DAVID BLOCK, KOSTAS NIKOLANTONAKIS & LAURENT VIVIER

REGISTRES ET PRAXIS NUMÉRIQUE EN FIN DE PREMIÈRE ANNÉE DE PRIMAIRE DANS TROIS PAYS

Abstract. Registers and numerical praxis at the end of first grade in three countries Through numerical problems given to pupils of three different countries, we show the importance of representation registers and types of tasks for the mathematical activity. Besides some differences, sometimes marked, between the three nations, we identify combined influences of the register of the statement and the type of tasks. We distinguish two cases according to the link of the type of tasks with the institution.

Résumé. À travers des problèmes numériques posés à des élèves de trois pays différents, nous mettons en évidence l'importance des registres de représentation et des types de tâches sur l'activité mathématique. Outre des différences parfois marquées entre les trois pays, nous identifions des influences conjointes du registre de l'énoncé et du type de tâches en distinguant deux cas selon le rapport de ce dernier avec l'institution.

Mots-clés. Praxéologie, registre de représentation, nombre entier, étude internationale, grade 1.

Introduction

Dans cet article, nous étudions quelle influence sur les démarches de résolution peuvent avoir les représentations sémiotiques utilisées dans l'énoncé d'une tâche. Dans cette perspective, nous avons proposé (mai et juin 2010) un test à environ 200 élèves de 6/7 ans contenant 5 types de tâches numériques (effectuer des comparaisons, effectuer chacune des quatre opérations arithmétiques) et en faisant systématiquement varier le type de représentation des nombres : numérique-chiffré ou graphique. L'étude s'appuie ainsi sur les registres de représentation (Duval, 1993) et les praxis, types de tâches et techniques (Chevallard, 1999). Ce type d'analyse a déjà été utilisée dans des études sur la numération de position en base quelconque pour les futurs professeurs du premier degré en France et en Grèce (Nikolantonakis & Vivier, 2009, 2010).

Après une partie où nous exposons le cadre d'analyse, qui consiste en une prise en compte des registres de représentation dans les praxis numériques, le test et une analyse *a priori* des dix problèmes posés, nous présentons nos résultats. Cette section d'analyse commence par une description générale avec notamment différents profils nationaux. Notre objectif était d'établir un lien entre l'activité de l'élève et le système sémiotique en jeu dans l'énoncé pour certains types de tâches. Or, il est apparu un paramètre essentiel sur la nature du type de tâches étudié, selon qu'il est travaillé au cours de l'année scolaire ou non. Nos analyses se focalisent

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 17, p. 59 - 86.

donc sur ce point et mettent en évidence un rôle différent, selon le type de tâches considéré, des registres de représentation.

1. Cadre de l'étude

1.1. Description globale du test et de l'expérimentation

Nous considérons dans cet article les 5 types de tâches (Chevallard, 1999) suivants, qui ont été proposés dans un contexte de résolution de problème relatif au nombre cardinal et dont les énoncés en français figurent en Annexe 2 :

- T^1 : comparer deux nombres ;
- T^2 : déterminer la différence de deux nombres ;
- T^3 : déterminer la somme de deux nombres ;
- T^4 : déterminer le produit de deux nombres ;
- T^5 : déterminer le quotient d'un nombre par un autre.

Ce sont les cinq types de tâches numériques de base, que nous restreignons, pour notre étude en première année de primaire, aux *petits* entiers naturels. Le choix des types de tâches est donc mathématique mais il a également une fonction didactique essentielle pour notre propos, car nous proposons des types de tâches devant être acquises en fin de première année de primaire (T^1 et T^3), des types de tâches en cours d'apprentissage (T^2) et des types de tâches normalement pas, ou très peu, travaillés à ce niveau (T^4 et T^5). Ainsi, nous étudions des types de tâches qui sont diversement influencés par l'enseignement scolaire.

Afin d'étudier l'influence des représentations sémiotiques sur les activités des élèves, nous avons proposé aux élèves de l'étude ces cinq types de tâches énoncés dans deux systèmes sémiotiques différents. Nous considérons donc les deux systèmes sémiotiques de représentation (Duval, 1995) des nombres suivants :

- R_A : le registre numérique des écritures chiffrées ;
- R_B : le registre graphique de représentation des quantités discrètes.

Dans la suite, pour simplifier le texte, les expressions « traitement numérique » et « procédure numérique » font explicitement référence au registre R_A.

Le choix de R_A est évidemment lié à son importance sociale et curriculaire. R_B a été choisi de sorte que les représentations soient connues des élèves, suffisamment éloignées de R_A (en particulier les collections ne sont pas organisées par paquets) et qu'il permette un choix de conversion (ici nous en avons au moins deux : l'énumération 1 à 1 ou le groupement par paquet de dix).

Si R_A est bien un registre de représentation des nombres, précisons que R_B n'est pas un registre de représentation au sens strict de Duval (1993). En effet, les traitements possibles sur les éléments figuraux sont externes à R_B car il n'y a pas de transformation interne. Cela aurait été le cas si l'on avait considéré une représentation matérielle des unités. Par exemple, pour comparer les deux collections de billes dans $T^1{}_B$ avec des billes matérielles, on pourrait réorganiser les collections en utilisant des sous-collections des billes blanches et noires de même cardinal ou bien mettre de côté simultanément une bille blanche et une bille noire jusqu'à épuisement d'une collection. Avec R_B cela est impossible et il faut alors simuler ces traitements[1] avec des traces externes[2] : entourer des *ronds* pour faire des paquets ou bien cocher simultanément un *rond* blanc et un *rond* noir jusqu'à épuisement d'une collection. En outre, le choix de représenter les nombres par des unités graphiques ressemblant aux matériels évoqués (billes, animaux, bonbons, …) déroge également aux canons des registres de représentation mais ce choix, conscient, permet une meilleure compréhension de la consigne pour des enfants de cet âge. Malgré l'abus de terminologie, nous utiliserons parfois le terme de *registre* pour désigner R_B car ce qui nous importe est : 1) la possibilité de représentation que permet un système sémiotique, 2) les possibles conversions entre systèmes sémiotiques et 3) les traitements – qu'ils soient internes ou externes.

Le test propose de faire une étude croisée systématique de ces deux groupes : d'abord les types de tâches T^1 à T^5 énoncés dans le registre R_A puis les mêmes types de tâches énoncés dans le système R_B. L'objectif est de proposer des couples de problèmes qui ne diffèrent que par le registre de l'énoncé. En particulier les nombres en jeu et les contextes sont identiques, sauf[3] pour T^4. Bien entendu, le changement de registre de l'énoncé peut modifier le type de tâches, comme par exemple pour $T^3{}_A$ et $T^3{}_B$ ou pour $T^4{}_A$ et $T^4{}_B$. Nous conservons toutefois ce codage pour les problèmes posés tout en sachant, pour ces deux couples, qu'il ne s'agit pas des mêmes types de tâches. Nous étudions alors les stratégies et procédures que les

[1] On peut aussi penser à donner les unités dessinés avec un crayon de papier. Ainsi, en gommant et en redessinant, on peut avoir les mêmes traitements qu'avec le registre matériel, internes donc. Toutefois, il ne paraît pas raisonnable de donner cette gestion des unités à des enfants de 6 ans.

[2] Précisons également que les traitements sur un registre matériel sont alors aussi, en quelque sorte, externes (il n'y a que peu de différences entre un trait de crayon entourant des unités graphiques et le fait de bouger des éléments matériels représentant les unités).

[3] Les dessins utilisés dans les tâches posées dans le registre graphique, ne sont pas « décoratifs », ils sont porteurs d'informations numériques. Dans le cas des tâches posées dans le registre numérique, ce sont les contextes, et non pas les données numériques, qui sont représentés par des dessins dont la fonction n'est pas uniquement décorative (Elia et *al.* 2007), puisqu'ils facilitent la compréhension du contexte pour de jeunes enfants. Deux exceptions seront signalées dans l'analyse *a priori*.

élèves développent tout en pointant le registre dans lequel le type de tâches est effectué. Par exemple, pour T^1_B, il peut y avoir un traitement (externe) dans R_B ou bien une conversion dans R_A puis un traitement dans R_A.

Nous ne prenons pas en compte deux registres intermédiaires qui jouent pourtant un rôle important dans cette étude : le registre verbal (notamment dans une énumération) et le registre des doigts de la main (pour un comptage par exemple). Nous avons observé effectivement leur utilisation par de nombreux enfants. Mais leurs utilisations ne laissent aucune trace et il aurait fallu opter pour d'autres méthodes, s'appuyant par exemple sur des entretiens filmés. Nous avons fait un autre choix expérimental en favorisant le nombre d'élèves afin de produire une étude statistique.

