JOSÉ CARLOS CORTÉS ZAVALA & Mª DE LOURDES GUERRERO MAGAÑA

PROGRAMAS DE CÓMPUTO INTERACTIVOS PARA CREAR AMBIENTES TECNOLÓGICOS PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS[1]

Abstract. Interactive software to create technological environments for mathematics learning This article deals with a research work related to the use of technology for Mathematics teaching and learning. In this one, some current educative aspects and tendencies converge, such as: the use of software, the use of several internet platforms, educative software design and development, and the use of calculators and computers. We study the mentioned tendencies from the point of view of teachers (with educational perspectives) and also from the point of view of the learning of mathematics (cognitive issues), through the creation and use of Interactive Technological Environments for the Learning of Mathematics (ATIAM). Also, we include research results linked with design and construction of software for the learning of mathematics in ATIAM´s environments.

Résumé. Programmes informatiques interactifs pour créer des environnements technologiques d'apprentissage des mathématiques Ce travail expose une ligne de recherche orientée vers l'utilisation de la technologie informatique pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Dans notre recherche convergent des aspects et des tendances éducatives actuelles, comme: l'utilisation de logiciels, l'utilisation de diverses plates-formes d'Internet, la conception et le développement de logiciels éducatifs et l'utilisation de calculatrices et ordinateurs. Nous étudions ces aspects des points de vue didactique et cognitif, l'enseignement par des professeurs et les apprentissages, en nous appuyant sur la création et l'expérimentation d'Environnements Technologiques Interactifs pour l'Apprentissage des Mathématiques (ATIAM).

Mots-clés. TICE, environnement interactif d'apprentissage, différences, dérivées.

Resumen. Este trabajo presenta una línea de investigación orientada a utilizar la tecnología para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En esta investigación convergen aspectos y tendencias educativas actuales, tales como: el uso de software, el uso de diversas plataformas de Internet, el diseño y desarrollo de software educativo y el uso de calculadoras y computadoras. Estudiamos por una parte los aspectos didácticos relacionados con el punto de vista del profesor y por otra parte los aspectos cognitivos del aprendizaje de las matemáticas, con la creación y el uso de Ambientes Tecnológicos Interactivos para el Aprendizaje de las Matemáticas (ATIAM). Los resultados de la búsqueda se presentan en relación con el diseño y construcción de software para el aprendizaje y la experimentación realizada en ATIAM.

Palabras clave. Tecnología, ambientes de aprendizaje, diferencias, derivada.

---

[1] Artículo realizado dentro del proyecto de creación de la red académica "Uso de tecnología para el aprendizaje de las matemáticas" apoyado por PROMEP.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 17, p. 117 – 136.

Introducción

En este artículo se presenta un ejemplo del trabajo realizado en la línea de investigación sobre el uso de tecnología computacional para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En ésta convergen varios aspectos y tendencias educativas actuales, tales como: el uso de programas de cómputo, el uso de diversas plataformas de Internet, el diseño y desarrollo de programas de cómputo educativo y la utilización de calculadoras y computadoras, entre otros, desde la perspectiva de los profesores (didáctica y enseñanza) y desde el punto de vista del aprendizaje de las matemáticas (aspectos cognitivos).

El uso de la tecnología en el aula de matemáticas modifica las relaciones entre los diversos actores que interactúan en ella; es en este sentido, que hemos definido un Ambiente Tecnológico Interactivo para el Aprendizaje de las Matemáticas (ATIAM) como: "*aquel que se genera en el espacio o entorno donde los actores de los procesos de enseñanza y de aprendizaje (profesor y alumno) y el objeto de conocimiento, interactúan de forma organizada a través de una metodología que incluye actividades de aprendizaje con el uso de tecnología*" (Cortés, Núñez, 2007).

La investigación realizada alrededor de los ATIAM (Cortes, Núñez 2007; Núñez, Cortes 2008; Núñez 2008), ha mostrado que estos ambientes tecnológicos tienen potencial para favorecer, en los estudiantes, el desarrollo de habilidades para la construcción de procesos de aprendizaje y de conceptos matemáticos. Para la creación de un ATIAM es preciso contar con: 1) una propuesta teórica de enseñanza y/o aprendizaje; 2) actividades que faciliten y estimulen la construcción de aprendizajes; y, 3) una metodología de enseñanza acorde con los puntos anteriores (Núñez, Cortés 2008). Así mismo, puede involucrar el desarrollo de programas de cómputo educativo; es precisamente en este último sentido en el que será dirigido el presente artículo. Esto es, se detallarán características significativas que permiten elaborar programas de cómputo que se incorporan en el desarrollo de ATIAM's, y se mostrará un ejemplo, del tipo de programas de cómputo al que hacemos referencia.

1. Características fundamentales para el diseño de programas de cómputo educativo

La inclusión de la tecnología computacional en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas requiere del uso de programas de cómputo especializado. Sin embargo, la mayoría de las veces solamente se dispone de paquetes de cómputo diseñados por empresas, que resultan ser muy genéricos en la enseñanza, aún cuando hayan sido diseñados con propósitos educativos.

Un diseño efectivo de programas de cómputo educativo debe estar basado en modelos de aprendizaje (Clements and Battista, 2000) que puedan ser articulados en ATIAM's. Además, su implementación debe estar libre de errores computacionales y contar con objetivos para proponer estrategias para promover en los estudiantes la construcción de conceptos matemáticos.

Por tal motivo, el desarrollo de programas de cómputo efectivos para la enseñanza y el aprendizaje debe considerar gran cantidad de variables, tanto de carácter educativo como de tipo computacional; así mismo, debe someterse a diferentes fases de evaluación, tanto en términos de su funcionamiento como del sentido educativo específico para el que fueron diseñados.

La etapa de diseño del programa de cómputo debe considerar mínimamente las características que se describen en los siguientes apartados.

1.1. Selección de un tema

Ésta es una característica fundamental para el diseño, ya que posibilita utilizar la tecnología como una herramienta de apoyo para intentar resolver un problema de aprendizaje específico. Dependiendo de la dificultad relativa al aprendizaje de un concepto, proceso o idea matemática, podemos definir el tipo de tecnología a utilizar considerando también los recursos tanto académicos como económicos con los que cuenta el profesor.

