ATHANASSIOS RAFTOPOULOS ET DEMETRIS PORTIDES

LE CONCEPT DE FONCTION ET SA PROJECTION SPATIALE

Abstract. The Concept of Function and its Spatial Grounding
It has been argued that understanding 'function' qua abstract mathematical entity requires (a) that different aspects of this entity be understood as referring to the same mathematical entity (for example that the spatial representation of a function (whether it be a graph or a geometrical figure) and its algebraic form denote the same function, (b) that the abstract algebraic representation be grounded on the more tangible and observable spatial representation (observable in that the spatial representation lays out the relations expressed by the algebraic form in space rendering them available to the senses), which provides an initial concrete meaning to the function, and (c) that functions be not reduced to their spatial representational forms, since that gives rise to various misconceptions. In this paper, we address these ingredients of a proper understanding of the 'function' with a view to provide a theoretical framework concerning the relation between numbers and space that will allow the assessment of the different trends in the discussion regarding the interplay of algebraic and spatial representations of functions in understanding the concept 'function'. In the first section we argue that grounding basic abstract mathematical entities such as natural numbers in spatial configurations is necessary for any adequate understanding of these entities. We adduce two main reasons for this claim. The first, from developmental psychology, concerns the notion of number as it is initially formed. The second concerns the way infants and animals represent numbers as magnitudes, with spatial properties. Our main thesis is that numbers are grounded in space, and we call this phenomenon "the spatial intuition of numbers".

Résumé. Il a été avancé en didactique des mathématiques qu'une compréhension adéquate du concept de fonction comme entité abstraite exige (a) que différents aspects de cette entité soient compris comme se référant à la même entité mathématique (par exemple que la représentation spatiale d'une fonction (un graphe ou une figure géométrique) et sa représentation algébrique déterminent la même fonction, (b) que la représentation algébrique abstraite soit fondée sur la représentation spatiale, plus tangible et observable (observable dans le sens où la représentation spatiale étale dans l'espace les relations exprimées par la forme algébrique, les rendant accessibles pour les sens), ce qui offre un sens initial concret à la fonction, et (c) que les fonctions ne soient pas réduites à leurs formes représentationnelles géométriques, étant donné que cela soulève diverses idées fausses. Dans cette étude, nous envisageons ces éléments d'une compréhension correcte de la notion de « fonction » à partir d'un cadre théorique de la relation entre les nombres et l'espace ; ce cadre nous offrira la possibilité de discuter des différents aspects concernant les interactions entre les représentations algébriques et spatiales des fonctions. En première partie, nous démontrons que transposer des entités mathématiques abstraites basiques telles que les nombres naturels dans des configurations spatiales est nécessaire pour une compréhension correcte de ces entités. Nous présentons deux raisons principales à l'appui de cette affirmation. La première, venant de la psychologie développementale, concerne la notion de nombre telle qu'elle est formée initialement. La deuxième concerne la manière dont les jeunes enfants et les animaux se représentent les nombres comme des grandeurs,

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 17, p. 169 – 194.

c'est-à-dire comme des entités spatiales. Notre principale thèse est que les nombres sont projetés dans l'espace, phénomène qui peut être appelé « l'intuition spatiale des nombres ».

Mots-clés. Fondements, Nombres, Représentations Spatiales, Représentations Algébriques

1. Introduction

Il a été avancé en didactique des mathématiques qu'une compréhension adéquate du concept de fonction demande une capacité pour passer d'une forme de représentation algébrique d'une fonction donnée à une forme de représentation géométrique et vice-versa (voir Elia et al. 2007; Monoyiou et Gagatsis 2009, pour une discussion à ce sujet et plus de références). La compréhension correcte d'une fonction est ainsi fondée sur la capacité à traiter des informations concernant cette fonction à la fois à l'intérieur d'un même système de représentation (qu'il soit algébrique ou géométrique) mais aussi à travers plusieurs systèmes de représentation. Cette dernière capacité est celle de convertir des informations d'un système de représentation à un autre, autrement dit de coordonner l'information entre les deux systèmes de représentations. Il est par ailleurs établi dans les publications sur le sujet que les élèves rencontrent des difficultés en présence d'informations qui demandent une coordination de systèmes de représentation.

La raison mise en avant pour justifier ces difficultés est que ce n'est que lorsque les élèves ont maitrisé la capacité de convertir et de coordonner des informations entre des systèmes de représentation qu'ils peuvent efficacement et systématiquement résoudre des problèmes difficiles incluant des fonctions (Monoyiou et Gagatsis 2009), ce qui est l'indice le plus fiable de la maîtrise du concept de « fonction ». Une autre explication, qui nous semble équivalente, est que les élèves réussissent à surmonter ces difficultés une fois qu'ils sont parvenus à la maîtrise du *procept de fonction* au sens de Gray & Tall (1994), laquelle permet de se saisir des fonctions à la fois comme des objets complets que l'on peut connaître et comme des processus avec lesquels on peut opérer. Comprendre une « fonction » *en tant qu'*entité mathématique abstraite demande donc (a) que différents aspects de cette entité soient compris comme se référant au même être mathématique (par exemple que la représentation géométrique d'une fonction et sa représentation algébrique déterminent la même fonction), (b) que la représentation algébrique abstraite soit fondée sur la représentation géométrique, plus tangible et observable (observable dans le sens où la représentation géométrique étale dans l'espace les relations exprimées par la forme algébrique, les rendant accessibles pour les sens), ce qui offre un sens initial concret à la fonction, et (c) que les fonctions ne soient pas réduites à leurs formes représentationnelles géométriques, étant donné que cela soulève diverses fausses idées (par exemple que chaque courbe est une fonction et que chaque fonction est une courbe).