Le premier test est donné dans le registre R_A et le test dans R_B est donné une semaine plus tard pour que les enfants oublient les réponses, procédures, etc. Ils se sont déroulés à peu près en même temps dans les trois pays et ont concerné environ 213 élèves de la toute fin de la première année de l'école élémentaire. Finalement, 192 élèves ont réalisé l'ensemble du test dont la répartition est donnée dans la table 1. Une présentation de chaque problème a été faite et les réponses aux différentes questions des enfants étaient formulées pour ne pas orienter leur travail. On trouvera en section 1.4 le test proposé aux enfants dans la version française.

Nationalité	FR	GR	MX	Total
Nombre	61	45	86	192
Pourcentage	32%	23%	45%	100%

Tableau 1 : répartition des élèves par nationalité

1.2. Cadre d'analyse

Nous exposons dans cette section la manière dont nous prenons en compte les registres de représentation (Duval, 1993) dans les praxis (Chevallard, 1999) que nous utilisons dans notre étude (voir également Nikolantonakis & Vivier 2009, 2011).

En Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), c'est autour des *types de tâches* que s'élabore le travail en mathématiques (Chevallard, 1999). Dans notre étude, les élèves disposent d'au moins une *technique* τ pour effectuer un type de tâches T. Le bloc [T,τ] est nommé bloc des savoir-faire ou *praxis*. La production et la justification d'une technique nécessitent un regard théorique que Chevallard nomme une *technologie*. Cette dernière est un élément du bloc des savoirs, ou *logos*, que nous n'abordons pas dans cet article et qui fera l'objet d'une étude ultérieure. Praxis et logos forment une *praxéologie*.

Duval (1993, 1995, 2006) regroupe les signes utilisés dans le travail mathématique en registres de représentation sémiotique. Il distingue les *traitements*, une transformation sémiotique qui reste à l'intérieur d'un même registre de représentation R, et les *conversions*, une transformation sémiotique dont le résultat est exprimé dans un autre registre. Duval insiste particulièrement sur la différence cognitive entre ces deux transformations sémiotiques.

Le sémiotique en TAD est bien pris en compte à travers la notion d'*ostensif* (Bosch & Chevallard, 1999). Mais les ostensifs en TAD, même s'ils donnent lieu entre eux à une multipicité d'interactions, ne sont pas constitués en système sémiotique. En particulier, cette notion ne prétend pas rendre compte de la dépendance d'une technique aux systèmes sémiotiques sur lesquels elle repose. Car précisément, la notion de *valence instrumentale* est attachée à un ostensif et non au système sémiotique en jeu, même si elle est travaillée à l'intérieur de praxéologies et dans le cadre de complexes d'ostensifs. Cela a-t-il du sens de parler de la valence instrumentale d'un chiffre ? Bien entendu non, car c'est le système d'écriture des nombres, en base dix par exemple, qui est alors à considérer. Malgré l'intérêt de cette notion d'ostensif, elle ne peut rendre compte de certaines situations et notamment de celles qui nous intéressent ici. Par exemple, pour la recherche de la parité d'un nombre, la technique qui porte sur les chiffres est totalement différente selon que l'on soit en base paire (le nombre est de la même parité que son chiffre des unités) ou impaire (le nombre est de la même parité que la somme de ses chiffres). C'est pourquoi nous avons opté pour une prise en compte du sémiotique par les registres de représentation. Nos objectifs sont ambitieux et sont de deux ordres :

- comprendre le rôle que peuvent avoir des registres de représentation dans une organisation mathématique – car il nous apparaît naturel d'introduire la notion de registre sémiotique au sein même des organisations mathématiques ;
- enrichir la présence du cognitif au sein de la TAD.

En TAD, un type de tâches n'est pas toujours énoncé en faisant référence aux registres de représentation utilisés. Or, une tâche est toujours exprimée à l'aide de registres sémiotiques et ces derniers peuvent, comme nous le constaterons, influencer l'activité mathématique[4]. Ainsi, nous indexons les types de tâches et techniques par le(s) registre(s) dans le(s)quel(s) ils sont exprimés. Un type de tâches T relatif au registre R est noté T_R. Bien entendu, il est tout à fait possible de considérer des types de tâches exprimés avec deux registres ou plus comme on peut

[4] L'existence d'effets divers des types de représentations (description verbale, iconique, à travers de schémas, etc.) sur la performance des élèves en résolution de problèmes a été identifiée auparavant dans plusieurs recherches, comme par exemple (Elia, Gagatsis & Demetriou, 2007).

le constater avec la tâche *comparer 2/3 et 0,6*. Nous ne considérons ici que les types de tâches exprimés dans un seul registre (en revanche, les procédures de résolution peuvent utiliser plusieurs registres).

Afin de prendre en compte les registres de représentations en TAD, nous distinguons, en nous restreignant au cadre numérique (cf. la section suivante pour une justification de cette restriction) :

- une technique τ_R qui n'utilise qu'un seul registre mathématique R ;

- une technique $\tau_{R\to R'}$ qui correspond à une conversion d'un registre R vers un registre R'.

Il faut ici distinguer deux types de techniques que nous notons τ_R. Ce peut être évidemment un traitement proprement dit (Duval, 1993), c'est-à-dire une transformation sémiotique interne à un registre R, ou bien un autre type de technique qui fournit une réponse externe au registre R. Donnons un exemple de ce deuxième type : pour déterminer la parité d'un nombre écrit en base a, il n'y a pas forcément de transformation (si a est pair) et surtout le résultat n'est pas exprimé dans le registre initial – il ne s'agit donc pas d'un traitement au sens strict de Duval.

De même, s'il est clair qu'une technique mathématique ne se fait pas toujours de manière interne à un registre, notre cadre d'analyse permet de décomposer une technique mathématique comme une succession de techniques d'un des deux types précédents. Prenons l'exemple suivant issu de (Nikolantonakis & Vivier, 2011) sur la numération en base : pour trouver le successeur de $(66)_{sept}$, on peut :

- effectuer un traitement (ou technique) en base sept pour trouver $(100)_{sept}$.

- convertir $(66)_{sept}$ en base dix puis déterminer le successeur codé en base dix qui est 49 (et éventuellement reconvertir en base sept).

Nous appelons une praxis [T_R ; τ_R] relative à un registre R une R-praxis. Prenons par exemple le problème T^1_A (cf. Annexe 2). On dispose au niveau considéré de la technique τ_A qui consiste à comparer successivement les chiffres de gauche à droite des deux nombres. On dispose donc d'une R_A-praxis. Pour le problème T^1_B (cf. Annexe 2) plusieurs résolutions sont possibles :

- faire une conversion $R_B \to R_A$ ($\tau_{B\to A}$) pour obtenir les cardinaux des deux collections en écriture chiffrée puis utiliser τ_A (notons que $\tau_{B\to A}$ et τ_A sont deux techniques bien rodées à ce niveau d'enseignement comme nous le constaterons) ;

- faire un traitement dans R_B (insistons : ces traitements sont en fait externes, cf. section 1.1).

À travers cette distinction des techniques, nous voulons conserver une partie de l'activité cognitive de l'élève révélée par Duval afin de préciser les rapports personnels aux savoirs. Précisons que nous n'avons pas la prétention d'articuler les cadres de Chevallard et de Duval. Il s'agit plus modestement d'une prise en compte des registres sémiotiques au sein d'une praxis en se restreignant au cadre numérique (cf. section suivante). Outre une meilleure description praxéologique, ce travail théorique fournit, comme dans cette étude, des résultats qui ne semblent pas facilement détectables par d'autres moyens expérimentaux.

1.3. Restriction nécessaire au cadre numérique

L'objectif de cette reformulation des traitements et conversions dans le langage des praxéologies est de conserver leur différence cognitive tout en les considérant au sein d'une organisation mathématique que donne la TAD. Cette distinction des techniques permet une conciliation des deux cadres sur le point crucial des conversions. Bosch & Chevallard (1999, p. 117) commentent ainsi le cadre de Duval : « Or, dans ce qui est présenté comme un changement de registre qui ne dépendrait que du fonctionnement cognitif du sujet, nous voyons, quant à nous, la mise en œuvre d'une technique mathématique […] ». Il nous semble que, dans un processus de changement de registre, pour bien rendre compte du phénomène, la technique mathématique en jeu et le fonctionnement cognitif du sujet sont tous deux à prendre en compte.

