SYLVIA COUTAT ET PHILIPPE R. RICHARD

LES FIGURES DYNAMIQUES DANS UN ESPACE DE TRAVAIL MATHÉMATIQUE POUR L'APPRENTISSAGE DES PROPRIÉTES GÉOMÉTRIQUES

Abstract. Dynamic figures in a mathematical workspace for the learning of geometrical properties. Our paper aims at showing how dynamic figures are useful in the learning of the use of geometrical properties at a high school level, in continuity with the practices inherited during the primary school education. After considering the general contextual rooting of the problem situations while comparing geometrical reality with educational institution, we focus on the student-milieu system and on the connections between the reasoning and the operational dynamic figure. We then present a research framework in order to analyze a geometrical workspace dedicated towards the learning of the use of properties. The workspace is presented in what it has of generic to enhance such learning and it enables us to conclude by some theoretical remarks on the components from the suitable geometrical working space.

Résumé. Notre article vise à montrer comment les figures dynamiques sont utiles pour l'apprentissage des propriétés géométriques de l'école secondaire, en continuité avec les habitudes héritées du primaire. Après avoir considéré l'enracinement contextuel des situations-problèmes en général et mis la réalité géométrique au regard de l'institution scolaire, nous centrons notre propos sur le système sujet-milieu et sur les rapports du raisonnement à la figure dynamique opératoire. Nous situons ensuite un dispositif de recherche afin d'analyser un espace de travail géométrique idoine orienté vers l'apprentissage des propriétés. L'espace de travail est présenté en ce qu'il a de générique pour enclencher un tel apprentissage et il nous permet de conclure par quelques remarques théoriques sur les constituants de l'espace de travail géométrique.

Mots-clés. Didactique des mathématiques, géométrie dynamique, raisonnement, espaces de travail géométrique, apprentissage des propriétés géométriques.

Introduction : où se situe la géométrie dynamique ?

Sous une allure de question captieuse, la place de la géométrie dynamique n'est pourtant pas une affaire banale. S'agit-il d'une géométrie émergente, qui n'a pas encore été inventée par les mathématiciens dans leurs tenants et aboutissants, comme le furent les Géométries I, II et III retenues par Houdement et Kuzniak (2006) ? Ou, au contraire, consiste-elle en une géométrie de support sophistiquée, digne représentation de théories existantes au service de leur apprentissage ? L'éclairage apporté par ces auteurs, notamment avec les notions de paradigmes géométriques et de jeux de cadres, offre certainement un repère épistémologique privilégié, puisqu'en tant que « contenant », la géométrie dynamique serait issue

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 16, p. 97 – 126.

des géométries traditionnelles. Mais en qualité de « contenu », qui réalise une articulation entre un référentiel théorique, des objets géométriques et un milieu matériel – que Kuzniak (2006) appelle espace de travail de la géométrie –, il semble que la géométrie dynamique crée de nouveaux rapports à la géométrie traditionnelle, au point d'engendrer une géométrie nouveau genre dans son interaction avec le « contenant ». Il n'est donc pas étonnant de lui reconnaître des caractéristiques qui lui sont propres, souvent étonnantes au regard des paradigmes géométriques, mais dont les conséquences pour l'apprentissage et la formation invitent à en préciser la nature.

1. Quelques considérations liminaires

En dépit de l'invitation précédente, nous ne tenterons pas de cerner la nature de la géométrie dynamique. Nous en posons simplement l'existence de manière à constater l'effet qu'elle est susceptible d'entretenir au regard des espaces de travail géométrique. Cependant, avant même d'asseoir les éléments conceptuels de nos hypothèses de départ (section 2), nous devons introduire deux considérations quelque peu gênantes. Une première, à saveur métaphorique, qui situe sommairement la résolution de problèmes dans l'exercice de conceptualisation, et une seconde, plutôt socioculturelle, qui apporte une certaine confusion sur la nature de la géométrie de référence. Ensuite, nous plaçons la recherche dans son contexte (section 3) afin de lancer l'analyse d'un espace de travail géométrique (section 4) que nous qualifions d'idoine (section 5). Nous sommes au début de l'école secondaire (12-14 ans).

1.1. En classe de mathématiques l'élève n'est pas un musicien, mais un peintre

À une époque où l'éclatement des connaissances rejoint l'enseignement des mathématiques et des sciences, il semble naturel de chercher, pour le bon fonctionnement de la classe, une sorte d'harmonie relative aux moyens d'expression et de traitement. Ainsi, en termes de fonction sémiotique chez l'homme, Duval (1995) insiste sur l'existence de plusieurs systèmes de représentation et le besoin de coordination qu'exige l'emploi des registres, dont l'expression du raisonnement qui s'articule avec les figures géométriques (Richard, 2004a). Pour l'interprétation des conceptions de l'élève en laboratoire de sciences, Givry et Roth (2006) montrent l'importance du jeu synergique entre la parole, la gestuelle et les structures du discours pour l'explication d'un phénomène, avec ou sans instruments à l'appui. Et afin d'offrir un modèle d'analyse de l'activité de l'enseignant, Drijvers et Trouche (2008) proposent l'idée d'orchestration instrumentale pour rendre compte de l'organisation intentionnelle et systématique de plusieurs outils technologiques dans un environnement d'apprentissage déterminé. Bref, ces coordinations, synergie et orchestration sous-entendent l'idée d'un objectif local et commun : la représentation d'une même connaissance, l'explication d'un même phénomène ou le traitement au sein d'une même activité mathématique, vue ici du côté de l'enseignant.

Cependant, dès qu'on sort de cette localité, on est immédiatement confronté à un problème d'harmonie entre conceptions, que ce soit chez celles d'un même élève ou dans la proximité des conceptions d'un petit groupe. C'est d'ailleurs ce qui apparaît lorsqu'un élève résout des situations-problèmes raisonnablement différentes les unes des autres. Le caractère contextuel de chaque situation, tout comme la logique particulière inhérente à chaque processus de résolution, entravent à la fois le transfert d'un problème à l'autre ainsi que la mise en place d'une cohérence externe. Si une évolution dynamique entre conceptions ou un développement de compétences mathématiques s'engage, c'est parce que l'élève composerait une « toile » à chaque situation-problème et que cette toile n'existerait qu'au terme de la résolution. Il faudrait attendre le « vernissage » pour en dégager une cohérence d'ensemble, celle-ci demeurant fortement sujette à interprétation. C'est sans doute parce qu'il faut toujours recommencer son « œuvre » que d'une part, la dévolution des problèmes est une responsabilité si difficile à assumer pour l'enseignant et que d'autre part, à l'abord d'un nouveau problème, les élèves se demandent régulièrement : « où sont mes mathématiques lorsque j'en ai besoin ? » (Caron, 2003).

1.2. La réalité géométrique dans ses rapports à l'institution

Il est facile d'affirmer qu'au Québec, on ne fait pratiquement pas de géométrie au début du secondaire. Pourtant, dans le programme d'enseignement de l'école québécoise (MÉLS, 2006 et 2007), la géométrie apparaît comme un des trois contenus à enseigner, au même niveau que les groupements « arithmétique et algèbre » et « probabilité et statistique ». En outre, quatre pages lui sont spécifiquement consacrées : deux pages qui se structurent en concepts et processus, une autre en éléments de méthode, et une dernière qui dresse une liste d'énoncés de géométrie euclidienne. Lorsqu'on examine le programme de l'école primaire, non seulement la géométrie apparaît invariablement au premier plan, mais les « savoirs essentiels », au niveau des « figures géométriques et sens spatial » (espace, solides, figures planes, frises et dallages), se partagent avec l'estimation et le mesurage sur les longueurs, angles, surfaces, volumes, capacités, masses, temps et températures (MÉLS, 2001). Pourquoi donc une telle audace dans notre affirmation initiale ?

Une analyse sommaire des principaux manuels scolaires nous amène vers un constat troublant : les énoncés de géométrie euclidienne n'y apparaissent pas[1]. Bien

[1] Pour un survol historique sur les manuels contemporains, voir Richard (2003).

que l'élève soit censé pouvoir reconnaître ou décrire une figure à partir de ses attributs, les activités proposées sont essentiellement calculatoires, depuis les manipulations arithmétiques sur les grandeurs jusqu'à l'établissement de mesures inconnues. Il n'y a donc rien sur les constructions à la règle et au compas et il n'y a rien non plus sur la mécanique des propriétés géométriques, encore moins sur la notion de preuve :

> (…) l'évolution du traitement réservé au raisonnement déductif dans les programmes québécois des quarante dernières années a des allures de valse-hésitation entre la valorisation et la mise de côté (Caron et de Cotret, 2007).

Puisque c'est la même institution qui énonce les programmes et qui valide les manuels scolaires, on en vient à se demander quelle est la géométrie de référence qui, en principe, est antécédente à la transposition didactique de Chevallard (1992). S'agit-il précisément d'un double jeu de cadres, externe avec l'arithmétique et interne avec l'articulation entre la *géométrie naturelle* et la *géométrie axiomatique naturelle* – symbolisée par « (GI|GII) » dans Kuzniak (2006) ?

Nous croyons que toute réponse demande à elle seule l'aménagement d'une étude qui déborde largement la nôtre. Mais au delà d'un éventuel blâme scientifique, nous avons sous les yeux un panorama de référence bien réel qui est susceptible d'être similaire pour les maîtres en formation, ne serait-ce qu'à l'égard de leurs souvenirs d'élève. Pour pasticher Chevallard (1992), certaines valeurs sociales jouent manifestement un rôle noosphérique dans notre compréhension de la géométrie de référence. On peut mentionner, à titre indicatif, une certaine dominance de l'utilitariste économique ou la préférence pour les systèmes déterministes qui affectionnent particulièrement l'esprit calculatoire. Quoi qu'il en soit, il semble qu'il faille interroger davantage l'épistémologie didactique pour en comprendre les motivations institutionnelles. Dans les traditions géométriques plus assises, comme en France, où l'épistémologie didactique ne semble pas être en cause, la question référentielle risque de passer inaperçue. Malgré cela, l'écart entre « ce qui devrait être » et « ce qui en est » en est-il pour autant si ténu ? Avec l'introduction de la géométrie dynamique en classe et les possibilités expérimentales que son emploi suppose, la gestion de la distance entre la géométrie de référence épistémologique et celle de référence sociale renforce l'importance de la notion d'espace de travail géométrique tout en relativisant celle des paradigmes classiques.