Dans cette étude, nous envisageons ces éléments d'une compréhension correcte de la notion de « fonction » à partir d'un cadre théorique de relation entre les nombres et l'espace, qui offrira la possibilité de discuter des différents aspects concernant les interactions entre les représentations algébriques et spatiales des fonctions, dans le cadre de la compréhension du concept de « fonction ». Plus précisément, nous souhaitons examiner le rôle des representations spatiales dans l'acquisition du concept de fonction, à la lumière de notre connaissance du rôle fondateur que les représentations spatiales tiennent dans notre savoir et nos compétences numériques.

En première partie, nous démontrons que transposer des entités mathématiques abstraites basiques telles que les nombres naturels dans des configurations spatiales est nécessaire pour une compréhension correcte de ces entités. Nous présentons deux raisons principales à l'appui de cette affirmation. La première, venant de la psychologie développementale, concerne la notion de nombre telle qu'elle est initialement formée. La deuxième concerne la manière dont les jeunes enfants et les animaux se représentent les nombres comme des grandeurs, c'est-à-dire comme des entités spatiales. Notre principale thèse est que les nombres sont projetés dans l'espace, ce qui peut être appelé « l'intuition spatiale des nombres ». Nous faisons référence au modèle de triade de Dehaene (1995; 1997) d'une compréhension des nombres et nous l'utilisons pour montrer comment les représentations perceptuelles spatiales, les symboles et la connaissance conceptuelle convergent afin de fournir une compréhension adéquate des nombres.

Si les nombres en tant que symboles sont fondés sur des configurations spatiales, alors la forme que chaque genre de représentation endosse naturellement est importante dans la compréhension des relations entre les représentations des nombres à travers des symboles et les représentations des nombres à travers des configurations spatiales, et donc importante aussi dans la compréhension des transformations d'un système de représentation à un autre. Il est bien établi que la compréhension des figures géométriques repose sur les capacités spatiales qu'une personne possède (Duval 1995; Fischbein 1993; Kalogirou et al. 2009). Ainsi, les représentations géométriques sont principalement des représentations spatiales. Les représentations spatiales sont des représentations analogiques, qui sont significativement différentes des représentations symboliques comme les formules algébriques. Dans la deuxième partie, nous démontrons qu'en raison de leur nature différente, les représentations analogiques permettent des transformations différentes de celles permises par les représentations symboliques. Dans la troisième partie, nous montrons comment cela explique pourquoi il est difficile pour les élèves de coordonner des processus dans les deux systèmes de représentation. Nous montrons aussi pourquoi une compréhension adéquate des fonctions demande une capacité à coordonner des informations entre ces deux systèmes de représentation. Notre principale thèse est que cette capacité, en fondant la représentation algébrique sur une représentation spatiale plus tangible, permet aux élèves de comprendre à la fois que la représentation algébrique et la représentation spatiale se réfèrent à la même entité « fonction » et aussi que les propriétés dans l’un des systèmes de représentation correspondent aux propriétés dans l’autre système. En rendant possible la vision des fonctions à la fois comme des objets et des processus, cette coordination permet aussi aux étudiants de les constituer comme des *procepts*. Cependant, nous affirmons aussi que la nature analogique des représentations géométriques impose de sévères restrictions aux manipulations et processus autorisés sur elles. En conclusion, nous montrons ainsi que du fait des limitations imposées par la nature des représentations analogiques, si les élèves ne dépassent pas la tendance à réduire les fonctions à une certaine forme géométrique ou une autre et s’ils n’arrivent pas à réaliser que les fonctions peuvent aller bien au-delà de leur projection initiale, ils ne peuvent pas acquérir une compréhension profonde du concept de « fonction ».

Avant d’entrer dans le vif du sujet, nous voudrions clarifier quelques points concernant les différentes manières de représenter une fonction. DeMarois et Tall (1996) emploient le terme de *facettes* ou d’*aspects* pour référer aux différentes manières de penser à propos d’un être mathématique tel une fonction. En ce qui concerne la fonction, il y a trois facettes ou aspects. Un aspect numérique pour lequel la fonction est représentée par des tables, un aspect symbolique pour lequel la fonction est représentée par des équations et un aspect géométrique ou visuel, pour lequel la fonction est représentée par des graphes. Notons que pour ces chercheurs, l’aspect géométrique et les représentations graphiques de fonctions se combinent. D’un autre côté Duval (2002) distingue entre différents registres ou formes de représentation, à savoir les écritures numériques, les figures géométriques, les notations algébriques, les représentations graphiques et le langage naturel, qui désignent différents aspects de représentations sémiotiques de fonctions. S’il y a certaines différences entre représentations géométriques et représentations graphiques, les unes et les autres partagent la même caractéristique fondamentale d’être des représentations spatiales. Dans cet article nous parlerons en général des représentations spatiales et nous avançons que nos propos s’appliquent aussi bien aux graphes qu’aux figures géométriques. En effet, ce qui nous intéresse est d’explorer comment la notion de fonction peut devenir concrète et apparaître comme un objet bâti sur sa représentation spatiale, que celle-ci soit un graphe ou une figure géométrique. Cela ne nous empêche pas de reconnaître pleinement que les deux types de représentations permettent des approches différentes des problèmes mettant en jeu des fonctions. Lorsque nous discutons spécifiquement de représentations géométriques, nous ne nous intéressons qu’à leur dimension spatiale.

2. La projection des nombres dans l'espace

Dans la théorie de Piaget, les actions sont la source élémentaire de chaque type de connaissance. Ainsi, les actions sur les éléments de la réalité constituent la source des opérations mentales et de la connaissance sur les nombres. Ce point est, d'une manière ou d'une autre, toujours intégré dans les théories du développement cognitif. Piaget considérait les nombres comme une synthèse de la logique des classes et de la logique des relations. Ainsi, il soutenait que dans les nombres on pouvait voir à la fois les actions de classification (actions qui manipulent la similitude des choses) et les actions de sériation (actions qui manipulent les différences des choses). Les actions émanant de la classification, quand elles se recoupent, conduisent au concept du nombre cardinal. Les actions émanant de la sériation, quand elles se recoupent, conduisent au concept de nombre ordinal (l'un vient après l'autre car ils diffèrent en quelque chose). Au final, vers l'âge de sept ans, quand la structure des opérations concrètes est établie, les deux aspects des nombres se rejoignent afin que l'enfant comprenne les relations entre nombre cardinal et nombre ordinal.

