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics, *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, **1.2**, 1–16.

ELIA, I. & GAGATSIS, A. (2008), A comparison between the hierarchical clustering of variables, implicative statistical analysis and confirmatory factor analysis, In *Studies in computational intelligence 127: Statistical implicative analysis* (Eds. Gras, Suzuki, Guillet & Spagnolo), 131–163, Heidelberg: Springer.

ELIA, I., VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. & KOLOVOU, A. (2009), Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics, *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, **41.5**, 605–618.

EVEN, R. (1998), Factors involved in linking representations of functions, *The Journal of Mathematical Behavior*, **17.1**, 105–121.

GAGATSIS, A., DELIYIANNI, E., ELIA, I., MONOYIOU, A. & PANAOURA, A. (2009), Considering flexibility from a developmental perspective: The case of multiple representations in fractions, In *Symposium for presentation at the EARLI 2009*, Conference, Amsterdam, Holland.

GAGATSIS, A., DELIYIANNI, E., ELIA, I. & PANAOURA, A. (2010), Tracing primary and secondary school students representational flexibility profiles in decimals, *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, **9.1**, 211–222.

HEINZE, A., STAR J.R. & VERSCHAFFEL, L. (2009), Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education, *ZDM—The International Journal of Mathematics Education*, **41.5**, 535–540.

HOUDEMENT, C. & KUZNIAK, A. (2003), Elementary geometry split into different geometrical paradigms, In *Proceedings of CERME 3* (Ed. M. Mariotti), Bellaria, Italy. Retrieved from:
http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG7/TG7_Houdement_cerme3.pdf.

KUZNIAK, A. (2009), Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France, In *Cyprus and France Research in Mathematics Education* (Eds. Gagatsis, Kuzniak, Deliyianni & Vivier), 71–89, Nicosia, University of Cyprus.

KLEIN, A.S., BEISHUIZEN, M. & TREFFERS, A. (1998), The empty number line in Dutch second grades: Realistic versus gradual program design, *Journal for Research in Mathematics Education*, **29**, 443–464.

KREMS, J.F. (1995), Cognitive flexibility and complex problem solving. In *Complex problem solving: The European perspective* (Eds. Frensch & Funke), 201–218. Hillsdale, NJ:Lawrence Erlbaum Associates.

NISTAL, A., VAN DOOREN, W., CLAREBOUT, G., ELEN, J. & VERSCHAFFEL, L. (2009), Conceptualising, investigating, and stimulating representational flexibility in mathematical problem-solving and learning: A critical review, *ZDM—The International Journal of Mathematics Education*, **41.5**, 627–636.

RITTLE-JOHNSON, B., STAR, J. & DURKIN, K. (2009), The importance of prior knowledge when comparing examples: Influences on conceptual and procedural knowledge of equation solving, *Journal of Educational Psychology*, **101.4**, 836–852.

TORBEYNS, J., DE SMEDT, B., GHESQUIERE, P. & VERSCHAFFEL, L. (2009), Jump or compensate? Strategy flexibility in the number domain up to 100, *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, **41.5**, 581–590.

VERSCHAFFEL, L., LUWEL, K., TORBEYNS, J. & VAN DOOREN, W. (2009), Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education, *European Journal of Psychology of Education*, **24.3**, 335–359.

Auteur à contacter :
Athanasios GAGATSIS
University of Cyprus
gagatsis@ucy.ac.cy