2. Hypothèses

Les environnements de géométrie dynamique s'associent généralement au support logiciel, mais cette géométrie intervient d'abord dans d'autres environnements sous forme de mécanismes, de structures ou de situations diverses, comme avec les machines dites mathématiques (de l'italien « macchine matematiche »[2]), les instruments de géométrie ou les supports sur lesquels le génie et les mathématiques se rencontrent (au sens de Bryant et Sangwin, 2008). Dans notre article, nous utilisons positivement la notion de milieu en tant que concept unificateur de l'ensemble des supports qui véhiculent des connaissances mathématiques lorsque ceux-ci sont en interaction avec un sujet, que ce soit des registres de représentation sémiotique, des outils, des mises en scène ou tout autre matériel à usage didactique, depuis les documents papiers jusqu'aux médias électroniques. De plus, nous y introduisons la contribution intellectuelle de collaborateurs ou de situations (avec personnages) dont l'intention fondamentale n'est pas l'enseignement de contenu ou de méthodes mathématiques, pour autant que ce soit en réaction aux propositions de l'élève dans une perspective d'apprentissage.

2.1. Centration sur les interactions sujet-milieu

Dans sa définition originelle issue de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), la notion de milieu se révèle comme le système antagoniste de l'élève dans lequel celui-ci évolue et qui demeure spécifique de la connaissance mathématique. Les conceptions d'un élève seraient le résultat d'échanges continus avec les problèmes qu'il se pose ou les situations dans lesquelles il est placé, et au cours desquels il y aurait une adaptation, naturelle ou volontaire, de l'élève au milieu engendré par le problème ou la situation. Dans cet échange, donc dans la poursuite de l'apprentissage mathématique, les connaissances antérieures sont mobilisées pour y être modifiées, complétées ou rejetées. Si selon Douady (2005), Brousseau définit la situation didactique comme un ensemble de rapports établis entre un élève et un groupe d'élèves, un milieu (pouvant comprendre notamment des outils ou tout autre dispositif qui véhicule des connaissances mathématiques) et un système enseignant (enseignant ordinaire ou systèmes tutoriels[3]), c'est dans une intention d'amener progressivement les élèves vers l'appropriation d'un savoir constitué. Parmi ces rapports, la question de l'interaction entre l'élève et le milieu apparaît formellement en concept unitaire. Selon Margolinas (2009) :

> Brousseau va considérer l'interaction sujet-milieu comme étant la plus petite unité d'interaction cognitive. Un état d'équilibre de cette interaction définit un état de la connaissance, le déséquilibre sujet-milieu étant producteur de connaissance nouvelle (recherche d'un nouvel équilibre). (13–14).

Puisque la définition originelle du milieu demeure très générale, Margolinas (2009) en propose un modèle de structuration qui, du point de vue de l'étude du professeur, permet de décrire d'une façon fine les connaissances en jeu dans une situation didactique. Si la construction du milieu caractérise chaque connaissance

---

[2] Voir Bartolini Bussi et Maschietto (2005).
[3] Par exemple, Richard et *al.* (2011).

par les situations-problèmes qui lui sont spécifiques, c'est pour que les stratégies des élèves soient motivées par les nécessités de leurs relations avec le milieu. Selon Brousseau (1998) :

> La conception moderne de l'enseignement va donc demander au maître de provoquer chez l'élève les adaptations souhaitées, par un choix judicieux de problèmes qu'il lui propose. Ces problèmes sont choisis de façon à ce que l'élève puisse les accepter, doivent le faire agir, parler, réfléchir, évoluer de son propre mouvement. (…) L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques (…). Non seulement il le peut, mais il le doit aussi car il n'aura véritablement acquis cette connaissance que lorsqu'il sera capable de la mettre en œuvre de lui-même (…) (p. 59).

Cette idée de nécessité est importante puisqu'elle fonde spécifiquement la notion de conception sur l'interaction entre l'élève et le milieu (Balacheff et Margolinas, 2005). Et que par ailleurs, elle situe la question du développement de l'autonomie de l'élève dans l'acquisition d'une connaissance, sans pouvoir compter sur l'apport du maître ou de ses compagnons (Richard, 2004a). En revanche, elle suppose l'existence de situations parfaitement adaptées aux connaissances convoitées et elle laisse à l'élève toute la responsabilité dans la résolution des problèmes, c'est-à-dire dans l'acquisition même d'une connaissance nouvelle. Or, lorsqu'il travaille en équipe ou s'il se sert d'outils complexes qui gèrent une partie des connaissances en jeu (comme les « machines mathématiques » ou les logiciels de géométrie dynamique), l'élève reçoit forcément des réponses en même temps qu'il formule ses questions. C'est pourquoi nous proposons de souligner, dans la notion de milieu, les apports cognitifs providentiels qui proviennent aussi bien des composantes matérielles du milieu que de ses composantes intellectuelles :

- par rapport au milieu matériel : regarder la réponse dans un solutionnaire, consulter une piste de solution proposée, invoquer un oracle en géométrie dynamique ou une fonction en calcul symbolique ;
- par rapport au milieu intellectuel : apport d'arguments d'un compagnon collaborateur ou du maître qui cherche à relancer, sous une forme ou une autre, un processus de résolution bloqué.

De plus, au cours d'un débat lancé par un élève, le reste de la classe considéré comme un tout émergent (dans le sens emprunté aux systèmes complexes) fait notamment partie du milieu intellectuel par rapport à cet élève. Dans la perspective d'un milieu à la fois matériel et intellectuel, l'interaction sujet-milieu se considère alors hors des situations proprement didactiques et c'est le sujet qui souhaite faire évoluer la connaissance de son propre mouvement.

2.2. Rapport du raisonnement à la figure dynamique opératoire

La notion de raisonnement en géométrie est intimement liée aux fonctions cognitives de communication et d'objectivation du registre figural (Richard et Sierpinska, 2004) et la question de son expression se pose de façon très évidente en géométrie dynamique. Traditionnellement, le raisonnement s'exprime par le discours afin que celui-ci puisse régir ou accompagner la coordination de différents types de raisonnements ou, en général, le fonctionnement du registre figural (Duval, 2005). Toutefois, malgré un rôle prépondérant, l'expansion discursive est insuffisante pour rendre compte du raisonnement qui s'exprime dans l'action ou par l'usage de certains outils techniques.

À l'interface d'un logiciel de géométrie interactive, lorsque c'est l'usager qui décide quand et pourquoi il a besoin de sa représentation, c'est l'outil technique qui en gère le dynamisme au cours du déplacement. L'usager peut se restreindre à constater l'effet de configurations particulières, même s'il est l'auteur de la construction sous-jacente. Indépendamment du support, les représentations figurales ont l'habitude de véhiculer des raisonnements (Richard, 2004b ; Alsina et Nelsen, 2006). C'est d'ailleurs ce qui permet à tout lecteur exercé, même s'il a été étranger aux processus de représentation et de construction, d'en tirer une logique dans l'équilibre dynamique de ce qu'il a sous les yeux, voire d'en dégager de nouvelles propriétés. Lorsqu'un dessin se montre à l'interface d'un logiciel de géométrie, un usager étranger peut même agir sur l'objet pour tester les limites du dynamisme de la représentation, ce qui renouvelle la correspondance classique du raisonnement à la figure géométrique dans l'interaction sujet-milieu. En outre, puisqu'il y a des modèles mathématiques qui sous-tendent le fonctionnement de ces outils, ceux-ci ne sont pas nécessairement accessibles et leur connaissance n'est généralement ni un enjeu de faits, ni une question de principes. Cependant, leurs effets permettent au système sujet-milieu la production de raisonnements structurés et fonctionnels, alors que la responsabilité du contrôle des connaissances reste partagée au sein de ce système. Les apports providentiels du milieu deviennent donc théoriquement nécessaires pour rendre compte de l'interaction cognitive.

Si l'on retient le caractère opératoire de la figure géométrique, nous évitons toute mise en relation a priori avec un paradigme de référence. Une représentation figurale donnée créerait son propre espace de signification et pourrait même constituer une sorte d'espace de travail géométrique. D'ailleurs, cela nous rapproche de l'enjeu didactique soulevé par Kuzniak (2006) lorsqu'il affirme que l'enseignant doit « s'assurer que l'apprenant réorganise les diverses composantes de son Espace de Travail Géométrique (ETG) en un tout cohérent et opérationnel ». Par figure dynamique opératoire, nous considérons la figure qui se constitue à partir des moyens d'action ou de pensée de l'élève en interaction avec le milieu, en vue d'obtenir un résultat sémiotique, cognitif et situationnel déterminé, dans le prolongement des fonctions de la figure géométrique opératoire (au sens de Richard, 2004a). Fondée sur l'idée d'un objet-processus, la figure dynamique opératoire intègre le raisonnement à la fois comme procédure de traitement et structure de contrôle dans l'interaction sujet-milieu, rejoignant de fait la notion de conception développée dans le modèle de connaissances de Balacheff et Margolinas (2005). Dans notre approche, une même structure de contrôle peut gouverner plusieurs expressions différentes du raisonnement, à l'instar du raisonnement déductif qui contrôle la construction instrumentée d'une figure ou la lecture de propriétés invariantes dans l'animation d'une construction interactive.

3. Contexte

Notre étude s'appuie sur la combinaison de deux recherches à propos de l'enseignement du concept de propriété géométrique. Une première, qui se fonde sur la mise en œuvre d'une ingénierie didactique d'envergure dans laquelle un environnement de géométrie dynamique est au centre de la démarche (Coutat, 2006), et une seconde, beaucoup plus modeste, qui ajuste et complète quelques activités de l'ingénierie avec des tâches de contrôle dans l'environnement papier-crayon. Nous avons ciblé les propriétés de la géométrie euclidienne dont l'acquisition se laisse introduire, au cours d'expériences sur des figures dynamiques, par la relation de subordination entre les contraintes d'une « propriété-situation » et sa conclusion – nous en donnons un exemple à la section suivante. Bien qu'en arrière-plan, nous nous plaçons dans l'articulation des paradigmes géométriques GI et GII (Houdement et Kuzniak, 2006), nous profitons du fait que les environnements de géométrie dynamique offrent un support expérimental à la manière d'une « première physique ».[4] Dans la conception de notre dispositif de recherche, le passage d'un paradigme à un autre s'effectuerait non pas par rupture, mais par « évolution sans révolution » pour reprendre l'idée soulevée par Kuzniak (2006), dans l'esprit d'une continuité depuis les habitudes développées à l'école primaire. L'objectif ultime des activités est l'acquisition d'une compétence sur la structure logique des propriétés et de rendre nécessaire, chez l'élève, le lien cognitif et formel qui unit les antécédents et les conséquents de la déduction, au sens de Richard (2004a).