1.1.1 Elaboración de una estrategia de aprendizaje para abordar el tema

Es necesario considerar aspectos teóricos para elaborar una estrategia de aprendizaje que pueda dirigir la actividad educativa; se deben tomar en cuenta fundamentos teóricos de enseñanza y de aprendizaje para las actividades que se van a proponer. En particular, en el ejemplo que se muestra en los siguientes apartados, hemos utilizado la teoría de representaciones semióticas, propuesta por Duval (1988, 1993 y 1995), ya que en el programa de cómputo se promueve el tratamiento y la conversión entre representaciones. Así mismo queremos hacer que las variables visuales presentes en diferentes representaciones, se manifiesten como elementos importantes para el aprendizaje, ya que estas variables visuales usualmente quedan implícitas para el estudiante, causando dificultades. Por ejemplo, cuando se utiliza el registro semiótico numérico en el programa de cómputo "Funciones y Derivadas", se construyen tablas de cuatro salidas ($x, f(x), \Delta_x, \Delta_{f(x)}$) en las que se hacen visibles simultáneamente la variable independiente, la variable dependiente y sus incrementos respectivos.

1.1.2. La programación

Consiste en la implementación de la propuesta en un lenguaje de programación. Es necesario elaborar una interface de comunicación y control del programa para con el usuario, y codificar, en algún lenguaje, las estrategias para abordar el tema. En particular hemos trabajado con Visual Basic y Java, ya que son lenguajes que incorporan un ambiente gráfico de fácil y rápido manejo; además, éstos combinan la programación estructurada con la orientada a objetos, dando la posibilidad de implementar módulos reutilizables para la construcción de distintos programas de cómputo.

1.2. Prueba del programa de cómputo educativo

Una vez que se tiene un primer prototipo, se debe realizar:

1. Una prueba técnica para determinar su buen funcionamiento.
2. Comprobar que el programa de cómputo cumpla los objetivos didácticos para los que se diseñó, a través de una evaluación técnica que contemple:

   — la ausencia de errores de programación;

   — que la actividad que se propone se entienda con claridad;

   — que permita al usuario navegar en él sin dificultad;

   — que permita la introducción sencilla de respuestas.

3. Una evaluación del programa de cómputo desde un punto de vista educativo, valorando los objetivos didácticos para los que fue creado. Normalmente se realizan experimentaciones piloto basadas en los sustentos teóricos, la estrategia que se está implementando y el manejo del programa de cómputo. Estas experimentaciones se plantean a diferentes niveles: primeramente con pequeños grupos y posteriormente con grupos de estudiantes y profesores en ambientes naturales.

1.3. Documentación

Una característica fundamental que permita que el programa de cómputo sea utilizado por una población mayor, es la descripción del funcionamiento del programa a través de un manual, y de las actividades que pueden ser utilizadas en combinación con el programa. Éstas servirán de guía hacia los aprendizajes que se quieren favorecer y deberán incluir los objetivos para los que fueron creados.

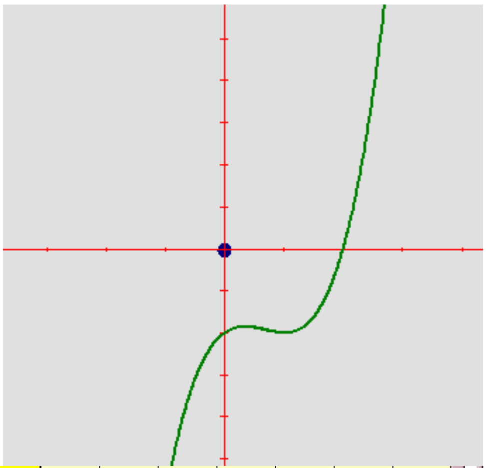
2. Ejemplo: Acercamientos numéricos para el entendimiento del concepto de derivada como función

2.1. Selección del tema

Diversos investigadores señalan la importancia de introducir el concepto de derivada a través del uso de razones de cambio. Basado en esta idea, se diseñó y desarrolló el programa de cómputo denominado "*Fun_Der*" en el que se incorporaron actividades que resaltan aspectos relacionados con diferencias, incrementos y razones de incrementos a través de ideas visuales. Hughes (1990) ha observado que muchos estudiantes pueden calcular algebraicamente las derivadas de diversas funciones, pero no son capaces de determinar, en una gráfica, el signo de la derivada. Además, la autora nota que pocas veces se utiliza un acercamiento numérico para enseñar este concepto. Confrey (1993) indica que la presencia de tablas numéricas puede iluminar la relación funcional de los valores contenidos en ellas y la presentación algebraica. Por su parte, Scher (1993) menciona que “la noción de razón de cambio debe ser accesible para todos los estudiantes”.

Sabemos, con base en diversos estudios, que el concepto de derivada es tratado con métodos predominantemente algebraicos que ocultan información relevante para su aprendizaje. Para contrarestar esta tendencia, propuestas como la de Duval (1988,1993 y1995), Confrey (1993), Scher (1993), Mejía (1997), Hitt (2002), Pluvinage (2005), Cortés et al. (2005), Hitt y Cortes (2009) mencionan la importancia del manejo gráfico y numérico, como representaciones de objetos matemáticos, cada uno de ellos, presentando distinta información, además de permitir ciertas actividades cognitivas.

Cuando se usa un solo tipo de representación, se corre el riesgo (Duval, 1988) de confundir al objeto con la representación, y puede generar una construcción muy pobre y parcial del concepto matemático en cuestión; es por ello que se propone el uso de múltiples representaciones, para promover una estructura cognitiva específica (articulación entre representaciones). Por ejemplo, si tenemos una función dada por $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$, su gráfica y su tabla están representadas en la Figura 1.



Inc. x	1	1	1	1	1	1	1	
x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	-2.	-2.	0.	10.	34.	78.	148.	250.
Inc. y	0.	2.	10.	24.	44.	70.	102.	