Néanmoins, afin que la reformulation que nous proposons soit didactiquement consistante, plusieurs précautions sont à prendre car assimiler sans précaution une conversion à une technique serait une négation de la distance cognitive irréductible entre conversion et traitement. Ce n'est certes pas notre objectif. Tout au contraire, nous voulons conserver une partie de cette distance dans le cadre de la TAD.

Tout d'abord, la distinction entre traitement et conversion est maintenue et, à la suite de Duval, nous insistons sur le caractère fondamentalement différent des deux types de techniques que nous notons de manière générique τ_R et $\tau_{R \to R'}$. Mais cela ne suffit pas car il faut également que ce que nous appelons une *technique de conversion* soit consistante du point de vue didactique. C'est ce que nous explicitons ci-dessous.

Dans toute conversion on trouve une partie algorithmique (ou algorithmisable) qui correspond au travail mathématique proprement dit et qui constitue la partie tangible de la conversion (par les traces écrites notamment). Mais il ne serait être question de réduire une conversion à un travail algorithmique. En particulier, lors d'une conversion, il apparaît toujours le choix du sujet de faire une conversion dans un registre qui est initialement totalement absent. Parfois, le choix d'une conversion parmi un panel de conversions est nécessaire ce qui peut alors entraîner des interférences entre les différentes conversions possibles. Une conversion étant choisie, des éléments arbitraires sont souvent à la charge du sujet qui peuvent considérablement influencer, voire bloquer, la partie algorithmique notamment par une sensibilité importante aux variables didactiques. Enfin, de nombreuses autres variables cognitives sont à prendre en compte lors d'une conversion comme les problèmes de congruence ou l'univocité des représentations.

Prenons un exemple. Considérons la conversion entre les deux représentations suivantes d'une droite (non *verticale* pour simplifier) : son tracé dans un repère (registre graphique avec repère, noté R) et une équation du type $y=ax+b$ (registre de représentation fonctionnelle des droites, noté R') :

- Pour R→R'. On peut choisir deux points arbitraires sur la droite, lire leurs coordonnées puis appliquer des formules ou résoudre un système d'inconnues a et b. On peut également déterminer b par l'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées, mais cela peut se révéler impossible à effectuer selon le graphique considéré, et a par un calcul de pente en mesurant un triangle rectangle. Le repère (y compris la position de la droite) constitue une variable cognitive de première importance (unités sur les axes, graduations des axes, présence ou non d'une grille, angle entre les axes, orientations des axes, noms des axes) qui peut considérablement influencer l'activité cognitive du sujet.
- Pour R'→R. On peut choisir deux valeurs de x et calculer les valeurs de y correspondantes puis placer les points sur le graphique et tracer la droite. On peut également placer un point (le point de coordonnées $(0,b)$ par exemple) et utiliser le vecteur directeur $(1,a)$. Il est à noter qu'il faut également choisir un graphique avec une échelle pour chacun des deux axes. La nature et l'ordre de grandeurs des nombres a et b constituent des variables cognitives de première importance.

C'est cette partie algorithmique que nous dénommons *technique de conversion*. En particulier, et il s'agit ici d'une restriction importante et incontournable, on ne peut raisonnablement considérer une *technique de conversion* $\tau_{R \to R'}$ que lorsque le passage de R à R' peut être décrit de manière algorithmique ou tout du moins lorsque les variables cognitives de la situation n'ont que peu d'influence sur le déroulement de l'algorithme. Or, Duval (1995, page 42) précise que l'on ne peut pas toujours définir les règles de conversion ce qui limite la portée de notre proposition. Par exemple, la citation de Bosch et Chevallard (1999) que nous reprenons ci-dessus est relative à une expérimentation de Lemonidis (1990, p. 115) sur une conversion du registre figuratif vers le registre de l'écriture symbolique. Sur un segment d'extrémité A et partagé en dix segments égaux figure un point B (à cinq graduations de A) et un point C (à huit graduations de A) et l'on demande de compléter les trois relations suivantes entre longueurs orientées (l'orientation du segment n'est pas précisée) AB = … BC, CB = … AB et AC = … CB.

Bien que la tâche de conversion demandée soit totalement algorithmisable, la partie algorithmique ne rend pas compte fidèlement de la conversion. Outre les résultats expérimentaux de Lemonidis (1990), on peut en particulier avancer les objections suivantes :

- la variation de nombreuses unités signifiantes dans le registre figuratif ne correspond pas à des variations dans le registre symbolique – ce qui est vrai pour la conversion inverse ;
- la conversion demande de repérer l'objet à convertir alors que celui-ci n'est pas explicitement visible dans le registre figuratif.

C'est pourquoi nous nous restreignons au cadre numérique car, généralement, une conversion entre deux registres de représentation des nombres peut être décrite par un algorithme. Ce dernier rend fidèlement compte de la conversion en particulier parce qu'en général on ne retrouve pas les deux objections précédentes. En tout état de cause, la possibilité que nous soulevons dépend fortement des registres en jeu et il est nécessaire, pour chaque étude, de discuter de ce point.

Pour notre étude, la conversion de R_B vers R_A n'est pas purement algorithmique car il y a un choix de l'ordre des unités comptabilisées dans une énumération ou des paquets de dix à former. Nous faisons l'hypothèse que cela n'influence pas le déroulement de l'algorithme (cette hypothèse est largement confirmée pour la population étudiée par les taux de réussite à T^1_B).

Il est clair que, dans notre cadre d'analyse, du caractère cognitif spécifique d'une conversion nous ne conservons qu'une partie qui contient notamment le choix conscient d'un sujet de faire cette conversion. C'est ainsi que parfois la différence cognitive entre une conversion et un traitement peut s'effacer totalement car seule la composante algorithmique, qui est une technique au sens de la TAD, est du ressort du sujet, soit parce que l'on demande explicitement au sujet de faire cette conversion, soit parce qu'elle correspond à une technique qui a été travaillée dans l'institution pour effectuer un certain type de tâches (cf. Nikolantonakis et Vivier, 2010 pour un exemple avec les bases de numération pour l'écriture des entiers).

1.4. Analyses *a priori*

Nous présentons ici une analyse *a priori*[5] des dix tâches proposées aux élèves et les principaux critères de codage.

Les trois premières tâches impliquent des connaissances enseignées dès la première année de l'école (comparaison, soustraction et addition), dans les trois pays, et

[5] Certaines procédures peu représentatives ne sont pas exposées ici.

donc vis-à-vis desquelles les enfants disposaient probablement d'au moins une technique enseignée.

En revanche, les tâches 4 et 5 impliquent des connaissances (multiplication et division) qui, en principe, ne sont pas enseignées à ce niveau. Ainsi, pour ces deux tâches, les enfants ne disposaient probablement pas d'une technique enseignée mais, comme nous le verrons, ils pouvaient mettre en œuvre d'autres types de raisonnement pour résoudre les problèmes posés.

Les problèmes impliquent une seule opération. Nous explicitons ci-dessous les variables numériques et les relations entre les données qui furent considérées. Nous montrerons aussi les procédures et stratégies envisagées. Nous utilisons les indicateurs suivants traités dans l'analyse statistique comme des variables binaires :

nr : pas de réponse au problème posé ;

ok : bonne réponse (avec pour certaines questions une tolérance, signalée par la suite dans l'analyse a priori des questions concernées) ;

conv : présence d'une conversion de registre ;

tRa : traitement dans R_A ;

tRb : traitement dans R_B ;

repR : réponse dans le registre de l'énoncé ;

sign : utilisation d'un signe opératoire (+, –, × ou :).

Avant d'entrer dans le détail de chaque tâche, nous explicitons certains choix globaux dans les images proposées aux enfants.

1.4.1. Les fonctions des représentations

Les images utilisées dans les tâches représentent tantôt des éléments du contexte (enfants, animaux, billes, etc.) tantôt des données numériques. Dans le registre graphique, les données numériques ne sont fournies que par le moyen des images, elles jouent un rôle de représentation *informationnelle* (Elia et.al., 2007).

Dans ce même registre graphique, certains éléments du contexte ne sont représentés que par les images et ont donc aussi une fonction informationnelle, par exemple, le fait qu'il y a deux enfants, dans T^1_B, ou les types d'animaux dans T^3_B. Or la plupart des éléments du contexte sont doublement représentés : à travers l'image et dans le texte (registre verbal). Par exemple les billes dans T^1_B, les bonbons et les deux enfants dans T^2_B, les trois amis dans T^5_A. Ces images ont donc une fonction différente, appelée *représentationnelle* (Op. cit.)[6].