Selon une théorie plus récente (Demetriou et a., 1993), tous les éléments de la réalité peuvent potentiellement subir des transformations quantitatives. Les choses s'assemblent ou se séparent et donc elles s'accroissent, diminuent, se divisent, se multiplient dans l'espace ou dans le temps pour beaucoup de raisons différentes. Certains de ces aspects de la réalité sont de valeur adaptive et beaucoup d'organismes vivants sont sensibles aux variations quantitatives de leur environnement qui sont importantes pour leur espèce. A un autre niveau d'organisation, ce système implique des capacités et des savoir-faire de détermination quantitative, par exemple, compter, pointer, ajouter et retirer, partager. L'internalisation des savoir-faire dans des actions mentales coordonnées mène aux quatre opérations arithmétiques basiques, lesquelles fournissent une compréhension des fonctions quantitatives basiques de l'augmentation, de la baisse, de la redistribution, etc. La capacité à conceptualiser des dimensions telles que hauteur, masse, volume, sont d'autres exemples du savoir-faire et des opérations exigés pour faire apparaître des relations entre des dimensions différentes, par exemple la relation entre les changements de volume et de masse dans la nature. Ces processus constituent la base des pensées mathématiques complexes, comme le raisonnement proportionnel. De plus, des nombres proviennent de l'intersection de fonctions d'une quantité spécifique dans les systèmes perceptuels, systèmes qui évoluent pour être capables de saisir les aspects quantitatifs de la réalité, à partir d'actions effectuées sur des choses afin de manipuler leur multiplicité.

Ainsi, les théories développementales acceptent que la notion de nombre naturel émerge de la coordination et de l'internalisation subséquente de nos actions sur les objets de notre environnement. Les psychologues ne sont pas les seuls chercheurs à mettre l'accent sur le rôle des interactions avec notre environnement à la base de notre concept de nombre. Parmi les didacticiens des mathématiques, plusieurs partagent cette vision. Gray & Tall (1994) s'accordent avec Piaget pour dire que les nombres se construisent quand l'attention se fixe sur les actions sur les objets; l'arithmétique élémentaire reste une façon d'effectuer ou de représenter une action. A la fin, des actions sur des objets deviennent des entités conceptuelles intériorisées ou des objets de pensée. Les processus de transformation ont été appelés « intériorisation » (Beth & Piaget 1996), « encapsulation » (Dubinsky 1991) ou « réification » (Sfard 1991). Dans toutes ces théories, un thème est commun : les actions répétées deviennent des processus qui sont finalement encapsulés dans des objets qui s'intègrent dans un schème mental (théorie APOS : Action-Process-Object-Schema). (Harel & Dubinsky 1992; Sfard 1991). Par consequent, la perception des objets originaux joue un rôle important dans la construction du concept de nombre, puisqu'elle agit en tant que point de départ du processus d'action finalement mental qui conduit à la construction de la conception du nombre comme une construction ou un objet mental.

Tall et al. (2001) avancent que l'on développe des concepts d'une abstraction élevée en partant d'actions simples sur l'environnement. On perçoit des choses, on agit sur elles et on réfléchit sur ces actions pour construire des théories. De la perception on s'élève à la géométrie qui étudie forme et espace. L'action sur des objets qui se fonde sur leur perception conduit au comptage et à la mesure, puis aux symboles et enfin aux mathématiques symbolique et à l'algèbre. Compter commence avec des objets perçus dans le monde extérieur. « L'arithmétique débute par le comptage d'objets réels et les propriétés numériques qui en résultent sont toutes expérimentées directement par le sujet. » (Traduit de Tall et al. 2001, p. 18) En fait, on a aussi déclaré que « les différentes perceptions de ces objets, qu'elles soient mentales ou sensorielles, sont au cœur de différents styles cognitifs, qui conduisent à des succès ou des échecs en arithmétique élémentaire. » (Traduit de Gray et al. 1997, p. 117)

Il en résulte que la perception joue un rôle de pivot dans l'activation des processus qui vont finalement déboucher sur le concept de nombre. La raison en est que la perception de l'environnement est une condition nécessaire pour nos interactions dynamiques avec les objets qui s'y trouvent, ce qui est, comme nous l'avons vu, le point de départ de la construction du savoir mathématique. En d'autres termes, vu que nos interactions les plus fondamentales avec l'environnement sont guidées avant tout par nos représentations perceptives du monde environnant, il s'ensuit que l'histoire développementale souligne le rôle fondamental des représentations perceptives à la mise en place des fondations sur lesquelles les nombres pourront finalement se construire. Les représentations perceptives sont avant tout des perceptions d'objets et de leurs propriétés ainsi que des relations dans l'espace et le temps. Puisque les représentations perceptives sont des représentations analogiques, il s'ensuit que le type de représentation le plus fondamental s'avère être celui des représentations analogiques. Les représentations analogiques sont des représentations spatiales, et ainsi représenter les nombres au niveau initial implique de les représenter dans l'espace, c'est-à-dire en tant que grandeurs, puisque les grandeurs ont des dimensions.