Figura 1. Representación gráfica y tabular de una función

A partir de éstas podemos hacernos las siguientes preguntas:

— ¿En cuál de ellas nos basaríamos para afirmar que la función tiene dos raíces complejas?
— ¿Cuál de ellas permite una mejor visualización de los intervalos en que la función es decreciente y creciente?
— ¿Cuál de ellas nos permite predecir el valor de $\lim_{x \to a} f(x)$?
— ¿En cuál podemos visualizar rápidamente que $f'(2) > 0$?
— ¿Cuál de ellas nos permite decir con exactitud el valor de la ordenada al origen?
— ¿Cuál de ellas nos permite decir con exactitud el valor de la raíz?
— ¿Cuál de ellas nos permite calcular secantes con exactitud?

Para contestar algunas de estas preguntas, el análisis de las diferentes variables visuales y unidades significativas en el sentido de Duval, para las diferentes representaciones puede ser fundamental; ésta se puede adquirir a través del trabajo en cada representación. Es también en este sentido que Duval menciona la necesidad de realizar tratamientos en cada representación y conversiones entre representaciones para formar una articulación entre representaciones y así construir el concepto matemático.

2.2. Elaboración de una estrategia de aprendizaje para abordar el tema

Para intentar solucionar la problemática planteada, se desarrolló el programa de cómputo "Funciones y Derivadas" (Fun_Der) (Cortés 2002). La propuesta se ubica dentro de la teoría de sistemas semióticos de representación[2], por lo que deberá promover la detección de las unidades significativas en el sentido de Duval, permitir la manipulación de diferentes representaciones y tareas que promuevan los tratamientos y las conversiones de representaciones. A continuación mostramos algunas de las ideas contenidas en el programa de cómputo Fun_Der.

2.2.1. Tratamiento numérico

Se propone un acercamiento numérico al concepto de derivada a través de la razón de cambio, introduciendo primero progresiones aritméticas para motivar al estudiante a desarrollar estrategias manipulando incrementos para resolver algunos ejercicios. El proponer un acercamiento discreto al concepto de derivada, permite que el estudiante trabaje con elementos conocidos que para él son concretos.

[2] Ver Duval (1988,1993 y 1995).

2.2.2. Progresiones aritméticas para introducir la noción de "Diferencia"

El tema de *Progresiones aritméticas* se aborda en cuatro niveles (Figura 2), con el objetivo de iniciar un acercamiento numérico al concepto de Razón de Cambio. Como puede observarse en la figura 2, los niveles están relacionados con la dificultad de reconocimiento de elementos en las progresiones, debido a que en cada nivel se presenta la posición de manera diferente (para una mayor descripción al respecto, véase Cortés et al, 2005).

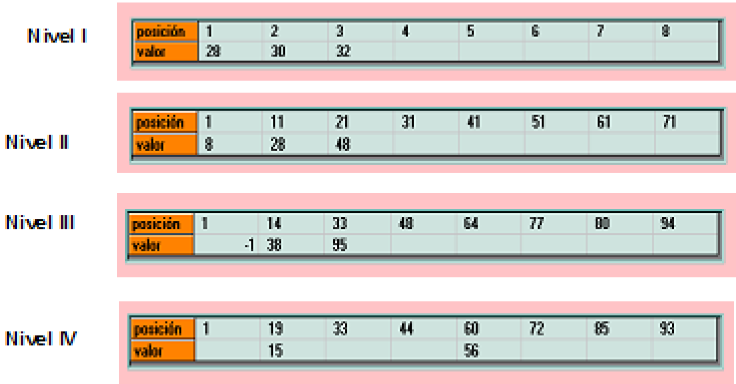


Figura 2. Diferentes niveles de progresiones aritméticas

2.2.3. Incrementos de variables

En el tema de *Incrementos* el objetivo es introducir una notación (ver Figura 3) proponiendo un acercamiento gráfico (Cortés, 2010) con cuatro niveles relacionados con la dificultad con que se han expresado las progresiones.

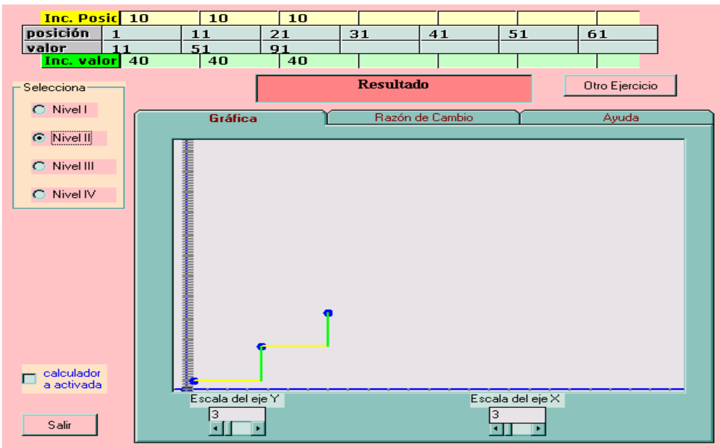


Figura 3. Acercamiento gráfico a la noción de incremento

2.2.4. Razón de cambio

Este acercamiento discreto a la *Razón de cambio* permite introducir la noción de pendiente como razón de incrementos (Cortés, 2005), dando un significado gráfico a la razón de cambio (Cortés, 2006). Éste también se aborda como cociente de incrementos, obteniéndose una representación funcional genérica; por ejemplo, para $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ -los parámetros se generan aleatoriamente- (Figura 4) se presenta la tabla de valores con sus respectivos incrementos, y se pide se llene la tabla *Razón de Cambio*. Para los valores correctos que se introducen en la misma tabla se refleja su correspondiente en la gráfica (Figura 5).

