

**PATRICK GIBEL ET MHAMMED ENNASSEF**

**ANALYSE EN THÉORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES D'UNE  
SÉQUENCE VISANT À ÉVALUER ET À RENFORCER LA  
COMPRÉHENSION DU SYSTÈME DÉCIMAL**

**Abstract. Analysing within theory of didactical situations a school sequence about the comprehension of decimal number system**

The purpose of this article is to analyse, within the framework of the theory of didactical situations in mathematics, a sequence aiming to evaluate and to develop children's ability to use their knowledge about the comprehension of decimal number system in a first grade class (students aged 6-7 years) in a primary school. The sequence, mainly based on a communication's game, consists in carrying out conversions of numbers from the symbolic representation to the collection of the corresponding quantity of objects and vice versa. The game allows the children to test validity and suitability of their procedure. Moreover this sequence allows the teacher to evaluate, in situation, the degree of acquisition of the different representations of number in the decimal number system.

**Résumé.** L'objectif de cet article est d'analyser, en Théorie des Situations Didactiques (TSD), une séquence de classe destinée à évaluer et à développer, en situation, la capacité des élèves de CP, âgés de 6-7 ans, à mettre en œuvre leurs connaissances et leurs savoirs relatifs à la compréhension du système décimal. La séquence étudiée repose principalement sur la dévolution d'un jeu de communication visant à mettre en relation, par une procédure rapide, fiable et adéquate, l'écriture chiffrée usuelle d'un nombre et la collection matérielle correspondante et vice versa. La situation de jeu permet aux élèves d'éprouver la validité et l'adéquation de leurs procédures. De plus cette séquence offre à l'enseignant la possibilité d'évaluer, en situation, l'appropriation des différentes désignations du nombre dans notre système de numération.

**Mots-clés.** Situation didactique, système décimal, représentation, situation de communication, stratégies, répertoire didactique, répertoire de représentation.

---

**Introduction**

Cet article vise principalement à étudier les effets d'une séquence de classe sur les acquisitions des élèves, en termes de connaissances et de savoirs, dans le domaine de la numération décimale.

La séquence étudiée, mise en œuvre en classe de Cours Préparatoire, a pour objectif d'évaluer et de renforcer la compréhension de notre système de numération chez des élèves âgés de 6 à 7 ans. Plus précisément elle vise à permettre aux élèves de s'approprier les différentes désignations orales et écrites des nombres (entre 70

et 150) en les reliant à des collections d'objets structurées, obtenues par réalisation de groupements.

Dans l'article nous entreprenons l'étude, en Théorie des Situations Didactiques (TSD), d'une séquence de classe s'articulant principalement autour d'une situation de communication, proposée à plusieurs reprises, sous la forme d'un jeu par équipe.

Dans la première partie de cet article, nous présenterons la spécificité de cette étude et préciserons ses liens avec certaines recherches conduites récemment dans le domaine de la numération au cycle des apprentissages fondamentaux (élèves âgés de 6 à 8 ans).

Dans la deuxième partie, nous reviendrons succinctement sur la classification des situations, pour les lecteurs non familiarisés avec la TSD, et nous préciserons la notion de « répertoire didactique ». Cette dernière constitue un élément important pour l'analyse de cette séquence ; en effet nous l'utiliserons pour produire une analyse a priori détaillée des procédures dans la situation de jeu étudiée, de plus elle nous permettra d'analyser, a posteriori, l'écart entre les procédures attendues et celles effectivement produites par les élèves.

Dans la troisième partie, nous analyserons l'ingénierie mise en œuvre, en nous appuyant sur l'analyse a priori de la situation de jeu et nous expliciterons la logique de l'articulation des différentes situations.

Dans la quatrième partie, nous présenterons et analyserons les principaux résultats de l'étude. Nous prolongerons cette réflexion par une dernière partie mettant en évidence le rôle de l'activité d'entraînement qui clôt le dispositif et vise à institutionnaliser les liens entre les différentes représentations sémiotiques du nombre (Duval, 1995) : désignations orales, écritures symboliques, collection dessinée. Ces représentations produites par les élèves sont mises en relation avec la collection matérielle, elles relèvent de différents registres sémiotiques (Ibid.).

Cette étude vise à apporter des éléments de réponse aux questions suivantes :

En quoi l'ingénierie proposée permet-elle d'évaluer et de renforcer les connaissances du système décimal des élèves de C.P. ? En quoi favorise-t-elle l'accès aux connaissances et aux savoirs relatifs aux différents aspects de notre système de numération ? Pourquoi permet-elle de faire évoluer l'interprétation ou les interprétations que les élèves donnent aux différentes désignations écrites des nombres ?

Quel prolongement de la situation de jeu convient-il de mettre en œuvre afin de développer la capacité des élèves à mettre en relation les différentes désignations écrites et orales du nombre ?

## 1. Aspects décimal et positionnel de notre système de numération

L'acquisition des savoirs fondamentaux inhérents à la compréhension de notre système de numération nécessite une maîtrise de ses deux principaux aspects : positionnel et décimal (Serfati, 2005). La maîtrise de l'aspect positionnel correspond à la capacité de l'élève à interpréter chaque chiffre de l'écriture d'un nombre en référence au groupement correspondant (dizaine, centaine, etc.). L'aspect décimal est lié d'une part à la perception des relations entre les différents groupements (relations entre centaine et dizaine), d'autre part à la récursivité des groupements.

L'article de Tempier (2010) vise à étudier l'origine des difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage de la numération décimale au cycle des approfondissements. L'auteur précise que les difficultés concernent plus particulièrement l'aspect décimal de la numération : la difficulté à voir les groupements et leur rôle dans l'écriture chiffrée usuelle d'un nombre, à comprendre leur pertinence, mais aussi les difficultés à opérer avec ces groupements et à travailler avec deux groupements différents. Tempier présente une étude visant à établir que les contraintes institutionnelles et l'utilisation de certains manuels, parmi les plus utilisés par les enseignants du CE2 en France, ne prennent pas suffisamment en compte les difficultés des élèves énoncées précédemment. En effet les activités des manuels analysés, sont axées, principalement sur l'aspect positionnel de la numération et n'accordent que très peu de place à l'aspect décimal, pourtant essentiel à la compréhension et à l'usage de la numération et source de nombreuses difficultés référencées et analysées initialement par Janvier et Bednarz (1984).

La séquence que nous avons choisi d'analyser dans cet article présente un réel intérêt du point de vue de l'apprentissage de la numération si l'on se réfère à l'article de Tempier : elle permet en effet de travailler les aspects positionnel et décimal.

Cependant pour analyser dans le cadre de la TSD, les connaissances et les savoirs mis en œuvre par les élèves en situation d'apprentissage, il est nécessaire de pouvoir identifier, avec précision, les connaissances et les savoirs dont ils sont censés disposer ; nous allons donc être amenés à redéfinir, en partie 2, d'une part la classification des situations et TSD et d'autre part la notion de « répertoire didactique ».

## 2. Classification des situations et modélisation du fonctionnement des connaissances en TSD

### 2.1. Classification des situations en TSD

Cette section vise à proposer la définition de certains concepts fondamentaux de la TSD, concernant la classification des situations, utilisés dans le cadre de cette recherche. Pour une présentation détaillée de cette théorie nous renvoyons le lecteur à Brousseau (1997) et au site de Guy Brousseau<sup>1</sup>.

#### 2.1.1. Notion de situation

Nous commençons tout naturellement par définir la notion de “ situation ” : les conditions d’une utilisation particulière d’une connaissance mathématique sont considérées comme formant un système appelé “situation”.

A chaque objet de savoir mathématique, on peut associer un ensemble de situations dont la résolution nécessite la mise en œuvre de cet objet de savoir. Certaines de ces situations sont des situations d’enseignement, également appelées situations didactiques, d’autres sont des situations non didactiques.

#### 2.1.2. Classification en TSD des différents types de situation d’enseignement: Situation didactique, situation adidactique

En TSD la notion de « situation didactique » se définit, plus précisément, de la façon suivante : c’est un ensemble de rapports établis explicitement et/ou implicitement entre un élève (un groupe d’élèves), un certain milieu (instruments ou objets) et un système éducatif (l’enseignant) aux fins de faire approprier à ses élèves un savoir constitué ou en voie de constitution.