L'intégration des outils technologiques dans l'enseignement des mathématiques a modifié notre compréhension des rapports traditionnels entre outil, système de représentation sémiotique et connaissances. Comme nous l'avons abordé dans

[4] À ce sujet, on peut se référer à la thèse de Dahan (2005) qui compare la démarche de découverte en mathématiques à l'expérimental dans les sciences physiques, et à l'analyse de Richard, Meavilla et Fortuny (2010) qui établit un apport mutuel entre un extrait des Éléments de Géométrie de Clairaut (2006) et la géométrie dynamique.

notre cadre conceptuel, l'outil appartient au milieu avec lequel l'élève interagit et à partir duquel celui-ci développe sa pensée. L'idée d'interaction outil-élève nous amène alors vers les travaux de Rabardel (1995) avec les notions d'instruments et de genèse instrumentale. Puisqu'en bout de piste, notre perspective d'enseignement vise notamment un enrichissement du référentiel théorique des élèves, nous insistons sur deux fonctions du langage, c'est-à-dire la fonction référentielle et la fonction d'expansion discursive (Duval, 1995). La notion d'expansion discursive est étendue avec la notion d'inférence figurale (Richard, 2004b), et le raisonnement discursivo-graphique qui en découle se considère dans ses rapports de coordination au raisonnement instrumenté. Nous utilisons enfin la notion de médiation sémiotique (Vygotsky, 1978) pour relever l'idée d'intériorisation des outils technique en signes psychologiques suite à l'intervention didactique. Ainsi, la genèse instrumentale amorce le processus de médiation sémiotique qui a lui-même pour but l'appropriation, par l'élève, de la relation de subordination entre les prémisses et la conclusion d'une propriété géométrique, c'est-à-dire une évolution de son référent théorique.

Dans ce qui suit, nous tentons essentiellement de répondre à deux questions, mais nous devons d'abord apporter une précision. Nous pourrions considérer la notion d'espace de travail dans son sens strict original, c'est-à-dire celui d'un environnement. Néanmoins, parce que dans notre étude cette notion d'espace n'a de sens qu'en étant en interaction avec un sujet, élève ou expert, nous considérons également l'espace de travail qui se crée par une démarche, soit-elle en instance de réalisation[5]. Dès lors, la démarche expérimentale instrumentée que nous proposons constitue-t-elle, de part son caractère paradigmatique, un espace de travail géométrique idoine pour l'acquisition d'une propriété mathématique appliquée aux démonstrations ? Et, par voie de conséquence, dans quelle mesure l'expérience de subordination des contraintes à la conclusion rend-elle fonctionnellement signifiante la structure d'une déduction et le statut opératoire d'une propriété mathématique avec une certaine autonomie par rapport à l'outil logiciel ?

4. Analyse de l'espace de travail géométrique

Les élèves avec qui nous avons travaillé se trouvent à l'étape 12-13 ans de leur formation (cinquième en France et première secondaire au Québec). On leur a introduit la définition du parallélogramme de deux façons différentes, en fonction de leurs connaissances antérieures. C'est-à-dire, dans la première ingénierie (**I**$_1$),

---

[5] Au moment d'écrire ces lignes, nous écoutions *Cantares* du Catalan Joan Manuel Serrat, reprenant des vers d'Antonio Machado. Un passage rappelle joliment : « caminante, no hay camino, se hace camino al andar » (traduction : « marcheur, il n'y a pas de chemin, le chemin se fait en marchant »). Dans un registre scientifique, cette idée rejoint les modèles cosmologiques du système univers ou de la lumière qui crée son propre espace-temps.

que le parallélogramme est un quadrilatère non croisé qui possède un centre de symétrie, tandis que dans la seconde ingénierie (**I**$_2$), il s'agit également d'un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux. De leurs cours antérieurs, tous les élèves sont censés pourvoir décrire les parallélogrammes particuliers (rectangle, losange et carré). Ils savent opérer avec la symétrie centrale, la propriété des angles alternes-internes et ils sont capables de déterminer une longueur ou une aire inconnue dans des problèmes de géométrie simples.

L'espace de travail géométrique proposé se compose de quatre moments types d'une durée approximative que nous détaillons ci-après. Le premier est l'*introduction* (10 min), qui ambitionne une première familiarisation avec le nouveau contenu relatif aux propriétés-cibles, c'est-à-dire les propriétés géométriques de référence qui sous-tendent la mise en place de l'espace de travail. À l'origine, l'espace était organisé autour des propriétés caractéristiques d'une même famille de quadrilatères, depuis les parallélogrammes jusqu'aux carrés, en passant par les rectangles et les losanges. Cependant, pour des raisons de contraintes textuelles, nous cernons dans les paragraphes suivants l'exemple du parallélogramme. Celui-ci commence avec l'activité des « milieux confondus » et montre directement un usage de l'outil logiciel. L'exemple se complète par les activités « côtés parallèles » et « côtés égaux », qui renvoient respectivement à la définition classique du parallélogramme et à la réciproque de la propriété isométrique des côtés opposées. La durée entre parenthèses correspond alors à l'étude d'une famille de quadrilatères et non pas à celle d'une seule propriété.

Le deuxième moment est l'*activité instrumentée* (40 min), qui vise l'instrumentation et l'expérimentation du lien contraintes-conclusion à l'interface de Cabri II Plus. Le troisième est la *situation didactique* (20 min), dont l'objectif tend à la médiation sémiotique et à l'institutionnalisation fonctionnelle des propriétés[6]. Si les trois premiers moments se réalisent collectivement, le second offre également un espace collaboratif. Enfin, le quatrième consiste en la *résolution des exercices et problèmes* dont une partie se gère individuellement, et il s'inscrit dans le fonctionnement ordinaire du cours. Ce moment propose un réinvestissement des propriétés géométriques dans de nouvelles situations ainsi que l'institutionnalisation de propriétés émergentes, comme les corollaires des propriétés-cibles ou leurs applications inattendues.

[6] Ici il s'agit de mettre en valeur l'intervention enseignante, car du point de vue de la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998), on retrouve proprement des situations didactiques dans les autres moments. Lors du moment de l'activité instrumentée par exemple, ces situations s'organisent en phases d'action avec l'outil informatique ou de formulation dans les fiches des activités (cf. tableaux 1, 3 et 4).

4.1. Le moment d'introduction

Le parallélogramme a été introduit dans chaque ingénierie comme nous l'avons mentionné ci-dessus. Dans $\mathbf{I}_1$, il fallait relier les connaissances préalables sur la symétrie centrale et les propriétés traditionnelles du parallélogramme – la symétrie centrale avait été étudiée au chapitre précédent du cours. Il en est de même dans $\mathbf{I}_2$, sauf que nous avons dû tenir compte de la coexistence de deux définitions, puisque la définition à partir du parallélisme des côtés opposés avait été employée comme telle au primaire par une partie des élèves. Nous montrons au paragraphe suivant comment nous avons géré cette particularité dans l'aménagement de l'espace de travail. De façon plus technique, nous avons énoncé chaque définition oralement et par écrit à l'aide d'un dessin d'accompagnement, et nous avons directement posé quelques questions immédiates pour nous assurer de la compréhension des mots et du sens de la phrase, tout en prenant soin de ne pas accentuer la structure logique de la définition, ni son statut d'éventuelle justification dans un pas de raisonnement. C'est-à-dire que nous avons employé, au regard de la théorie des fonctions du langage de Duval (1995), la fonction référentielle de désignation d'objets et la fonction apophantique d'expression d'énoncés complets, sans y faire ressortir les fonctions d'expansion et de réflexivité discursives.