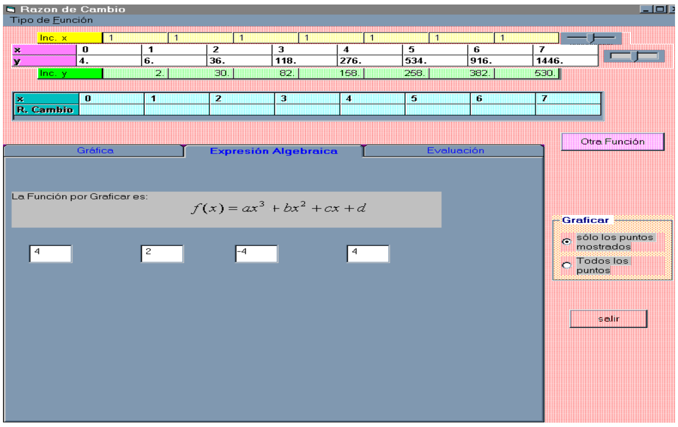


Figura 4. Una función cúbica aleatoria

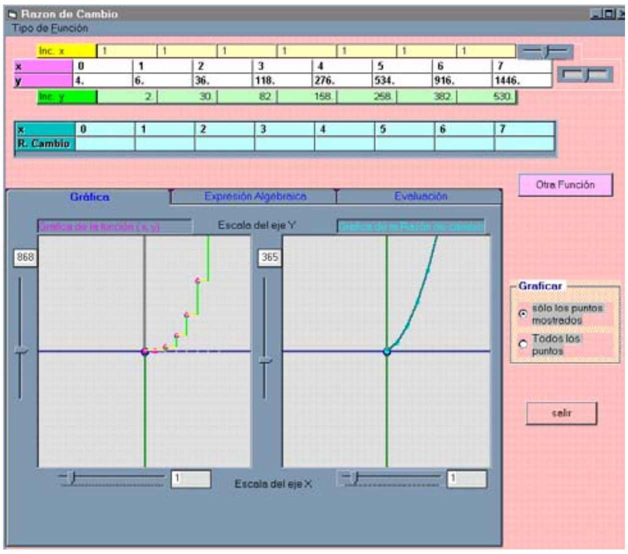


Figura 5. Gráficas de la función y de la razón de cambio

2.2.5. Tratamiento gráfico

El tratamiento gráfico que proponemos en torno al concepto de derivada, es aquel en el que se usa la recta secante como modelo de aproximación a la recta tangente. Al respecto, Wenzelburguer (1993) menciona: *"Normalmente se usa el problema de la tangente geométrica como motivación para introducir la derivada. Este método tiene muchas desventajas porque no es fácil de entender que el límite de la pendiente de una familia de secantes es la pendiente de la tangente a la cual se* *llama derivada. Además, no se ve una conexión inmediata entre una tangente geométrica que es un fenómeno estático y el dinamismo de una derivada”.*

Nuestra propuesta intenta resolver este problema de aprendizaje; es decir, consideramos que un tratamiento gráfico de la secante, de la tangente, de la función razón de cambio y de la función derivada, servirá para sobrepasar este obstáculo cognitivo.

Primeramente introducimos gráficas de funciones de la forma general, por ejemplo una función polinomial (Figura 6), en la cual tenemos parámetros manipulables (Figura 7).

Podemos seleccionar trazar una línea secante (Figura 8) o una línea tangente (Figura 9) o la gráfica de la función razón de cambio (Figura 10) o la gráfica de la derivada (Figura 11) obteniendo, de acuerdo a la selección, la tabla correspondiente (Figura 12).