Dans le cas des tâches posées dans le registre numérique R_A, ce sont les contextes, et non les données numériques, qui sont représentés par des images. Dans ce cas aussi, la plupart des éléments du contexte sont doublement représentés (dans l'image et dans le texte, par exemple les billes dans T^1_A) et quelques-uns ne sont représentés que par l'image (par exemple, les deux enfants de T^1_A ou les deux types d'animaux dans T^3_A).

Encore deux exceptions doivent-être signalées :

- la tâche T^4_A, dans laquelle l'énoncé fait référence à un arrangement rectangulaire de 7×4, est la seule où l'énoncé est purement verbal, sans dessin explicitant le contexte. Nous avons considéré qu'une représentation même partielle de l'arrangement rectangulaire deviendrait une aide importante en orientant fortement vers une procédure graphique.
- la tâche T^5_A, impliquant un partage en parts égales, est la seule parmi les tâches numériques où une des données (le diviseur) est doublement représentée, de façon numérique dans le texte et aussi graphique à travers le dessin des trois enfants. Nous avons considéré que le problème était suffisamment difficile avec le dividende exprimé uniquement de façon numérique. La représentation graphique du diviseur (les 3 enfants) a-t-elle pu favoriser les procédures graphiques ? Il est bien entendu possible que cela puisse renforcer le choix d'une stratégie graphique, mais nous faisons l'hypothèse que cette influence est faible étant donné que la donnée la plus pénible à représenter graphiquement est le dividende, celle des 24 gâteaux.

1.4.2. T^1: la comparaison 29<31

T^1_A. Les nombres ont deux chiffres et une différence petite entre eux, on peut donc s'attendre a une reconnaissance immédiate du nombre le plus grand (nr=0 ; ok=1).

T^1_B. Les cardinaux des collections ne sont pas comparables par perception visuelle et les billes sont en désordre, ce qui favorise une stratégie d'énumération. La procédure probable est le dénombrement de chaque collection et la comparaison

[6] La fonction représentationnelle consiste à représenter une partie ou toute l'information du problème (déjà donné dans le texte). Ce type de représentation, à la différence des représentations informationnelles, est dispensable. Elia et.al. (2007) distinguent, en plus de ces deux types, la fonction décorative qui n'apporte pas d'information sur le contenu du problème (comme les fleurs en T^1 ou le banc en T^5_A). Cette classification est une adaptation de celle de Carney & Levin (2002).

des nombres, ce qui implique une conversion (conv=1), et un traitement numérique (tRa=1). On s'attend à des erreurs de numération.

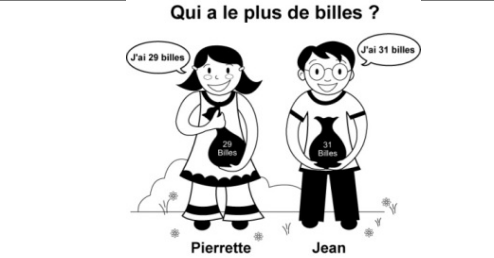


Figure 1a : tâche T^1_A

Figure 1b : tâche T^1_B

Des procédures graphiques (tRb=1) sont aussi possibles : comparaison par perception visuelle des collections ou une correspondance 1 à 1, bien que cette dernière soit peu probable car bien moins économique que la procédure par conversion dans R_A.

1.4.3. T^2 : la soustraction 32–23

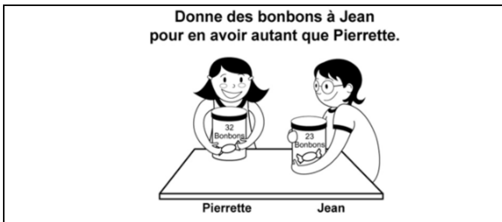


Figure 2a : tâche T^2_A

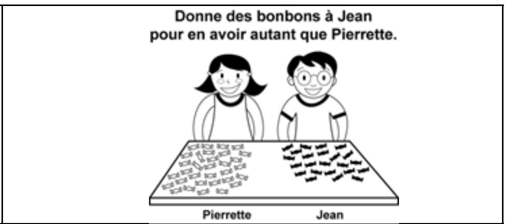


Figure 2b : tâche T^2_B

Il s'agit d'un problème de soustraction du genre rapport entre mesures, troisième catégorie de la classification de Vergnaud (1982, 1991). Pour l'attribution du code ok, on applique, dans les deux tâches, une tolérance de +/–1.

T^2_A. Les nombres ont deux chiffres, les mêmes (2 et 3) ce qui pourrait mener à les considérer égaux ; la différence (9) peut être contrôlée avec les doigts. La soustraction avec l'algorithme a une complication : le chiffre des unités du grand nombre est plus petit que celui du petit nombre, il y a donc une retenue.

Le traitement le plus probable est numérique (tRa=1, tRb=0) par exemple par sur-comptage du petit nombre au grand nombre. Ce comptage peut s'effectuer à l'aide des doigts (le nombre de doigts levés étant le résultat cherché), sans laisser aucune trace, ou bien en dessinant les bonbons au fur et à mesure du sur-comptage (conv=1), ou encore en écrivant les nombres 24, 25…32. Dans ce cas, pour donner la réponse, il faut compter les bonbons ou énumérer les nombres et écrire le nombre trouvé (repR=1). Or, il est possible de laisser comme réponse les bonbons dessinés (repR=0) ou la liste des nombres écrits (repR=1).

La procédure graphique est peu probable car elle est laborieuse : dessiner les bonbons (conv=1), les mettre en correspondance et donner comme réponse les bonbons non associés.

La tâche peut être interprétée aussi comme s'il s'agissait d'enlever des bonbons à la fille pour en donner au garçon. Dans ce cas la tâche devient plus complexe. Plusieurs procédures numériques sont possibles (trouver la différence, 9, et donner au garçon 4 ou 5 bonbons ; s'approcher peu à peu en enlevant chaque fois un bonbon à la fille et en le donnant au garçon). Les procédures graphiques sont à nouveau coûteuses : dessiner les collections puis faire passer quelques bonbons d'une collection à l'autre. Cette interprétation sera considérée correcte.

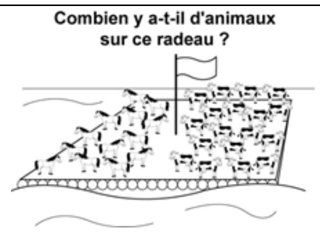
Une autre interprétation erronée possible consiste à écrire « 32 » ou bien dessiner 32 bonbons pour Jean (nr=1).

T^2_B. On peut déterminer visuellement quelle collection est la plus grande (ceci est précisé dans la consigne), mais on ne peut pas déterminer visuellement la différence. La tâche implique donc une soustraction.

Cette fois le traitement numérique (tRa=1, tRb=0) n'est plus tellement avantageux vis-à-vis d'un traitement dans R_B. Il implique de dénombrer chaque collection (conv=1), éventuellement écrire les nombres (au moins un d'eux comme mémoire) puis faire la soustraction.

Le traitement graphique (tRb=1) ne consiste qu'à faire une correspondance 1 à 1, ou par petits groupes. Une fois épuisée une collection, les bonbons de l'autre qui n'on pas de couple, indiquent le résultat. Il faut encore compter ces éléments et écrire le nombre (conv=1) soit dessiner une collection équivalente.

1.4.4. T^3 : la somme 13+18

	
Figure 3a : tâche T^3_A	**Figure 3b** : tâche T^3_B

Il s'agit d'un problème additif de composition, première catégorie de la classification de Vergnaud (1982, 1991), la somme correspond à une classe (animaux) qui en contient deux autres (moutons et chèvres ou chevaux et vaches).

T^3_A. Les cardinaux des collections sont des nombres de deux chiffres entre 10 et 20. La somme fait apparaître une retenue.

La somme peut être faite par calcul mental ou bien en posant l'addition écrite (les élèves des trois pays ont déjà commencé à étudier l'algorithme). Dans les deux cas nous avons un traitement numérique (tRa=1, tRb=0). On peut s'attendre à des oublis de la retenue si l'algorithme est utilisé.

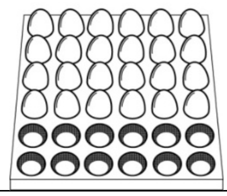
Il est aussi probable que certains élèves représentent graphiquement les deux nombres (conv=1) pour compter la collection totale (tRa=0), ou au moins une des deux pour appuyer le comptage (tRa=1). Nous avons considéré une tolérance de +/–1 (sommes correctes: 30, 31 ou 32).