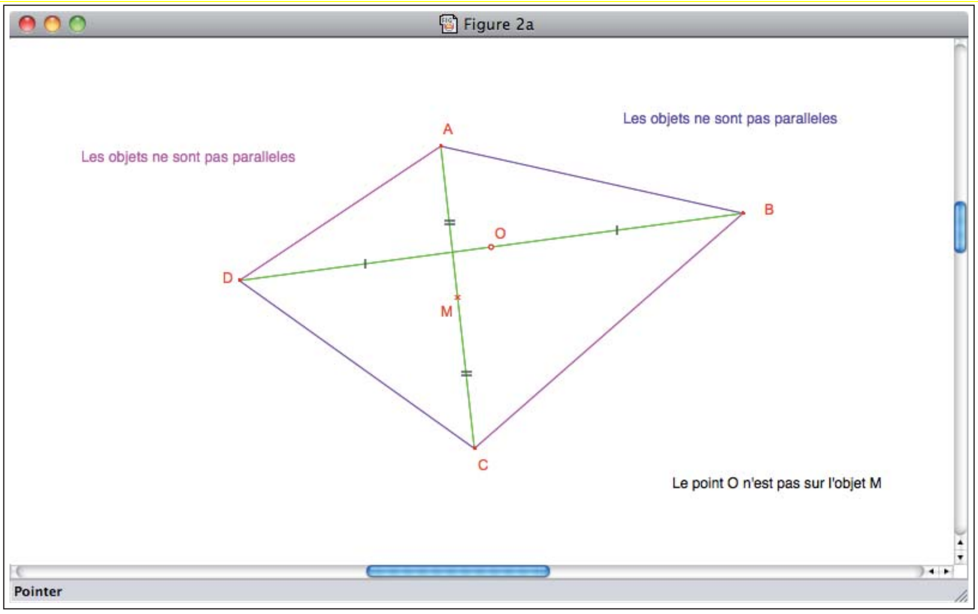
4.2. Le moment d'activité instrumentée

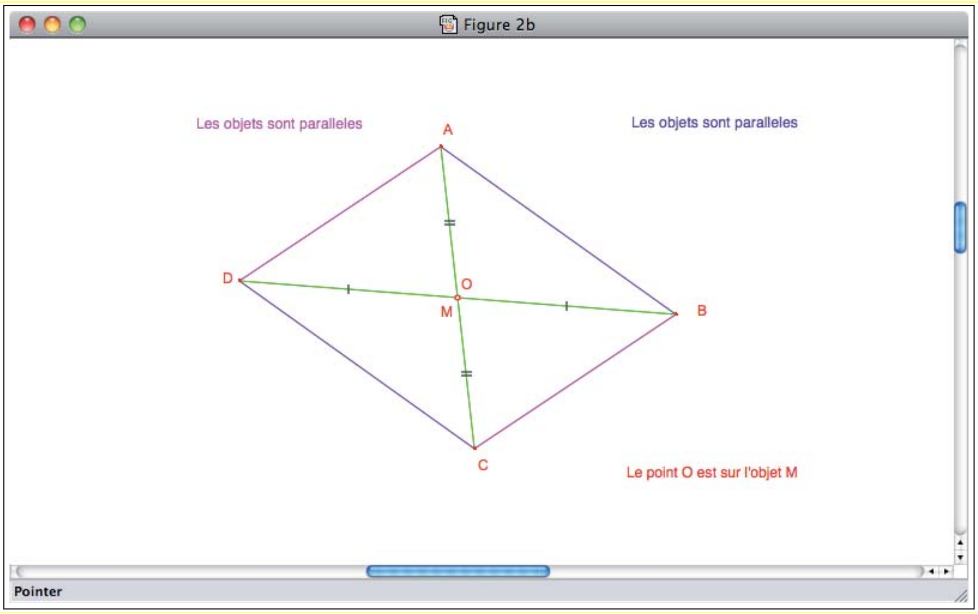
Dans le dispositif original, il y a trois activités sur le parallélogramme, chacune comportant des phases de découverte instrumentée et des phases de formulation. Au moyen de fiches contextuelles (voir l'exemple dans le tableau 1), la découverte instrumentée commence par demander le report de la situation à l'interface de l'outil logiciel. S'il faut y indiquer les parties de la figure qui doivent se déplacer, c'est en vue de répondre à une question d' « observation ». Dans cette dernière, nous avons choisi le verbe « devenir » pour qualifier la nature du quadrilatère en jeu, à l'instar de « que devient ABCD ? ». L'élève peut alors enregistrer verbalement une action consommée ou une lecture qui lui parait signifiante (cf. commentaire sur les verbes d'action au paragraphe *Le moment de situation didactique*). Quant à la formulation, elle vise à résumer les éléments de l'expérimentation qui traduisent discursivement, sous une forme personnelle, la nécessité instrumentée ou cognitive du lien entre la « construction-déplacement » et l'«observation ».

Construction Déplacement	• Construis un quadrilatère ABCD. • M est le milieu de [AC], O celui de [BD]. • Déplace le point B pour que pour que les points O et M soient confondus.
Observation	Que devient ABCD? ---
Essaie de résumer en une phrase le tableau ci-dessus : --	

Tableau 1 : Fiche de l'activité instrumentée « milieux confondus » dans **I**1.

Dans chaque activité, si nous demandons à l'élève de construire la figure en jeu, c'est pour lui permettre d'avoir un contrôle cognitif sur la cohérence du dessin, dont la reconnaissance de propriétés qui apparaissent ou qui demeurent invariantes lors du déplacement. Ainsi, dans la première activité de $\mathbf{I}_1$ (tableau 1), suite à la mise en place de la situation à l'écran et au déplacement du point B pour confondre raisonnablement les milieux, l'élève est en mesure de constater que le quadrilatère est un parallélogramme parce que celui-ci posséderait un centre de symétrie. Dans son action à l'interface du logiciel, nous nous attendons à ce que le processus de découverte procède par des allers-retours entre des configurations « milieux non confondus » et « milieux confondus », de sorte que la constatation mobilise essentiellement deux structures de contrôle au sens de Balacheff et Margolinas (2005). C'est-à-dire une première structure de type instrumenté qui induit l'idée que si ses contraintes ne sont pas satisfaites, alors la propriété-cible ne tient ni durant le déplacement (configurations dynamiques), ni à partir d'une sélection de configurations retenues (ensemble signifiant de configurations dynamiques ou statiques). Cela renforce empiriquement l'idée qui découle de la seconde structure de contrôle : lorsque les contraintes sont satisfaites, alors la propriété-cible tient déductivement selon la définition du parallélogramme. Si jamais l'élève déplaçait les sommets du parallélogramme pour s'assurer que celui-ci possède toujours un centre de symétrie, alors il serait difficile de savoir s'il expérimente pour en tester la définition ou s'il cherche à mettre en valeur le caractère quelconque de sa configuration. Néanmoins, parce que la définition du parallélogramme est connue, les instants où l'élève accepte, sous les contraintes de la situation, que le quadrilatère en jeu est un parallélogramme, relèvent d'un contrôle de type cognitif.





Figures 2a et 2b : En haut, état initial du fichier Cabri de l’activité des milieux confondus dans $\mathbf{I}_2$ et, en bas, configuration lorsque le point O est confondu avec l’objet M. Les points A, B, C et D peuvent bouger partout dans le plan, mais les points O et M dépendent des extrémités des diagonales [AC] et [BD].

Note sur la construction des figures 2a et 2b : De façon cachée, l'objet M, qui simule le milieu de [AC], est un segment dont les deux extrémités sont définies à partir de ce milieu. Cette astuce technique est nécessaire puisque l'oracle sur l'appartenance ne compare pas des objets du même ordre (point par rapport à point), mais bien selon la hiérarchie typique de la théorie des ensembles (point par rapport à un ensemble de points, dont le segment nul autorisé par le logiciel).

On peut être tenté de croire que si la coïncidence des milieux n'est instrumentalement qu'approximative, c'est-à-dire que si les pixels-milieux ne sont l'un sur l'autre que de façon visuelle, alors l'élève ne contrôlerait pas tout à fait le raisonnement véhiculé par la figure. Comme si la gestion de la représentation par l'outil constituait, en partant, un obstacle au développement d'une nécessité cognitive de la propriété-cible, dont le salut par une idéalisation de la figure ne serait dû qu'au processus de médiation sémiotique (moment de situation didactique). C'est pourquoi nous avons introduit, dans $\mathbf{I}_2$, une première activité où la situation s'installe dès l'ouverture d'un fichier Cabri II Plus (figure 2a), la première consigne dans le tableau 1 ayant été remplacée par « considère le quadrilatère ABCD du fichier Cabri ». Ce fichier affiche un quadrilatère ABCD, les milieux O et M de ses diagonales et trois oracles : deux sur le parallélisme des côtés opposés et un autre sur l'éventuelle coïncidence des milieux. Avant de donner la consigne qui mène à la superposition des milieux (« déplace le point B… » dans le tableau 1), la mise en scène est décrite discursivement de façon à rendre possible un contrôle cognitif sur une figure que l'élève n'a pas construite. En outre, nous avons marqué les diagonales de signes conventionnels pour souligner l'équidistance relative des milieux. De sorte qu'avec l'oracle sur la coïncidence des milieux, ces signes sont susceptibles de participer à l'acceptation de la conclusion dans une démarche déductive. Lorsqu'elle se réalise par les élèves, la figure 2b peut même agir comme justification dans une inférence figurale (au sens de Richard, 2004b). Si nous avons ajouté les oracles sur le parallélisme, en coloriant du même ton les côtés opposés et l'oracle correspondant, c'est pour considérer la coexistence des deux définitions du parallélogramme. Car sans ces oracles, les élèves qui voudraient invoquer le parallélisme des côtés opposés pour y reconnaître un parallélogramme seraient obligés de s'en remettre à l'apparence visuelle du dessin.

Construction Déplacement	• Construis un quadrilatère ABCD. • Déplace le point C pour que (AB) soit parallèle à (CD).
Observation (**I**$_1$) Vérification (**I**$_2$)	Que devient ABCD ? (**I**$_1$) Pourquoi sais-tu que (AB) est parallèle à (CD) ? (**I**$_2$) --
Construction	• Déplace le point C pour que (AB) soit parallèle à (CD) et que (AD) soit parallèle à (CB).
Observation	Que devient ABCD ? --
Essaie de résumer en une phrase le tableau ci-dessus : --	

Tableau 3 : Fiches de l'activité instrumentée « côtés parallèles ».

La séquence expérimentation-conjecture s'enchaîne deux fois dans les activités suivantes (tableaux 3 et 4)[7]. Nous avons employé une logique progressive qui permet, dans **I**$_1$, de traiter inclusivement la satisfaction partielle et la satisfaction complète des contraintes, et dans **I**$_2$, de connaître comment l'élève contrôle une partie de son jeu d'interaction dans une démarche consciente d'explicitation. Si nous nous attendons à ce que les premières séquences expérimentation-conjecture procèdent, à l'image de l'activité des « milieux confondus », par des allers-retours entre des configurations satisfaisantes et non-satisfaisantes, il est possible que l'accomplissement des contraintes « (AB) parallèle à (CD) » (tableau 3) et « AB = CD » (tableau 4) débouchent déjà sur des parallélogrammes. Ne serait-ce pour une question d'esthétisme ou simplement parce que le parallélogramme est dans l'air du temps – les élèves ont déjà participé à la première activité. Dans **I**$_1$, on peut certes se méfier d'avoir à répondre deux fois à une même question (« que devient ABCD? »), d'autant plus qu'une seconde contrainte est ajoutée avant la reprise. Malgré tout, pour savoir si l'élève aura considéré temporairement un trapèze ou un quadrilatère isocèle, il faudrait comparer la production de ses résumés (dernières lignes) à ses observations antécédentes (deuxièmes et quatrièmes lignes).

[7] Pour éviter d'avoir à reproduire deux tableaux par ingénierie, la seconde ligne des tableaux 3 et 4 distingue la question propre à chacune (« observation » pour **I**$_1$, « vérification » pour **I**$_2$). De plus, la première consigne de **I**$_2$ se lisait : « construis un quadrilatère ABCD sur des points de la grille ».