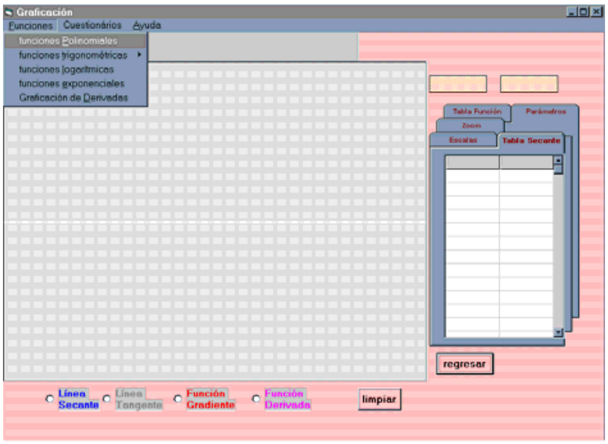


Figura 6. Selección de funciones

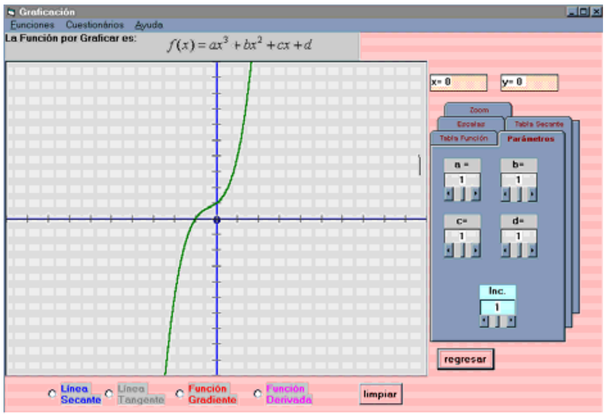


Figura 7. Selección de parámetros

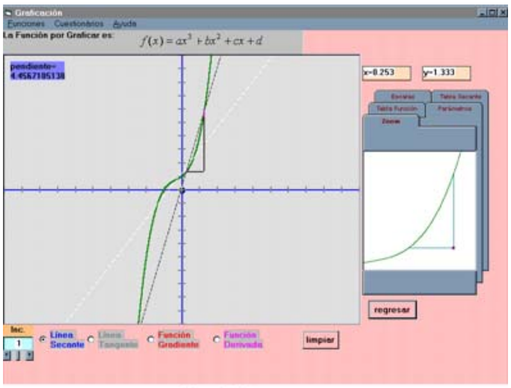


Figura 8. Línea secante

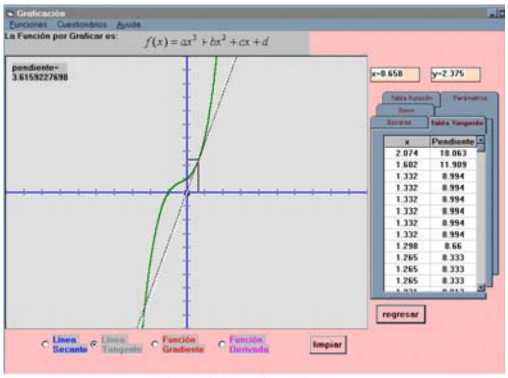


Figura 9. Línea tangente

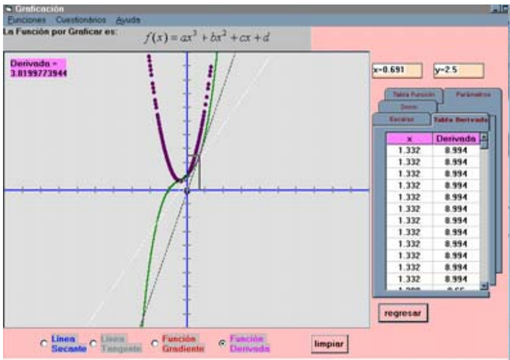


Figura 10. Función razón de cambio

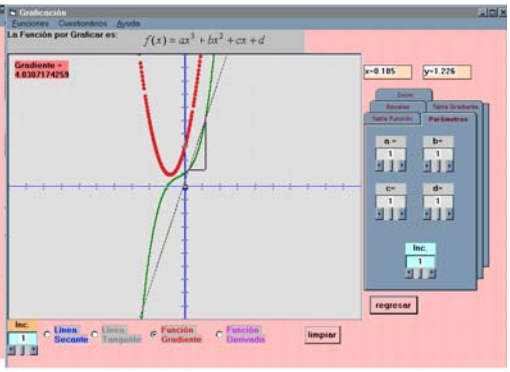
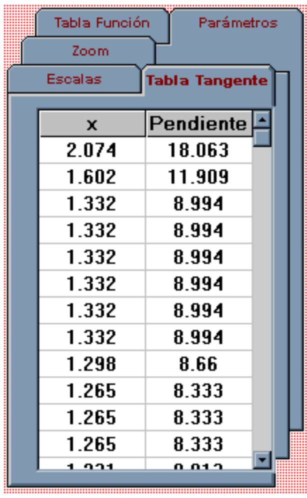


Figura 11. Función derivada

A través del uso de estas actividades se pretende que el estudiante comprenda: a) la noción de incremento; b) razón de cambio; c) las relaciones entre la secante, la razón de cambio, la tangente y el *incremento de x*; y, d) la relación gráfica entre las pendientes de la secante y la derivada.



x	Pendiente
2.074	18.063
1.602	11.909
1.332	8.994
1.332	8.994
1.332	8.994
1.332	8.994
1.332	8.994
1.332	8.994
1.298	8.66
1.265	8.333
1.265	8.333
1.265	8.333

Figura 12. Representación numérica

2.3. Codificación del programa de cómputo

Este sistema fue implementado en el lenguaje Visual Basic, por requerir predominantemente un ambiente de programación para el fácil manejo de gráficos y tablas de datos. Así mismo, fue posible reutilizar el módulo de análisis sintáctico previamente diseñado, para el manejo de expresiones simbólicas generales requeridas en la definición de funciones.

2.4. Prueba del programa de cómputo

A continuación se exponen algunos de los resultados obtenidos en un estudio piloto, realizado con el propósito de evaluar los objetivos de aprendizaje para los que se diseñó el programa de cómputo.

La experimentación se practicó con cinco estudiantes de bachillerato durante doce horas, repartidas en cuatro sesiones. Como se mencionó en el apartado anterior, este tipo de experimentación con pequeños grupos, es fundamental para indagar sobre el entendimiento de los estudiantes acerca de los conceptos que se están tratando de favorecer. La experimentación se realizó en una sala equipada con dos cámaras de video con las que se registró el trabajo en equipo de los estudiantes (dos equipos con dos estudiantes y uno de uno) usando cada grupo una computadora y el programa de cómputo instalado.

En la primera sesión se dio una instrucción sobre la navegación en el paquete para que los estudiantes utilizaran libremente los contenidos del programa de cómputo. El instructor se desempeñó como observador que podía contestar preguntas cuando le eran requeridas, o para cuestionar a los estudiantes para que guiarles hacia una estrategia correcta. Los estudiantes podían comunicar libremente sus ideas o sus estrategias de solución. Las interacciones fueron videograbadas.

Primeramente se trabajó con las progresiones aritméticas. El programa genera, en forma semi-aleatoria, una tabla en la cual se alternan espacios vacíos, siendo la tarea del usuario el llenarlos (Figura 2); el programa de cómputo realiza la evaluación del dato introducido y muestra si es correcto o incorrecto.

2.4.1. Observaciones generales

Los integrantes de los equipos no tuvieron ningún problema en la navegación con el programa de cómputo y entendieron rápidamente la tarea por desarrollar. Tuvieron algunos conflictos para encontrar la estrategia adecuada, pero al final lo lograron.

2.5.1. Análisis de la experimentación en relación con los contenidos presentados

Dentro del desarrollo de la presente experimentación se detectó que la idea de incremento no es comprendida fácilmente por los estudiantes, lo cual dificulta el aprendizaje de la razón de cambio y del concepto de derivada. Por esta razón, el análisis se centró en explicar, con base en las videograbaciones, si las ideas de incremento y razón de cambio fueron entendidas. Asimismo, éste fue un primer contacto para vislumbrar la posibilidad de que un acercamiento por medio de la función razón de cambio permita a los estudiantes transitar al concepto de derivada.

En la primera tarea del programa, se presenta a los estudiantes una introducción sobre las progresiones aritméticas y los cuatro niveles de ejercicios. Los cinco estudiantes entendieron bien la introducción y la tarea a desarrollar. Los niveles I y II no presentaron ningún problema, pero los niveles III y IV fueron muy difíciles para los estudiantes. Sólo un equipo encontró una estrategia para resolver lo requerido en el nivel III.

A continuación se describe un episodio de lo sucedido cuando los estudiantes trabajaron con el nivel III de progresiones. A los alumnos se les dificultó encontrar una manera general para dar solución a este tipo de progresiones, ya que estas no se resuelven con la misma estrategia que se aplica en los niveles I y II, debido a que las posiciones en el nivel III no eran consecutivas ni sus diferencias constantes.

En el siguiente diálogo un equipo trabaja con un ejercicio de progresiones nivel III, y descubren por medio de tanteos que hay una cantidad que al ser multiplicada por la diferencia de posiciones y sumándole el último valor, pueden encontrar el valor que necesitan. Cuando el equipo contiguo se percata de ello, las cuestiona sobre cómo lo están haciendo. La progresión que resuelven en ese momento es la siguiente, el número en cursiva es el que ellos calcularon.