T^3_B. Les collections sont dessinées et distinctes, les éléments de chaque sous-ensemble sont en désordre, une stratégie d'énumération est donc requise : comptage global (tRa=0, conv=1), ou bien comptage de chaque collection et somme, écrite ou par calcul mental (tRa=1, conv=1). Dans ce dernier cas il devrait y avoir au moins un nombre écrit, comme mémoire.

L'écriture des deux cardinaux, sans faire la somme sera considérée comme une absence de réponse (nr=1, conv=1).

Les dénombrements seront pris comme corrects à +/–1 ; dans le cas d'une somme effectuée, nouvelle tolérance de +/–1 (par exemple, si 12 chevaux et 18 vaches, on tolère 29, 30, 31 ; etc.).

1.4.5. T^4 : la multiplication 7×4

Dans une classe, il y a 7 rangées de 4 tables. Combien y a-t-il d'élèves ?	**Combien y a-t-il d'œufs sur cette plaque ?** 
Figure 4a : tâche T^4_A	**Figure 4b** : tâche T^4_B

T^4_A. Il s'agit d'un arrangement rectangulaire. Comme nous l'avons déjà dit, dans ce cas il n'y a pas de dessin.

Le traitement numérique est possible avec une addition réitérée (tRa=1, tRb=0). Le problème étant nouveau pour les enfants et l'énoncé faisant référence à une distribution spatiale, il est probable que plusieurs représentent graphiquement les rangées et comptent les éléments (tRa=0), avec une représentation numérique du résultat (repR=1).

Étant donné que le registre est numérique et le problème est nouveau pour les enfants, une erreur possible consiste à faire la somme les données (indicateur supplémentaire rep11=1). Une tolérance de +/–1 est donnée sur la réponse lors d'un dénombrement ainsi qu'une tolérance de +/–1 sur le nombre de paquets de 4 tables.

T^4_B. Il s'agit de dénombrer une collection dessinée et structurée en lignes et colonnes. Il n'y pas de difficulté d'énumération, donc le dénombrement est facilité (conv=1). L'addition réitérée est possible (tRb=0, tRa=1).

1.4.6. T^5 : la division 24÷3

	
Figure 5a : tâche T^5_A	**Figure 5b** : tâche T^5_B

Le problème pose un partage équitable[7] et donne lieu à une plus grande diversité de procédures que dans les autres problèmes posés.

T^5_A. Le diviseur est suffisamment petit pour permettre l'utilisation de l'addition réitérée. Il n'y a pas de reste.

Le traitement numérique (tRa=1, tRb=0) probable est l'utilisation de la somme réitérée d'un quotient approché, puis la comparaison de la somme obtenue avec le dividende (24) et ensuite, ajustement du quotient jusqu'à atteindre l'exhaustivité.

Les traitements graphiques (conv=1, tRa=0, tRb=1) sont moins probables puisqu'il faut dessiner la collection.

T^5_B. La collection à partager est dessinée, les éléments sont en désordre. On peut s'attendre à ce que les procédures graphiques soient fréquentes (tRb=1, tRa=0). Les enfants peuvent faire : une subdivision approchée, par perception visuelle, probablement non équitable, de toute la collection ; trois petits groupes de même cardinalité en laissant un reste ; une distribution cyclique 1 par 1, (ou 2 par 2, 3 par 3, pour aller plus vite) tout en contrôlant le nombre total de gâteaux repartis.

Les procédures numériques restent possibles : dénombrer la collection (conv=1) puis utiliser la procédure décrite plus haut de la somme réitérée d'un quotient

[7] La condition d'exhaustivité n'a pas été explicitée, elle fut donnée oralement en France et en Grèce, au Mexique dans deux des trois classes.

approché avec des ajustements (tRb=0 ; tRa=1). Lorsque des ajustements sont faits sur la collection dessinée, on considérera que le traitement est hybride puisqu'il utilise la représentation graphique pour faire une première subdivision et pour identifier le reste ainsi que le registre R_A pour contrôler l'égalité des groupements (tRa=1, tRb=1).

Un autre traitement hybride consiste à écrire le nombre 1 sur trois gâteaux, le nombre 2 sur trois autres, etc. jusqu'à designer tous les gâteaux. Le dernier nombre utilisé est le résultat (tRa=1 et tRb=1).

Les réponses 7, 8 et 9 sont considérées comme correctes et aussi 5 et 6 si la procédure est correcte et qu'il y a une idée du reste.

2. Influences sur l'activité mathématique

Les diagrammes que nous proposons sont des extraits du diagrammes complets afin d'en augmenter la lisibilité. Les arbres de similarité sont construits à l'aide du logiciel CHIC en considérant les nationalités comme des variables secondaires (FR, GR et MX). Nous renvoyons le lecteur à la consultation de l'ouvrage édité par Régis Gras, Jean-Claude Régnier & Fabrice Guillet (2009) pour une description de l'utilisation et des fonctionnalités du logiciel CHIC.

2.1. Structure générale

On distingue clairement dans l'arbre de similarités suivants (cf. figure 6) une structure relative aux deux registres de représentation et transversale aux types de tâches proposés : les traitements dans un des deux registres, R_A ou R_B, sont clairement séparés (on note toutefois deux exceptions : 3b-tRa et 1b-conv). On a donc effectivement accès, par notre analyse, à une partie de l'activité cognitive de l'élève lorsqu'il est confronté à un type de tâches numérique puisque l'on peut distinguer dans cet arbre de similarité les traitements et les conversions.

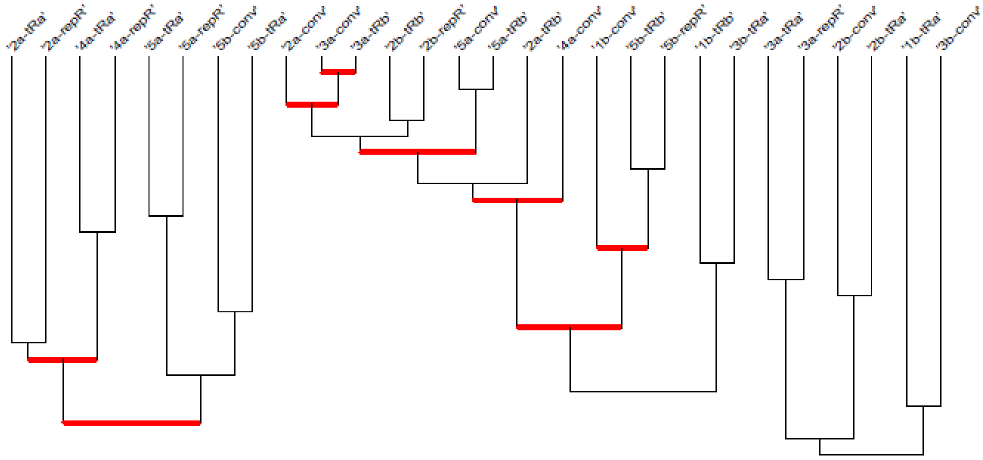


Figure 6. Arbre de similarités pour les indicateurs relatifs aux registres

Cette structure se retrouve pour chaque type de tâches : l'arbre des similarités pour chaque type de tâches montre, de manière moins marquée pour T^3 et T^5, deux blocs distincts selon le registre de traitement, R_A ou R_B, avec également une forte similarité entre les indicateurs des signes numériques d'opération (+, –, ×, ÷).

Pour ce qui est de l'utilisation des signes, on observe (cf. annexe 1) que ceux-ci sont plus présents lorsque le registre de l'énoncé est R_A ce qui montre que, sans surprise, les signes sont plutôt reliés au registre R_A. $T^3{}_A$-sign présente un taux (24%) largement supérieur aux autres indicateurs « sign » (cf. annexe 1). Ceci s'explique par le fait que ce type de tâches est bien travaillé au cours de cette première année d'école primaire et cette situation de réunion de collection est emblématique de la somme et du signe « + ».

2.2. Les profils nationaux

Le calcul des typicalités (en risque) des variables secondaires FR, GR et MX dans l'arbre de similarité avec les indicateurs ok, tRa, tRb et sign (cf. figure 7) montre trois profils différents pour chacun des trois pays (cf. Tableau 2) : La population française (FR) est typique d'une utilisation des signes. La population mexicaine (MX) est typique d'un traitement dans le registre graphique « tRb » – l'indice de similarité peut paraître faible, mais on retrouve cette typicalité aux nœuds 12 (indice 0,80) et 13 (indice 0,77). La population grecque (GR) est typique des nœuds 11 et 15 qui regroupent les indicateurs de traitement numérique « tRa ».