Construction Déplacement	• Construis un quadrilatère ABCD. • Mesure les longueurs AB, CD, AD puis BC. • Déplace le point C pour que AB = CD.
{ Observation (**I**$_1$) { Vérification (**I**$_2$)	{ Que devient ABCD ? (**I**$_1$) { Pourquoi sais-tu que AB = CD ? (**I**$_2$) ---
Construction	• Déplace le point C pour que AB = CD et que AD = CB.
Observation	Que devient ABCD ? ---
Essaie de résumer en une phrase le tableau ci-dessus : ---	

Tableau 4 : Fiches de l'activité instrumentée « côtés égaux ».

Nous pouvons alors profiter de la seconde ingénierie pour vérifier, même lorsque la configuration partielle montre un parallélogramme, quelle est la structure de contrôle qui est mobilisée pour établir le parallélisme (activité « côtés parallèles ») et l'équidistance (activité « côtés égaux »). Cette démarche complémentaire est importante puisqu'à partir de ces activités, nous acceptons que la nécessité du lien contrainte-conclusion et la reconnaissance d'un parallélogramme peuvent faire appel à des structures de contrôle différentes. Contrairement à la première activité, l'élève ne peut plus invoquer la définition qui se fonde sur le centre de symétrie, c'est-à-dire qu'il devra employer une procédure qui renvoie à une autre définition. Dans l'activité des « côtés parallèles », cette procédure risque d'être essentiellement visuelle (ou vidéo-figurale, par opposition à discursivo-graphique), mais pourrait aussi bien s'instrumenter dans l'activité des « côtés égaux ». Si ces activités mettent en valeur de façon plus évidente l'autonomie de la nécessité épistémique de la propriété-cible par rapport à l'acceptation d'une conclusion qui satisfait aux contraintes, cela ne veut pas dire forcément que les procédures de l'élève mettent en jeu des structures de contrôle distinctes. Ainsi, dans **I**$_2$, ces activités posent la situation sur une grille – la consigne « construis un quadrilatère ABCD » (tableaux 3 et 4) se complétait par « sur des points de la grille ». L'élève peut donc déployer un argument à partir des nœuds de quadrillage dans une sorte de géométrie discrète, comme la vérification du parallélisme, d'abord en remarquant que les sommets du quadrilatère se déplacent sur des nœuds de quadrillage, ensuite en comparant avec ses doigts les accroissements horizontaux et verticaux des côtés opposées du quadrilatère. Un tel argument montre que l'acceptation de la conclusion n'est pas seulement due à la satisfaction des contraintes ou aux propriétés spatiales du dessin, mais aussi à une lecture sur une figure éprouvée qui se structure cognitivement dans une inférence figurale.

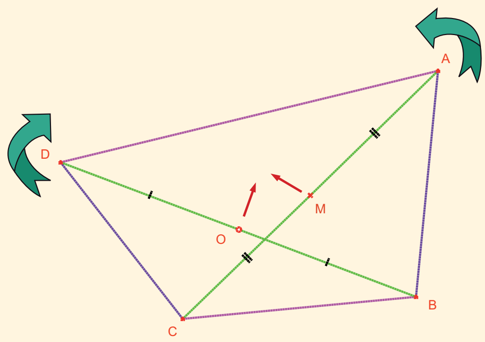
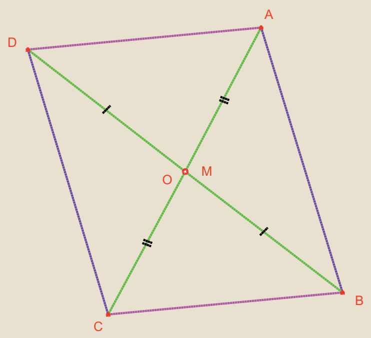
Faut-il souligner que le rôle de la grille n'est pas tout à fait le même d'une activité à l'autre. Dans la seconde activité, chez les élèves qui fonctionnent avec la définition du parallélisme des côtés opposés, l'interprétation à partir du dessin (traits opposés parallèles deux à deux) se confond à la satisfaction des contraintes ((AB) // (CD) et (AD) // (CB)). On pourrait croire qu'il y a là une sorte de tautologie, en ce sens qu'il faut employer la propriété-cible pour accepter la conclusion. Mais la satisfaction des contraintes est issue d'une action instrumentée, dont la représentation est essentiellement gérée par l'outil, tandis que l'introduction de la grille donne à l'élève un moyen de contrôle sur cette représentation. Bien plus qu'un renforcement sur le sens de la définition du parallélogramme, l'activité permet de modifier la valeur épistémique de la propriété-cible, avant même son institutionnalisation (voir paragraphe *Le moment de situation didactique*), et elle la rend cognitivement et formellement disponible pour les activités subséquentes. Au paragraphe *Le moment de résolution des exercices et problèmes*, nous réutilisons explicitement cette particularité dans la conception d'une situation-problème.

Si la compétence développée par l'usage de la grille peut se transférer dans la troisième activité, il est également possible que l'on s'en serve pour contrôler, le cas échéant, la congruence des côtés. L'égalité de Pythagore n'étant pas connue des élèves, il faudrait alors comparer la décomposition des distances horizontales et verticales des côtés opposés. Comparativement à $\mathbf{I}_1$, où la mesure selon l'outil « distance ou longueur » se laisse assimiler à un oracle sur une propriété métrique d'un côté, les points de la grille donnent moins de jeu à l'illusion de continuité dans le plan, aussi bien pour le parallélisme que pour l'équidistance. De fait, la troisième activité de $\mathbf{I}_1$ est instrumentalement plus exigeante, parce que pour former une configuration satisfaisante en déplaçant un point, les deux mesures des côtés adjacents s'ajustent en même temps. L'élève pourrait devoir anticiper la conclusion, par exemple, en effectuant simultanément un contrôle vidéo-figural sur le parallélisme des côtés opposés. Autrement dit, l'articulation entre la nécessité du lien contraintes-conclusion et la reconnaissance du parallélogramme procéderait par une coordination entre opérateurs instrumentés et opérateurs visuels, au regard d'une même structure de contrôle déductive. Le rapprochement des ingénieries constitue donc un moyen de comprendre le degré de nécessité associé à la formulation, par l'élève, de la propriété-cible en fin d'activités, tout comme la part de contrôle qui lui revient dans son processus de décision instrumentée.

4.3. Le moment de situation didactique

Ce moment débute par une mise en commun des formulations personnelles alors qu'un élève explique publiquement, à l'aide d'un vidéoprojecteur, comment il y est arrivé. S'il peut compter sur le concours de ses compagnons ou de l'enseignant, c'est parce qu'il s'agit de focaliser les compétences de toutes tendances sur une même situation. Cette phase collective constitue le préambule à une seconde, dans laquelle le jeu fondamental de l'enseignant est l'institutionnalisation, par leur formulation experte, des propriétés-cibles. Dans le tableau 5, nous reproduisons les éléments qui se rattachent à la première activité. Pour soutenir le processus de médiation sémiotique :

– les verbes d'action « construire » et « observer » précèdent intentionnellement la conjugaison des verbes d'état « avoir » et « être » dans une formulation explicitement calquée sur le modus ponens (« si [on a] …, alors [c'est] … »)[8] ;
– le dynamisme de l'environnement logiciel se transpose dans l'environnement papier-crayon avec le raisonnement discursivo-graphique.

<table>
<tr><td colspan="2">Si on construit …</td><td>Alors on observe …</td></tr>
<tr><td colspan="2">… un quadrilatère de façon à ce que
• O est le milieu de [BD] et M celui de [AC]
• O et M sont confondus

</td><td>

…ABCD est un parallélogramme</td></tr>
<tr><td>PROPRIÉTÉ</td><td colspan="2">Si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu,
alors c'est un parallélogramme.</td></tr>
</table>

Tableau 5 : Institutionnalisation de la réciproque de la propriété des milieux d'un parallélogramme.

[8] Du point de vue de la fonction poétique du langage, si certaines formules comme «un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme» se disent mieux, elles dissimulent toutefois la structure d'implication logique pour le non-initié (Richard et Sierpinska, 2004).

Avec l'usage des oracles, le logiciel contribue malgré tout à modifier la valeur épistémique de la conclusion. Mais en cachant la rationalité dont il est issu, l'oracle ne peut être responsable d'autres apports discursifs. Toujours est-il que le dessin de droite dans le tableau 5 véhicule aussi un raisonnement et cela, qu'il soit issu de $\mathbf{I}_1$ ou de $\mathbf{I}_2$. C'est-à-dire que la lecture discursivo-graphique de la conclusion – utilisation des signes graphiques du dessin pour supporter la proposition discursive « ABCD est un parallélogramme » – est susceptible d'en modifier la valeur épistémique (figure 6). Par contre, ce dessin ne montre pas l'ordre des arguments qui le composent et cela pourrait évoquer davantage le résultat d'une figure induite, dont la représentation et la cohérence ont été gérées par le milieu, plutôt qu'une figure dûment constituée, contrôlée par le raisonnement. Afin de rendre la propriété cognitivement nécessaire et formellement fonctionnelle, l'enseignant amène donc les élèves à rapprocher la nécessité du lien contraintes-conclusion au rapport de l'interprétation discursivo-graphique et du rôle vidéo-figural des dessins. L'institutionnalisation des autres propriétés se présente de manière similaire, mais l'enseignant souligne la disponibilité de ces propriétés pour un éventuel usage et, dans $\mathbf{I}_2$, il introduit l'idée du contrôle à l'aide de la grille. Ainsi, pour démystifier l'apport de l'outil dans l'instrument, le « mouvement » de la construction vers l'observation commence par généraliser :

- l'argument des accroissements égaux ou des distances égales sur les nœuds de quadrillage à des points quelconques du plan (activités des « côtés parallèles » et des « côtés égaux ») ;
- l'argument des mesures égales selon la précision par défaut (0,01 cm près) à la précision maximale du logiciel (activité des « côtés égaux »).