Brousseau (1997) explicite comme suit la notion de situation adidactique : « Une situation adidactique est un problème particulier de mathématique, que l’on peut associer à l’enseignement d’un savoir bien identifié. Ce savoir doit être le moyen privilégié de solution ; les autres savoirs et connaissances disponibles qui pourraient permettre à sa place la résolution doivent être trop coûteux à mettre en œuvre. »

Il précise : « Les situations adidactiques sont les situations d’apprentissage dans lesquelles le maître a réussi à faire disparaître sa volonté, ses interventions, en tant que renseignements déterminants de ce que l’élève va faire : ce sont celles qui fonctionnent sans l’intervention du maître au niveau des connaissances ». (Brousseau, 1997)

---

<sup>1</sup> [www.guy-brousseau.com](http://www.guy-brousseau.com)

La situation de jeu, objet de notre étude, est une situation adidactique assimilable plus particulièrement à une « situation d'action » se caractérisant ainsi : elle consiste à placer l'enfant devant une situation vérifiant les deux conditions suivantes :

(Condition 1) Elle pose à l'élève un problème dont la meilleure solution, dans les conditions proposées, est la connaissance à enseigner.

(Condition 2) Il puisse agir sur elle et qu'elle lui renvoie de l'information sur son action.

Dans le glossaire de didactique de Brousseau<sup>2</sup>, le milieu et l'actant sont définis ainsi : « Dans une situation d'action, on appelle "milieu" tout ce qui agit sur l'élève ou / et ce sur quoi l'élève agit. L'actant est « ce » qui dans le modèle agit sur le milieu de façon rationnelle et économique dans le cadre des règles de la situation. En tant que modèle d'un élève ou plus généralement d'un sujet, il agit en fonction de son répertoire de connaissances. »

La notion de répertoire de connaissances utilisée par Brousseau sera reprise et développée dans la section suivante. Nous expliciterons la notion de « répertoire didactique », en effet celle-ci nous sera particulièrement utile lors de l'analyse de la séquence.

Pour étudier les connaissances des élèves relatives au système décimal, il nous apparaît pertinent de proposer aux élèves une situation adidactique, plus précisément une situation d'action, telle que les conditions qui la définissent requièrent, chez les élèves, la mobilisation de leurs connaissances pour répondre à la situation et que cette dernière lui renvoie une rétroaction lui permettant de constater la réussite ou l'échec de sa procédure.

## 2.2. Notion de répertoire didactique

L'ensemble des moyens, connaissances et savoirs, que le professeur met en œuvre, et ceux qu'il pense pouvoir attendre des élèves, par suite de son enseignement, constitue le répertoire didactique de la classe (Bloch et Gibel, 2011). Le répertoire didactique de la classe est identifiable à la part du répertoire mathématique que l'enseignant a choisi d'explicitier, notamment pour la validation et lors de l'institutionnalisation (Ibid.). L'expression désigne aussi l'ensemble des procédés qui vont permettre à l'élève de générer de nouvelles connaissances à partir de ses connaissances antérieures, et de nouveaux énoncés (calculs, formules, déclarations).

La fonction du répertoire didactique est de faciliter le travail et la communication dans la classe, notamment en donnant à l'élève les moyens de produire ou de retrouver, et donc de mettre en œuvre, au moment voulu, une action, une suite

---

<sup>2</sup> <http://daest.pagesperso-orange.fr/Pages%20perso/Brousseau.htm>

d'actions, une formulation ou une justification (Gibel, 2004). Les situations choisies par l'enseignant, lors de l'apprentissage d'une notion mathématique, déterminent très fortement la capacité de l'élève à organiser, en confrontation aux milieux proposés, ses procédures de résolution et donc son répertoire (Ibid.).

Le chercheur en didactique qui souhaite analyser le fonctionnement des connaissances des différents protagonistes peut espérer avoir accès au répertoire didactique de la classe. Sachant, bien évidemment, que le répertoire effectif d'un élève, c'est-à-dire le répertoire effectivement utilisé par l'élève lorsqu'il est confronté à une situation d'enseignement, peut différer du répertoire didactique de la classe. Nous définissons donc le répertoire didactique de l'élève comme l'ensemble des moyens, connaissances et savoirs, effectivement mobilisés par l'élève en réponse à une situation dévolue par l'enseignant.

### 2.3. Répertoire de représentation

Le répertoire de représentation est une composante du répertoire didactique. Il est constitué de signes, schémas, symboles, figures, il convient d'y adjoindre également les éléments langagiers (énoncés oraux et/ou écrits), permettant de nommer les objets rencontrés, de formuler les propriétés et les résultats.

L'observateur, pour effectuer une analyse didactique de la séquence objet d'étude, va devoir effectuer une analyse sémiotique des observables qui, selon lui, ont une influence significative sur le déroulement de la séquence et entrent précisément dans le cadre de sa recherche.

Le répertoire de représentations, défini par Bloch et Gibel (2011) comporte deux composantes liées à la chronogenèse (pour la première) et au milieu de la situation (pour la seconde):

- une composante liée au répertoire antérieur, c'est-à-dire les différentes représentations liées aux connaissances antérieures ;
- une autre composante, qui apparaît lorsque l'enseignant dévolue aux élèves une situation d'apprentissage : l'élève mobilise, par confrontation aux différents milieux, des connaissances de son répertoire. Cette utilisation des connaissances lui permet de manifester et de construire de nouvelles représentations liées à la situation. Cette composante relève de ce que nous appelons le *système organisateur*, que nous explicitons ci-après.

Rappelons que selon Brun (1994) les représentations sont "l'interface entre connaissances et situation", ce qui est en adéquation avec la notion de répertoire de représentations tel que nous l'avons précédemment défini.

L'identification des deux composantes ci-dessus amène donc à distinguer dans le répertoire didactique deux types d'objets : d'une part la collection d'énoncés que nous appelons *registre des énoncés*, et d'autre part ce qui permet de l'organiser et

de l'utiliser que nous désignons par *système organisateur*, tels que les a définis Gibel (2004).

Le système organisateur est ce qui permet à l'élève de retrouver ou de réactiver des énoncés déjà rencontrés dans des situations antérieures, mais aussi de générer de nouvelles formules en articulant entre eux certains énoncés, ou en les combinant entre eux afin de répondre à la situation.

Dans la modélisation du fonctionnement des connaissances, en théorie des situations, celles-ci apparaissent comme les moyens hypothétiques, pour le sujet, de prendre des décisions afin de produire des actions, des formulations ou des justifications. L'utilisation des connaissances et des savoirs par confrontation à différentes situations, didactiques et adidactiques, nous conduit à distinguer dans le répertoire didactique de l'élève plusieurs composantes : le répertoire de représentations, le répertoire de décisions et le répertoire d'actions.

#### 2.4. Répertoire de représentation, répertoire de décision et répertoire d'action mobilisés en situation adidactique

L'ingénierie mise en œuvre, dans le cadre de cette recherche, repose sur la dévolution aux élèves d'une situation de jeu, de nature adidactique. Sa résolution nécessite, l'usage de leur répertoire de représentation. En effet ces derniers, pour répondre à la situation, devront se référer à des situations rencontrées précédemment. Ainsi, par l'usage de leur répertoire de représentation, ils décideront de la mise en œuvre d'une suite d'actions sur le milieu matériel. Cette suite d'actions, valides ou erronées, relève de l'usage de leur répertoire d'action. Le résultat obtenu conduit les élèves à modifier leur répertoire de représentation.

Le schéma ci-après permet de modéliser le fonctionnement du répertoire didactique de l'élève confronté à une situation à dimension adidactique.

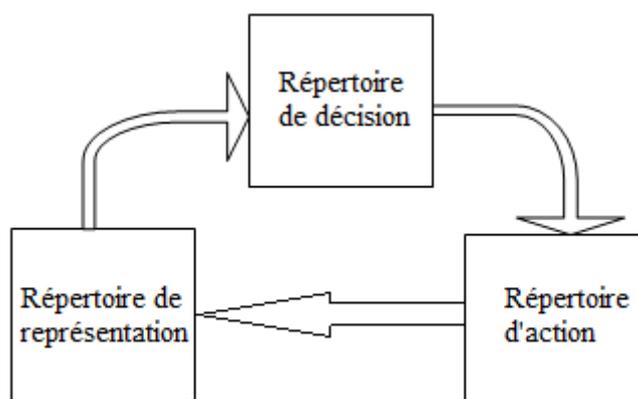


Schéma 1. Modélisation du fonctionnement du répertoire didactique

### de l'élève en situation d'apprentissage

Nous nous efforcerons d'analyser, en TSD, à partir des procédures mises en œuvre par les élèves, les savoirs et les connaissances mobilisés pour répondre aux situations adidactiques, plus précisément en situation d'action et en situation de formulation. L'évolution des procédures mises en œuvre par les différentes équipes, au cours des jeux successifs, devrait constituer un indice révélateur de l'apprentissage des élèves. Le dispositif vise à analyser les procédures initiales des élèves et la manière dont elles évoluent au cours de la séquence.