Ainsi, il semble que les élèves français ont une plus grande tendance à la formalisation par l'utilisation des signes d'opérations, les élèves mexicains utilisent plus souvent la conversion pour un traitement dans R_B (ou hybride) d'un type de tâches, même s'il est exclusivement énoncé dans le registre R_A. À l'opposé des élèves mexicains, les élèves grecs semblent plutôt rester dans le registre R_A pour résoudre un problème posé dans R_A.

Nœud	9	11	15	16
Indice de similarité	0,95	0,85	0,61	0,45
France (FR)	**0,06**	0,98	0,82	0,81
Grèce (GR)	1	**0,00**	**0,00**	1
Mexique (MX)	0.72	1	0,98	**0,00**

Tableau 2 Typicalité des pays (indices et risques sont arrondis à 2 décimales)

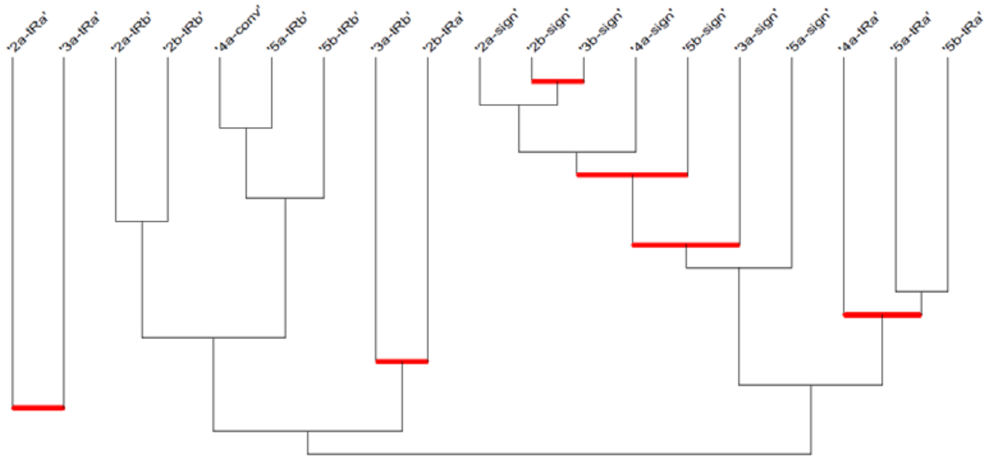


Figure 7. Arbre de similarités pour les indicateurs ok, tRa, tRb et sign

Si le profil grec se voit également sur les pourcentages (cf. annexe 1), les profils français et mexicains ne peuvent se détecter à l'aide uniquement des pourcentages même si des tendances peuvent être distinguées.

En poussant un peu plus loin l'analyse en se restreignant au registre numérique R_A, on voit que (cf. figure 8) les variables nr et sign sont similaires avec un indice au niveau 9 de 0,81 et se distingue d'un groupe ok car l'indice au niveau 11 est faible (0,09). On retrouve le fait que la population française est typique de l'utilisation des signes (au niveau 9 : risque pour FR = 0,01 ; risque pour GR = 1 ; risque pour MX = 0,70). Notons au passage que les typicalités pour le groupe ok sont plus nuancées (au niveau 10 : risque pour FR = 0,71 ; risque pour GR = 0,66 ; risque pour MX = 0,25).

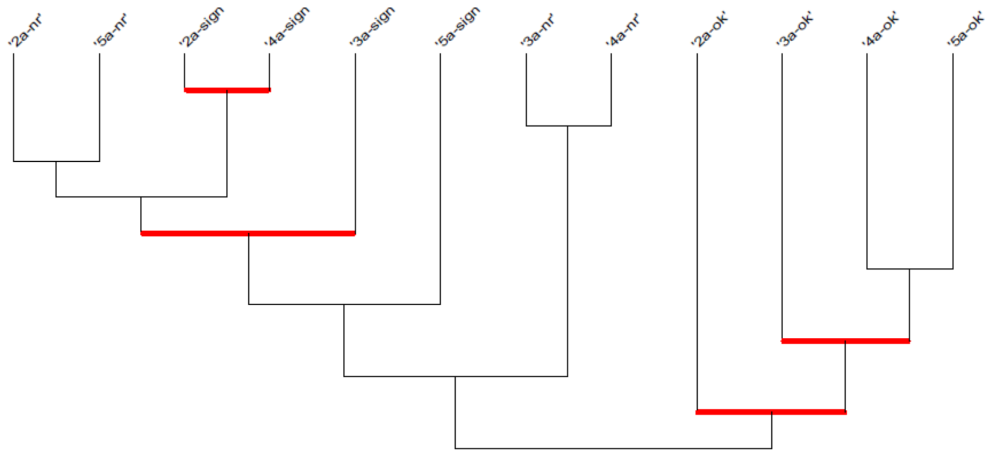


Figure 8. Arbre de similarités pour le registre R_A

Le diagramme de la figure 8 laisse penser que l'utilisation des signes opératoires gène l'entrée dans un problème et sa résolution.

Des nuances seraient à apporter si l'on prenait en compte les classes dans les arbres de similarité. On pourrait ainsi parler de l'influence de l'enseignement reçu pendant l'année scolaire, ce qui pourrait préciser l'influence culturelle. Une étude plus approfondie sur un plus grand nombre de classes et mieux réparties dans chaque pays concerné serait nécessaire pour aller plus avant.

2.3. Le cas des types de tâches travaillés : T^1 ; T^2 ; T^3 ; T^4_B

Par delà les nationalités, on s'aperçoit que les items T^1_A, T^1_B, T^3_B et T^4_B ont un fort taux de réussite (pour T^1_A et T^4_B aucune tolérance n'est appliquée). Ce n'est pas une surprise puisque l'on dispose à ce niveau d'enseignement d'une technique de conversion : le dénombrement par comptage des éléments des collections présentées. Les taux indiquent alors que non seulement le dénombrement de collection dont le cardinal est proche de trente est maîtrisé par beaucoup d'enfants, mais qu'il en est également de même pour la comparaison de deux nombres écrits dans R_A (effectuée souvent mentalement car, pour T^1_B, les nombres sont très rarement écrits). Les types de tâches *dénombrer une collection* et *comparer deux nombres dans R_A* sont routiniers pour une très large majorité d'élèves

Nous y voyons ici des types de tâches et des techniques qui sont reconnus et travaillés dans les trois pays. Ceci est confirmé par les manuels scolaires des trois pays où ces types de tâches et techniques sont travaillés dès les premières pages. Notons que l'investissement est sans doute plus fort pour la population grecque comme semble l'indiquer les taux de réussites plus élevés pour ces 4 items (cf. annexe 1).

On note tout de même deux différences entre T^3_B d'une part et T^1_A, T^1_B et T^4_B d'autre part : il y a un plus grand taux de « nr » qui s'explique en partie par des élèves qui dénombrent les deux sous-collections sans répondre à la question et il y a un taux plus faible de « ok » qui s'explique aussi en partie par le fait que 13% d'élèves font une somme après dénombrement ce qui augmente la probabilité de faire des erreurs. Quoiqu'il en soit, il paraît clair que le fait d'avoir, pour T^3_B, deux sous-collections avec des unités graphiques différentes (vache ou cheval) modifie ce que l'on pourrait appeler la « composante cognitive » du type de tâches *dénombrer une collection*[8].

On remarque que si T^3_A est un type de tâches bien identifié et travaillé, la réussite pour les nombres donnés dépasse à peine la moitié de l'effectif, ce qui fait une différence avec le dénombrement d'une collection. Ainsi, une grande différence de traitement des deux versions de T^3 apparaît. Pour T^3_B, seul 13% des élèves font un traitement dans R_A après un dénombrement des deux sous-collections d'animaux, les autres reconnaissent un problème simple de dénombrement par comptage (ils dénombrent simplement une collection d'animaux).

Pour les types de tâches travaillés que sont T^1_A, T^1_B, T^3_B, T^4_B et, dans une moindre mesure T^3_A, si le registre de l'énoncé modifie évidemment l'activité des élèves, il ne semble pas influencer la stratégie de résolution qui consiste à choisir R_A comme registre pour effectuer les traitements (avec donc une conversion dans le cas d'un énoncé dans R_B). Majoritairement les procédures observées sont les suivantes :

- T^1_A : technique de comparaison dans R_A ;
- T^1_B : dénombrement par énumération (technique de conversion $R_B \rightarrow R_A$) puis technique de comparaison dans R_A ;
- T^3_A : technique de somme dans R_A ;
- T^3_B et T^4_B : dénombrement par énumération (technique de conversion $R_B \rightarrow R_A$).