C'est-à-dire que si le problème de discrétisation à l'échelle la plus fine de l'écran ou de la représentation interne n'est pas déterminant dans la structure de contrôle, c'est parce que la reconnaissance d'invariants ne peut émerger que dans les conditions ergonomiques de l'outil. À ce processus de « généralisation machine », qui se conduit par l'enseignant, s'ajoute celui de la généralisation d'un cas particulier typique de la figure quelconque. Enfin, la lecture et l'acceptation de la conclusion passent par l'introduction des propriétés de préservation des distances et de l'invariance du parallélisme dans une symétrie centrale.

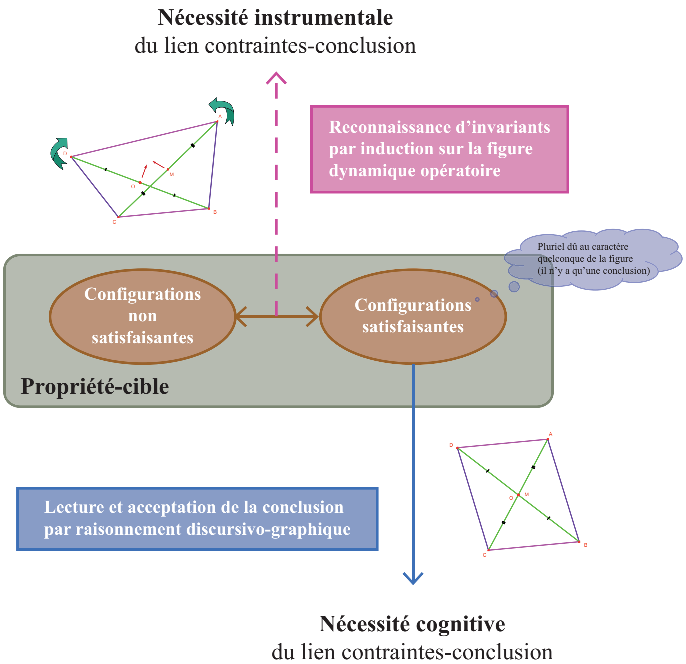


Figure 6 : Rapports du raisonnement à la nécessité du lien contraintes-conclusion.

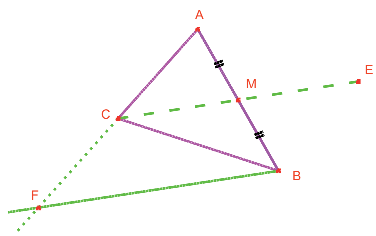
Énoncé et figure	
Dans un triangle ABC, E est le symétrique de C par rapport au milieu M de [AB]. La parallèle à (CM) passant par B coupe (AC) en F. Peut-on dire que C est le milieu de [AF]? *Répondre à cette question en plaçant de façon cohérente les morceaux du casse-tête suivant (il faut construire la conclusion à partir des hypothèses).* Tu peux utiliser les morceaux que tu veux et tu peux utiliser un même outil plus d'une fois.	

Tableau 7 : Situation-problème de contrôle.

4.4. Le moment de résolution des exercices et problèmes

Outre les aspects proprement cognitifs ou discursifs sur la signifiance et la conceptualisation, le but pédagogique ultime de nos ingénieries n'est pas la connaissance d'un système axiomatique absolu qui part des axiomes vers les propriétés, mais bien le développement de compétences géométriques à travers l'apprentissage des propriétés. Celles-ci sont considérées de façon relative les unes par rapport aux autres lors du maniement, avec un moyen d'expression ou un autre, d'implications logiques motivées, médiées et justifiées qui appartiennent à une structure de contrôle mathématique. Pour répondre plus particulièrement à la seconde question que nous posions à la fin de la section *Contexte*, nous reproduisons ici une situation-problème formulée dans l'environnement papier-crayon (tableau 7). Il s'agit de la résolution d'un problème de preuve à partir d'un casse-tête qui contient les pièces (propositions) d'un schéma de démonstration (tableau 8). Dans celui-ci, les hypothèses et la conclusion du problème sont données[9] de même que les résultats à déduire et leurs justifications. Aucune proposition n'est contextuellement fausse, mais il y a plus de résultats intermédiaires et d'outils qu'il n'en est strictement nécessaire pour former un schéma cohérent. Plusieurs solutions sont alors possibles. La forme des pièces renvoie au statut des propositions dans la démonstration ou la structure du raisonnement, et, dans le cas des outils, elle suggère notamment un sens logique qui va naturellement dans le sens de lecture. La formation d'inférences de structure ternaire (antécédent, justification et conclusion) repose conjointement sur l'idée d'expansion cognitive du discours déductif, inspirée de Richard (1995), et d'expansion formelle, d'Egret et Duval (1989). La résolution s'effectue par équipe de deux sur des pièces apposées à du carton. Les élèves peuvent, au besoin, demander des pièces supplémentaires à l'enseignant.

Comme les élèves n'ont jamais été initiés au discours déductif, mais que la résolution des activités instrumentées est toute récente, la formation partielle ou complète du casse-tête permet de vérifier l'aptitude à former une déduction cohérente et la constance d'un enchaînement de déductions, sans que la gestion de l'écrit ne soit un obstacle. En principe, les activités instrumentées concrétisent les réciproques de propriétés du parallélogramme. Mais en se référant à ces activités plutôt que de réécrire les énoncés des propriétés institutionnalisées, comme on le retrouve à la dernière ligne du tableau 5, nous pouvons détecter quel est le sens logique employé par l'élève dans sa justification. C'est-à-dire le sens fonctionnel qu'il a intériorisé au seuil de la situation-problème. Par exemple, l'application simultanée des activités A_2 et A_3, au lieu de la propriété P_1, est susceptible de trahir une sorte d'interférence sur la nécessité du lien entre les antécédents choisis et la conclusion produite. De même, la confusion d'usage entre les définitions D_1 et D_2 devrait indiquer si, malgré une structure correcte, les connaissances en jeu sont

[9] Puisque le problème se formule avec un dessin, les hypothèses sur l'alignement ou non des points (F appartient à (AC), ABC est un triangle) demeurent implicites. Ne voulant pas surcharger inutilement le processus de résolution, cette disposition permet d'employer indistinctement (AC) et (CF), ou d'invoquer la définition du milieu d'un segment uniquement avec l'équidistance, ce qui laisse l'alignement se dégager éventuellement du dessin en vue d'un raisonnement discursivo-graphique.

justifiées. Par ailleurs, l'existence des pièces A_1 et A_2, jointe à l'absence explicite d'énoncé dans la pièce D_1, est une astuce qui concilie les deux définitions du parallélogramme.

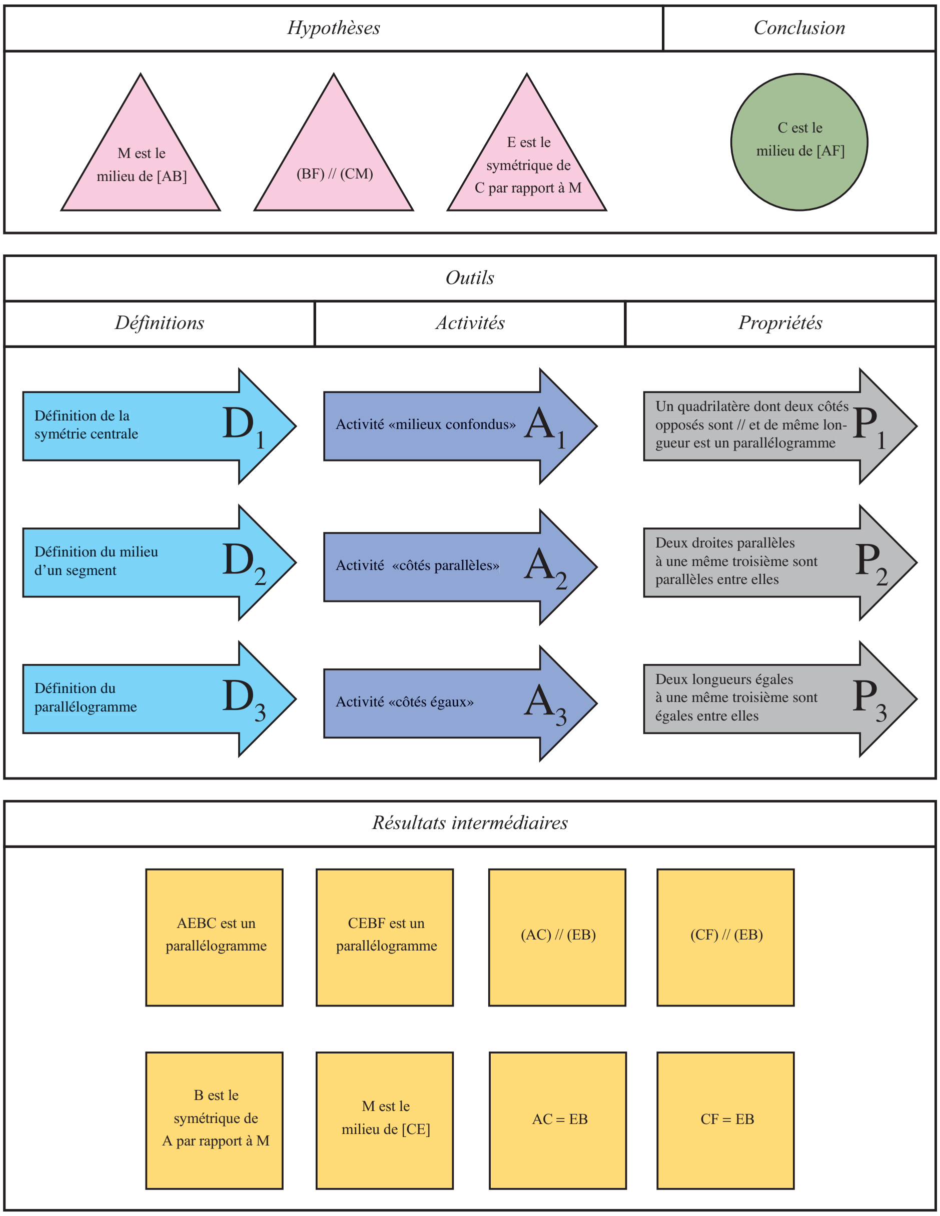


Tableau 8 : Pièces du casse-tête de démonstration.