## 3. Présentation et analyse a priori de la séquence

### 3.1. Présentation et enjeux didactique de la situation de jeu

Cette situation de jeu a été proposée, initialement, à des élèves de CE1, dans le cadre des recherches menées au C.O.R.E.M.<sup>3</sup> Nous avons expérimenté cette situation de communication, dans la classe d'une enseignante de CP afin d'évaluer et de renforcer les connaissances et les savoirs de ses élèves inhérents à la compréhension et à l'usage du système décimal. Nous avons aménagé la séquence initiale de façon à l'intégrer dans la progression de l'enseignant. Nous nous sommes attachés à ne pas dénaturer la situation initiale, c'est-à-dire à conserver le caractère adidactique de la situation de jeu.

La situation de jeu offre à l'élève la possibilité de valider ou d'invalider les décisions relatives aux choix des connaissances et des savoirs mobilisés et à leurs usages pour répondre à la situation proposée. En effet la situation va renvoyer à l'élève un feed-back lui indiquant si l'équipe (binôme émetteur, binôme récepteur) a réussi ou échoué. Par conséquent elle vise à offrir à l'élève la possibilité d'accéder aux véritables raisons de savoir. En identifiant le champ d'utilisation de la connaissance, l'élève au cours des différents jeux enrichit son répertoire de représentation en lien avec son répertoire de décision (schéma 1). L'objectif de la séquence, dans sa globalité, est de permettre à l'élève d'établir, de développer et de renforcer les liens entre les différentes désignations du nombre (écrites et/ou orales) et les collections matérielles structurées par réalisation de groupements.

Le jeu se joue par équipe, chacune d'elle étant constituée de deux binômes : un binôme émetteur, « les préparateurs », et un binôme récepteur. Les préparateurs ouvrent une enveloppe dans laquelle ils découvrent un nombre, écrit en chiffres. Ils doivent alors réaliser, à partir du matériel mis à leur disposition, la collection correspondante. Ensuite ils la portent aux récepteurs, qui doivent produire l'écriture chiffrée usuelle du nombre de haricots de la collection.

---

<sup>3</sup> Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, voir le site [www.guy-brousseau.com/le-corem/presentation/](http://www.guy-brousseau.com/le-corem/presentation/)

L'équipe a gagné si le nombre écrit par les récepteurs est identique à celui donné initialement aux préparateurs

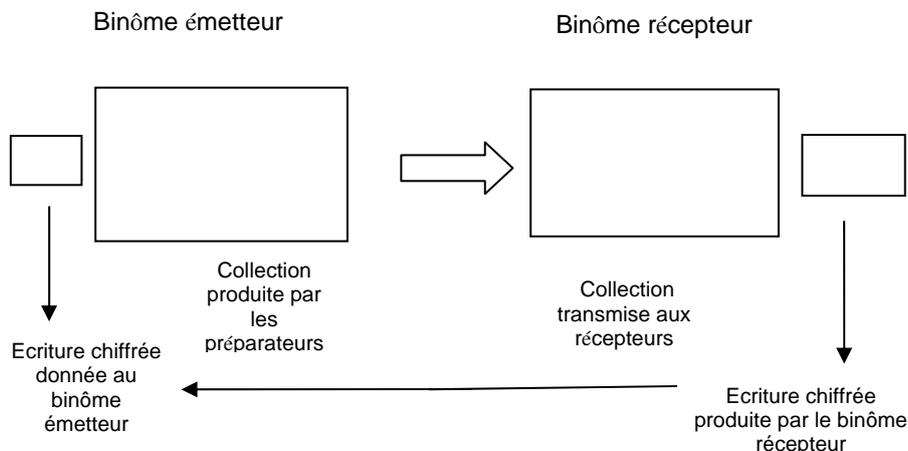
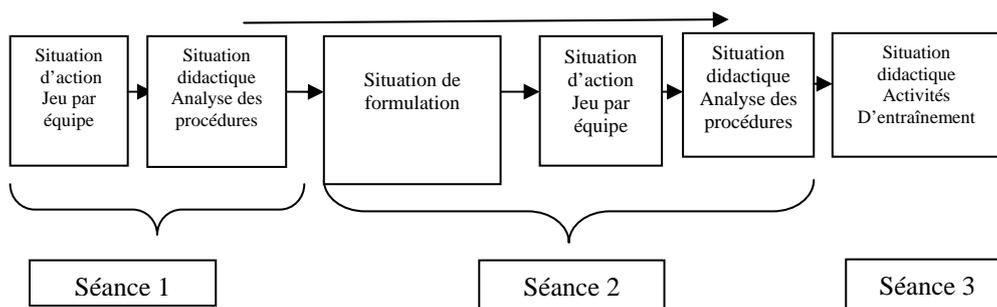


Schéma 2. La situation de jeu

### 3.2. Le déroulement de la séquence

Le schéma ci-dessous vise à expliciter l'articulation des différentes situations au cours des trois séances qui constituent la séquence objet de notre étude.



Schémas 3. Déroulement de la séquence : les différentes situations didactiques et adidactiques.

A l'issue de la première situation de jeu, la situation didactique est destinée à déterminer si les équipes ont réussi ou échoué, mais aussi à permettre aux émetteurs de formuler les décisions ayant motivé leurs actions, et aux récepteurs d'explicitier les principales difficultés auxquelles ils se sont heurtés.

En début de séance 2, les élèves sont mis en situation de formulation au sens de la TSD (Brousseau, 1997). Au sein de chaque équipe, les élèves formulent les stratégies utilisées et les difficultés rencontrées par chaque binôme et élaborent conjointement une procédure visant à faire gagner leur équipe. Le jeu qui suit permet aux élèves d'éprouver les stratégies formulées précédemment. La phase didactique proposée à l'issue du jeu a pour objet de déterminer les équipes gagnantes et de faire formuler les stratégies utilisées en déterminant leur validité, leur pertinence et leur fiabilité.

La séance 3 est une séance de réinvestissement des procédures mises en œuvre lors des situations de jeu et analysées lors des phases de mise en commun. Elle vise principalement à entraîner les élèves à produire, de façon fiable, efficace et rapide, les collections matérielles associées à chacune des représentations écrites au tableau par l'enseignante. L'enseignante va « jouer » sur les différentes désignations écrites du nombre (par exemple 73) en proposant soit l'écriture chiffrée usuelle, soit sa décomposition additive usuelle ( $70+3$ ), soit sa décomposition additive associée aux groupements réalisés ( $10+10+10+10+10+10+3$ ), soit son écriture littérale (soixante-treize), ou dans un autre registre, un dessin des groupements, les élèves vont devoir produire la collection matérielle correspondante (et vice versa). Ainsi les élèves vont s'approprier les différentes représentations du nombre en lien avec différents registres (Duval, 1996).

Le détail des phases de chacune des séances est proposé en Annexe 1.

### **3.3. Aménagement matériel et humain**

#### *Le milieu matériel*

Le matériel est mis à disposition des élèves sur une table au centre de la classe. Il est constitué de haricots (en grands nombres), de sachets en plastique, de gobelets, de grandes boîtes (destinées à recevoir la collection réalisée par les préparateurs), de boîtes de petites dimensions et de leurs couvercles, d'enveloppes, de feuilles de différentes couleurs, de feutres, d'aimants et de feuilles blanches.

#### *Organisation de l'espace classe*

Les préparateurs et les récepteurs doivent être éloignés dans la salle de classe de façon à ce que les récepteurs ne puissent pas prendre d'informations sur le nombre écrit en chiffres donné aux préparateurs, et ne puissent pas entendre les discussions entre les préparateurs.

#### *Modalité pédagogique*

Le jeu se joue par équipe ; chaque équipe est constituée d'un binôme émetteur et d'un binôme récepteur. Lors du jeu suivant les rôles seront inversés : les émetteurs deviendront récepteurs et inversement.

### 3.4. Le répertoire didactique de la classe dans le domaine de la numération

L'enseignante utilise, pour élaborer et mettre en œuvre ses séquences de mathématiques, dans le domaine numérique, le livre *Ermel CP, Apprentissages Numériques*<sup>4</sup>. Le tableau en Annexe 2 donne un aperçu des grandes étapes de sa progression (périodes 1 à 4) et permet de mettre en lumière les choix didactiques qui sous-tendent l'élaboration du répertoire didactique de la classe.

