INÉS Mª GÓMEZ-CHACÓN, ALAIN KUZNIAK

LES ESPACES DE TRAVAIL GÉOMÉTRIQUE DE FUTURS PROFESSEURS EN CONTEXTE DE CONNAISSANCES TECHNOLOGIQUES ET PROFESSIONNELLES

Abstract. Prospective Teachers' Geometric Work Space within Technological and Professional Knowledge. This article is focused on the study of the geometric work involved in the initial teacher training in a learning environment based on the use of GeoGebra dynamic software. The intention is to identify how three figural, instrumental and discursive reasoning genesis are articulated in the Geometric Work Space and to study the role which GeoGebra plays in the construction of this geometric space. In addition, we explore the influence of software in the step from Geometry I to Geometry II in the performance of the student as viewed by the teacher.

Résumé. Cet article est centré sur l'étude du travail géométrique des professeurs en formation initiale lorsqu'ils utilisent un logiciel de géométrie dynamique (GeoGebra) dans le cadre de leur formation. Il s'agit d'identifier comment s'articulent les genèses figurale, instrumentale et discursive de l'espace de travail géométrique et de voir le rôle éventuel et spécifique de GeoGebra dans la construction de cet espace de travail géométrique. De plus, l'influence sur les étudiants du logiciel pour assurer le passage de la géométrie I à la Géométrie II est explorée.

Mots-clés. Géométrie, Espace de travail géométrique, GeoGebra, Formation initiale de professeurs, connaissances professionnelles, connaissances technologiques.

---

1. Conditions de l'expérimentation et questions initiales de la recherche

La recherche présentée ici fait partie d'un projet plus vaste, le projet ESCEMMAT (scénario Multimédia pour l'apprentissage des mathématiques). Ce projet, développé en 2007-2009 à l'Universidad Complutense de Madrid, porte sur la formation initiale des enseignants de mathématiques (Gómez-Chacón, 2008 ; Gómez-Chacón & Joglar, 2010). Il comprend la création et la mise en application de scénarios multimédia d'apprentissage conçus pour que les étudiants (futurs professeurs de mathématiques de Lycée) acquièrent ou perfectionnent les compétences nécessaires pour enseigner les mathématiques en utilisant les nouvelles technologies dans les classes. L'accent est mis surtout sur le fait d'apprendre à enseigner les mathématiques en utilisant des programmes de calcul symbolique (comme Derive) et de géométrie interactive (comme GeoGebra) dans les classes de Lycée. L'objectif de ces scénarios est double, d'une part il s'agit de détecter et de développer les compétences des étudiants de la licence de Mathématique en tant que futurs professeurs de mathématiques et d'autre part

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 16, p. 187 – 216.

d'approfondir le *savoir stratégique* vu comme un ensemble de connaissances sur les variables permettant le contrôle des situations d'enseignement. Dans ce cadre les étudiants ont besoin de comprendre comment l'usage des instruments peut influencer l'activité cognitive et mathématique de leur utilisateur.

Notre recherche concerne un groupe de trente étudiants de licence de mathématiques, futurs enseignants, en 2007-2008 en Espagne. A l'université, ces étudiants ont suivi des cours de mathématiques avancées dans différents domaines de la géométrie (Géométrie différentielle et riemannienne) mais ils ont peu travaillé les connaissances mathématiques scolaires qui se réfèrent à la géométrie classique qu'ils devront ensuite enseigner et de ce fait la pratique de cette géométrie leur est devenue étrangère. En outre, s'ils sont habitués à résoudre des problèmes avec l'aide de différents logiciels, ils ont peu de connaissances didactiques sur l'utilisation en classe de ces technologies informatiques.

Dans le cadre de cet article, nous étudierons plus particulièrement les réactions de ces étudiants à un problème de construction en Géométrie. Nous appuierons notamment notre analyse sur notions d'Espace de Travail Géométrique (ETG) et de paradigmes géométriques (Houdement et Kuzniak, 1998, 2006 ; Kuzniak, 2010, 2011 et annexe 1).

Jusqu'à présent, il y a eu peu d'études (Coutat, 2006 ; Mithalal, 2010) sur les apprentissages mathématiques en contexte technologique qui ont utilisé ce cadre théorique comme cadre interprétatif du comportement des étudiants engagés dans un processus de raisonnement avec une genèse instrumentale. En France, l'approche instrumentale (Artigue, 2002 ; Lagrange, 2009 ; Trouche, 2005) est privilégiée dès qu'il s'agit d'étudier une tâche donnée à des élèves en contexte technologique. Les deux perspectives, celle du travail géométrique et celle de l'approche instrumentale sont pourtant complémentaires pour comprendre le développement du travail géométrique. L'approche instrumentale permet de mettre à jour les difficultés spécifiques liées à l'usage des technologies tandis que celle des ETG est plus sensible à la construction épistémologique et cognitive du travail spécifique en géométrie.

Le cadre des Espaces de Travail Géométrique (ETG) se propose de définir les conditions qui permettent à un individu (étudiants, professeur, chercheur,...) d'effectuer son travail de géomètre. Ce travail suppose une réorganisation spécifique des deux plans constitutifs de l'ETG, le plan épistémologique et le plan cognitif, ainsi que la mise en relation de chacun de ces deux plans (Kuzniak, 2010, 2011). Pour décrire cette mise en réseau, nous avons introduit un certain nombre de genèses qui établissent les connexions entre les composantes du plan épistémologique et du plan cognitif.

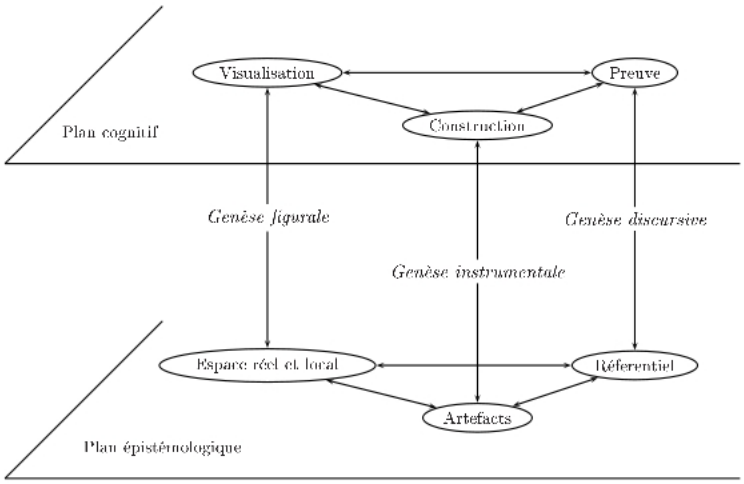


Figure 1 : L'espace de travail géométrique et ses genèses (Kuzniak, 2010).

De manière plus précise, les trois genèses étudiées portent sur la figure, les artefacts et le discours de preuve.

- La *Genèse figurale* précise le travail sur les objets tangibles du point de vue de la visualisation qui structure les intuitions premières de l'espace ;
- la *Genèse instrumentale* dépend des taches mettant en jeu les processus d'organisation et de construction des configurations principalement dus à l'usage des artefacts ;
- la *Genèse discursive* du raisonnement s'appuie sur les propriétés et sur les formes de raisonnement déductif en privilégiant le registre discursif. Elle fonctionne en étroite liaison avec le processus de preuve.

La notion de genèse qui apparaît ici ne se réfère pas seulement à la génération de schèmes opératoires, elle repose aussi sur une perspective sémiotique (sémiose) en rapport avec les figures et le raisonnement. D'autre part, les relations indiquées par les flèches ne doivent pas être perçues comme établissant une bijection entre deux composantes déterminées mais plutôt comme insistant sur certaines relations qui participent de la genèse globale de l'ETG.

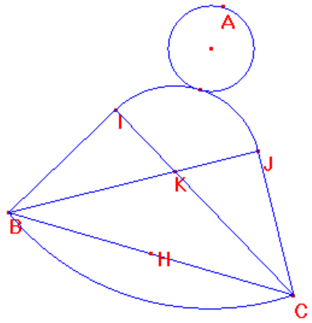
Dans cet article, nous regarderons particulièrement la place que joue un environnement technologique sur le développement et la mise en œuvre des compétences en géométrie de ces étudiant-professeurs. Pour cela, nous observerons comment s'articulent les genèses figurale, instrumentale et discursive de l'espace de travail géométrique personnel des étudiants placés dans une situation de formation demandant l'usage d'un logiciel de géométrie dynamique. Nous préciserons l'influence sur les étudiants de l'emploi du logiciel GeoGebra pour assurer le passage de la Géométrie I à la Géométrie II en nous intéressant aux usages des propriétés et des artefacts.