T^2 est également, dans une moindre mesure, un type de tâches étudié au niveau considéré. Globalement, pour T^2, on note une très forte tendance à faire un traitement dans R_A pour résoudre ce type de tâches[9]. Comme pour les types de tâches précédemment étudiés (T^1, T^3_A, T^3_B et T^4_B), pour ce type de tâches T^2 le registre de l'énoncé n'influence pas les stratégies des élèves (i.e. le choix du registre R_A pour effectuer les traitements).

---

[8] Le fait d'avoir une collection en désordre, il s'agit d'une différence avec T^4_B, ne semble pas jouer vu la réussite à T^1_B.

[9] On pourrait détailler selon le registre de l'énoncé : pour T^2_A, la procédure graphique est plus coûteuse, mais ce n'est plus le cas pour T^2_B (cf. section 1.4.3).

La chute de réussite, en proportion de l'effectif, de 76% pour T^2_A à 51% pour T^2_B s'explique bien par le fait que les élèves ont appris à faire des soustractions de ce type, mais si le registre R_B permet une meilleure compréhension de l'énoncé, il n'en reste pas moins que l'usage de la soustraction dans R_A nécessite d'abord de dénombrer les collections, avec de possibles (mais sans doute rares) erreurs, et ensuite de faire la soustraction, avec un possible oubli des nombres car beaucoup d'enfants ne notent pas les nombres obtenus alors que l'on observe des traces de comptage[10].

Pour ces types de tâches travaillés et plus spécifiquement pour T^2, tout se passe comme si le registre R_A « happait » l'activité mathématique de l'élève alors que ce n'est pas nécessairement le registre le plus efficace et le plus sûr pour résoudre le problème (cf. section 1.4.3). Notons que, si le registre R_A ne happe pas l'activité mathématique pour T^3_B – par exemple en faisant la somme des cardinaux des deux sous-collections – c'est en fait parce que l'élève le reconnaît comme un autre type de tâches *dénombrer une collection* qui a une forte présence institutionnelle.

2.4. Types de tâches non travaillés à l'école : T^4_A ; T^5

S'il semble que le registre de l'énoncé n'influence pas les stratégies de résolution des élèves pour les types de tâches travaillés, en revanche, l'influence est grande pour les types de tâches en marge de l'enseignement reçu. Ces types de tâches sont ici T^4_A et T^5.

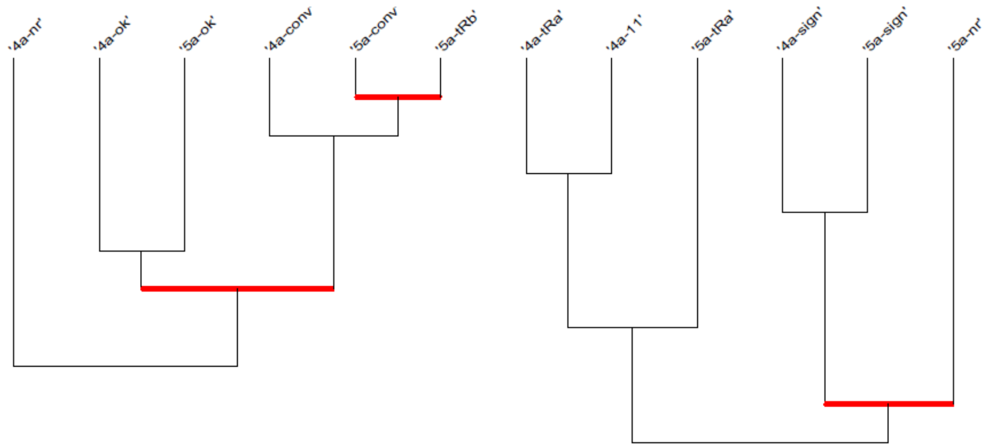


Figure 9. Arbre des similarités pour T^4_A et T^5_A

[10] Cette explication est également valable pour la petite différence de réussite aux items T^1_A et T^1_B. Mais on note alors une grande différence dans la maîtrise des techniques pour effectuer une comparaison ou une soustraction dans R_A.

T^4_A et T^5 sont deux types de tâches qui ne sont pas, ou très peu, travaillés et pour lesquels on ne dispose pas de l'opération idoine. L'arbre des similarités pour T^4_A et T^5_A (cf. figure 9) montre une grande similitude des deux problèmes (exception faite de l'indicateur « nr ») :

- Les réussites sont liées au niveau 5 (indice=0,98) et se regroupent avec les conversions dans R_B pour résoudre le problème au niveau significatif 6 (indice = 0,92). Plus spécifiquement pour T^4_A, le taux de réussite global de 45% passe à 62% pour la sous-population des élèves (effectif 76) qui ont fait une conversion à cet item. Le pourcentage de 62% pour la sous-population est significativement supérieur au pourcentage de la population totale puisque, par une approximation normale, au seuil 1% la fréquence d'un échantillon de la population totale est inférieure à 53%.
- De leur côté les traitements dans R_A – avec la réponse 11 à T^4_A – et les indicateurs « sign » forment un groupe séparé, notamment des indicateurs de réussite.

Nous avons repéré que très souvent, pour T^5_B, l'utilisation de R_B était rarement exclusive et que beaucoup d'élèves ont utilisé des procédures hybrides (codage tRa=tRb=1). En particulier, la stratégie qui consiste à faire une part, puis à faire deux autres parts équipotentes et enfin à rectifier ces quantités ne peut être faite que par une comparaison des nombres des trois parts, par comptage, la comparaison se faisant dans R_A (et mentalement, cf. la discussion sur T^1 en section précédente). Ceci explique sans doute le relatif bon taux de réussite à cet item T^5_B.

La différence de réussite entre T^5_A et T^5_B peut s'expliquer par le fait que les procédures hybrides sont favorisées par un énoncé dans R_B. On peut en effet supposer qu'une conversion $R_B \rightarrow R_A$ n'est pas problématique et que, puisque l'on donne le problème dans R_B, la responsabilité d'utiliser R_B n'est pas à la charge de l'élève. Par ailleurs, la différence de réussite entre T^5_B et T^2_B semble pouvoir s'expliquer en grande partie par le fait que T^2_B est travaillé, et donc R_A « happe » l'activité mathématique, contrairement à T^5_B. Ainsi, un travail dans R_B semble possible pour T^5_B et non pour T^2_B.

Ces résultats permettent d'émettre une hypothèse sur l'importance de coordonner ces deux registres, R_A et R_B, dans les procédures de résolution pour un type de tâches non routinier.

Conclusion

À partir de cette étude internationale sur les problèmes numériques en fin de première année de l'école primaire, nous avons mis en évidence l'influence conjointe des registres de représentation et des praxis sur l'activité mathématique des élèves. Plus précisément, nous pouvons préciser une hypothèse sur l'importance du registre de représentation pour certains types de tâches.

Pour un type de tâches travaillé, on suppose qu'un élève reconnaît ce type de tâches, le registre dominant pour le traitement est R_A – et ce, même si celui-ci n'est pas le meilleur registre pour le traitement (cf. $T^2{}_B$). Il n'y a de ce fait pas de réelle influence du registre de l'énoncé sur les stratégies des élèves même si, comme nous l'avons dit, les activités changent puisque cette stratégie globale peut nécessiter une conversion selon l'énoncé.

On peut avancer deux explications :
- le coût d'une procédure graphique par rapport à une procédure numérique, surtout lorsqu'il y a un minimum de maîtrise de la R_A-praxis – ce qui est notamment le cas pour les types de tâches qui ont été travaillés ;
- lorsque l'on traite d'un type de tâches qui a été travaillé, le rôle de l'institution est justement de développer une praxis qui est, étant donné que l'institution favorise R_A, une R_A-praxis.

Pour les autres types de tâches, le registre de l'énoncé influence largement les traitements et la réussite. Car si l'énoncé se situe dans R_A, on a tendance à y rester ce qui ne favorise pas forcément la réussite. Cette tendance semble venir directement du phénomène précédent qui favorise R_A. En revanche, un énoncé dans R_B permet de mieux appréhender un type de tâches non travaillé.

Comme le signale Duval, la coordination des registres est importante. Mais il nous semble que cette importance ne s'exprime pas de la même manière selon le type de tâches :
- s'il est travaillé, l'important est de maîtriser la conversion $R_B \rightarrow R_A$ et la R_A-praxis enseignée (cf. par exemple $T^3{}_A$ où beaucoup d'élèves ne maîtrisent pas la technique de la somme) ;
- s'il n'est pas travaillé, l'important est une bonne coordination des deux registres, sans se limiter à la maîtrise des conversions, comme par exemple lors d'une procédure qui est principalement un traitement dans un des deux registres mais avec un contrôle de l'activité dans l'autre registre (cf. $T^5{}_B$).