Comment un organisme pourrait-il implémenter ce type de représentation analogique des grands nombres, ou, dit autrement, comment un organisme pourrait-il construire un système analogique pour les grands nombres ? Pour répondre à cette question, Meck et Church (1983) ont proposé le modèle dit de « pacemaker-accumulateur » et ils ont présenté des preuves psychologiques pour le soutenir. Dans ce modèle, le nombre est représenté par une grandeur physique qui est la fonction des entités énumérées. Dans un tel système analogique, l'animal ou l'enfant n'a pas à apprendre quel nombre est représenté par quel niveau donné de l'accumulateur, car c'est un mécanisme analogique dans lequel son état est une fonction linéaire directe du nombre. Selon le modèle accumulateur, le système nerveux possède l'équivalent d'un générateur d'impulsion qui génère une activité à un rythme constant. Chaque fois que l'entité est rencontrée dans une séquence, le pacemaker envoie un signal. Cette activité est mesurée de telle manière que lorsque les flux d'énergie passent à travers l'accumulateur, celui-ci enregistre la quantité entrante (voir figure 1). L'amplitude de la grandeur dans l'accumulateur à la fin de la séquence de comptage est proportionnelle au nombre d'entités dans la séquence et sert ainsi de représentation analogique à la valeur arithmétique d'une séquence.

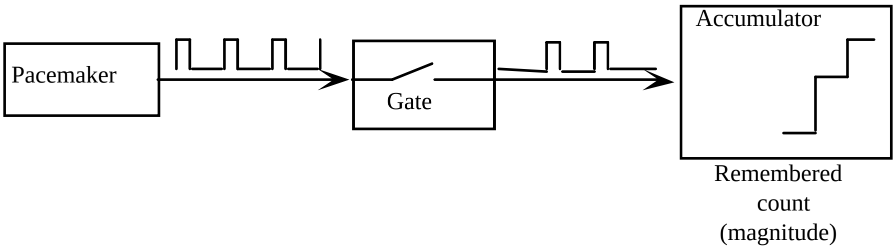

Figure 1 : Le modèle *accumulateur* de Meck et Church. Chaque fois que le pacemaker envoie un signal, la porte (gate) s'ouvre et le laisse passer, incrémentant la grandeur dans l'accumulateur.

Meck et Church affirment aussi que le même mécanisme est utilisé pour représenter la durée, la grandeur dans l'accumulateur étant cette fois proportionnelle à la durée temporelle d'un intervalle. Le fait que les mêmes grandeurs estimées par les mêmes mécanismes servent dans certaines occasions à représenter une quantité arithmétique et dans d'autres occasions à représenter une durée a conduit à une série d'expérimentations pour confirmer que les représentations animales des nombres sont bien des grandeurs (Meck et Church 1983 ; Meck, Church et Gibbon 1985).

Une large gamme d'études expérimentales supplémentaires (Bialystok 1992; Gallistel 1990; Gallistel et Gelman 1992) ont présenté des preuves que les animaux et les très jeunes enfants utilisent un système analogique pour représenter les quantités arithmétiques, ce qui signifie que les enfants et animaux utilisent des grandeurs pour représenter les quantités arithmétiques, et non des symboles arbitraires. Le système analogique de Meck et Church est appelé un système de calcul *préverbal*, puisqu'il met l'accent sur la manière dont les animaux et les jeunes enfants peuvent compter et accomplir des calculs élémentaires arithmétiques avant le début d'un système symbolique.

Des avancées dans le domaine de la neuropsychologie sur des sujets souffrant de diverses formes d'acalculie ont apporté un soutien supplémentaire à cette théorie. Dehaene et Cohen (1997) suggèrent qu'il y a deux chemins neurologiques distincts qui traitent différemment la connaissance arithmétique, bien que dans la plupart des cas ces deux chemins soient actifs et interagissent pendant les opérations arithmétiques. Une route, impliquant les zones pariétales inférieures, se charge du traitement quantitatif des nombres. L'autre route, impliquant le lobe gauche-latéral corticostriatal, se charge de la mémorisation par cœur verbale arithmétique. Pour expliquer les structures détaillées des symptômes et les résultats expérimentaux, Dehaene et Cohen (1995) ont proposé le « modèle du triple code » d'une architecture anatomique et cognitive de l'arithmétique. Selon ce modèle, il y a trois types de représentations des nombres:

- Par un code visuel dans lequel les nombres sont représentés en tant que séries identifiées de chiffres. La forme visuelle est favorisée par les zones bilatérales inférieures ventrales occipito-temporales.
- Par une quantité analogique ou un code de grandeur, favorisé par la zone bilatérale inférieure pariétale. Dans ce code, les nombres sont représentés en tant que distributions de l'activation sur une ligne arithmétique orientée. Ce code est impliqué dans la connaissance sémantique des quantités (proximité, relation d'infériorité ou de supériorité, par exemple). Dans ce code, les nombres sont représentés dans une forme analogique telle que des configurations dans l'espace.
- Par un code verbal, localisé dans le cortex perisylvien de l'hémisphère gauche, dans lequel les nombres sont représentés en tant que séquences de mots.

Le code verbal fournit un symbole verbal au nombre, auquel s'ajoute le symbole visuel du premier code. A la fois la forme visuelle et la forme verbale constituent des symboles qui représentent des nombres et fonctionnent en tant que véhicule représentationnel des nombres dans le cerveau. Leur signification initiale consiste dans la représentation impliquée dans le deuxième code analogique, qui, ainsi, fonctionne à la fois en tant que définition initiale des nombres et en tant que conception initial des nombres ; ce qui est en fait un concept figuré puisqu'il lie le nombre à une configuration spatiale exprimant une grandeur. En temps utile, le concept de nombre est enrichi par la relation de chaque nombre avec chaque autre nombre dans la structure de l'arithmétique et de l'algèbre et, ainsi, il acquiert un contenu qui excède la signification spatiale initiale du nombre.

Le deuxième code implique des jugements sur les relations quantitatives, dans lesquelles les nombres sont représentés en tant que grandeurs. Quand les opérations mathématiques sont exécutées, ces quantités subissent des manipulations sémantiques significatives, et la quantité résultante est transférée au réseau neuronal linguistique approprié pour trouver une appellation. Ceci suggère l'existence d'un réseau neuronal dans lequel les nombres sont représentés de manière analogique en tant que grandeurs, et non en tant que symboles distincts. Pour résoudre correctement des problèmes arithmétiques élémentaires, ces trois systèmes doivent coopérer afin que le sujet puisse correctement répondre à la question exprimée dans le problème. Ainsi, l'apprentissage réussi de l'arithmétique nécessite que ces trois codes travaillent en coordination.