Dans la perspective d'accompagner les étudiants dans la construction de leur savoir stratégique sur un enseignement utilisant les technologies, nous dégagerons aussi les difficultés qu'ils auront pu rencontrer dans cette situation de formation et qui fragilisent leur ETG personnel.

2. Présentation de la situation de formation et de la méthodologie de recherche utilisée

Pour étudier ces questions, nous avons proposé aux étudiants une situation didactique « La Campana » (la cloche) adaptée à partir d'un article d'Houdement et Kuzniak (1999). Il s'agit d'une activité de construction qui permet, comme nous le verrons, d'articuler la Géométrie I et la Géométrie II. Initialement, le problème était proposé dans un environnement papier-crayon et nous l'avons transformé pour le poser dans un environnement technologique avec l'usage du logiciel Geogebra.

La forme originale du problème était la suivante : On souhaite agrandir la figure (ABCH) en (A’B’C’H’) de telle façon que A’H’ mesure le double de AB.



1. Effectuer cet agrandissement avec la règle non graduée et le compas en laissant visible les traits de construction.
2. Les élèves affirment que l'aire de la figure obtenue est quatre fois plus grande que celle de la figure initiale. Ont-ils raison ? Justifier votre réponse.
3. Si ce n'est pas vrai, donnez le rapport entre les deux aires.

La réponse à la première question ne peut se faire sans une analyse préalable du dessin pour comprendre sa construction. L'énoncé ne donnait aucune explicitation des propriétés géométriques nécessaires pour assurer la construction de la figure et certaines sont loin d'être évidentes comme la nature du triangle ABC ou celle du cercle support de l'arc BC. La reconnaissance du caractère équilatéral du triangle ABC est même cruciale pour la réalisation correcte de la figure. Pour avancer dans le problème, l'étudiant doit formuler des propriétés suggérées par une première analyse de type figural et perceptif. Dans le même temps, il peut les valider sous des formes qui peuvent être variées : en utilisant un instrument de dessin ou en esquissant une démonstration basée sur des propriétés. De ce fait, la tâche est très dépendante du point de vue de l'étudiant et ainsi l'analyse des procédures de construction qu'il utilisera sera révélatrice de son ETG personnel en permettant de voir l'influence relative des différentes genèses à l'œuvre dans son travail.

Nous avons modifié la situation initiale en demandant cette fois une résolution utilisant un environnement de géométrie dynamique ce qui nous a conduit à changer l'énoncé dont voici la nouvelle forme.

Agrandir la cloche de façon à ce que A'H' mesure le double de AB.
Décrivez votre protocole de construction de manière détaillée. Voici quelques pistes qui peuvent vous aider à dessiner la cloche.

1. Observer que A est sur la droite BI et sur la droite CJ.
2. H est le milieu de BC.
3. Les angles IBC et JCB mesurent 60°.
4. Les angles BIC et CJB sont des angles droits.
5. L'arc BC appartient au cercle de centre A.

La cloche est dessinée sur le papier fourni aux étudiants et ceux-ci doivent commencer par la construire sur l'écran avant le l'agrandir. Ils sont libres d'utiliser un environnement papier-crayon pour avancer dans la résolution du problème.

Nous avons introduit des indications susceptibles d'aider les étudiants dans leur perception de la figure et dans leur processus de construction et aussi de limiter leurs possibilités d'interprétation. Dans l'environnement papier-crayon du problème initial, les étudiants pouvaient légitimement utiliser les outils de cet environnement pour valider leurs hypothèses et donc s'appuyer sur l'équerre, la règle ou le rapporteur pour faire la construction, ce qui plaçait de fait l'activité dans le cadre de la Géométrie I.

En donnant des propriétés de la figure, nous éliminons certains de ces instruments par ailleurs interdits dans l'agrandissement. Un autre choix aurait été possible en laissant vivre simultanément les deux types d'artefacts, logiciels et instruments de dessins. Cependant, en procédant ainsi nous souhaitions obliger les étudiants à montrer leurs connaissances instrumentales de l'outil informatique avec lequel ils devront réaliser directement des expériences. Ils devaient notamment identifier les propriétés géométriques invariantes avec le mode de déplacement de GeoGebra.

La présence des indications était aussi destinée à faire ressortir les propriétés mathématiques de la figure. Il s'agit d'un point-clé pour le passage de la Géométrie I à la Géométrie II. D'autre part, les étudiants doivent représenter le dessin agrandi sur le même écran que le dessin initial. De ce fait, ils sont incités à voir une dépendance entre les deux dessins dans le contexte du logiciel. Cette consigne change substantiellement la nature de la tâche. Il sera important de voir l'influence de ce changement de consigne sur le passage de la Géométrie I à la Géométrie II et l'impact sur les interactions dans l'ETG. Il faut noter que nous n'avons pas imposé que la dépendance entre la figure initiale et la figure finale soit invariante dans toute modification de la figure initiale ce qui aurait rendu le problème bien plus complexe tant au niveau mathématique que technologique.

La demande d'un agrandissement peut conduire certains étudiants à s'appuyer sur des théorèmes comme ceux de Pythagore ou de Thalès pour guider leur construction et introduire des éléments de Géométrie II dans leur solution. Une analyse a priori des stratégies possibles pour agrandir la figure dans l'environnement papier-crayon donne trois grandes méthodes de résolution :

(i) les stratégies numériques qui consistent à calculer la mesure du côté B'C' à partir de celle de BC puis à reproduire la construction de la cloche à partir du segment [B'C'], en utilisant des propriétés géométriques lues sur le dessin ;

(ii) les stratégies géométriques, qui consistent à construire le segment [A'H'] tel que A'H'=2 AB (par exemple en construisant H' le symétrique de A par rapport à B) puis à construire la cloche à partir du segment A'H' en utilisant des propriétés géométriques lues également sur le dessin ;

(iii) les stratégies globales qui consistent à appliquer une homothétie à la cloche initiale avec un rapport 2 AB/AH.

Le basculement vers la Géométrie II était très explicite dans la question 3 de l'énoncé initial qui demandait le rapport d'agrandissement. Cette demande n'était pas faite ici mais l'utilisation de l'ordinateur permet d'observer les façons d'obtenir le rapport 2 AB/AH. Celles-ci peuvent, là encore, se baser sur une mesure directe sur la figure ou sur une anticipation de ce rapport en faisant apparaître sur la même figure la figure initiale et la figure finale ce qui peut faire apparaître une configuration de Thalès (voir Annexe 2 p. 215). Le rapport peut alors être calculé sur une figure particulière ou bien sur une figure générique. L'étude de l'obtention de ce rapport permettra de confirmer certaines des stratégies utilisées précédemment pour agrandir la figure.

La situation de la « Campana » s'est déroulée en deux sessions. Avant de la proposer, les étudiants avaient reçu trois cours de formation d'une heure et demie sur l'utilisation du logiciel GeoGebra au cours desquels des activités de construction sur les triangles et les polygones leur avaient été proposées.

Lors de la première session, la situation a été donnée sur un papier aux étudiants qui devaient décrire leur manière de résoudre le problème de construction de la cloche initiale : les étapes de la résolution, l'explication de leurs difficultés et les procédures qu'ils avaient utilisées pour résoudre le problème en utilisant le papier-crayon et l'ordinateur. Nous leur avons demandé aussi de décrire leurs blocages éventuels dans la résolution du problème (Annexe 2).

La majorité des étudiants n'a pu faire que la construction de la cloche initiale lors de la première session. La seconde session a donc été consacrée à l'agrandissement de la cloche et à une mise en commun sur les solutions et sur les difficultés rencontrées pendant la résolution du problème. Cette session s'appuyait sur notre analyse des résultats de la première session. Un enregistrement de cette session nous a permis un croisement des données avec les productions des étudiants en prêtant attention aux interactions entre les étudiants et le professeur.

3. Analyse des types de solutions obtenues

Dans cette section, nous présentons une analyse des résultats. Pour cela, nous allons dans un premier temps (§ 3.1.) décrire une typologie des constructions faites par les étudiants pour obtenir la cloche. Puis (§ 3.2.), nous détaillerons les procédures obtenues pour faire l'agrandissement. Pour déterminer l'espace de travail géométrique personnel des étudiants, nous retiendrons d'abord les aspects mathématiques et cognitifs et nous insisterons particulièrement sur la partie instrumentale de la construction essentielle ici, puisque nous souhaitons étudier les comportements des étudiants dans un environnement technologique.

Dans un deuxième temps, nous établirons une relation entre les deux tâches pour déterminer le rôle joué dans le travail géométrique par les différentes genèses dans l'ensemble de l'activité. Cette présentation globale des résultats permettra de mettre en relief les connexions entre les trois genèses (figurale, instrumentale et discursive) dans le développement du travail géométrique (§ 4) ainsi que les difficultés des étudiants (§ 5).