Les élèves ont travaillé l'aspect décimal du nombre, par la confrontation à la situation des carrelages (proposée aux élèves en fin de période 3) dans le but de donner du sens à l'écriture chiffrée usuelle des nombres (entre 1 et 69) en les reliant d'une part à une collection structurée sous forme de groupements par 10 et d'éléments isolés, d'autre part à la décomposition additive associée. De plus, lors de la séquence précédente ils ont travaillé la situation « Les fourmillions » à partir d'une collection comportant entre 300 et 400 objets (cf. Annexe 3), réalisant successivement des groupements par 10, puis des groupements par 100, afin de déterminer le nombre total d'éléments de la collection. L'enseignante a établi le lien entre les différents groupements réalisés (dizaine et centaine), et entre la collection structurée (par la réalisation des groupements) et l'écriture chiffrée du nombre. Si les élèves ont travaillé à de multiples reprises l'aspect « décimal » (réalisation de groupements par 10) de notre numération, ils n'ont cependant été confrontés à la récursivité des groupements que lors de la séquence précédente.

Les élèves ont travaillé l'aspect positionnel du nombre tout au long des périodes 2, 3 et 4. L'interprétation des écritures chiffrées, sous la forme (chiffre des dizaines et chiffre des unités), s'est appuyée sur l'étude des familles de nombres en lien étroit avec le tableau des nombres<sup>5</sup>. Ce dernier, élaboré par les élèves, vise une approche algorithmique de la suite des nombres 0 à 99 : il permet l'accès à la logique de construction de la suite écrite des nombres.

Du point de vue des connaissances arithmétiques de la suite orale des nombres, les élèves sont censés maîtriser le comptage de 10 en 10 jusqu'à 100. En ce qui concerne le comptage de 2 en 2 et de 5 en 5, l'enseignant considère qu'au-delà de 70, cet apprentissage est, pour une partie des élèves, en cours d'acquisition.

### 3.5. Analyse a priori de la situation de jeu

#### a) *Nature de la situation*

La situation de jeu est une situation d'action au sens de TSD. Elle vise un réinvestissement des connaissances et des savoirs acquis ou du moins censés être

<sup>4</sup> Ermel, *Apprentissages numériques, CP*, cycle des apprentissages fondamentaux, INRP, Hatier enseignants

<sup>5</sup> Ermel, module 2, *Approche algorithmique de la suite des nombres*, p. 282.

acquis lors des séquences précédentes, c'est-à-dire figurant dans le répertoire didactique de la classe définis ci-dessus. Cependant ce qui caractérise la situation de jeu étudiée c'est le fait que les élèves vont décider, par eux-mêmes, des stratégies à adopter pour permettre à leur équipe de gagner. Autrement dit ils vont utiliser leurs répertoires de représentation et de décision pour mettre en œuvre une stratégie et ainsi prendre conscience de son adéquation ou de son inadéquation.

*b) Les principales variables didactiques de la situation de jeu*

Le matériel à disposition est une variable didactique. L'enseignante a souhaité que les élèves puissent disposer des matériels utilisés lors de la précédente séquence, « Les fourmillions », dont le déroulement est détaillé en Annexe 3. Cependant nous avons fait le choix d'ajouter à ces objets (gobelet, sachet) d'autres matériels (enveloppes, petites boîtes, couvercles de petites boîtes). Ainsi les élèves vont devoir décider des matériels à utiliser ainsi que des actions à effectuer.

Le nombre d'éléments de la collection influe également sur les procédures que les élèves sont susceptibles de produire pour répondre à la situation. Nous avons choisi de proposer des écritures chiffrées comprises entre 70 et 150, afin de mettre en évidence le nécessaire recours à la réalisation de groupements, et de sensibiliser les élèves à la récursivité des groupements. Le choix du nombre d'éléments de la collection est une variable permettant une différenciation des apprentissages : le choix des nombres dévolus à chacune des équipes dépend du degré d'acquisition des compétences évalué lors des séquences précédentes.

La durée laissée aux binômes émetteurs et récepteurs, pour réaliser la tâche dévolue, est aussi une variable didactique de la situation. Le temps, laissé à chacun des binômes, est réduit lors du second jeu de façon à amener les équipes à optimiser leur stratégie en ayant recours à une stratégie fiable i.e. pouvant donner lieu à une vérification, efficace (en terme de résultat) et économe en temps, basée sur la production de groupements par 10 et la récursivité des groupements.

*c) Procédures de résolution envisagées*

Considérons à présent les procédures que les préparateurs sont capables de mettre en œuvre compte-tenu du répertoire didactique de la classe explicité précédemment. Parmi les procédures envisagées il est nécessaire de distinguer celles qui reposent sur la production d'une collection structurée, basée sur la réalisation de groupements, ou non structurée.

Parmi celles débouchant sur la réalisation d'une collection non structurée, la plus probable est celle-ci : les élèves, après avoir oralisé l'écriture chiffrée, mettent dans la boîte les haricots un à un en effectuant le dénombrement correspondant.

Parmi les procédures conduisant à la production d'une collection structurée on peut envisager que les élèves, après avoir identifié dans l'écriture chiffrée le nombre de

paquets de dix et le nombre de haricots isolés, utilisent du matériel afin de réaliser les groupements correspondants.

Considérons à présent les procédures que les récepteurs sont susceptibles de mobiliser. A partir d'une collection non structurée transmise par les préparateurs, les élèves peuvent effectuer un dénombrement de la collection non structurée, par un comptage un à un des éléments.

A partir d'une collection structurée transmise par les préparateurs, les récepteurs effectuent un dénombrement des paquets de 10, apparents et matérialisés, et procèdent ensuite à un dénombrement des haricots isolés, puis ils effectuent un traitement des informations afin de produire l'écriture chiffrée correspondante. Une autre procédure envisageable est : le comptage de dix en dix à partir des groupements réalisés et ensuite le surcomptage des haricots isolés pour obtenir le nombre total d'éléments, les élèves ayant alors à produire l'écriture chiffrée correspondante.

#### *d) Difficultés prévisibles*

Concernant les préparateurs les principales difficultés sont liées à la lecture et à l'interprétation du nombre écrit en chiffres et à la réalisation de la collection.

Concernant les récepteurs, les principales difficultés relèvent du dénombrement de la collection et du codage de celle-ci, sous forme d'une écriture chiffrée.

On peut s'attendre, pour les récepteurs ayant opté pour un dénombrement de la collection, à des difficultés lors du passage de la désignation orale à la désignation écrite.

De plus les difficultés du dénombrement sont très souvent liées à l'énumération de la collection ; les travaux de Briand (1993) et de Margolinas et Rivière (2008) ont permis de produire une analyse très précise de l'origine de ces difficultés.

### **3.6. Les situations adidactiques**

#### *La situation d'action*

Le jeu est assimilable à une situation d'action au sens de la T.S.D comme explicité dans la section précédente.

#### *La situation de formulation*

Les enjeux de la situation de formulation (Brousseau, 1997) sont multiples : d'une part favoriser, à l'intérieur de chaque équipe, la verbalisation des décisions prises par les préparateurs lors du jeu précédent, d'autre part permettre aux élèves de se mettre d'accord, compte-tenu des difficultés rencontrées par l'équipe, sur une stratégie adéquate pour gagner lors du prochain jeu.

Les équipiers savent que lors du prochain jeu les rôles des binômes seront inversés, ce qui contribue à les impliquer dans les interactions. Pour cela les émetteurs doivent formuler explicitement les décisions qu'ils ont prises lors du premier jeu et débattre avec les récepteurs des difficultés rencontrées par ces derniers. Ainsi les équipiers peuvent mettre en relation les décisions des préparateurs et leurs effets sur les tâches des récepteurs.

#### 4. Analyse des principaux résultats

##### 4.1. Présentation des résultats obtenus à l'issue du premier jeu

	Équipe 1	Équipe 2	Équipe 3	Équipe 4
Nombre donné aux préparateurs	97	88	78	148
Nombre écrit par les récepteurs	1005	90	66	49
Collection produite par les préparateurs et transmise aux récepteurs	Collection structurée 8 paquets de 10 haricots, 1 paquet de 9 haricots et 7 haricots isolés.	Collection non structurée  Les haricots sont placés, en vrac, dans un gobelet.	Collection structurée 7 paquets de 8 haricots.	Collection partiellement structurée  1 boîte de 1 haricot, de 4 sachets de 10 haricots et de 8 haricots isolés
Procédure mise en œuvre par les préparateurs	Réalisation de groupements, réalisation de 8 sachets de 10 et 1 sachet de 9 haricots.	Réalisation de la collection par dénombrement un à un.	Réalisation de 7 sachets, chacun contenant 8 haricots.	Réalisation de 4 sachets de 10, 1 haricot est placé dans un couvercle de boîte, et 8 autres haricots sont placés dans un autre couvercle de boîte.