Gallistel et Gelman (1992) nomment le système analogique d'appréhension des nombres un système de comptage *préverbal*, pour souligner que les animaux et les jeunes enfants peuvent compter et effectuer des calculs arithmétiques élémentaires avant l'avènement de tout système de symboles. Ils emploient aussi l'expression « représentation analogique des numérosités », ce qui laisse à penser qu'ils croient en la *représentation* des numérosités par ces grandeurs, comme le font les symboles, même si c'est d'une manière analogique et non pas chiffrée. Si l'arithmétique est fondée sur la représentation analogique des grandeurs, on doit s'attendre à ce qu'une partie des structures inférentielles du systène fondateur préconceptuel se transporte dans le nouveau suystème. Cela veut dire qu'au moins dans les premières étapes de l'acquisition du système symbolique, l'enfant devrait utiliser le système analogique pour structurer le nouveau domaine. Et Gallistel et Gelman (1992) montrent qu'il en est bien ainsi. L'enfant assimile le système verbal du raisonnement arithmétique en obtenant de manière analogique les résultats approchés des opérations de l'arithmétique. Ce faisant, il projette les nombres verbaux en des grandeurs non verbales, effectue des opérations arithmétiques non verbales avec ces grandeurs et ensuite revient de son résultat aux nombres verbaux.

Soulignons en préalable que l'accumulateur est censé fournir en termes de grandeurs l'analogue des numérosités des ensembles d'objets rencontrées dans l'environnement. C'est-à-dire qu'il fournit des estimations de numérosités en termes de grandeurs. L'accumulateur permet également des comparaisons numériques. Quand on en arrive à des ensembles avec de plus grands nombres d'éléments, il y a unanimité (Gallistel et Gelman 2000; Nieder et al. 2002; Whalen et al 1999) pour considérer que tous les êtres humains et beaucoup d'animaux utilisent une procédure de comptage mise en œuvre dans un accumulateur. Néanmoins, quand une tâche mathématique met en jeu des nombres qui dépassent de manière évidente la capacité d'appréhension immédiate disons de petits enfants, l'accumulateur se met en marche et les quantités numériques sont comparées selon les statistiques de la droite numérique (droite graduée) (Gallistel et Gelman 2000; Feigenson et al. 2004; Nieder et al. 2002). Ce système représente des grandeurs qui ont une certaine variablité scalaire ; cela signifie que les signaux qui encodent ces grandeurs sont sujets à du bruit, changent d'un essai à l'autre, avec une distribution de la largeur du signal qui croît en proportion de sa moyenne. Ce dernier point indique que l'accumulateur n'est pas nécessairement censé fournir des analogues de nombres précis et, par conséquent, que les grandeurs ne peuvent en général pas être considérées comme des représentations analogues de nombres précis. Enfin, le fonctionnement de l'accumulateur n'est pas conditionné par la seule modalité visuelle, mais permet le comptage grâce à toutes les entrées sensorielles.

L'accumulateur est un mécanisme analogique dans lequel chaque état (la grandeur) est une fonction linéaire directe du nombre. La grandeur n'est pas quelque chose d'arbitraire en ce qui concerne le nombre qui se présente comme son symbole. L'accumulateur fait le lien entre l'expérience d'une séquence et la variable physique dans l'organisme. Il n'est pas une construction abstraite dont le lien avec la cardinalité d'un ensemble de séquence, par exemple, devrait être établi indépendamment par un certain type de correspondance. La représentation analogique, à cause de l'isomorphisme entre les opérations physiques appliquées à la grandeur représentée et aux opérations arithmétiques, fournit le lien immédiat, le point de contact, entre l'esprit et le monde, projetant ainsi l'arithmétique dans le monde. En ce sens, le système analogique fournit le contenu qui projette dans l'espace les représentations symboliques des nombres qui seront établies plus tard pendant le développement. Cependant, le nouveau système symbolique représentationnel, qui est projeté dans le système analogique présymbolique, n'est pas du même type, puisque le système symbolique réclame le développement d'une pensée symbolique abstraite. Comme le notent Carey (1995) et Gallistel et Gelman (1992), l'acquisition d'un système de langage numérique symbolique constitue un fort changement conceptuel, étant donné que ce langage impose de gérer un nouveau système représentationnel.

3. Représentations analogiques vs représentations symboliques

Les représentations perceptives sont iconiques et ne peuvent pas se recombiner, tandis que les représentations conceptuelles sont discursives et peuvent être recombinées de la bonne manière. La raison en est que les représentations iconiques n'ont pas de décomposition canonique, et donc, même si elles ont des parties interprétables, elles n'ont pas de parties constituantes car elles sont homogènes. Plus spécifiquement, les représentations discursives ont une décomposition canonique car elles sont constituées de parties distinctes. En clair, une représentation est compositionnelle si sa structure syntaxique est déterminée par la structure syntaxique de ses parties et des caractéristiques syntaxiques qui sont utilisées dans sa composition. Avoir une structure syntaxique signifie que certaines parties de la représentation sont constituantes et d'autres parties ne le sont pas. « F », par exemple, est un constituant de la représentation « F(a) » mais « F(» n'est pas un constituant. En ce sens, les structures discursives ne sont pas homogènes. Les représentations iconiques, d'un autre coté, satisfont le *principe de représentation fidèle*, qui veut que si P est une image de X, les parties de P sont des images des parties de X. Les structures iconiques sont donc homogènes. Mais alors toutes les parties d'une image sont parmi ses « constituants ». Ainsi, une icône est compositionnelle car elle se découpe, c'est-à-dire que peu importe comment l'image est découpée, une nouvelle image de quelque chose en résulte. Dans un tel système, il n'y a pas grand sens à stipuler l'existence de constituants. Pour apprécier la différence, il faut considérer que n'importe quelle partie d'une image d'un océan est une image d'une partie d'un océan : or il n'est pas vrai que toute partie de la représentation discursive F(a) soit une représentation discursive d'une partie de F(a). Ainsi, les représentations perceptives comme les images sont structurellement différentes des représentations discursives.