3.1. Typologie des solutions trouvées par les étudiants pour construire la cloche initiale

Nous présentons les solutions pour la construction de la cloche initiale. Nous avons distingué trois types différents que nous désignerons ainsi : « règle et compas », « angles », « polygones réguliers ». Ces procédures permettent de tracer le triangle équilatéral qui, comme nous l'avons noté plus haut, est le support de toute la construction. Les procédures suivies pour compléter la cloche sont ensuite très semblables.

3.1.1. Solutions Règle et Compas (RC)

Ce type de solutions est la transposition avec le logiciel des constructions à la règle et au compas dans un environnement papier-crayon. La démarche est celle que l'on trouve déjà dans Euclide, l'unique différence vient du fait que le logiciel construit les cercles dans leur entier ce qui introduit des éléments parasites et des choix parmi les points d'intersection. Ces choix sont guidés par des considérations spatiales.

Voici le détail de la construction du triangle tel que nous le trouvons dans les productions des étudiants.

1. Créer les points B, C et le segment qui les joint.
2. Tracer le cercle de centre B et de rayon BC puis celui de centre C et de rayon BC. Prendre le point d'intersection « supérieur » des deux cercles, nommé A. On obtient ainsi un triangle équilatéral.
3. Pour trouver les points I et J, on trace les perpendiculaires aux côtés AB, AC passant par les sommets C et B.

Espace de travail géométrique

Paradigmes et aspects mathématiques et cognitifs

Comme nous l'avons indiqué, cette construction s'appuie largement sur les expériences antérieures des étudiants dans l'environnement papier-crayon. Il s'agit naturellement d'une construction qui prend sa place dans la Géométrie I mais il faut noter qu'elle est aussi emblématique de la Géométrie II la plus classique car il s'agit de la première construction justifiée dans les éléments d'Euclide (Livre I, Prop 1). Dans la Géométrie II, la règle non graduée et le compas sont deux outils fondamentaux pour faire comprendre la différence entre construction et constructibilité : il faut montrer que l'objet obtenu à la suite d'une construction remplit bien les caractéristiques attendues.

Sans la seconde phase de l'activité consacrée à l'agrandissement de la figure, il est difficile de caractériser le travail des étudiants car la technique utilisée pour cette construction est tellement familière qu'il s'agit d'une technique devenue naturelle. Notons cependant qu'elle oblige à une déconstruction dimensionnelle puisque les étudiants doivent observer les côtés, les sommets du triangle. Cette décomposition favorise le passage dans le domaine des propriétés. Il sera donc important d'observer le comportement des étudiants dans la deuxième question pour savoir s'ils se sont situés en Géométrie I ou Géométrie II.

Dimension instrumentale

Dans le logiciel utilisé, les procédures de construction sont congruentes (au sens de Duval, 2005) à celles utilisées dans le l'environnement papier-crayon. Grâce aux séances préparatoires sur l'usage du logiciel, les étudiants n'ont eu aucun problème d'instrumentation avec cette procédure.

3.1.2. Solutions Angle (AN)

Dans cette solution, la piste 3, qui donne une indication sur la mesure des angles, est utilisée. On peut décrire ainsi la construction.

1. Créer les points B, C et le segment qui les joint.
2. Utiliser la commande angle de GeoGebra. « Angle avec une mesure ». Il faut désigner d'abord le point B puis le point C en donnant la valeur de l'angle qui dans notre cas est 60 degrés. Il est ainsi possible de créer un point que l'on nomme avec le programme A. A partir de cela, on obtient un triangle équilatéral.
3. Pour trouver les point I et J, la majorité des étudiants utilisent la même méthode que dans le premier type.

Une variante a été utilisée par quelques étudiants qui ont introduit la rotation autour d'un point avec un angle donné. Le passage des étudiants à cette variante peut sans doute s'expliquer par la très grande proximité sémantique qui existe dans GeoGebra entre les commandes « rotation (objet-centre) » et « angle de mesure donnée ». Cette deuxième commande construit en fait un point A tel que mes(BCA)=60° et CA = CB avec la marque de l'angle dont un des côtés n'est pas construit. Il s'agit donc en fait de l'image de B par la rotation de centre C et d'angle 60°.

Espace de travail géométrique

Paradigmes et aspects mathématiques et cognitifs

Cette construction s'appuie sur la perception globale de la figure et sur quelques propriétés des angles égaux. Elle est équivalente à l'usage d'un rapporteur dans l'environnement "papier-crayon", mais elle nécessite une adaptation dans l'environnement du logiciel. Il faut noter que lors de l'agrandissement de la figure, l'invariant qui va servir est justement l'angle ce qui laisse supposer peu de changement dans les procédures utilisées par la suite. Il y a certes une attention aux propriétés mais celles-ci semblent être mise au service de la construction sans nécessité d'explicitation. Le processus privilégié semble bien être celui de la construction.

Dimension instrumentale

Cette fois, la construction proposée dans GeoGebra n'est pas congruente à celle existant dans l'environnement papier-crayon car il n'existe pas de rapporteur dans ce logiciel. Les étudiants doivent donc avoir une meilleure maîtrise des outils dont dispose le logiciel. Ils peuvent utiliser deux outils prédéfinis dans le logiciel pour construire l'angle et le triangle soit la commande "angle de mesure donnée" soit "rotation d'un objet autour d'un point, angle donné". La première est la plus proche de la construction usuelle avec le rapporteur, la seconde suppose une connaissance des transformations géométriques qui dans le cadre scolaire sont généralement travaillées en Géométrie II. Cependant, comme nous l'avons signalé, ces deux commandes ont une proximité sémantique dans GeoGebra.

3.1.3. Solutions « Polygone régulier » (PR)

Cette dernière procédure n'est possible que dans un environnement digital car elle utilise la commande « Polygone régulier » qui permet de tracer un triangle équilatéral en une seule opération.

1. Créer les points B, C et le segment qui les joint.
2. Utiliser la commande « Polygone régulier » qui nécessite d'introduire le nombre de côtés et de tracer le premier côté.
3. Pour trouver les points I, J, utiliser la commande milieu d'un côté.

<u>Espace de travail géométrique</u>

Paradigmes et aspects mathématiques et cognitifs

Une première analyse de la cloche par les étudiants leur a permis de constater que le triangle équilatéral sert d'appui à la construction de la cloche. La construction utilisée privilégie une approche 2D de la figure avec des modifications méréologiques qui portent sur la réorganisation de la figure globale en sous-figures de même dimension. D'autre part, elle ne peut s'adapter à la construction de l'agrandissement, les étudiants devront donc changer de stratégie et il sera intéressant d'observer s'ils utilisent explicitement des propriétés et s'ils restent dans le domaine instrumental ou s'ils font un détour par l'environnement papier-crayon.

Dimension instrumentale

La solution est basée sur la possibilité qu'offre le logiciel de construire directement un triangle équilatéral vu comme un polygone régulier à trois côtés. Pour trouver la commande adaptée, ces étudiants ont parcouru les menus de GeoGebra faisant preuve de leur capacité d'exploration (étudiant bricoleur au sens de Trouche, 2000). Il est donc possible que la capacité de ces étudiants à explorer le logiciel les conduise à rester dans un ETG de la Géométrie I, où sont privilégiées les deux genèses liées aux artefacts et la visualisation globale.

3.2. Typologie des solutions pour agrandir la cloche initiale

Cette fois, quatre types de solutions sont apparus : Thalès (TH), Pythagore (PI), Angles (An), Homothétie (H).

3.2.1. Solution avec le théorème de Thalès (TH)

Les étudiants qui entrent dans cette catégorie ont choisi le théorème de Thalès pour obtenir la distance B'C'. Ensuite, ils ont suivi la même méthode pour construire la cloche agrandie que celle qu'ils avaient utilisée pour tracer la cloche initiale. Leur raisonnement s'appuie sur la figure classique qui permet de voir le théorème de Thalès dans le cas du triangle (voir p. 215). Cela leur permet d'obtenir la formule générale suivante : B'C' = 4AB.BH/AH.

Il faut noter que certains utilisent le papier et d'autres raisonnent directement sur le logiciel.

Espace de travail géométrique

Paradigmes et aspects mathématiques et cognitifs

La construction est basée sur un théorème classique et elle nécessite l'usage de propriétés déduites à partir de la perception de la figure vue comme un objet de l'espace réel. Cette abstraction à partir du réel est censée privilégier un ETG orienté par la Géométrie II comme on le voit clairement lorsque la solution est trouvée dans un environnement papier-crayon qui est un support heuristique car le tracé utilisé dans ce cas ne respecte pas le rapport de proportion. Parmi les élèves qui ont utilisé cette procédure, certains l'ont fait directement avec GeoGebra en respectant les proportions grâce à l'usage de la commande « Segment créé par un point et une longueur (Étudiant20) » ou bien en utilisant la commande « distance» (Étudiant19 et Étudiant17). Dans ce cas, le travail reste orienté par la Géométrie I.