5. Idonéité de l'espace de travail dans l'interaction sujet-milieu

Selon Kuzniak (2006), pour qu'un ETG soit efficace dans l'institution scolaire et ainsi, le qualifier d'idoine, il faut d'abord qu'il permette « de travailler dans la géométrie correspondant à la problématique visée » et ensuite, qu'il soit « bien construit dans le sens où ses différentes composantes sont organisées de manière valide ». Si à la section *Quelques considérations liminaires*, nous avons déjà nuancé sur la réalité géométrique dans ses rapports à l'institution, il n'en demeure pas moins que nous pouvons facilement situer la géométrie de référence de notre ETG dans l'articulation (GI|GII). En revanche, la validité dans l'organisation des composantes demande à son tour une attention particulière, dont les constituants clefs et les éléments charnières se résument schématiquement dans la figure 9. Inspiré au préalable des niveaux d'organisation de Kuzniak (2009), qui compose les dimensions épistémologique (plan des composantes) et cognitive (plan cognitif) de l'ETG, notre caractérisation met plutôt en valeur l'interaction entre un sujet épistémique et un milieu épistémologique, de même que les principales genèses qui animent cette interaction. Nonobstant les relations planaires qui ne sont pas déterminées chez l'auteur – dans notre caractérisation par exemple, la relation entre l'« espace réel et local » et le « référentiel » est identifiée par le couple « interprétation-mathématisation » –, la structure d'ensemble et la signification de plusieurs composantes sont sensiblement les mêmes. Afin de montrer l'idonéité de notre espace de travail, nous ne nous étendons alors que sur les principales différences du modèle afin d'étayer l'organisation des composantes dans le prolongement de la section *Analyse de l'espace de travail géométrique*.

En ayant choisi de se centrer sur les interactions sujet-milieu et en reconnaissant celles-ci comme étant les plus petites unités d'interaction cognitive, chaque flèche de la figure 9 représente un processus entre les réalisations coordonnées par le sujet épistémique et l'architecture du milieu épistémologique. De façon traditionnelle, la notion de sujet épistémique permet de rendre compte de la genèse des notions géométriques issues des paradigmes à partir de la connaissance elle-même, telle qu'elle est construite au sein du sujet individuel ou d'un groupe de sujets. Mais au regard d'une réalité géométrique dynamique et dans l'idée d'un espace de travail qui se crée aussi par une démarche potentielle (section *Contexte*), nous pouvons également considérer la valeur épistémique qu'un sujet peut associer à ses réalisations, que ce soit dans ses représentations sémiotiques, ses traitements intentionnels ou ses traitements quasi-instantanés (au sens de Duval, 1995).

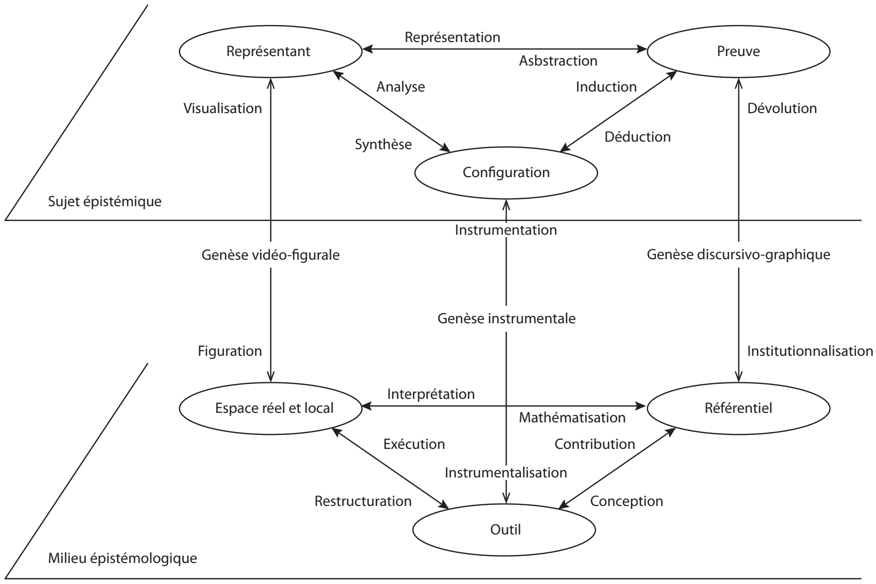


Figure 9 : L'espace de travail géométrique dans l'interaction entre l'élève et le milieu.

Dans notre espace de travail, les propriétés géométriques sont à la fois la cause des activités instrumentées et l'objectif de l'apprentissage. Autrement dit, parce que le référentiel est constitué de propriétés, ce sont elles qui participent à la conception de l'outil, dont l'usage permet d'en rapporter des nouvelles et ainsi, contribuer à la valorisation du référentiel. Pour le sujet, l'entrée dans une nécessité épistémique du lien contraintes-conclusion passe d'abord par deux types de genèses bien différenciées. Si la genèse instrumentale résulte des processus d'instrumentation et d'instrumentalisation (Rabardel, 1995), la genèse discursivo-graphique reprend l'idée que l'exploitation des propriétés dans une démarche de preuve, qui fonctionne et se structure par rapport à une référence instituée, découle de deux processus largement complémentaires que nous empruntons à Brousseau (1998). Dans la théorie des situations didactiques, les processus de dévolution et d'institutionnalisation sont ceux qui permettent à l'enseignant de donner du sens au jeu de l'élève et à la connaissance. Afin qu'il puisse effectuer un travail de « géomètre », nous considérons que l'élève adhère progressivement à une référence théorique préexistante (dévolution des propriétés-cibles) et même qu'il enrichi le référentiel en ayant validé de « nouvelles » propriétés dans son interaction avec le milieu (leur institutionnalisation). En intégrant les processus inductif et déductif que nous avons condensés dans la figure 6, les relations réciproques entre le référentiel, l'outil, la configuration et la preuve forment une des trois démarches fondamentales du système sujet-milieu (figure 10), soit la démarche de validation.

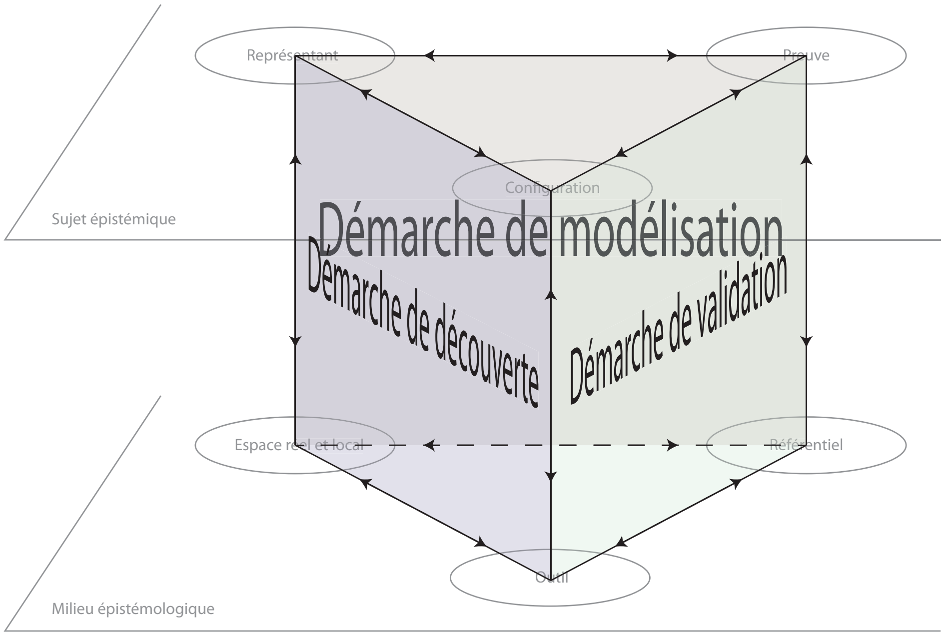


Figure 10 : Trois démarches fondamentales dans l'espace de travail géométrique idoine.

Si la transformation des connaissances mathématiques ou le développement des conceptions chez un sujet procède à la fois par expansion discursive et par expansion graphique (au sens de Richard, 2004b), c'est parce que d'une part, les modes d'expansion permettent aussi bien le traitement au sein d'un registre de représentation que la coordination entre registres, et que, d'autre part, ils participent au contrôle sur la représentation sémiotique et dans le traitement même. Une des particularités de la pratique géométrique se caractérise par ses relations de modélisation, de signifiance et de représentation. Par rapport au référentiel, il semble naturel d'associer aux représentants géométriques un lien direct, comme si les signes figuraux se comportaient exactement comme la plupart des autres signes mathématiques. C'est-à-dire qu'à l'instar des notations de fonction, de vecteurs, d'opérateurs, *etc.*, les signes figuraux n'auraient pas de signification, contrairement aux signes linguistiques, et ne se constitueraient que par une référence instituée. Si cela est valable pour des signes conventionnels comme la double coche pour représenter l'équidistance ou l'usage d'une même couleur pour le parallélisme, une bonne partie des signes figuraux sont eux-mêmes des formes, donc leur propre modèle (Richard et Sierpinska, 2004). Ce double jeu représentatif dans l'expression et la signification des figures et de leurs propriétés nous incite à distinguer la genèse vidéo-figurale de la genèse discursivo-graphique. Dans le sens développé avec la notion de figure géométrique opératoire, la genèse vidéo-figurale procède selon les processus de visualisation et de figuration, tournés respectivement vers le représentant et vers l'espace réel et local. En reprenant, de la notion précédente, les processus de représentation et d'abstraction, tout comme, de la définition classique de la notion de modèle, les processus de mathématisation et d'interprétation, nous identifions la démarche fondamentale de modélisation dans les relations réciproques entre le référentiel, l'espace réel et local, le représentant et la preuve.

En l'absence du référentiel, ne serait-ce que de façon momentanée, les processus qui résultent de la genèse vidéo-figurale jouent un rôle heuristique de premier ordre. Mais ce rôle est amplifié par l'usage de l'outil logiciel, alors que celui-ci gère une partie des connaissances en jeu, telles que la représentation interne des objets, la représentation à l'écran et le traitement de ces représentations. Ainsi, dans les allers-retours entre des configurations satisfaisantes et non-satisfaisantes mentionnées au paragraphe *Le moment d'activité instrumentée*, c'est le logiciel qui conserve la logique de la construction durant le déplacement. Indépendamment du sujet, le sens de l'objet technique est son fonctionnement (exécution) et la production par l'outil informatique, qui a sur la perception des effets analogues à ceux de l'espace réel et local, est une sorte de « virtualisation » de cet espace (restructuration). Si les relations réciproques entre l'espace réel et local, l'outil, la configuration et le représentant constituent la démarche fondamentale de découverte, il faut voir que l'organisation des composantes se valide dans l'articulation des trois démarches fondamentales.