##### *Procédures et résultats lors du premier jeu*

Le tableau des résultats ci-dessus fait apparaître qu'aucune des quatre équipes n'a gagné lors de ce premier jeu. Le recours à une situation, à dimension adidactique, permet ainsi de mettre en évidence le fait que les élèves (préparateurs et récepteurs) n'ont pas réinvesti, en situation de codage-décodage, la procédure de groupements par 10 (puis par 100), induite par l'enseignante lors de la situation précédente des fourmillions. En effet trois binômes préparateurs sur quatre ont eu recours à des procédures qui ne s'appuyaient pas sur la production des groupements par 10 (et par 100 pour l'équipe 4).

L'équipe 2 a fait le choix d'un recours au dénombrement un à un pour réaliser la collection et l'équipe 3 a choisi d'effectuer des groupements par 8. Ceci tend à établir que l'interprétation de l'écriture chiffrée, découverte dans l'enveloppe, ne réfère pas nécessairement pour les élèves à la constitution de groupements par 10 (et ensuite par 100).

L'étude met en évidence que le répertoire de représentation des élèves diffère du répertoire de représentation de la classe, d'où le réel intérêt de cette situation adidactique, qui permet de mettre en lumière les interprétations des élèves relatives à l'écriture chiffrée des nombres proposés. On constate ici que les difficultés des préparateurs relèvent de l'appropriation de l'aspect décimal de notre numération.

Les préparateurs de l'équipe 4 ont eu recours à la réalisation d'une collection en partie structurée (cf. tableau). Cependant le décodage du « 1 » correspondant au chiffre des centaines (148), s'est traduit matériellement par la mise en place d'un haricot isolé placé dans un couvercle de boîte. Cette décision n'est pas en adéquation avec la réalisation produite lors de la séance des fourmillions, où la centaine était matérialisée par un gobelet contenant dix sachets de dix haricots. Le « codage » des préparateurs n'est pas partagé par les émetteurs : ces derniers réunissent le haricot isolé et les huit haricots (correspondants aux unités) parvenant ainsi à l'écriture chiffrée « 49 ». L'intérêt de l'activité est ici de mettre en évidence la nécessité d'un codage commun, basé sur l'itération des groupements, le groupement par 100 doit nécessairement être produit comme réunion de 10 groupements de 10.

#### 4.2. Analyse des enjeux didactiques de la phase de mise en commun

Cette phase didactique (phase 5, séance 1 cf. Annexe 1) a pour objet d'amener les élèves à débattre de l'adéquation des stratégies utilisées par les émetteurs et les récepteurs. Elle vise d'une part à permettre aux préparateurs de formuler les décisions sur lesquelles reposent leurs stratégies et d'autre part à leur faire prendre conscience des effets de leurs décisions sur les possibilités de traitement de la collection qui s'offrent aux récepteurs. C'est également pour l'enseignante la possibilité de prendre conscience de la capacité des élèves à formuler les stratégies, observées en situation, et à utiliser leurs connaissances pour justifier leurs actions en référence au répertoire didactique de la classe.

Nous allons prendre comme objet d'étude deux épisodes et analyser les interactions lors du retour sur les stratégies utilisées par l'équipe 1 et par l'équipe 4.

**Équipe 1** : Charlène et Séverine (préparateurs), Lola et Flavie (récepteurs)

	M : Alors d'après vous, pourquoi... Stop, là, maintenant on écoute Vous voulez rejouer, vous voulez gagner? Alors là maintenant il faut savoir pourquoi on s'est trompées.	
--	---	--

	M : Charlène, Séverine, Lola et ...Flavie.	
	Lola : Moi, moi je sais pourquoi on s'est trompées. Je sais pourquoi on s'est trompées, parce qu'en fait Charlène et Séverine, ici (désignant un paquet réalisée par les préparateurs) elles ont mis neuf et pas dix. Elles ont fait un paquet de neuf.	
	M : Elles ont fait un paquet de ?	
	Lola : neuf	
	M : neuf, alors que jusque là qu'est-ce qu'elles on fait des paquets de?	
	Lola et Flavie : des paquets de dix	
	M : des paquets de dix. Alors (s'adressant aux préparateurs) est-ce que c'était un paquet de neuf que vous vouliez faire ?	
	Charlène et Séverine : Non un paquet de dix.	
	(...)	
	M : Comment vous êtes arrivés, expliquez-nous, à écrire, mille-cinq, expliquez-nous comment vous avez fait ?  Voilà ce que vous avez dans la boîte alors comment est-ce que vous avez compté ?	<i>L'enseignante dispose sur la table, à la vue de tous, les sachets réalisés par les préparateurs</i>
	Séverine : Alors d'abord on a compté, en premier on avait compté cette boîte (en désignant la boîte dans laquelle se trouve sept haricots)	
	M : Alors allez-y qu'est-ce que vous avez compté dans cette boîte ?	
	Lola : Oui. On les a comptés	
	M : Combien y en avait ?	
	Séverine : Ben, ben y avait sept (en désignant la boîte) puis en dénombrant le contenu d'un sachet huit, neuf, dix, onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize, dix-sept, puis se saisissant d'un autre sachet elle poursuit le dénombrement dix-huit, dix-neuf, vingt, vingt-et-un.	
	M : Ca vous avez démarré au début comme ça et puis après comment vous avez fait ?	

	Séverine : Tu nous as dit « Eh pourquoi elles ont fait des sachets ? »	
	M : Pourquoi elles ont fait des sachets de dix, et d'après vous pourquoi elles ont fait des sachets de dix ?	
	Flavie et Lola : ben pour qu'on compte de dix en dix	
	M : Pour qu'on compte dix en dix	

Les préparateurs (Charlène et Séverine) ont choisi de structurer leur collection en effectuant des sachets de 10, excepté l'un d'eux qui ne comporte que neuf éléments compte-tenu d'une erreur de dénombrement.

Les récepteurs, Lola et Flavie, indiquent qu'elles se sont tout d'abord lancées dans un dénombrement un à un (de la collection structurée) en commençant par compter les haricots isolés puis ont continué leur dénombrement en comptant les haricots présents dans un premier sachet et ainsi de suite.

L'enseignante a observé, en situation, la difficulté de ces deux élèves à effectuer un traitement adéquat des informations inhérentes à la collection structurée. Elle a choisi, afin de réactiver les connaissances de leur répertoire de représentation, de questionner les récepteurs sur les raisons qui, selon elles, ont pu conduire les préparateurs à réaliser des sachets. Cette décision de questionner les récepteurs rompt, certes, momentanément l'adidacticité de la situation, mais elle vise à relancer la phase d'action en amenant les récepteurs à réactiver leur système organisateur en se référant aux situations antérieures (au cours desquelles elles ont produit ou utilisé des groupements).

La réponse de Flavie et Lola à la question de l'enseignante (Pourquoi selon vous ont-elles fait des paquets de 10 ?) montre qu'elles ont perçu l'adéquation de l'usage de la suite arithmétique de 10 pour réaliser le dénombrement.

	M : Vas-y tu les mets quand tu les as comptés	<i>L'enseignante tend à Lola la boîte afin qu'elle dépose au fur et à mesure les sachets après les avoir comptés.</i>
	Lola : Dix, vingt, trente, quarante, cinquante	<i>Lola dépose les sachets tour à tour dans la boîte</i>
	M : Hop, hop, hop attends	<i>L'enseignante enlève le sachet de neuf haricots que Lola tient dans sa main (elle l'identifie aisément car il comporte une pastille verte)</i>

	Lola et Flavie: Parce que là y en a neuf !	
	M : Dix, vingt, trente, quarante (dénombrant les haricots dans les sachets), vas-y, y en a quarante !	
	Lola : Cinquante, soixante, soixante-dix, quatre-vingt	<i>Lola dépose dans la boîte les sachets correspondants en oralisant la suite des nombres.</i>
	Lola : (puis se saisissant du sachet de neuf avec la pastille verte)	
	M : Eh alors là ?	
	Flavie : et là normalement c'était quatre-vingt-dix !	<i>Séverine se saisit alors du sachet comportant la pastille verte.</i>
	M : Et normalement c'était quatre-vingt-dix. Eh, est-ce que là elles pouvaient compter quatre-vingt-dix ?	
	Séverine et Lola : Non	
	M : Qu'est-ce que vous avez fait ?	
	Lola : Et alors on a fait comme ça, quatre-vingt-dix, quatre-vingt-onze, quatre-vingt-douze, quatre-vingt-treize, quatre-vingt-quatorze, quatre-vingt-quinze, quatre-vingt-seize, quatre-vingt-dix-sept, quatre-vingt-dix huit...et après on a compté ça ( <i>en désignant les sept haricots</i> )	

L'enseignante prend ici véritablement la mesure de la difficulté de ses élèves, récepteurs de la collection, à effectuer le dénombrement. La mise en œuvre du surcomptage, s'appuyant sur la récitation de la comptine dans un domaine numérique complexe, est en cours d'apprentissage. L'enseignante intervient pour que Lola effectue de nouveau le dénombrement de la collection. Elle va l'aider en remettant au fur et à mesure le matériel dans la boîte et dans la récitation de la suite des nombres afin de stabiliser la comptine et de rendre plus aisé le principe d'adéquation.