Une représentation discursive est compositionnelle si son contenu sémantique est aussi déterminé par le contenu sémantique de ses parties et, ainsi, la discussion précédente à propos des entités syntaxiques peut être recadrée en termes d'entités sémantiques. C'est le résultat de l'opinion selon laquelle la syntaxe égale la sémantique en ce qu'il y a une claire correspondance individuelle entre ses constituants syntactiques et sémantiques. C'est la thèse de la transparence sémantique. Clark (1989, p. 2) définit comme sémantiquement transparent les systèmes dans lesquels il existe une projection claire entre les états qui sont informatiquement transformés à un niveau algorithmique de description et ceux qui sont sémantiquement interprétables en tant que morceaux de phrases au niveau du calcul. Les systèmes classiques qui postulent de manière syntaxique des représentations structurées, et dont les opérations de calcul s'appliquent à de telles représentations, constituent des systèmes sémantiquement transparents. En effet, les états qui sont transformés par calcul sont de manière syntaxique des représentations structurées qui sont habilement projetées en morceaux de phrases sémantiquement interprétables en vertu de leur structure syntaxique ; les faits syntaxiques sont directement traduits en faits sémantiques.

L'homogénéité des représentations iconiques implique que les relations géométriques dans le monde sont imitées par les relations géométriques dans les représentations analogiques. De plus, les relations causales dans le monde sont imitées par les relations causales dans la représentation, puisque les représentations des effets secondaires d'un changement sont des effets secondaires de la représentation de ce changement. Dans les représentations analogiques, tout est prêt et disponible et, ainsi, quand certains aspects ou d'autres changent, tout le reste est mis à jour automatiquement (Haugeland 1987, 91).

Dans les systèmes analogiques, qui n'ont pas de constituants, la signification des représentations complexes n'est pas déterminée par la signification de ses parties mais par la manière dont ils dépeignent la situation qu'ils représentent, c'est-à-dire par le fait qu'ils reflètent sa structure géométrique et causale. Dans les systèmes symboliques discursifs, la signification provient de la combinaison du sens des symboles. C'est pourquoi, dans les représentations analogiques, il existe un isomorphisme entre les opérations dans le monde représentant et les transformations dans le monde représenté. Une représentation analogique possède une structure non-arbitraire inhérente, qui gouverne la façon dont elle opère, et les relations entre les aspects de la représentation analogique ne sont pas arbitraires mais sont déterminées par la structure de l'aspect du monde représenté. En conséquence, les transformations dans le monde représenté sont projetées en opérations dans le système représentant. Un exemple de système représentationnel analogique pourrait clarifier cette présentation. Pensez aux motifs à l'encre qui constituent les chiffres « 1 », « 2 », et ainsi de suite, par lesquels on discerne les nombres 1,2, etc. Les opérations physiques appliquées à ces motifs, les symboles, ne sont pas isomorphes aux opérations arithmétiques, c'est-à-dire aux opérations du système symbolisé. Ainsi, tandis que l'opération arithmétique 1 + 2 produit 3, aucune manipulation physique des motifs dessinés « 1 » et « 2 » ne produit de motif « 3 ». La même chose vaut pour n'importe quel système digital qui manipule des représentations symboliques. Considérez maintenant des systèmes, comme des histogrammes, qui utilisent des grandeurs (hauteurs de colonnes) pour représenter des quantités numériques. Les opérations sur ces histogrammes sont isomorphes au système arithmétique, dans la mesure où les additions de nombres correspondent à des additions de colonnes de l'histogramme. Pour obtenir l'opération 1 + 2 = 3, il suffit d'ajouter la colonne pour 1 à la colonne pour 2, en la plaçant au-dessus. Les systèmes qui utilisent des grandeurs à des fins représentationnelles sont appelés systèmes analogiques et exécutent des calculs analogiques.

Pour clore ces considérations, commentons la suggestion (Seron et al. 1992) que la nature des images de quantités directement représentées par des dispositions de points ou par d'autres choses telles que l'alignement d'objets peut être considérée comme analogique. Il est clair d'après la discussion ci-dessus que des dispositions de points ou des alignements d'objets rassemblent certaines des caractéristiques de représentations analogiques. Des opérations physiques sur des dispositions de points telles que l'addition par exemple, correspondent à des opérations sur les nombres représentés. Toutefois, les dispositions de points ou d'objets ne satisfont pas au critère d'homogenéité des représentations analogiques tel qu'il est apparu dans la discussion ci-dessus. Puisque ce type de représentation est clairement situé entre les représentations analogiques et les représentations symboliques, on pourrait l'appeler représentation semi-analogique, ou représentation hybride, dans le sens où elle combine des caractéristiques analogiques et symboliques.

4. Comprendre le concept de « fonction »

Nous avons montré le rôle nécessaire des représentations spatiales analogiques pour indiquer en quel sens les nombres sont initialement compris et utilisés. Nous avons dit qu'à un certain moment, les élèves apprennent le langage algébrique des nombres en tant que symboles. Comme pour toutes les entités mathématiques, les fonctions devraient acquérir leur signification initiale en étant projetées dans une représentation spatiale qui est, bien sûr, la forme géométrique de la fonction. Cela signifie qu'en introduisant des fonctions dans la classe, il faut mettre l'accent sur leur représentation géométrique aussi bien que sur la construction d'un schéma géométrique à partir de leur description algébrique. La représentation géométrique permet la perception de la fonction en tant qu'objet, que ligne par exemple, et, en plus, elle permet la perception de la fonction comme un tout (Monoyiou et Gagatsis 2009). La représentation algébrique, en contraste, est spécifique (Monoyiou et Gagatsis 2009) en ce que la fonction est construite en donnant à chaque fois une valeur à x et en calculant la valeur correspondante de y. Cela conduit à perdre de vue la fonction en tant qu'objet global et substitue à la forme géométrique une matrice de valeurs reliées entre elles.