Conclusion

L'analyse que nous avons effectuée fourni un exemple d'ETG idoine en faisant abstraction de résultats expérimentaux. Faut-il en conclure pour autant qu'il s'agit aussi d'un ETG de référence ? Dès le début de notre article, nous avons montré jusqu'à quel point les frontières entre les notions de visualisation, de construction et de preuve, sur le plan cognitif de Kuzniak (2009), sont perméables dans l'apprentissage des propriétés géométrique qui procède par « évolution » au début de l'école secondaire. Le concept même de figure dynamique opératoire et le rôle constitutionnel du raisonnement dans celle-ci en sont une manifestation des plus marquées. Dans la perspective plus vaste de séquences d'enseignement qui se fondent sur notre ETG, mais dont l'intention vise ouvertement un enrichissement du référentiel théorique des élèves, le modèle sur la nature du travail géométrique de Kuzniak (2009) devient particulièrement utile pour en situer les caractéristiques dominantes. Ainsi, dans la mesure où les propriétés-cibles forment en soi un référentiel théorique, les relations immédiates de celles-ci à l'outil logiciel, l'espace réel et la preuve sont plus claires pour l'acquisition d'une propriété mathématique appliquée aux démonstrations.

Toutefois, s’il faut envisager l'existence d'espaces de travail spécifiques associés à chaque paradigme, c’est-à-dire un ETG de référence, cela équivaut à considérer une hiérarchisation d’origine épistémologique dans le sens « ETG de référence » → « ETG idoines » → « ETG personnels ». Or, une telle descendance sous-estime le mouvement contraire. Parce que si la référence géométrique ne paraît pas aussi claire pour l’institution, les ETG personnels et les ETG idoines créent de facto une référence pour le développement des compétences géométriques des élèves. Nous croyons alors que notre définition fonctionnelle de la notion de milieu, jointe à la reconnaissance du système sujet-milieu en tant que plus petite unité d’interaction cognitive, permet de mettre en valeur l’organisation d’une réalité géométrique de référence ascendante. Au demeurant, s’il appartient à l’élève de gouverner essentiellement l’objectif fondamental d’une situation, le partage de responsabilités « sujet-milieu » sur le contrôle des connaissances montre combien le référentiel théorique peut être à la fois interne et externe au système d’interaction cognitive.

L’expérience de subordination des contraintes à la conclusion joue sur deux types de rationalités traditionnellement opposées. En premier lieu, la nécessité instrumentale du lien contraintes-conclusion procède par induction sur la figure dynamique opératoire. Cette figure se matérialise, dans la confrontation entre une configuration satisfaisante et des configurations non satisfaisantes relatives à la propriété-cible, afin d’en dégager des propriétés qui demeurent invariantes dans le déplacement et signifiantes pour l’élève. Le contrôle de la justification inférentielle est géré de façon partagée dans l’instantanéité des actions-rétroactions à l’interface de l’outil logiciel, et le conséquent est obtenu par interprétation sur la configuration satisfaisante, à la manière d’une inférence figurale. En second lieu, c’est lors de cette interprétation que la nécessité cognitive du lien contraintes-conclusion est susceptible de se comporter comme une déduction cognitive ou formelle, par raisonnement discursivo-graphique où le contrôle de la justification appartient à l’élève. Même si ce besoin peut naître à la suite d’une situation didactique dans laquelle les verbes d’état se sont substitués aux verbes d’action, l’idée charnière reprend celle de Clairaut (2006) lorsqu’il affirme que « cette induction présumée porte avec elle sa démonstration ».

Afin de vérifier si l’expérience de subordination des contraintes à la conclusion rend fonctionnellement signifiante la structure d’une déduction et le statut opératoire d’une propriété mathématique avec une certaine autonomie par rapport à l’outil logiciel, nous avons mis en place la situation-problème du casse-tête de démonstration en guise de problème complémentaire. Bien que nous n’ayons pas présenté de résultats de recherche dans notre texte, le transfert anticipé sur la base de notre étude permet ici de poser l’idonéité de notre espace de travail géométrique dans une démarche en instance de réalisation. Ainsi, alors que l’expression du raisonnement déductif y serait multiregistre, la structure de contrôle développée chez l’élève renverrait à ce type de rationalité mathématique.

Bibliographie

ALSINA, C. & NELSEN, R. (2006), *Math Made Visual, Creating Images for Understanding Mathematics,* Mathematical Association of America, Washington.

BALACHEFF, N. & MARGOLINAS, C. (2005), Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques, dans *Balises pour la didactique des mathématiques* (Éds. Mercier & Margolinas), 75–106, La pensée sauvage, Grenoble.

BARTOLINI BUSSI, M.G. & MASCHIETTO, M. (2005), *Macchine Matematiche: dalla storia alla scuola*, Springer.

BROUSSEAU, G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BRYANT, J. & SANGWIN, C. (2008), *How round is your circle? Where engineering and mathematics meet*, Princeton University Press.

CARON, F. (2003), *Où sont les mathématiques quand on a besoin d'elles ?*, Éditions Bande didactique, Montréal.

CARON F. & DE COTRET S.R. (2007), Un regard didactique sur l'évaluation en mathématiques : genèse d'une perspective, *Actes du Colloque 2007 du Groupe de didactique des mathématiques du Québec*, 123–134.

CHEVALLARD, Y. (1992), *La transposition didactique*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

CLAIRAUT, A.C. (2006), *Éléments de géométrie*, reproduction en fac-similé de l'édition de Paris chez David fils, 1741 : Éléments de géométrie, Gabay, Paris.

COUTAT, S. (2006), *Intégration de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la géométrie pour favoriser une liaison école primaire-collège : une ingénierie au collège sur la notion de propriété*, Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble.

DAHAN, J.J. (2005), *La démarche de découverte expérimentalement médiée par cabri-géomètre en mathématiques : un essai de formalisation à partir de l'analyse de démarches de résolutions de problèmes de boîtes noires*, Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble.

DOUADY, R. (2005), *Didactique des Mathématiques*, article de l'Encyclopædia Universalis France.

DRIJVERS, P. & TROUCHE, L. (2008), From artefacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor, dans *Research on technology and the teaching and learning of mathematics, Vol. 2 : Cases and perspectives* (Éds. Blume & Heid), 363–392, Information Age, Charlotte, Caroline du Nord.

DUVAL, R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine : registre sémiotique et apprentissages intellectuels*, Peter Lang, Berne.

DUVAL, R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **10**, 5–53.

EGRET, M.A. & DUVAL, D. (1989), Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **2**, 41–64.

GIVRY, D. & ROTH, W.M. (2006), Toward a New Conception of Conceptions : Interplay of Talk, Gestures, and Structures in the Setting, *Journal of Research in Science Teaching*, **43.10**, 1086–1109.

HOUDEMENT, C. & KUZNIAK, A. (2006), Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **11**, 175–193.

KUZNIAK, A. (2006), Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, **6.2**, 167–187.

KUZNIAK, A. (2009), Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France, dans *Premier Colloque Franco-Chypriote de Didactique des Mathématiques*, (Éds. Gagatsis, Kuzniak, Deliyianni & Vivier), 71–89.

MARGOLINAS, C. (2009), *Points de vue de l'élève et du professeur : essai de développement de la théorie des situations didactiques*, Habilitation à diriger les recherches en sciences de l'éducation, Université de Provence, version électronique récupérée le 26 juillet 2010 à http://tel.archivesouvertes.fr/docs/00/42/96/95/PDF/HDR_Margolinas.pdf

MÉLS (2001, 2006 et 2007), *Programme de formation de l'école québécoise, éducation préscolaire, enseignement primaire* (2001), *enseignement secondaire 1er cycle* (2006) et *enseignement secondaire 2e cycle* (2007), Publications du Gouvernement du Québec.

RABARDEL, P. (1995), *Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains*, Armand Colin, Paris.

RICHARD, P.R. (1995), *L'enseignement de la démonstration*, Mémoire de Maîtrise non publié, Universitat Autònoma de Barcelona.

RICHARD, P.R. (2003), Continuités et ruptures dans l'évolution des caractéristiques sémiotiques des manuels scolaires de mathématique en usage au Québec depuis le milieu du XIXe siècle, *Actes du Colloque 2002 du Groupe de didactique des mathématiques du Québec*.

RICHARD, P.R. (2004a), *Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques*, Peter Lang, Berne.

RICHARD, P.R. (2004b), L'inférence figurale : un pas de raisonnement discursivo-graphique, *Educational Studies in Mathematics*, **57**, 229–263.

RICHARD, P.R., FORTUNY, J.M., GAGNON, M., LEDUC, N., PUERTAS, E. & TESSIER-BAILLARGEON, M. (2011), Theoretical Fundaments for an Intelligent Tutorial System Towards the Learning of Geometry at a High School Level, dans *Interoperable interactive geometry for Europe* (Éds. Kortenkamp & Laborde), *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, **43.4**, 1–15.

RICHARD, P.R., MEAVILLA, V. & FORTUNY, J.M. (2010), Textos clásicos y geometría dinámica : estudio de un aporte mutuo para el aprendizaje de la geometría, *Revista Enseñanza de las Ciencias*, **28.1**, 95–111.

RICHARD, P.R. & SIERPINSKA, A. (2004), Étude fonctionnelle-structurelle de deux extraits de manuels anciens de géométrie, dans *Le langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques* (Éds. Lemoyne & Sackur), *Revue des sciences de l'éducation*, **30.2**, 379–409.

VYGOTSKY, L.S. (1978), *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Process*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.

Sylvia COUTAT
Université de Genève
sylvia.coutat@unige.ch

Philippe R. RICHARD
Université de Montréal et Universitat Autònoma de Barcelona
philippe.r.richard@umontreal.ca