	M : Mais attend, pourquoi quatre-vingt-dix, (l'enseignante <i>remettant au fur et à mesure les sachets dans la boîte</i> ) dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-dix, quatre-vingts on est à quatre-	
--	--	--

	vingts là, alors après qu'est-ce qui vient après quatre-vingts ? Non là si on compte un par un, qu'est-ce qui vient et (désignant tour à tour chaque haricot du sachet de neuf haricots) quatre-vingt- <i>un</i> <sup>6</sup> , quatre-vingt- <i>deux</i> , quatre-vingt- <i>trois</i> , quatre-vingt- <i>quatre</i> , quatre-vingt- <i>cinq</i> , quatre-vingt- <i>six</i> , quatre-vingt-sept, quatre-vingt- <i>huit</i> , quatre-vingt- <i>neuf</i> ; Donc là on est à quatre-vingt-neuf	
	Lola : Donc après on n'avait pas les neuf, avant on croyait que c'était dix alors on a pris quatre-vingt-dix	
	M : Eh, donc alors ...imaginons que vous ayez compté ça comme si y en avait dix, quatre-vingt-dix alors après	
	Lola : Quatre-vingt-onze, quatre-vingt-douze, quatre-vingt-treize, quatre-vingt-quatorze, quatre-vingt-quinze, quatre-vingt-seize, quatre-vingt-dix-sept	
	M : Quatre-vingt-dix-sept, donc vous auriez dû écrire quatre-vingt-dix-sept et alors pourquoi vous avez écrit mille-cinq ? D'où ça vient ce mille-cinq	
	Séverine : Cent cinq on dit (à voix basse)	

L'enseignante connaît pertinemment l'origine de l'erreur d'écriture : les élèves ont voulu écrire « 105 », mais ne maîtrisant pas le codage ils ont effectué une concaténation des nombres « 100 » et « 5 ». Elle souhaiterait que les élèves formulent explicitement cette difficulté. La déclaration de Séverine a été formulée à voix basse, elle n'est pas audible par l'enseignante.

	Un élève : Maîtresse	
	M : Chut, tu as une idée toi ? Et alors pourquoi vous avez écrit mille-cinq alors que là elles viennent de compter quatre-vingt-dix-sept. Et d'abord (en désignant le groupement de neuf) si là il y en a neuf est-ce qu'il y a quatre-vingt-dix-sept ? Il y en a combien ?	
	Séverine : Quatre-vingt heu...Quatre-vingt-seize	
	M : Quatre-vingt-seize. D'accord, et oui vous avez préparé, il y en a quatre-vingt-seize Donc (s'adressant à Séverine et Lola) vous vous êtes trompées, ceux qui ont préparé la collection pourquoi elles se sont trompées ?	
	Séverine parce que elles, on a oublié un haricot dans un sachet	

<sup>6</sup> Les mots-nombres en italique sont prononcés par les élèves.

	M : Elles, elles se sont trompées parce qu'elles ont oublié un haricot dans un sachet, et celles qui ont compté pourquoi elles se sont trompées ? Comment elles sont arrivées à ça ? Eh bien elles savent pas	
	Lola : je m'en rappelle plus	
	M : Elle s'en rappelle plus	

L'enseignante a réussi à mettre en lumière l'origine de l'erreur commise par les préparateurs, cependant elle n'a pas réussi à faire formuler aux récepteurs les raisons pour lesquelles elles ont produit un codage erroné. Cette interaction a cependant contribué à réactiver et à renforcer l'activité de dénombrement de la collection structurée.

Equipe 3 : Préparateurs (Jérémy et Malik)

	M : Ici équipe 3, alors soixante-dix-huit dans l'enveloppe et combien ?	
	Un élève : Soixante six	
	M : Mais qu'est-ce qui s'est passé ?	
	Un élève : Mais en fait parce qu'au début j'avais compté de dix en dix, et puis à un moment Tomy il compte un sachet, il y en avait que huit, et puis après dans un autre sachet, il y en avait que huit...	
	M : Eh alors est-ce que c'était le cas, est-ce qu'il y en avait que huit dans tous les sachets ?	
	Le même élève : Oui	
	M : Oui, dans chaque sachet, il y en avait huit ? Voyons, on y va, on compte ensemble	
	Les élèves : Un, deux trois, quatre, cinq, six, sept, huit	<i>Les élèves dénombrent les haricots contenus dans un premier sachet qu'elle tient dans sa main ; elle montre chaque haricot afin que les élèves les dénombrent.</i>
	M : Là ça marche. Et là (en se saisissant d'un autre sachet)	
	M : Ca marche, donc Jérémy et Malik vous avez mis huit haricots dans chaque sachet	
	Jérémy et Malik : Oui	
	M : Et pourquoi huit ?	

	Jérémy et Malik : Parce que pour arriver à 78 on a fait sept fois huit.	
	M : Sept fois huit, tu sais que ça fait 78...et tu ne sais pas ! Et tu sais pas.	

Les préparateurs explicitent leur choix de produire sept groupements de huit, cependant l'inadéquation de ce choix est mis en lumière par la rétroaction (l'équipe a perdu), de plus l'enseignante indique que la connaissance sur laquelle ils se sont appuyés n'est pas valide, elle ne figure pas dans le répertoire didactique de la classe.

	M (s'adressant au récepteurs) : Et est-ce que ça a été facile pour vous de compter ?	
	Les récepteurs : Non,	
	M : Pourquoi ?	
	Les récepteurs : Parce qu'on sait pas compter de huit en huit.	
	M : Parce qu'on ne sait pas compter de huit en huit mais par contre on sait compter...	
	Les élèves : De dix en dix et de deux en deux	
	M : Bien, alors est-ce que c'était facile pour eux de...?	
	Les élèves : Non	

Les récepteurs formulent explicitement la difficulté rencontrée : ils ne savent pas compter de huit en huit, d'où leur difficulté pour traiter la collection ainsi produite. C'est l'occasion pour l'enseignante de revenir sur les connaissances arithmétiques de leur répertoire didactique. Ces dernières leur permettent d'effectuer un comptage de dix en dix. Les élèves sont donc contraints à effectuer un dénombrement, un à un rendu plus difficile par les groupements réalisés.

### 4.3. La situation de communication : enjeux didactiques et effets sur les stratégies des équipes

Les stratégies des quatre équipes se sont révélées infructueuses, il est donc nécessaire d'en examiner les raisons et le choix d'une analyse, « interne » à chacune des équipes, est particulièrement judicieux ; d'autant plus que l'enseignante a clairement indiqué que lors du deuxième jeu, les récepteurs disposeraient d'une durée raccourcie pour effectuer le travail de codage de la collection. La modification de la valeur de cette variable didactique va contraindre chacune des équipes à examiner les décisions que les préparateurs peuvent prendre pour rendre la tâche des récepteurs plus simple, plus rapide mais aussi plus fiable.

Dans l'équipe 1, les élèves ont décidé de noter au dos de leur ardoise le nombre écrit en chiffres donné aux préparateurs de façon à permettre d'en effectuer une nouvelle lecture, si nécessaire, au cours de la réalisation de la collection. La production des groupements par 10 devra être faite « en vérifiant plusieurs fois » ; les élèves de ce groupe discutent ensuite des procédures permettant de coder la collection à partir des groupements réalisés en reprenant les nombres proposés lors du jeu précédent qui sont affichés au tableau, et en verbalisant pour chacun d'eux la stratégie qui leur paraît être la plus efficace pour réussir à gagner.

#### 4.4. Les résultats et les stratégies lors du second jeu

Le tableau suivant présente les résultats obtenus lors du second jeu proposé par l'enseignante. Cette dernière a modifié une variable didactique : la durée laissée aux récepteurs pour produire l'écriture chiffrée de la collection qui leur a été transmise.