Dimension instrumentale

Comme nous l'avons indiqué, une partie des étudiants se pose le problème sur la feuille de papier et change d'artefact. Au moment d'introduire les distances dans GeoGebra, les étudiants ne savaient pas comment traiter les longueurs des côtés ce qui nécessita une mise au point dans le cours sur cette question avec un travail spécifique d'instrumentation utilisable ensuite pour l'agrandissement de la figure. Dans ce cas, le blocage qui est apparu a fait jouer à l'artefact un rôle d'obstacle dans le passage à la Géométrie II.

3.2.2. Solution avec le théorème de Pythagore (PI)

Il s'agit d'appliquer le théorème de Pythagore pour trouver également la distance B'C', le reste de la construction suivant les mêmes règles que précédemment.

Cette fois, le raisonnement est interne au triangle A'B'C' sans nécessité de modification de la figure comme dans une configuration de Thalès. Le résultat obtenu relie B'C' à AB.

$$\textit{Comme } A'H' = 2AB, \textit{ alors } B'C' = \frac{4}{\sqrt{3}}\ AB.$$

Espace de travail géométrique

Paradigmes et aspects mathématiques et cognitifs

Comme dans le cas précédent, la construction est basée sur un théorème classique, celui de Pythagore. Pour pouvoir appliquer le théorème, il est ici nécessaire de faire un important travail de visualisation sur la figure pour notamment observer les hauteurs et les milieux des côtés. Il faut aussi s'apercevoir que la figure n'est pas un cas particulier et qu'elle peut servir d'appui pour la construction. Cette situation permet donc bien de travailler sur un passage de la Géométrie I à la Géométrie II et cette fois le logiciel ne permet pas un détour par la mesure ou le calcul numérique. D'une certaine manière, il force un changement de stratégie chez les étudiants.

Dimension instrumentale

Dans cette solution basée sur le théorème de Pythagore, les étudiants sont confrontés à des calculs algébriques, qu'ils raisonnent en papier-crayon ou directement sur l'ordinateur. Le calcul pouvait être évité dans le cas de l'application du théorème de Thalès qui rendait possible une construction sans connaître les valeurs, mais ce n'est pas le cas ici.

3.2.3. Solutions Angles (An)

Cette fois, la construction s'appuie sur celle d'un triangle rectangle en connaissant sa hauteur qui doit être 2AB. Voici la solution la plus utilisée par les étudiants :

1. Dessin de la hauteur AH' avec la distance 2AB, en utilisant la commande « segment créé par un point et une longueur ».
2. Tracer deux droites à partir de A et qui forment un angle de 30º avec la hauteur en utilisant la commande « angle de mesure donnée ».
3. À partir de H', on trace une perpendiculaire à la hauteur et les points B' et C' sont les points d'intersection de cette perpendiculaire et des droites trouvées en 2. De cette façon, on obtient le triangle.

Espace de travail géométrique

Paradigmes et aspects mathématiques et cognitifs

Pour faire cette construction, les étudiants utilisent une propriété de symétrie dans le triangle équilatéral qui leur permet de construire les deux droites qui font un angle de 30° avec la hauteur. Il s'agit d'une propriété mais aussi d'un travail de visualisation sur la figure. L'autre propriété qui justifie la construction (mais là encore de façon implicite) est celle de l'invariance des angles dans un agrandissement. Dans cette procédure, les étudiants restent dans l'ETG de la Géométrie I avec comme objectif celui de construire l'agrandissement en étant guidé par la perception et les instruments.

Dimension instrumentale

Si l'on s'en tient à la construction, il faut noter qu'interviennent les mêmes commandes que celles qui ont été utilisées dans la construction de la cloche initiale avec la procédure Angles. Notons dès maintenant un blocage sur lequel nous reviendrons (§ 5.2.) et qui est lié à la dépendance des objets et à l'ordre de construction de ces objets dans les logiciels de géométrie dynamique.

3.2.4. Solution Homothétie (H)

Enfin, une solution est apparue naturelle à certains étudiants qui ont associé une homothétie à l'agrandissement de la figure en introduisant la condition A'H' = 2AB.

1. Ajouter un point extérieur à la cloche qui sera le centre d'homothétie.
2. Utiliser la commande « dilatation d'un objet à partir d'un point suivant un rapport ». De cette façon, on applique l'homothétie à toute la cloche.

Espace de travail géométrique

Paradigmes et aspects mathématiques et cognitifs

Cette solution s'inscrit dans une logique axiomatique de la géométrie et nous pouvons remarquer que les résultats ne reposent plus sur la perception mais sur des connaissances logiques internes à la géométrie. Cette fois la solution relève de la Geométrie II voire de la Géométrie III car elle insiste sur des invariants liées aux transformations géométriques indépendamment d'un travail direct sur la figure. L'entrée par les transformations est normale en Géométrie II mais elle n'a pas pour préoccupation première de construire des objets réels mais de travailler sur les propriétés des configurations. Les étudiants se retrouvent un peu démunis pour la construction car ils n'associent pas de technique précise à leurs connaissances géométriques. En revanche, l'environnement technologique peut changer cette perspective et donner aux transformations un rôle d'outil pour construire.

Dimension instrumentale

Les étudiants ont travaillé avec la version de GeoGebra 2.0 ; depuis GeoGebra 3.0 a été publiée au printemps de 2008. Dans le menu de GeoGebra 2.0 dans sa version espagnole, il n'existait pas alors de commande « homothétie » mais une commande « dilatation ». De plus, une fois reconnue, cette commande « dilatation » nécessite, là encore, une maîtrise instrumentale suffisante pour pouvoir résoudre le problème de construction. Si la difficulté, pour certains, pouvait venir du nombre d'arguments à introduire dans la commande, nous avons pu constater que le principal blocage pour la plupart des étudiants venait aussi du manque de connaissances sur l'homothétie. L'utilisation de cette commande dans GeoGebra permet d'introduire l'homothétie comme un outil de construction et facilite la liaison entre Géométrie II et I. Cependant, un nouveau type de blocage apparaît ici car l'usage des transformations comme instrument de construction et de vérification en Géométrie I semble coûteuse en temps d'apprentissage et elle est, de plus, contraire au contrat didactique de l'université pour ces étudiants habitués à faire de la Géométrie III. Ce nouveau blocage pourra, une fois surmonté, servir d'appui pour faire comprendre aux étudiants le changement de point de vue qu'ils doivent faire pour entrer dans la géométrie qu'ils devront enseigner à leurs élèves.

4. Analyse globale

4.1. Résultats des étudiants

Nous commençons par un donner un récapitulatif quantitatif de toutes les procédures utilisées par les étudiants à la fois pour réaliser la cloche initiale et la cloche finale.

Pour la construction de la cloche initiale, parmi les trente étudiants :

7 ont utilisé la Règle et Compas

14 ont employé une solution basée sur les Angles (An)

9 ont utilisé l'outil polygone régulier (PR)

Quant à la construction de la cloche agrandie :

8 ont appliqué le théorème de Thalès et parmi eux deux l'ont utilisé aussi avec l'homothétie sans pouvoir le résoudre avec cette transformation

3 se sont appuyés sur le théorème de Pythagore

16 ont fait leur construction sur les Angles

1 seul a pu résoudre le problème avec l'homothétie sur les trois qui ont pensé à cette possibilité

Enfin, un étudiant n'a pas pu résoudre le problème d'agrandissement.

Pour la suite, nous avons croisé les procédures pour les deux problèmes et le tableau suivant résume l'ensemble des résultats (Tableau 1) pour faire apparaître des groupes d'étudiants.

	Thalès	**Pythagore**	**Angles**	**Homothétie**	**Échec**	**Total**
Règle et compas	1	**3**	1	1	1	7
Polygone régulier	**4**	-	**5**	-	-	9
Angles	3	-	**11**	-	-	14
Total	8	3	16	1	1	30

Tableau 1 : Croisement des résultats.

4.1.1. Le groupe Angles

Angles/Angles. Ce groupe comprend 11 étudiants qui pour calculer le rapport d'agrandissement ont utilisé le dessin et une mesure donnée par le logiciel. Cela leur a ensuite permis de calculer la nouvelle hauteur de la grande cloche. Il y a une grande similitude entre les deux constructions utilisées qui s'appuient toutes les deux sur l'usage des angles. Nous pouvons affirmer que les étudiants de ce groupe se sont centrés sur la tâche de construction. Il faut aussi noter leur maîtrise des outils qui leur a permis de faire ce travail entièrement dans le cadre de l'environnement logiciel.