POSICIÓN	1	14	28	35	49	66	81	98
VALOR	12	64	120	*148*				

Dialogo No. 1.

Rubí : *…o sea la diferencia entre veintiocho y treinta y cinco la multiplicamos por cuatro… la multiplicamos por cuatro, sí, ¿o así la dejo?*
Selene : *Siete por cuatro, veintiocho.*
Rubí : *¿Cuánto? Siete por cuatro, veintiocho.*
Selene : *Más ciento veinte.*

Realizan las operaciones correspondientes e introducen el valor que les proporcionó, en la pantalla aparece la ventana de CORRECTO.
En eso, una de las integrantes de otro equipo interviene al ver que ya obtuvieron un resultado correcto.

Silvia : *¿Cómo le hacen?*
Rubí : *Chivis, eso es secreto Chivis.*
Silvia : *¿Podemos comparar?*
Selene : *Sí, si podemos comparar. A ver … vemos las diferencias. Aquí en este caso es de cuatro (se refiere al número por el cual multiplica), puede ser por tres o por dos.*
Rubí : *¿Si entendiste?*
Silvia : *No.*
Rubí : *La diferencia de éste (señala el 1) a éste (señala el 14) aparece por cuatro, en nuestro caso son … ¿cuánto?*
Selene : *Cincuenta y dos.*
Rubí : *Si, es que lo vamos haciendo, con dos y no dio, con tres y no dio, y por cuatro sí. Son cincuenta y dos mas doce, sesenta y cuatro … y la diferencia de éste (señala el 28) a éste (señala el 35) por dos, mas éste (señala el 120) … por cuatro perdón … mas este (señala de nuevo el 120) y nos da … bueno a nosotros nos dio.*

Podemos observar en el diálogo anterior que en los equipos de trabajo cada integrante asume un rol de acuerdo a su personalidad y bagaje cognitivo. Rubí al principio acata lo que le dice Selene que haga, pero posteriormente ella no sólo entiende la estrategia de solución, sino además explica a otro equipo cómo deben hacerlo. Selene no manipula la computadora, ha jugado el rol de elemento activo desde un punto de vista cognitivo, ya que ella es quién descubrió que hay un "número" (razón de cambio) con el cual puede resolver las progresiones, pero además formula la manera para calcular el valor que se le pide.

Posteriormente se generó una discusión para aterrizar la estrategia de solución de las progresiones del nivel III. El equipo de Selene fue el primero que descubrió por medio de tanteos la existencia de "un número" que les apoyaba para encontrar el valor de cualquier posición en la progresión. El diálogo que se presenta a continuación se suscitó con el profesor y el equipo al resolver la siguiente progresión (los números que están en letra cursiva son los que ya tenían calculados).

POSICIÓN	1	13	30	42	47	52	67	72
VALOR	12	60	128	*176*	*196*	*216*	*276*	*296*

Dialogo No. 2:

Rubí : *Son quince por cuatro, sesenta … más doscientos diez y seis … doscientos setenta y seis.*

Profesor : *A ver, ¿cómo lo están haciendo? Platíquenme.*

Selene : *Sacamos la diferencia de esto (señala dos posiciones, 30 y 42), lo multiplicamos por cuatro, y le sumamos esto (señala el último valor de la progresión, 128) … y ya nos sale.*

Profesor : *Multiplicamos por cuatro, mmm … ¿de dónde sacas cuatro? ¿por qué cuatro?*

Selene : *Igual, estábamos multiplicando por uno, por dos, … , por seis.*

Profesor : *A ver, hagan otro ejercicio.*

Se quedan trabajando con otro ejercicio y lo resuelven de la misma manera que lo han venido haciendo, obtienen por tanteos el valor de la razón de cambio.

La explicación que Selene proporciona al profesor es más coherente y expresada con más confianza que la que proporcionó anteriormente, ya que no pudo explicar a otro equipo cómo lo había hecho (aún cuando ella descubrió "el número" e ideo la manera de solucionar las progresiones). Por lo anterior se puede pensar que la discusión y la autorreflexión que se llevó a cabo al final de la sesión anterior, además del tiempo de incubación del concepto, le dio la seguridad y confianza para explicar de esa forma al profesor.

El equipo de Silvia cuestionó al equipo de Selene para saber cómo encontraban "ese número". Lo que les sirvió de base para empezar hacer cálculos con los datos que tenían, descubriendo así la fórmula de la razón de cambio. El diálogo que se presenta a continuación se llevó a cabo entre el profesor y el equipo de Silvia, cuando estuvieron trabajando con el nivel III de progresiones. Ella le explicó cómo encontró el "número" que le sirvió para la resolución de los ejercicios. La progresión en la resolución es la siguiente, y los números en cursiva son los que el equipo encontró.

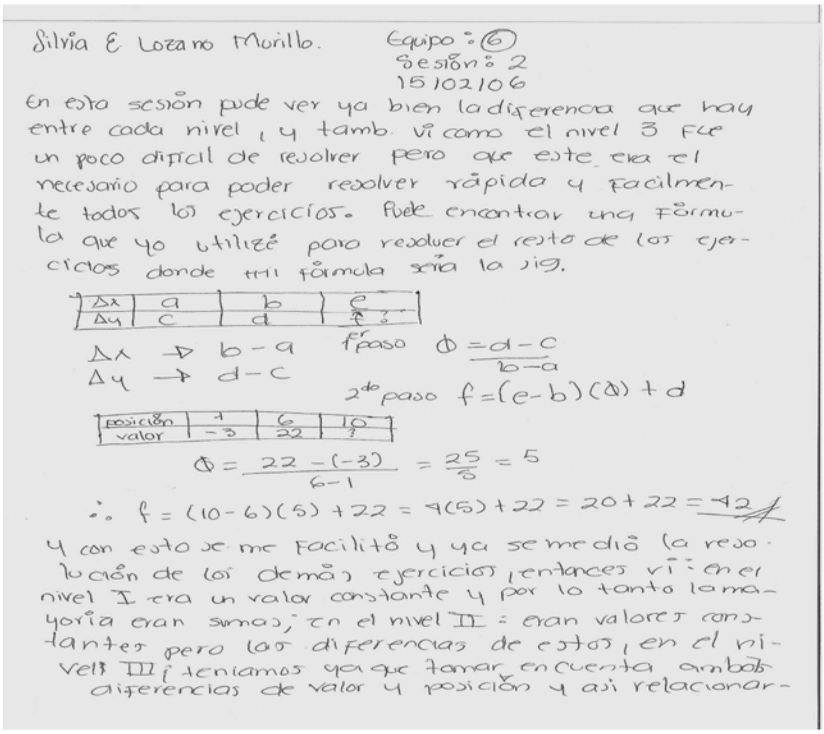
POSICIÓN	1	11	19	32	46	52	61	73
VALOR	-5	25	49	*88*	*130*			