	Équipe 1	Équipe 2	Équipe 3	Équipe 4
Nombre donné aux préparateurs	79	94	87	126
Nombre écrit par les récepteurs	79	94	90	106
Collection produite par les préparateurs	Collection structurée  7 sachets de 10 haricots et 9 haricots isolés	Collection Structurée  9 sachets de 10 et 4 haricots isolés	Collection Structurée  9 sachets de 10	Collection structurée  1 gobelet contenant 10 sachets de 10 haricots, 2 sachets de 10 et de 6 haricots isolés
Procédure mise en œuvre par les préparateurs	Réalisation d'une collection structurée  par la production de groupements par 10	Réalisation d'une collection structurée  par la production des groupements par 10	Réalisation d'une collection structurée  par la production des groupements par 10	Réalisation d'une collection structurée  par la production des groupements par 10 et par 100 (10 sachets de 10)

#### *Procédures et résultats lors de second jeu*

Lors du second jeu, l'ensemble des préparateurs ont fait le choix de produire une collection structurée par la réalisation de groupements par 10 (et ensuite par 100 pour l'équipe 4, sous la forme d'un gobelet contenant dix sachets de dix haricots). On constate que trois binômes préparateurs sur quatre ont produit une collection valide (en adéquation avec l'écriture chiffrée proposée).

Lors de ce second jeu, l'observation des procédures a mis en évidence que le traitement de l'information contenue dans l'écriture chiffrée (nombre de dizaines, nombre d'unités) a été effectué par les équipes 1, 2 et 4 sans que les préparateurs aient recours à la désignation orale du nombre écrit. Cette stratégie a permis une suite d'actions fiables, efficaces et simultanées des préparateurs de ces équipes. Le contrôle de la validité de la collection réalisée a été effectué dans trois équipes sur quatre. Cette stratégie permet de travailler conjointement l'aspect positionnel et l'aspect décimal de notre numération. Les préparateurs de l'équipe 3 ont eu recours à la désignation orale du nombre écrit en chiffre et son « oralisation » erronée les a conduits à réaliser neuf paquets de 10. La stratégie de réalisation de groupements par 10, formulée par chaque équipe lors de la situation de formulation, a été mise en œuvre permettant ainsi à trois équipes sur quatre de réussir à produire la collection adéquate.

Les récepteurs de l'équipe 4 ont eu des difficultés pour coder la collection produite par les préparateurs : ils ont choisi de « défaire » le groupement de 100 et effectué un comptage de 10 en 10, à partir des sachets. Ils ont obtenu la désignation orale correspondante, sans se tromper, mais n'ont cependant pas réussi à produire l'écriture chiffrée correspondante. La phase de mise en commun a contribué à mettre en évidence, à partir de la collection matérielle réalisée par l'équipe 4, le lien entre les différentes décompositions du nombre en regard des groupements correspondants permettant ainsi de différencier le nombre de dizaines et le chiffre de dizaine dans l'écriture du nombre 126. Ce travail a permis aux élèves de travailler sur la récursivité des groupements, et ainsi de favoriser la compréhension de l'aspect décimal de notre système de numération.

#### **4.5. Évolution des stratégies et apprentissages**

Ces deux premières séances ont permis à l'enseignante de prendre conscience du répertoire de représentation des élèves plus précisément de leur interprétation de l'écriture chiffrée usuelle des nombres proposés; mais aussi de prendre conscience des difficultés des récepteurs relatives au traitement des collections. Les phases de mise en commun ont été, pour l'enseignante, l'occasion de revenir sur les procédures observées en phase d'action, afin de renforcer certains apprentissages fondamentaux et notamment la capacité des élèves à structurer une collection et à organiser le dénombrement d'une collection structurée.

L'évolution des stratégies, durant les deux jeux, est un indicateur essentiel des apprentissages des élèves. Lors du premier jeu, seules deux équipes sur quatre, ont eu recours à la production de groupements, pour réaliser la collection correspondant à l'écriture chiffrée or dans le second jeu, toutes les équipes ont produit une collection structurée. Dans le premier jeu l'ensemble des élèves ont choisi de mettre en œuvre une stratégie s'appuyant sur la désignation orale des

nombres dévolus aux préparateurs ; cependant dans le second jeu trois équipes sur quatre ont opté pour un traitement adéquat de l'écriture chiffrée, s'appuyant sur le nombre de groupements correspondant aux unités, dizaines (et centaines). Ces deux premières séances ont permis aux élèves de renforcer les différentes composantes de leur répertoire didactique (représentation, décision, action, formulation) mais aussi d'accéder aux critères de validité et de pertinence de leurs procédures.

### **5. Intérêt de la situation de réinvestissement dans la construction du répertoire de représentation**

Les deux premières séances, par la mise en œuvre d'une ingénierie alternant situation adidactique et situation didactique, ont contribué à permettre à l'élève de prendre conscience de l'équivalence entre représentation matérielle structurée (groupements apparents traduisant la récursivité des groupements) et écriture chiffrée (usuelle) associée. La situation de jeu a permis aux élèves de percevoir les raisons pour lesquelles la stratégie, basée sur la réalisation des groupements correspondants, est à la fois valide, fiable et rapide.

En classe de C.P. l'élève doit parvenir à percevoir le lien entre les différentes représentations d'un nombre l'écriture chiffrée (écriture usuelle), la décomposition additive usuelle, l'écriture additive associée aux groupements, l'écriture littérale, le dessin de la collection faisant apparaître les groupements par 10. C'est la raison pour laquelle nous avons fait le choix de proposer une situation didactique qui vise à établir le lien entre ses différentes représentations en s'appuyant sur la stratégie construite au cours des différentes parties du jeu.

L'enseignante propose aux élèves, réunis en binômes, une représentation sémiotique du nombre (écriture usuelle, écriture additive, décomposition additive usuelle ou décomposition additive associée aux groupements) et leur demande de réaliser la collection matérielle associée. Pour cela ils vont, à tour de rôle, aller chercher les groupements (sachets de 10, haricots isolés), de façon à produire la collection correspondante. Lors de la mise en commun, ils doivent justifier les choix qui les ont conduits à produire la collection. Ensuite l'enseignante propose dans un premier temps (et demande aux élèves dans un second temps) de produire la schématisation des groupements et leur demande ensuite de déterminer les représentations mathématiques équivalentes en lien avec les différents registres (Duval, 1996). Elle effectue alors une institutionnalisation des écritures et des schémas correspondantes pour chacune des écritures dévolues aux élèves de façon à faciliter, chez ses élèves, l'élaboration de leur répertoire de représentation.

### **Conclusion**

Cette recherche a permis de mettre en évidence l'intérêt et la nécessité d'un dispositif incluant des situations à dimension adidactique (situation d'action et situation de formulation) pour évaluer et renforcer la capacité des élèves à

mobiliser leur répertoire didactique en situation, c'est-à-dire lorsque les conditions qui définissent la situation rendent nécessaire l'usage des connaissances et des savoirs.

L'observation des binômes, en situation adidactique, a fourni à l'enseignante de précieux renseignements concernant l'appropriation du domaine de validité des connaissances et très précisément, la manière dont les élèves mettent en œuvre leurs connaissances ainsi que les principales difficultés auxquelles ils sont confrontés.

La phase didactique de formulation des stratégies joue un rôle essentiel : elle permet aux élèves d'explicitier, en réponse aux questions de l'enseignante, les décisions qui sous-tendent leurs actions et de justifier l'adéquation et la validité de leurs procédures. Les élèves ont ainsi la possibilité de mesurer les effets de leurs décisions sur la tâche que les récepteurs doivent accomplir pour permettre la réussite de leur équipe. Cette alternance de situation adidactique et didactique est une condition nécessaire à l'apprentissage, elle apparaît comme un élément incontournable lors de l'élaboration de l'ingénierie. Mais c'est également pour l'enseignante la possibilité de réactiver, en situation didactique, certaines connaissances du répertoire didactique de la classe et ainsi de faire percevoir aux élèves l'origine de leurs erreurs qui ont conduit l'équipe à échouer. Sa tâche consiste aussi à observer, au cours des jeux successifs, l'évolution des stratégies des élèves, indicateur essentiel en termes d'apprentissage.