Angles/Thalès. Trois étudiants ont utilisé une procédure Angles pour tracer la cloche initiale puis ils ont essayé d'utiliser le théorème de Thalès. Dans le cas de deux étudiants (par ex. Étudiant1 et Étudiant2) (Angles/Thalès/essai avec l'homothétie), ils y ajoutent l'homothétie. Ce qui dirige alors leur travail, ce n'est plus l'activité de construction proprement dite mais l'usage des propriétés géométriques. Nous verrons que ces étudiants ont ensuite eu des difficultés pour transférer leurs résultats dans l'environnement dynamique qui ne favorise pas ce passage ici. C'est également le cas de Étudiant13 (voir plus loin) qui n'a pas pu utiliser la formule donnée par Thalès et qui a réussi sa tâche en revenant à une procédure Angles.

4.1.2. Le groupe Polygone Régulier

Les neuf étudiants de ce groupe ont utilisé la commande « Polygone régulier » qui n'existe que dans l'univers de la géométrie dynamique. Dans ce cas, le passage de la cloche initiale à la cloche agrandie ne peut se faire en utilisant la même procédure ce qui implique qu'ils ont dû se poser la question de cet agrandissement en envisageant la question des propriétés de la figure. Il y a alors eu deux manières différentes de traiter le problème.

PR/Thalès

Quatre étudiants ont utilisé le théorème de Thalès puis à nouveau la construction utilisant l'instruction « Polygone régulier » pour construire la cloche agrandie en construisant le triangle en connaissant son côté à partir de la hauteur donnée par le théorème de Thalès.

PR/Angles

Les autres étudiants ont changé de stratégie et cela paraît dû au fait qu'ils n'ont pas pu établir de relation entre les côtés et la hauteur du triangle. Ils n'ont donc pas utilisé des propriétés du triangle équilatéral et ont résolu le problème en s'appuyant sur les commandes du logiciel pour le résoudre avec des distances et des angles.

4.1.3. Le groupe Règle et Compas

Lorsque nous examinons ce qu'ont fait les étudiants de ce groupe pour agrandir la cloche initiale, il apparait une grande diversité de solutions mais qui d'une certaine manière s'appuient toutes sur des propriétés : Thalès, Pythagore, Angles et Homothétie. Dans ce groupe « Règle et Compas », la méthode de construction utilisée privilégie une construction classique qui s'appuie sur les propriétés des triangles ici équilatéraux ou rectangles. Dans la genèse figurale, ces étudiants ont décomposé visuellement les figures (Duval, 2005). Cela implique une genèse opératoire qui favorise la déconstruction dimensionnelle étroitement reliée à l'étude des propriétés. Dans ce groupe, nous avons rencontré un cas particulier qui a résolu le problème en maîtrisant la commande « dilatation » du logiciel.

4.2. Caractéristiques du travail géométrique des étudiants

Pour dégager les caractéristiques globales des ETG personnels des étudiants, nous nous appuierons sur les trois genèses à l'œuvre dans le travail géométrique ainsi que sur leurs interactions (§ 1).

4.2.1. Un travail géométrique privilégiant la genèse instrumentale

Dans ce groupe essentiellement constitué des étudiants appartenant au groupe Angles et pour partie au groupe PR/Angles, le travail en relation avec la genèse figurale est resté global sans décomposition.

La construction ne s'appuie pas explicitement sur des propriétés et elle apparaît supportée par l'usage des instruments et des calculs dans un cas particulier. S'il y a une genèse discursive, elle reste totalement implicite, car l'invariant angle est un invariant assez naturel. De ce fait, la genèse instrumentale se fait en étroite relation avec la genèse figurale dans une géométrie pilotée par la Géométrie I.

Nous pouvons résumer le travail géométrique par le diagramme (Figure 2) qui fait apparaître l'incomplétude de ce travail qui s'appuie essentiellement sur deux genèses.

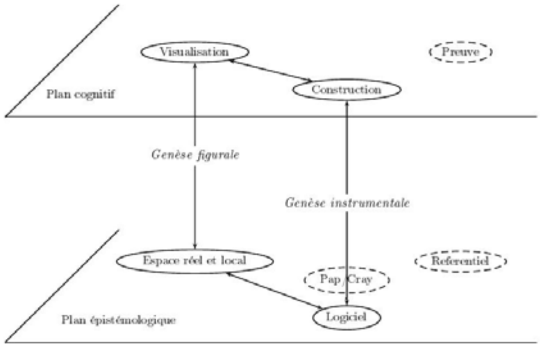


Figure 2 : Diagramme du travail géométrique privilégiant la genèse instrumentale.

Nous avons mis en pointillé les points qui concernent le sous-groupe Angles/Thalès qui a esquissé un passage par un chemin discursif qui n'a pu aboutir.

4.2.2. Un travail géométrique s'appuyant sur la genèse discursive du raisonnement

Le second type de travail géométrique que nous avons pu identifier privilégie une articulation entre genèse figurale et genèse de la preuve discursive qui s'appuie sur les déconstructions dimensionnelles des figures en relation avec les propriétés classiques de la géométrie. Ces propriétés sont explicitées par l'usage des théorèmes de Pythagore, de Thalès ou de l'homothétie. Le travail s'effectue dans la Géométrie II classique où les propriétés justifient la construction. Ce travail se rencontre essentiellement dans le groupe Règle et Compas. Ceci n'est pas étonnant car la forme de pensée est clairement située dans un premier temps dans le champ traditionnel de l'environnement papier-crayon. Le cycle du travail est complet (Figure 3). Par contre il demeure imparfait pour un certain nombre d'étudiants qui ne maîtrisent pas suffisamment l'outil informatique.

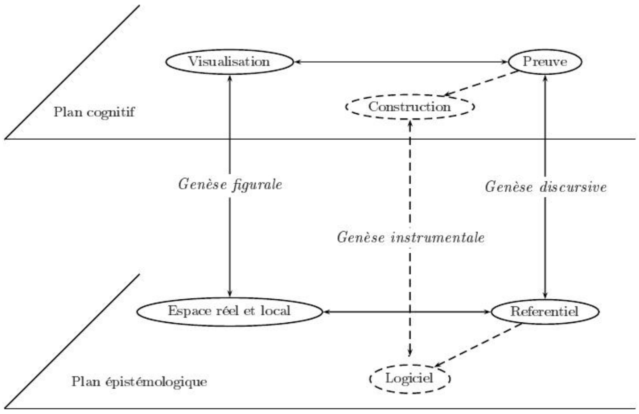


Figure 3 : Diagramme du travail géométrique s'appuyant sur la genèse discursive du raisonnement.

4.2.3. Un travail géométrique homogène et adapté au logiciel

Les étudiants de ce troisième groupe parviennent à articuler un travail géométrique qui s'appuie sur les trois genèses. Ils manifestent une grande aisance dans l'usage du logiciel qui n'apparait pas comme un blocage à leurs investigations. Il s'appuie ainsi tantôt sur une genèse figurale, tantôt sur une genèse discursive (Figure 4). C'est le cas des étudiants qui ont utilisé initialement la procédure « Polygone Régulier » puis Thalès. Ils ont commencé par utiliser la commande « polygone régulier » qui supposait un appui sur les deux genèses figurale et instrumentale. Par la suite, ils se sont appuyés sur la genèse discursive, certains de manière générale (se situant ainsi en GII) et d'autres en raisonnant sur un cas particulier (en raisonnant dans GI).

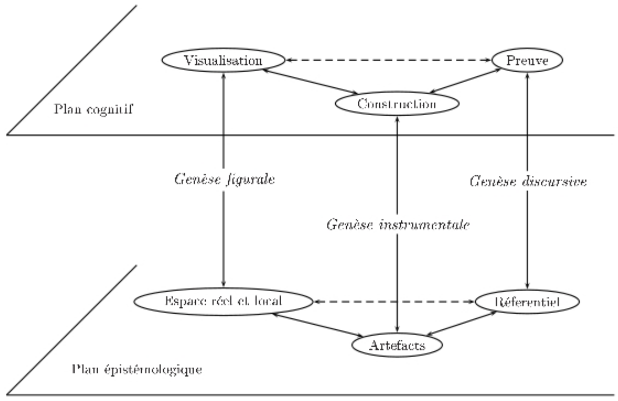


Figure 4 : Diagramme du travail géométrique homogène et adapté au logiciel.