De la même façon, Vandebrouck (2010) souligne que la vision graphique des fonctions permet la conception des fonctions comme des objets alors que la conception algébrique est ponctuelle et associe aux fonctions une conception processus. Cependant Vandebrouck, (2010, p. 3) commence son texte en affirmant que la représentation algébrique et la représentation géométrique des fonctions peuvent toutes les deux servir de soutien au point de vue global et au point de vue point par point des fonctions. La représentation algébrique pourrait en particulier prendre en charge à la fois le point de vue ponctuel, car lire « pour tout x dans le domaine de la fonction, f (x) = ..." sous tend une vision point par point universelle des fonctions, alors qu'utilisée sans les « pour tout x », elle sous tend une vision globale de la fonction pour calculer, par exemple, la première dérivée de f.

Vandebrouck (2010, p. 2), dans la ligne du schème Action-Processus-Objet discuté plus ahut, introduit la distinction entre le niveau de processus et le niveau d'objet liés aux fonctions. Le premier est chargé de signifier les processus dans lesquels les fonctions sont utilisées comme moyen pour une fin, et le dernier est chargé de signifier le statut « ontologique» d'une fonction. Au niveau du processus, une fonction permet la correspondance entre les valeurs des deux tables (la table des y et la table des x de la fonction y = f (x)), ce qui correspond à la représentation numérique des fonctions. D'autres chercheurs, toutefois, pensent que la représentation numérique convient mieux à la compréhension d'une fonction au niveau de l'action (voir Cuoco 1994 and Gray et al. 1997). Le niveau processus permet aussi la construction de tableaux de variation, ce qui correspond à la représentation symbolique. Il permet également de calculer les dérivées d'une fonction, ainsi que de construire la courbe représentative de la fonction dans le plan cartésien. Pour ce faire, il n'y a pas besoin d'une vue d'ensemble de la fonction, c'est-à-dire d'une idée de ce que à quoi la fonction ressemble globalement. En d'autres mots, il est inutile de savoir que la fonction cponstitue un objet. Au niveau objet, la fonction est présentée comme un objet global, qu'il s'agisse d'une figure géométrique (représentation géométrique) ou une formule (représentation algébrique). Les deux représentations, cependant, ne sont pas équivalentes dans leur capacité à présenter le caractère objet de la fonction. Voici pourquoi.

Nous pensons que le point de vue global et le point de vue ponctuel sont naturellement liés au niveau objet et au niveau processus ou action. Les notions globales de monotonie ou de symétrie sont directement visibles sur la figure géométrique, mais pas dans la représentation algébrique : on doit les déduire, à partir de la formule exprimant la fonction, par des manipulations algébriques. La représentation géométrique porte ainsi les propriétés de parité et de monotonie en son sein, tandis que la représentation algébrique ne le permet pas. Le caractère global d'une fonction est donc mieux présent dans la représentation géométrique que dans la représentation algébrique. Il s'ensuit que, dans la mesure où les objets sont caractérisés par toutes leurs propriétés, la représentation géométrique, qui est une représentation spatiale, présente une fonction comme un objet mieux que la représentation algébrique.

Une autre façon de voir ce phénomène est de rechercher laquelle des deux représentations suivantes est plus naturellement interprétée comme un objet: y = x ou bien une représentation spatiale. La raison pour laquelle nous pensons tous à la seconde, mais pas à la première représentation, est que les configurations spatiales sont rencontrées dans la nature (comme des formes ou des surfaces), tandis que la droite y = x est une construction artificielle. Elle n'a du sens et donc ne peut être interprétée comme un objet abstrait que par ceux qui savent lire la langue. En d'autres termes, nos intuitions dictent que la configuration spatiale et non la formule est un objet.

Comme nous l'affirmons ici, les résultats ci-dessus sont des conséquences du fait que les configurations spatiales sont des représentations analogiques, tandis que les formules sont des représentations symboliques (dans notre sens du terme). Par conséquent, de manière arbitraire, des propriétés ne sont accessibles que par ceux qui possèdent le vocabulaire pertinent. Nous avons affirmé que la représentation spatiale est mieux adaptée que la représentation algébrique pour présenter une fonction comme un objet. Nous avons également dit que la configuration spatiale porte ses propriétés en elle-même tandis que la formule ne les affiche pas. Ceci implique que la configuration spatiale est un meilleur représentant de la globalité d'une fonction, plus qu'un représentant de son point de vue ponctuel. En fait, on peut se demander si, compte tenu du fait que la formule exprimant une fonction est une construction arbitraire symbolique, la représentation algébrique peut tout de même appuyer la vision globale des fonctions. Bien sûr, il y a un sens en lequel la formule y = f (x) favorise une vision plus globale de la fonction que des tableaux de valeurs de y et x, puisqu'un tableau est fini par définition, alors que la fonction peut prendre un nombre illimité de valeurs. Cependant, ce n'est pas le sens que nous donnons à l'expression «vision globale» d'une fonction, laquelle signifie pour nous la vision de la fonction comme un objet avec ses propriétés directement perceptibles (symétrie, monotonie, continuité, etc).