Néanmoins, les différents points explicités sont directement liés à l'enseignement reçu que ce soit à travers des cultures différentes, comme nous l'avons mis en évidence avec les profils de chaque pays, ou plus vraisemblablement à travers des profils d'activité enseignante dans les classes, ce qui nécessite une étude plus approfondie. Globalement, il nous semble que l'enseignement se focalise un peu trop sur le registre de l'écriture chiffrée. Car si cela paraît normal pour le développement des praxis numériques (ce registre est tout de même plus puissant que le registre graphique), il n'en reste pas moins que cela entrave l'activité des élèves lorsqu'ils sont confrontés à un type de tâches nouveau car l'enseignement reçu ne permet pas d'entrer sereinement dans des problèmes plus complexes ni de choisir le(s) registre(s) pour les traitements.

Bibliographie

BOSCH, M. & CHEVALLARD, Y. (1999). Sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19.1, 77-123.

CARNEY, R. L., & LEVIN, J. R. (2002). Pictorial illustrations still improve student's learning form text. *Educational psychology review*, 14 (1), 101-120.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19.2, 222-265.

DUVAL, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang, Berne.

DUVAL, R. (1993). Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactiques et de sciences cognitives*, 5, IREM de Strasbourg.

ELIA, I., GAGATSIS, A., & DEMETRIOU, A. (2007). The effects of different modes of representation on the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction*, 17, 658-672.

GRAS R., RÉGNIER J.-C., GUILLET F. (Eds) (2009) *Analyse Statistique Implicative. Une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités.* RNTI-E-16 Toulouse: Cépaduès

LEMONIDIS, C. (1990). *Conception, réalisation et résultats d'une expérience d'enseignement de l'homothétie*. Thèse de Doctorat de l'Université de Strasbourg. IREM de Strasbourg.

NIKOLANTONAKIS, K. & VIVIER, L. (2009). La numération en base quelconque pour la formation des enseignants du premier degré en France et en Grèce. Une étude articulant registres et praxéologies, in *Chypre et France, Recherche en didactique des mathématiques*, Gagatsis, A., Kuzniak, A. Deliyianni, E. & Vivier, L. éditeurs. Lefkosia, Chypre 2009.

NIKOLANTONAKIS, K. & VIVIER, L. (2011). Registres et praxis pour la numération de position en base quelconque – une étude statistique en France et en Grèce, in Régnier J.C., Gras R., Spagnolo F., Di Paola B. (Eds.) *Analyse Statistique Implicative: Objet de recherche et de formation en analyse des données, outil pour la recherche multidisciplinaire. Prolongement des débats.* P. 165-186. QRDM Quaderni di Ricerca in Didattica - GRIM ISSN on-line 1592-4424, Palerme: Université de Palerme.
Consultable : http://math.unipa.it/~grim/QRDM_20_Suppl_1.htm

VERGNAUD, G. (1982). “A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems” in: Carpenter, T., Moser, J. and Romberg, T. (eds). *Addition and subtraction: a cognitive perspective*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, hillsdale, New Jersey, pp. 39-59.

VERGNAUD, G. (1991). La théorie des champs conceptuels, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol. 10 (2).

Remerciements

Nous remercions les huit professeurs des écoles et leurs élèves pour leur participation et leur implication.

Nous tenons également à remercier Hélène Vivier pour la réalisation des dessins.

Les auteurs

DAVID BLOCK
CINVESTAV, Mexique
davidblock54@gmail.com

KOSTAS NIKOLANTONAKIS
Université de Macédoine Ouest, Grèce
nikolantonakis@noesis.edu.gr

LAURENT VIVIER
LDAR - Université Paris-Diderot
laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr

Annexe 1 : Tables des pourcentages

Les pourcentages en gras concernent les 192 élèves qui ont fait l'ensemble du test et les pourcentages alignés à droite sont ceux relatifs à chaque pays dans cet ordre :

FR (61 élèves soit 32%) ; GR (45 élèves soit 23%) ; MX (86 élèves soit 45%)

Les pourcentages sont arrondis à l'entier le plus proche.

T1	NR	OK
A	**3%**	**93%**
FR	8%	87%
GR	0%	100%
MX	0%	93%
B	**4%**	**88%**
FR	8%	79%
GR	0%	98%
MX	2%	90%

T4	NR	OK
B	**2%**	**88%**
FR	0%	82%
GR	0%	100%
MX	5%	85%

T2	NR	OK	conv	tRa	tRb	repR	sign
A	**11%**	**76%**	**18%**	**87%**	**1%**	**74%**	**8%**
FR	13%	72%	11%	82%	2%	80%	13%
GR	0%	87%	0%	100%	0%	100%	0%
MX	16%	73%	33%	84%	0%	57%	9%
B	**10%**	**51%**	**85%**	**74%**	**15%**	**38%**	**4%**
FR	16%	48%	79%	57%	25%	28%	5%
GR	11%	47%	91%	89%	2%	0%	0%
MX	6%	55%	86%	79%	15%	65%	6%

T3	NR	OK	conv	tRa	tRb	repR	sign
A	**15%**	**56%**	**7%**	**81%**	**3%**	**85%**	**24%**
FR	13%	67%	11%	80%	3%	87%	31%
GR	2%	58%	0%	98%	0%	98%	4%
MX	22%	47%	7%	73%	5%	77%	29%
B	**11%**	**70%**	**99%**	**13%**			**6%**
FR	2%	74%	100%	20%			8%
GR	0%	89%	100%	0%			0%
MX	24%	58%	99%	15%			7%

T4	NR	OK	conv	tRa	« 11 »	repR	sign
A	**9%**	**45%**	**38%**	**59%**	**18%**	**82%**	**10%**
FR	5%	52%	31%	70%	18%	92%	18%
GR	2%	38%	0%	98%	40%	98%	4%
MX	15%	43%	62%	33%	6%	66%	7%

T5	NR	OK	conv	tRa	tRb	repR	sign
A	**8%**	**45%**	**25%**	**67%**	**22%**	**77%**	**9%**
FR	11%	36%	31%	57%	23%	70%	11%
GR	0%	53%	0%	100%	0%	100%	7%
MX	10%	48%	34%	56%	34%	70%	9%
B	**5%**	**65%**	**82%**	**48%**	**46%**	**20%**	**7%**
FR	2%	52%	84%	39%	52%	20%	11%
GR	0%	80%	98%	98%	2%	2%	13%
MX	10%	66%	73%	28%	65%	30%	1%

Regroupement par pays du choix du registre pour le traitement et de l'indicateur « sign » (avec un regroupement de type de tâches significatifs pour plus de lisibilité)

		France	Grèce	Mexique
T^2, T^3, T^4 et T^5 dans R_A	R_A	72,1%	98,9%	61,3%
	R_B	9,3%	0%	12,8%
	sign	18,4%	3,9%	13,7%
T^2 et T^5 dans R_B	R_A	48,3%	93,3%	53,5%
	R_B	38,5%	2,2%	40,1%
	sign	8,2%	6,7%	3,5%

Annexe 2 : La version française des énoncés proposés aux élèves

Figure 1a : tâche T^1_A

Figure 1b : tâche T^1_B

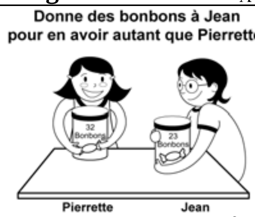


Figure 2a : tâche T^2_A

Figure 2b : tâche T^2_B

Figure 3a : tâche T^3_A

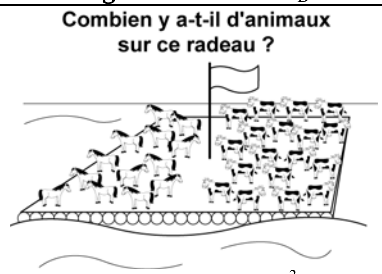


Figure 3b : tâche T^3_B

Dans une classe, il y a 7 rangées de 4 tables. Combien y a-t-il d'élèves ?

Figure 4a : tâche T^4_A

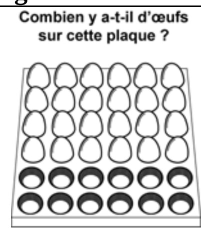


Figure 4b : tâche T^4_B

Figure 5a : tâche T^5_A

Figure 5b : tâche T^5_B