On peut noter que d'un côté la genèse figurale s'appuie sur la genèse instrumentale puis c'est la genèse discursive qui parvient à s'appuyer sur la genèse instrumentale. C'est pour cela que nous avons mis en pointillé le lien entre les deux autres genèses (figurale et discursive) qui existe mais semble moins important pour ces étudiants qui font preuve d'une très bonne maitrise instrumentale (Figure 4).

Pour conclure, cette simple situation de construction fait apparaître une grande diversité d'approches de la part des étudiants. Cette diversité pourra servir d'appui pour la formation. Cependant, il s'agit encore de parcours généraux qu'il est nécessaire de mieux connaître en examinant les ETG personnels de certains étudiants qui ont pu rencontrer des difficultés.

5. Interactions entre les différentes genèses du travail géométrique et certains blocages d'étudiants

Dans cette partie, nous avons recueilli des blocages et des difficultés de type cognitif qui sont apparus au cours de la résolution du problème et dans le développement du travail géométrique. Les données proviennent essentiellement des protocoles écrits dans lesquels les étudiants ont pu s'exprimer sur leur comportement affectif et cognitif (Annexe 2). Il leur était demandé :

a) Décrivez quelles sont vos réactions, vos sentiments, vos blocages lorsque vous travaillez avec ou sans l'ordinateur ;
b) indiquez les stratégies et les ressources que vous avez utilisées pour dépasser vos blocages dans la résolution du problème.

Ces données ont été complétées par l'enregistrement vidéo de la séance de formation.

Nous avons dégagé trois grands types de blocages et difficultés : dans la phase initiale de résolution du problème, dans la genèse instrumentale et dans l'articulation entre les différentes genèses pour développer un travail géométrique complet.

5.1. Difficultés de compréhension et d'interprétation du problème dans la phase initiale de résolution du problème

En relation avec la vision de la figure

« Un problème m'est apparu pour comprendre l'énoncé puis la position du point A n'était pas claire sur le dessin que vous nous avez donné et vous n'avez pas dit que A' et H' étaient les points équivalents de A et H. Il n'était pas dit non plus qu'ils devaient aussi être dépendants quant on changeait la position de A et B ». (Étudiant4, Angles)

« Je me suis un peu perdu au début sans voir que le triangle que formaient les points A, B et C était équilatéral parce que je n'ai pas pensé que les angles en B et C mesuraient chacun 60º » (Étudiant9, Angles). Cette remarque indique aussi la difficulté de relier les nombreuses propriétés données dans l'énoncé avec ce premier travail de découverte figurale.

En relation avec la mobilisation des connaissances disponibles

« Je ne me rappelais pas les propriétés et comment construire un triangle équilatéral. » (Étudiant27, Règle et Compas, Pythagore).

« Je ne savais pas par où commencer, ensuite avec l'outil polygone régulier, je n'ai plus eu de difficultés pour trouver les points. » (Étudiant20, Thalès, cas particulier dans le groupe qui utilise Thalès).

« J'ai eu un blocage initial dans la construction de la cloche à partir du côté IB.» (Étudiant19, Angles).

En relation avec l'organisation du travail de résolution

« Au départ, je me suis tenu un moment à l'écart de l'ordinateur pour penser plus tranquillement au problème. » (Étudiant17, Polygone régulier).

5.2. Difficultés liées à la genèse instrumentale

Il s'agit de difficultés bien identifiées dans les recherches dans le domaine des usages des instruments :

Relier commandes du logiciel et signification mathématique

« Quand je travaille directement avec l'ordinateur, je suis beaucoup plus dispersée, ce qui fait que j'ai plus de problèmes car il y a des fois où je ne trouve pas les commandes que je veux. J'ai eu un peu de mal avec la construction des arcs parce que j'avais mal fixé les sommets et ça m'a dessiné un arc contraire à celui que je voulais » (Étudiant8, Angles).

La question des dépendances entre objets en géométrie dynamique

Il s'agit ici de ce que Varda et Yerushalmy (2004) appellent les relations parent-child qui peuvent avoir des conséquences sur la construction finale comme nous le voyons dans le cas d'Étudiant12 et d'Étudiant7, qui ont utilisé une construction basée sur les angles. Ces étudiants ont rencontré des problèmes quand ils ont souhaité agrandir la figure car brusquement le triangle disparaissait dès qu'ils agrandissaient la base AB. Ils avaient construit un segment quelconque, puis une hauteur de longueur 2AB perpendiculaire au milieu de ce segment et enfin les points B' et C' comme intersection du segment avec deux droites faisant un angle de 30° avec la hauteur. Dans ce cas les points B' et C' dépendent du segment initial et quand ils ont agrandi la figure, il est arrivé un moment où les point B' et C' ont disparu car les droites ne coupaient plus le segment. Il leur a été compliqué de comprendre cette difficulté.

5.3. Blocage dans la gestion complète des différentes genèses du travail géométrique

Cette fois, nous allons analyser les difficultés qui montrent pourquoi le travail géométrique n'a pas pu articuler les trois genèses pour parvenir à un travail complet.

Du discursif à l'instrumental

Nous avions indiqué que les étudiants appartenant au groupe Angles avaient essentiellement articulé les genèses instrumentales et figurale pour effectuer leur travail laissant de côté tout travail explicite de raisonnement déductif. Pourtant, à la différence des autres étudiants, l'Étudiant13 a mobilisé cette dimension du travail géométrique en utilisant le théorème de Thalès (voir page 215). Et elle a obtenu sur le papier la valeur de B'C'.
Elle est bloquée quand elle doit transférer ce résultat dans GeoGebra qui ne lui permet pas le traitement formel du résultat qu'elle souhaiterait. Elle utilise ainsi, sans succès, la commande distance pour calculer le côté B'C' :

sol = 4 Distance(A,B).Distance(B, H)/Distance(A, H).

Elle revient alors à une solution entièrement dans le domaine des Angles. Dans le développement de son espace de travail interviennent les trois genèses, mais elle est bloquée dans son usage des instruments et par la suite son travail géométrique sera entièrement guidé par les propriétés lorsqu'elle utilisera GeoGebra.

D'autres, comme l'Étudiant15 (Angles), décrivent leur blocage dans le passage du papier à l'ordinateur pour agrandir la cloche.

« J'ai été bloqué pour agrandir la cloche. Finalement j'ai réussi. Cela me semble plus facile avec l'ordinateur que je pensais. J'ai eu des problèmes pour tracer le cercle supérieur de la cloche. J'ai d'abord tracé deux demi-cercles (petite cloche) puis la cloche agrandie. J'ai trouvé le milieu pour qu'il soit le centre du cercle. Il est plus facile de travailler sur le papier pour agrandir la cloche. »

Sur le difficile usage de l'homothétie

Comme nous l'avons déjà dit, seul l'Étudiant25 a utilisé de manière correcte une homothétie pour résoudre le problème alors qu'il s'était trompé dans la construction de la cloche initiale en dessinant un triangle isocèle.

De son côté, l'Étudiant2 n'a pas pu trouver le résultat, car il a mal déterminé le rapport d'homothétie.
« Pour trouver la nouvelle cloche, j'ai utilisé l'homothétie de rapport 2 (erreur) à partir du segment AB. »
Il se rend compte de son erreur et sur son dessin final fait figurer les deux solutions. En rouge, il donne la solution fausse obtenue par homothétie de rapport 2 et en noir la solution qu'il a obtenue avec le théorème de Thalès. Il écrit « le côté B'C' est 4 AB.BH/AH ».

Les blocages que nous avons rencontrés apparaissent à divers moments du travail géométrique et peuvent renvoyer à différentes genèses. La genèse instrumentale d'abord bien sûr, mais pas seulement, car l'usage du logiciel, force à interroger les relations entre Géométrie I et Géométrie II et la nature des deux autres genèses. Certains blocages dus au logiciel ont empêché l'usage des propriétés. Par contre d'autres blocages, une fois surmontés, ont permis d'avoir un autre point de vue sur des objets mathématiques comme ce fut le cas avec l'homothétie. Il faut noter que les blocages ont parfois été surmontés directement par les étudiants lorsqu'ils étaient suffisamment explorateurs ou maîtres du logiciel mais le plus souvent, l'intervention du professeur a été décisive. Tous ces blocages et les manières de les analyser pour les surmonter peuvent aussi servir d'appui au professeur formateur lorsqu'il voudra sensibiliser ses étudiants aux difficultés inhérentes à l'usage des logiciels dans une classe.

6. Conclusion

Un des objectifs principaux de cette recherche était de voir l'importance d'un environnement informatique sur les relations entre les trois genèses (figurale, instrumentale et discursive) de l'ETG. Il s'agissait notamment de voir si GeoGebra jouait un rôle spécifique dans ce travail géométrique chez des futurs enseignants. La situation de formation donne un certain nombre d'informations qui montrent bien comment les étudiants oscillent entre raisonnement intuitif et raisonnement déductif quand ils doivent résoudre un problème de construction avec un logiciel.