Dialogo No. 3

Profesor : *A ver, ¿cómo sacaste ese número? (se refiere a la razón de cambio)*
Silvia : *Yo lo saqué … uno es de uno a once y es diez, el otro … y el otro es de menos cinco a veinticinco, son …*
Bertha : *Son treinta.*
Silvia : *… y lo dividimos …*
Bertha : *Es tres.*
Profesor : *Ha, ok; y entonces ¿qué valor te da?*
Silvia : *Tres.*
Profesor : *Ha, ok. Te dio tres, ya encontraste un valor … y ¿cómo lo utilizas para determinar ochenta y ocho? A ver.*
Silvia : *Veo cuánto hay de aquí, aquí (señala el diecinueve y el treinta y dos), lo multiplicamos por tres y ya sumamos cuarenta y nueve … y nos da.*
Profesor : *A ver, hagan otro salteado.*
Silvia : *¿Ese ya lo dejamos aquí?*
Profesor : *A ver complétalo.*
El equipo se pone a trabajar para terminar la progresión.

Sin la interacción que se suscitó entre los equipos hubiera sido más difícil el aprendizaje individual o se hubiera requerido la inversión de más tiempo, para que los estudiantes realizaran completamente la construcción del concepto de razón de cambio. Ello muestra la importancia que tiene el aprendizaje en colaboración.

En el proceso de autorreflexión de esa misma sesión, el profesor les pide a los alumnos que plasmen en una fórmula el procedimiento que realizan para encontrar los valores de la progresión. Silvia lo plantea de la siguiente manera (Figura 13).



Silvia E Lozano Murillo. Equipo: 6
Sesión: 2
15/02/06

En esta sesión pude ver ya bien la diferencia que hay entre cada nivel, y tamb. vi como el nivel 3 fue un poco difícil de resolver pero que este era el necesario para poder resolver rápida y fácilmente todos los ejercicios. Pude encontrar una fórmula que yo utilizé para resolver el resto de los ejercicios donde mi fórmula sería la sig.

Δx	a	b	e
Δy	c	d	f ?

$\Delta x \rightarrow b - a$ 1er paso $\Phi = \frac{d-c}{b-a}$

$\Delta y \rightarrow d - c$

2do paso $f = (e-b)(\Phi) + d$

posición	1	6	10
valor	−3	22	?

$$\Phi = \frac{22-(-3)}{6-1} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\therefore f = (10-6)(5) + 22 = 4(5) + 22 = 20 + 22 = 42$$

y con esto se me facilitó y ya se me dió la resolución de los demás ejercicios, entonces vi: en el nivel I era un valor constante y por lo tanto la mayoría eran sumas; en el nivel II: eran valores constantes pero las diferencias de estos, en el nivel III tenìamos ya que tomar en cuenta ambas diferencias de valor y posición y así relacionar-

Figura 13

Silvia se percata de que el nivel III de progresiones es clave para poder resolver cualquier ejercicio. Además, ella encuentra la fórmula que le solicita el profesor en una nomenclatura muy acorde a su manejo de símbolos. Se puede observar que en el tabulador en lugar de escribir “*x*” y “*y*” escribió los incrementos (por error) y más abajo los define como diferencias de números.

El diálogo que se presenta a continuación es la explicación que Silvia proporciona a sus compañeros, de cómo encontró la razón de cambio.

Dialogo No. 4:

Profesor :	*A ver Silvia, haznos un favor, explica lo que les estás diciendo a tus compañeros… explica para todos… si hay un ejercicio ahí (en la computadora), comenta lo que les estás comentando a ellos.*
Silvia :	*Bueno, no creo que me entiendan.*
Profesor :	*Yo te entendí hasta acá.*
Silvia :	*Que… porque yo no se (inaudible, lo voy a seguir revisando)*
Profesor :	*Por eso, tu hazles un ejercicio, ahí lo estás viendo con tus compañeros… eso que les dijiste, pero a todos… que hay ahí y como se resuelve.*

Silvia pasa al pizarrón a explicar.

Silvia : *En el nivel dos, casi siempre nos fijábamos en los valores de abajo (señala la progresión) y no tomábamos en cuenta los de acá arriba (señala las posiciones de la progresión). Entonces ya ahora vemos la diferencia, del uno al dos hay uno y del cuatro al seis hay dos… dos entre uno son dos (se escuchan algunas risas por lo obvio de la operación) y luego ya aquí… ya la diferencia del cuatro al diez son seis, se multiplica por el dos… por dos, y luego ya se le suma el diez...*

Profesor : *Eran seis, la diferencia entre cuatro.*

Silvia : *Seis por dos, doce… Serían aquí 22…, sí.*

Selene : *A ver, haz otro.*

Profesor : *A ver, haz uno salteado por favor.*

Silvia explica cómo encuentra la "constante" que descubrió para dos situaciones importantes. Primero, la interacción que tuvo con el equipo de Selene, con la cual tuvo el conocimiento de la necesidad de calcular el "número". Segundo, por medio del trabajo en equipo y por ensayo y error, ella observó que el cociente de diferencias de valores entre posiciones le proporcionaba ese "número".