Les deux premières séances ont conduit les élèves à établir un lien entre la collection matérielle et l'écriture chiffrée, mettant ainsi en évidence le sens de l'écriture chiffrée usuelle ; ceci contribue à renforcer la compréhension du système décimal. La séance trois, a une double fonction : celle de permettre aux élèves d'exercer leurs procédures afin de produire, à partir d'une représentation du nombre, la collection correspondante. Elle a également pour fonction d'institutionnaliser les équivalences entre les différentes représentations du nombre : désignations orales, écrites, collection matérielle, collection dessinée.

Cette connaissance des différentes représentations du nombre, en lien avec les différents registres correspondants (Duval, 2006), est nécessaire pour permettre aux élèves d'accéder au domaine de validité de chacune d'elles. Les élèves perçoivent ainsi les raisons pour lesquelles chaque représentation est adéquate (Gagatsis A., Deliyianni, Elia I. et Panaoura A., 2011) pour répondre à des situations de dénombrement, de calcul mental ou posé, ou de résolution de problèmes d'arithmétique. Cette prise de conscience des différentes représentations du nombre et des contextes d'utilisation s'avérera essentielle pour les apprentissages ultérieurs, plus particulièrement ceux qui relèvent de la mise en œuvre des opérations arithmétiques.

## Bibliographie

- BEDNARZ N., JANVIER B. (1984) La numération : les difficultés suscitées par son apprentissage, *Grand N*, 33, 5-31, IREM Grenoble.
- BLOCH I., GIBEL P. (2011) Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuve dans une situation d'enseignement de la notion de limite, *Recherches en Didactique des mathématiques*, la Pensée Sauvage, 31-2, Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BRIAND J. (1993), *L'énumération dans le mesurage des collections*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, Bordeaux.
- BROUSSEAU G. (2004), Les représentations : étude en théorie des situations, *Revue des Sciences de l'Education*, 30-2.
- BROUSSEAU G. (1997), *Théorie des situations didactique*, *Recherches en didactique des mathématiques*, Edition la pensée sauvage édition.
- BRUN J. (1994) Évolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques, *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, 67-83, Grenoble: La Pensée Sauvage.
- DUVAL R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang.
- DUVAL R. (2006), A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics, *Educational Studies in Mathematics* Vol. 61 n°1, pp. 103-131, Springer.
- GAGATSIS A., DELIYIANNI E. ; ELIA I. ET PANAOURA A., (2011) Explorer la flexibilité : le cas du domaine numérique, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 25-43, IREM de Strasbourg.
- GIBEL P. (2004) Fonctions et statuts des différentes formes de raisonnement dans la relation didactique en classe de mathématiques, Doctorat de l'Université de Bordeaux 2.
- GIBEL P. (2006) Raisonnement et argumentation : Analyse des différentes formes et fonctions des raisonnements des élèves en situation de débat à l'école primaire. In Bednarz N., Mary C. (Eds.) Actes du colloque EMF 2006 (Cédérom). Sherbrooke : Éditions du CRP
- MARGOLINAS C. & RIVIERE O. (2008) Les dessous du numérique, Actes du XXXV<sup>e</sup> Colloque COPIRELEM, Bordeaux
- SERFATI M. (2005), *La révolution symbolique : la constitution de l'écriture symbolique mathématique*, Éditions Petra, Paris

TEMPIER F. (2010) Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2, *Grand N*, 86, 59-90, IREM Grenoble.

PATRICK GIBEL

[Patrick.Gibel@iufm.u-bordeaux4.fr](mailto:Patrick.Gibel@iufm.u-bordeaux4.fr)

M'HAMMED ENNASSEF

[Mhammed.Ennassef@iufm.u-bordeaux4.fr](mailto:Mhammed.Ennassef@iufm.u-bordeaux4.fr)

## **Annexe 1 : Le déroulement de la séquence**

La séquence produite par l'enseignante comporte 3 séances

### Séance 1

Phase 1 : Phase de dévolution du jeu. Phase didactique.

Phase 2 : Phase d'action pour les préparateurs. Phase adidactique.

Phase 3 : Transmission de la collection dans la boîte.

Phase 4 : Phase d'action pour les récepteurs. Phase adidactique.

Phase 5 : Phase de validation. Phase didactique.

Confrontation des écritures chiffrées, désignation des équipes gagnantes.

Phase 6 : Phase de formulation des stratégies. Phase didactique.

### Séance 2

Phase 1 : Phase de rappel ayant pour objet un retour sur la situation proposée.

Phase didactique

Phase 2 : Phase de formulation. Phase de communication interne à chaque équipe.

Phase adidactique

Phase 3 : Phase de jeu (les émetteurs de la séance 1 deviennent récepteurs et inversement). Phase d'action pour les préparateurs. Phase adidactique

Phase 4 : Transmission de la collection dans la boîte.

Phase 5 : Phase d'action pour les récepteurs. Phase adidactique

Phase 6 : Phase de validation. Phase didactique

Phase 7 : Phase de validation didactique Analyse des procédures mises en œuvre.

Phase didactique

### Séance 3

Réinvestissement Activités d'entraînement. Phase didactique

L'objectif est de travailler, à partir du matériel utilisé, notamment les groupements par 10 (sachets produits par les élèves lors de la situation de jeu), les équivalences entre les différentes désignations écrites d'un nombre dans le système décimal (écriture chiffrée, décomposition additive usuelle, écriture additive associée aux groupements), son écriture littérale, un dessin de la collection faisant apparaître les groupements par 10 et par 100. Il s'agit pour les élèves de percevoir les liens entre les désignations écrites, les désignations orales, et la réalisation des groupements par 10 et par 100.

**Annexe 2**

	Période 1 septembre-octobre	Période 2 novembre-décembre	Période 3 De janvier à avril	Période 4 De mai à juillet
<b>Les nombres pour mémoriser</b>	Stratégies pour le dénombrement  Situation fondamentale ordinale	Situation fondamentale ordinale	Situation fondamentale cardinale	
<b>Les nombres pour apprendre à chercher</b>		Lecture d'image	Situation de recherche	Résolution de problèmes
<b>Les nombres pour anticiper et calculer</b>	Situations visant la mise en œuvre de stratégies de calculs additifs et soustractifs :  Surcomptage, recomptage	Introduction des écritures additives  Comparaison d'écritures additives : cibles	Calculs additifs : arbre de calculs  Situation fondamentale du calcul additif et soustractif	Techniques d'additions  Procédures soustractives  Algorithme usuel  Entraînement au calcul posé
<b>Connaître les nombres</b>	<u>Etude globale</u> : Construction et utilisation de la bande numérique.  Réalisation de collections (sachets) associées à la bande numérique. (matérialisée)  <u>Etude locale</u>  Etude des nombres de 1 à 10	<u>Etude locale</u> Etude des nombres de 1 à 10 (décompositions additives)  Etude détaillée des nombres de 10 à 20.  Etude détaillée des nombres de 20 à 30  <u>Etude globale</u> : approche algorithmique  Château des nombres	<u>Etude globale</u> Construction du tableau des nombres de 1 à 100. Situation des Carrelages. <u>Etude locale</u> Etude détaillée, par familles, des nombres de 30 à 69.  Suites arithmétiques (de 2 en 2, de 10 en 10)	<u>Etude locale</u> Les nombres de 70 à 100  <u>Etude globale</u> Les fourmillions  Jeu de communication : codage et décodage

### Annexe 3

Séquence les fourmillions

adaptée par l'enseignante

Finalité de la séquence Dénombrer un grand nombre d'objets (entre 300 et 400 haricots), par une méthode qui soit à la fois fiable, rapide, efficace et produire l'écriture chiffrée du nombre d'éléments de la collection.

Objectifs de la séquence

- Rencontrer une grande collection d'objets.
- Utiliser les groupements par 10 pour organiser le dénombrement d'une grande collection.
- Construire les relations entre 10, 100, 1000.
- Découvrir la récursivité des groupements.
- Vivre une situation de référence qui donne du sens à la lecture des nombres à 3 chiffres

Compétence générale : Déterminer la valeur de chacun des chiffres

Matériel : collection de haricots, sachets, gobelets

Modalité : travail en groupes

Les différentes phases du déroulement :

Phase 1 : Présentation de la situation. Recueil des propositions de procédures pour dénombrer la collection.

Phase 2 : Répartition de la collection entre les différents groupes.

Phase 3 : Réalisation des groupements de 10 haricots (sachet).

Phase 4 : Mise en commun des résultats.

Phase 5 : Réalisation des groupements de 10 sachets (10 sachets sont placés dans un gobelet). Identification de ce nouveau groupement comme une « centaine ».

Phase 6 : Mise en commun des résultats obtenus.

Phase 7 : Effectuer le lien entre la collection structurée et l'écriture chiffrée correspondante.

Phase 8 : Phase d'institutionnalisation