Les données que nous avons recueillies, montrent une grande diversité des approches chez les étudiants. Cette diversité provient à la fois de leur relation à la machine et au logiciel et aussi de leur relation à la géométrie.

Une première relation (voir Figure 4) privilégie dans le cycle global les deux genèses instrumentale et figurale. Ce point n'est pas surprenant compte tenu de la tâche qui insistait sur la construction, cependant elle dénote chez les étudiants une bonne adaptation aux instruments. Elle devrait aussi leur permettre de voir la difficulté qu'ils auront à faire expliciter des propriétés à une partie des élèves dans le cadre de leur enseignant lorsque ceux-ci seront engagés dans des tâches de construction avec logiciel.

Un deuxième point à souligner est l'incomplétude du cycle dans le travail géométrique chez les étudiants qui commencent leur recherche en s'appuyant sur les aspects figuraux et discursifs. Le retour aux instruments pour finir le cycle peut être problématique quand il n'y a pas congruence entre l'outil théorique et l'outil informatique.

Enfin, il apparaît que pour maitriser l'ensemble du cycle, les étudiants doivent à la fois maîtriser les compétences en jeu dans les trois genèses et faire preuve d'une certaine flexibilité cognitive dans l'usage des différentes facettes du travail géométrique. Ce point existait naturellement déjà dans les environnements papier et crayon mais il est plus facile de le voir ici car les logiciels offrent une plus grande diversité d'outils et de solutions pour résoudre les problèmes.

Une façon d'analyser cette flexibilité dans l'usage des différentes facettes du travail géométrique renvoie aussi à l'articulation entre Géométrie I et II.

Un autre point de réflexion concerne la situation de formation elle-même dont nous souhaiterions voir si elle peut constituer une situation de référence pour le professeur en formation initiale et si nous pouvons baser sur cette situation d'homologie une formation complète à l'enseignement en contexte technologique. Pour cela, il est nécessaire de s'appuyer explicitement sur certains points dégagés par l'étude. Or cette étude a permis de repérer certains comportements d'étudiants qui peuvent servir d'exemples à étudier dans le cadre de la formation notamment sur :

a) les schèmes utilisés pour résoudre une situation mathématique avec un logiciel ;
b) les schèmes utilisés pour analyser et construire des situations didactiques intégrant un logiciel.

Dans cette perspective, il est nécessaire d'introduire en complément de la situation d'homologie des modules de formation qui relient étroitement des éléments techniques sur le fonctionnement du logiciel et des éléments de didactique des mathématiques.

Dans une perspective plus théorique, il nous semble aussi que nous avons pu mieux voir l'articulation entre l'approche instrumentale et l'approche par les espaces de travail géométrique (ETG). Le fait d'adopter la perspective plus holistique des ETG introduit, pensons-nous, une dimension plus dynamique et complète sur le travail global du professeur comme élément d'un cadre plus général. Elle ajoute un élément à l'orchestration du professeur généralement vu comme un facilitateur de la genèse instrumentale. Notre étude montre qu'il faut aussi y ajouter une dimension portant sur le développement du raisonnement géométrique en gardant comme ligne stratégique la construction d'une genèse discursive articulée avec des éléments de déconstruction visuelle. Ce raisonnement passe notamment par une réflexion sur le rôle des définitions et des théorèmes dans ces processus de construction de la Géométrie orientée par une visée pratique (Géométrie I) ou plus axiomatique (Géométrie II). La notion d'ETG donne aux élèves-professeurs un cadre pour voir d'où viennent les propriétés et comment elles s'articulent dans la pensée géométrique des élèves avec leur usage des instruments et leur perception des objets. On peut aussi espérer qu'une sensibilisation à ces trois types de genèses qui agissent dans le travail géométrique pourra donner aux étudiant-professeurs des pistes pour prendre une distance par rapport à leur propre travail géométrique et ensuite des éléments pour structurer leur propre apprentissage et celui de leurs élèves au niveau des activités à mettre en œuvre dans l'enseignement secondaire.

Remerciements

Cette étude a été possible grâce au financement des projets UCM-PIMCD-463-2007 et UCM-PIMCD-200-2009 du Vice-rectorat de Recherche de l’Université Complutense de Madrid et a été partiellement supportée par le projet de recherche ACEIA (Computer Algebra and Artificial Intelligence) de l'UCM. réf. 910563. Elle a aussi été facilitée par les séjours effectués à Madrid et Paris dans le cadre d'Erasmus.

RÉFÉRENCES

ARTIGUE, M. (2002), Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **7(3)**, 245–274.

COUTAT, S. (2006), *Intégration de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la pour favoriser une liaison école-collège*, Thèse de l'université J. Fourier, Grenoble.

DUVAL, R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnements, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **10**, 5–53.

HERSHKOWITZ, R., PARZYSZ, B. & VAN DORMOLEN, J., (1996), Space and Shape, *In A.J. Bishop et al. (Eds) International Handbook of Mathematics Education*, *Kluwer*, 161–204.

GÓMEZ-CHACÓN, I. Mª (2008), Mathématiques et technologies. Apprentissage du professeur et stratégies de formation. En C. Ouvrier-Buffet & M.-J. Perrin-Glorian (éd.) *Approches plurielles en didactique des mathèmatiques. Apprendre à faire des mathèmatiques du primaire au supérieur : quoi de neuf ?*, 344–351, Université Paris Diderot.

GÓMEZ-CHACÓN, I. Mª & JOGLAR, N. (2010), Developing competencies to teach exponential and logarithmic functions using GeoGebra from a holistic approach, *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, **12-3**, 485–513.

HOUDEMENT, C. & KUZNIAK, A. (1999), Géométrie et Paradigmes géométriques, *Petit x*, **51**, 5–21.

HOUDEMENT, C. ET KUZNIAK, A. (2006), Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **11**, 175–193.

KUZNIAK, A. (2010), Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de scolarité obligatoire en France, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **15**, 75–91.

KUZNIAK, A. (2011), L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **16**, 9–24.

LAGRANGE, J.B. (ed.) (2009), *Genèses d'Usages Professionnels des Technologies chez les Enseignants* GUPTEn. GUPTEn Rapport final Septembre 2009, Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris-Diderot.

LAGRANGE J.B., LECAS J.F., PARZYSZ B. (2006), Les professeurs stagiaires d'IUFM et les technologies. Quelle instrumentation ? *Recherche et* Formation, **52**.

MITHALAL, J. (2010), *Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle*, Thèse de l'université J. Fourier, Grenoble.

TROUCHE, L. (2000), La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur : étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques, *Educational Studies*, **41**, 239–264.

TROUCHE, L. (2005), Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **25(1)**, 91–138.

VARDA, T., YERUSHALMY, M. (2004), Understanding dynamic behavior: Parent–Child relations in dynamic geometry environments, *Educational Studies in* Mathematics, **57 (1)**, 91–119.

Inés Mª GÓMEZ-CHACÓN
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
igomezchacon@mat.ucm.es

Alain KUZNIAK
Laboratoire de Didactique André Revuz
Université Paris-Diderot
Paris, France
kuzniak@math.jussieu.fr

Annexe 1. Courte présentation des paradigmes

Notre étude de la géométrie enseignée est fondée sur une approche qui repère dans cet enseignement des changements de points de vue sur la géométrie équivalents à des changements de paradigmes au sens de Kuhn. Nous avons retenu trois paradigmes géométriques qui organisent l'interaction entre l'intuition, expérience et raisonnement.

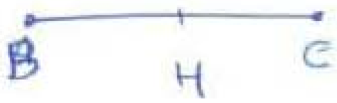
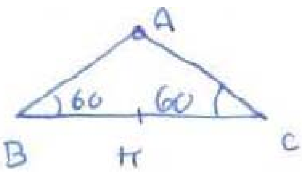
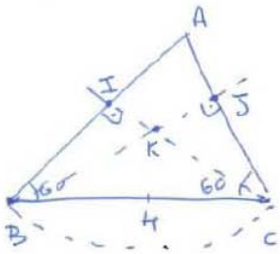
La Géométrie I : la géométrie naturelle. Cette géométrie a pour source de validation la réalité, le monde sensible. Il y a une certaine confusion entre modèle et réalité. La déduction s'exerce prioritairement sur des objets matériels à l'aide de la perception et de la manipulation d'instruments. La construction et la perception sont au cœur de cette géométrie naturelle de type expérimental. La Géométrie I se situe dans une perspective technologique.