Discusión

La tecnología es parte de nuestra vida cotidiana; particularmente, en el aula está modificando la forma en que se enseña y se aprende. No hay duda de que las herramientas tecnológicas están jugando un papel significativo en el aprendizaje de las matemáticas, sobre todo en aquellas áreas del conocimiento en las que la representación visual y procesos de visualización matemática son mecanismos fundamentales para el entendimiento y construcción de conceptos.

Hemos mostrado en este trabajo la importancia de las actividades de exploración y planteamiento de conjeturas, proporcionando un ejemplo del trabajo experimental en el aula de matemáticas en un ambiente tecnológico.

La experiencia realizada en un medio interactivo, como lo aquí mostrado, es más productiva si la tecnología se combina además con una estrategia metodológica adecuada que en nuestro caso fue ACODESA (Hitt, 2007; Hitt-Cortés, 2009), la aplicación de un software didáctico como es FUNCIONES Y DERIVADAS y la implementación de actividades y problemas que desarrollen en el alumno la capacidad de analizar, razonar, explicar y justificar.

El profesor tiene un papel de cuestionador y guía; y además el de propiciar que se generen las interacciones adecuadas entre los involucrados, para la construcción de conceptos

La tecnología, como herramienta de apoyo al aprendizaje, permite que estas experiencias aporten al estudiante evidencias, que les llevan a proponer conjeturas. Dichas evidencias también pueden ayudar a buscar formas de justificación.

Desde un punto de vista socio-cultural, las actividades con uso de software permiten generar un ambiente de trabajo interactivo y dinámico, que enfatiza la participación activa del estudiante y una mayor responsabilidad hacia su propio aprendizaje. En este sentido, el uso de tecnología en el salón de clase, nos brinda oportunidades para cambiar el ambiente tradicional del aula, a uno en el que sea posible favorecer procesos de pensamiento y habilidades como la reflexión, la comunicación y el debate científico; rasgos deseables en la formación de los estudiantes que son generados por los ATIAM.

Es importante aclarar que en este artículo abordamos sólo una de las tendencias inicialmente mencionadas: la relacionada con el desarrollo de programa de cómputo, en artículos posteriores serán abordadas otras tendencias.

Bibliografía

CLEMENTS D., BATTISTA, M. (2000). Designing effective software. En: Anthony E. Kelly y Richard A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*,761-776. NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

CONFREY, J.(1993) *A constructivist research programme towards the reform of mathematics educations.* Introduction to symposium for the Annual Meeting of American Education Research Association, April, 1993.

CORTÉS C. (2002) *Desarrollo de software para la enseñanza del cálculo diferencial*. Tesis de doctorado. Cinvestav-ipn, México, 2002.

CORTÉS C. (2005). The Rate of Change From the Numeric Point of View. *Proceedings of XXVII PME-NA*. EUA. 2005.

CORTÉS et all. (2005) Software para la enseñanza de la derivada. En: *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*. ISBN: 970-703-313-4. Editorial Morevallado. México.

CORTES C. (2006). La razón de cambio (cociente de incrementos) desde el punto de vista gráfico y numérico. Revista UNION Diciembre de 2006, Número 8, páginas 3 – 10. ISSN: 1815-0640. España. 2006

CORTÉS, C. y NÚÑEZ, E. (2007) Ambientes tecnológicos interactivos para el aprendizaje de las matemáticas. *Memorias del IX Congreso Nacional de Investigación Educativa*. México 2007.

CORTES, C. (2010) Graficando los incrementos de las variables como apoyo a la construcción del concepto de función. *Investigaciones y Propuestas 2010. Colección Uso de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas*.

ISBN 978-607-424-132-7. Ed. AMIUTEM

DUVAL, R. (1988) Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres. *Anales de Didactique et de Sciences Cognitives* 1, 235-253. Traducción: Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. En *Antología en Educación Matemática* (Editor E. Sánchez). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

DUVAL, R. (1991) Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (3), 233-261.

DUVAL, R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives* 5(1993), 37-65. Traducción: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En *Investigaciones en Matemática Educativa II* (Editor F. Hitt). Grupo Editorial Iberoamérica.

DUVAL, R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Peter Lang, Suisse.

DUVAL, R. (2000) Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 20/2, 135-170.

HITT, F. (2002) *Funciones en contexto*. Editorial Pearson Educación. México.

HITT, F. (2007). Utilisation de la calculatrice symbolique dans un environnement d'apprentissage coopératif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. *Environnements Informatisés et Ressources Numériques pour l'apprentissage Conception et usages, regards croisés*. Francia : Hermes Science.

HITT, F. y CORTÉS, C. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista Digital Matemática, Educación e internet*. Vol 10. Costa Rica.

HUGHES, D. (1990) Visualization and Calculus Reform. In *Visualization in Teaching and Learning Mathematics: A Project (MAA notes #19)*. Walter Zimmerman and Steven Cunningham, eds. Washington DC: Mathematical Association of America, 1-8.

MEJÍA, H. (1997) Geometría Analítica, Gráficas y Tablas. *Octavo seminario nacional de calculadoras y computadoras en educación matemática* Universidad de Sonora, 315-322.

NÚÑEZ, E. y CORTÉS, C. (2008) Propuesta de una metodología de enseñanza usando ambientes tecnológicos interactivos. En: *Investigaciones y propuestas sobre el uso de la tecnología en educación matemática*. Vol. 1. Editorial AMIUTEM.

NÚÑEZ, E. (2008). *Ambientes Tecnológicos Interactivos para el Aprendizaje de las Matemáticas*. Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Morelos.

NATIONAL COUNCIL OF THEACHERS OF MATHEMATICS (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.

PLUVINAGE, F. (2005) Reflexiones sobre la recta numérica al servicio del cálculo. En: *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*. Editorial Morevallado. México.

SCHER, D. (1993) Students' Conceptions of the Derivative across Multiple Representations. *Mathematics in College* (Fall): 3-17.

WENZELBURGUER, E. (1993) *Cálculo Diferencial.* Ed. Iberoamérica México.1993.

JOSÉ CARLOS CORTÉS ZAVALA
jcortes@umich.mx

MARÍA DE LOURDES GUERRERO MAGAÑA
gmagana@umich.mx

Facultad de Físico Matemáticas
Universidad Michoacana, Morelia (Michoacán), México