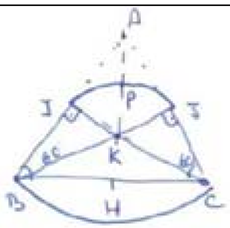
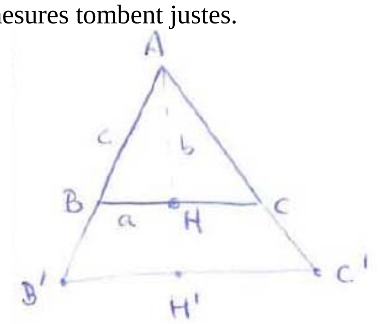
La Géométrie II : la géométrie axiomatique naturelle. Son archétype est la géométrie classique euclidienne Cette géométrie est construite sur un pas de côté par rapport à la réalité. L'axiomatisation est en marche et constitue un horizon pour la modélisation. Une fois posés les axiomes, les preuves doivent être développées au sein de ce système pour être valides. Par contre le système d'axiome peut être incomplet.

La Géométrie III : la géométrie axiomatique formaliste. Cette géométrie est déconnectée de la réalité et le système d'axiomes est central. Les axiomes ne sont plus fondés sur le sensible et la primauté du raisonnement logique s'impose. La notion de vérité devient totalement intrinsèque au système formel et peut n'avoir aucun degré de validité dans le monde réel. La mise en place de cette géométrie renvoie plutôt à une problématique de la cohérence logique, sa perspective de travail sera logique et formelle.

Annexe 2. Exemple de protocole d'une étudiante (Étudiant13)

1.- Ecrivez un protocole détaillé de votre résolution du problème

Sur le raisonnement mathématique, les figures, les opérations, *etc*.	**Utilisation du logiciel GeoGebra (possibilités, difficultés, éléments instrumentaux qui vous ont aidés)**
Faire d'abord la cloche. <u>Premier essai</u>. Tracer une ligne passant par deux points donnés B et I et suivre les instructions.  <u>Deuxième essai</u> faire un triangle équilatéral.  ABC, I et J étant sur les hauteurs du triangle issues des angles B et C, K est l'orthocentre. Nous traçons les arcs de cercle passant par BC et par IJ de centre A et K respectivement.  Et pour faire le cercle passant par A il faut juste se rendre compte que le centre est aligné avec A et K et qu'il est aussi sur la médiatrice du segment passant par A et par l''intersection de l'arc passant par I et J.	Faire la cloche. <u>Premier essai</u>. En utilisant l'outil rotation d'un objet autour d'un point, tracer la droite qui passe par les points donnés B et I et faire une rotation de cette droite de 60° pour obtenir une autre droite et tracer la perpendiculaire à la droite qui passe par B et I. Faire l'intersection de la perpendiculaire que nous venons de tracer et de la droite que nous avons fait tourner pour obtenir un point C. Nous tournons la droite BC de 60° et nous traçons la perpendiculaire à la nouvelle droite qui passe par B. Ainsi, nous avons les points B, I, C, J, et K et les segments qui les joignent. A, nous l'avons obtenu en faisant l'intersection des deux droites (piste 1). Nous traçons les arcs de cercles, pour le premier le centre A et d'extrémités B et C et ensuite le centre K et les extrémités I, J. Il reste seulement à faire le cercle qui passe par A et qui est tangent au dernier arc passant par I, J, en obtenant les points E', nous traçons la médiatrice de AE et ainsi ils se coupent. AK et AE, nous obtenons le centre du cercle qui passe par A. <u>Deuxième essai</u>. Sans faire tourner les droites : tracer le triangle équilatéral ABC, tracer deux de ses bissectrices (celles qui passent par B et C) qui pour être équilatéral coïncident avec les hauteurs et terminer comme précédemment. Agrandissons-la.

 Pour essayer d'agrandir la cloche, ce n'est pas un problème, c'est la même chose qu'avant, mais maintenant nous ne partons pas de points arbitraires, il faut que les mesures tombent justes.  Agrandir la cloche. Nous devons construire un triangle équilatéral connaissant sa hauteur 2.AB = A´H´.	Agrandir la cloche. Nous faisons un segment de longueur 2.AB = A´H´. Nous traçons la perpendiculaire qui passe par H' et nous faisons la droite qui passe par A' et H' pour la faire tourner de 30º dans le sens des aiguilles d'une montre et 30° dans le sens contraire. Ainsi, nous obtenons un triangle équilatéral. Pour obtenir J' e I' nous traçons les perpendiculaires aux segments A'C' et I'B' qui passent respectivement par B' et C'. Pour la terminer, on fait la même chose que l'on a faite avec la première cloche.

Décrivez qu'elles ont été vos réactions émotionnelles, vos sentiments, vos blocages, pendant le travail sur le problème avec l'ordinateur et sans ordinateur.

Travail sur le problème sans l'ordinateur	**Travail sur le problème avec l'ordinateur**
Cette partie est plus facile. La partie sur la construction de la première cloche une fois que t'y a un peu réfléchi n'est pas difficile, il suffit de faire un triangle équilatéral et ses bissectrices et médiatrices (qui coïncident) pour trouver I et J. Pour agrandir ce n'est non plus compliqué, il suffit de construire un triangle équilatéral à partir d'une hauteur.	Résoudre avec GeoGebra fut plus difficile et coûteux, je n'utilise pas encore bien le logiciel, je vais très lentement et de fait je n'ai pas eu le temps d'agrandir la campagne, parce que en plus j'ai mal interprété l'énoncé et pour cette raison je me suis bloquée.

Indiquez vos stratégies et ressources pour surmonter vos blocages dans le problème

Dans les moments où j'ai été bloquée, comme quand j'ai réalisé que ma première manière de faire la cloche n'était pas juste, j'ai cherché une nouvelle façon de poser le problème, en ne me fixant pas sur ce que j'avais déjà fait.

Répondez aux questions suivantes :

1.- Avez vous utilisé des propriétés géométriques pour travailler avec GeoGebra ou est-ce le logiciel qui a dirigé votre travail géométrique ?

La construction de la première cloche, sur la base des renseignements fournis dans l'énoncé du problème n'a pas présenté de difficultés de même que le travail que j'ai fait directement avec GeoGebra. Travailler avec un logiciel comme Geogebra donne un certain nombre d'outils déjà construits, comme le calcul des points médians, des lignes perpendiculaires, etc, il est plus facile de travailler avec, et surtout c'est très rapide. Le plus gros problème est venu dans la construction de la seconde cloche. La difficulté était de savoir comment appliquer avec Geogebra la relation trouvée sur le papier.

2.- Si c'est le logiciel GeoGebra qui a piloté votre travail géométrique, comment cela a-t-il influencé l'utilisation des propriétés pour résoudre le problème ?

Comme future enseignante, Geogebra est un logiciel qui est intéressant à connaître et à maîtriser et avec lequel on peut créer des applications utiles pour les élèves du secondaire.

D'habitude quand j'utilise GeoGebra je me sens capable de traiter un problème, avec confiance et une bonne motivation, mais parfois je m'inquiète d'avoir à consacrer plus de temps en l'utilisant que sans. Même si on travaille directement avec un ordinateur, il faut connaître les propriétés. Dans le cas de la cloche j'ai fait directement avec le logiciel au début, mais ensuite j'ai dû analyser les propriétés avant d'agrandir la cloche avec GeoGebra.

3.- Pensez vous que les propriétés géométriques jouent un rôle différent quant on utilise GeoGebra à la place du papier et du crayon ?

L'idée initiale était de construire la seconde cloche directement sur la première, mais ce fut un premier blocage. Après un certain temps, j'ai décidé de chercher le problème avec un crayon et du papier, étudier les propriétés, puis passer à l'ordinateur. Il était difficile de trouver la relation qui devait répondre à la partie sur B'C', le problème se posait pour traduire cette idée en utilisant le logiciel. Ici apparaît un nouveau blocage et il faut faire de nouveaux essais. Je savais les propriétés sur le papier mais je n'étais pas en mesure de les transférer sur l'ordinateur.

Enfin, pour résoudre ce problème en définissant « l'agrandissement de la mesure avec B'C' », une question qui a été couteuse avec le traitement de Geogebra, mais une fois surmontée cette difficulté, le reste du travail a été de répéter ce que j'avais fait pour la cloche initiale et je l'ai fait sans blocage supplémentaire.

4.- Donnez des suggestions ou des orientations qui aideraient un professeur dans sa formation professionnelle sur les nouvelles technologies.

Pour moi, les difficultés lorsqu'on travaille avec un ordinateur sont :

- Apprendre à utiliser efficacement le programme dont on a besoin.
- Transférer un problème du papier à l'ordinateur.
- Utiliser une nouvelle langue, une langue peut être difficile et elle implique plus de temps