Par conséquent, en dépit de sa déclaration initiale du fait que la représentation algébrique supporte à la fois le point de vue global et le point de vue point par point de la fonction, Vandebrouck plus tard dans son texte accepte effectivement notre hypothèse. C'est-à-dire que la représentation algébrique d'une fonction ne peut pas être correctement interprétée comme la représentation d'un objet, et que la représentation algébrique ne peut pas transmettre correctement le sens dans lequel une fonction est globale. À la page 5, par exemple, il se réfère au travail de Coppé et al. (2007) et il note que le graphique d'une fonction n'est pas un instrument de réflexion (comme la représentation algébrique), mais un objet de représentation globale et complète, que l'on peut construire, achever, et correspondent aux résultats algébriques. À la page 7, il note que dans la représentation algébrique, et contrairement à la représentation géométrique, les objets de manipulation sont très formels et le contexte qui entoure la notion de fonction est manquant (dans notre article, nous faisons valoir que ce contexte est le fondement de l'espace de la fonction). Puis, à la page 8, Vandebrouck remarque "notre hypothèse est que le manque de disponibilité du point de vue ponctuel et du point de vue global des fonctions, associé à la seule présence de la représentation algébrique au détriment de la représentation graphique, empêche l'introduction des notions locales liées à des fonctions (limites, etc.)". En d'autres termes, Vandebrouck est d'accord avec nous sur le fait que la représentation algébrique (en elle-même) ne peut pas soutenir à la fois le point de vue ponctuel et le point de vue global des fonctions. Enfin, à la page 19, nous trouvons la thèse suivante "l'absence de correspondance entre le point de vue ponctuel et le point de vue global des fonctions… associés à la seule présence de la représentation algébrique et à l'absence de la représentation géométrique, empêche l'introduction des étudiants à certains exercices d'analyse où ces points de vue sont pertinents." Ici, Vandebrouck admet donc que la représentation algébrique par elle-même ne permet pas aux étudiants de voir ou de comprendre la correspondance entre le point de vue point par point et la vision globale et qu'elle les empêche d'être en mesure de passer d'un point de vue à l'autre (c'est ce que la coordination entre les deux points de vue signifie). La représentation géométrique, d'autre part, pourrait atteindre ces objectifs. Dans notre texte, nous essayons de donner des arguments pour savoir pourquoi il en est ainsi.

En projetant la forme symbolique à partir du « schéma » géométrique ou graphe, on obtient deux choses. D'abord, les élèves sont plus conscients du fait que les deux formes expressives, la symbolique et la spatiale, se réfèrent ou concernent une seule et même chose. Ensuite, la forme algébrique abstraite correspond à quelque chose de plus tangible, une configuration dans l'espace qui peut être perçue, dans le sens où l'on peut voir la courbe qui correspond à la fonction. Comme nous l'avons dit, les courbes ont un sens intuitif empirique car elles remplacent la relation naturelle non arbitraire des grandeurs (voir plus haut l'isomorphisme entre les histogrammes qui sont constitués de lignes et de grandeurs).

Il y a plus de bénéfices à représenter les fonctions spatialement du fait de la nature des représentations analogiques. Ce type de représentation fait que toute information qui existe sous une forme implicite dans la forme algébrique de représentation devient explicite (exception faite de la complexité algébrique à partir d'un certain moment). Par exemple, si $y = x$, l'information selon laquelle cette ligne représentant la fonction partage le cadre de référence est explicite dans la représentation géométrique, mais implicite dans la représentation algébrique. De plus, si la courbe représentant la fonction bouge (ce qui signifie que la fonction change) alors les valeurs de y et x sont automatiquement mises à jour. Mais si on utilise la forme algébrique, la modification doit être effectuée manuellement, telle qu'elle (un résultat d'une propriété des systèmes analogiques est de représenter les transformations de manière directe).

Ainsi, en plus de fournir une signification intuitive à des formules abstraites (la représentation symbolique des fonctions), la représentation spatiale des fonctions facilite beaucoup d'opérations qui auraient été difficiles à réaliser algébriquement. Par exemple, considérons la fonction $y = 2x$. Supposons qu'on nous demande de trouver sa fonction symétrique par rapport à l'axe des x. Utiliser la représentation géométrique rend la tâche facile. Manipuler la fonction algébriquement pour trouver la forme algébrique de la fonction symétrique, à l'inverse, est fastidieux.

Nous avons soutenu que la représentation numérique d'une fonction (selon la classification de DeMarois et Tall) ou sa représentation dans le registre numérique (selon la terminologie de Duval), où la fonction est représentée par des tables, constitue le support d'une conception point-par-point d'une fonction et empêche de voir une fonction dans sa globalité, comme un objet. Disons, pour nous exprimer d'une façon différente mais équivalente, que la représentation (ou l'aspect, ou la facette) numérique de fonctions est la plus naturellement adaptée au niveau de l'action dans les séquences action-processus-objet-procept des représentations de fonction, ce qui veut dire que la représentation numérique pousse à penser une fonction comme une suite d'opérations ou de manipulations isolées. De son côté, la représentation algébrique d'une fonction, autrement dit sa représentation par une équation, peut s'insérer soit dans la composante objet, soit dans la composante procept des séquences action-processus-objet-procept. En conséquence, une vision globale de la fonction peut s'appuyer sur la représentation algébrique, qui offre la perception d'une fonction comme un tout. Toutefois nous avons déclaré que les représentations algébriques, au contraire de des représentations spatiales, ne nous amènent pas immédiatement à interpréter une fonction comme objet entier.

De manière spécifique, l'argument que nous présentons ici est que la représentation spatiale d'une fonction (c'est-à-dire sa représentation soit par un graphe, soit par une figure géométrique) sert d'échaffaudage pour permettre ou faciliter à l'étudiant le passage d'une représentation point par point d'une fonction à la vue globale d'une fonction comme un objet, lequel objet peut être exprimé de manière spatiale ou algébrique. La raison est qu'une représentation spatiale de fonction la présente naturellement ou intuitivement comme un tout, de la même manière que les objets de l'environnement avec lesquels les élèves interagissent. On ne peut pas en dire autant de la représentation algébrique, puisque cette représentation n'a pas les mêmes structures de formes et de surface que les objets présentent. Par suite, il est plus facile pour l'élève de voir une fonction comme un tout depuis la perspective de l'aspect spatial ou d'une facette de la focntion plutôt que que selon son aspect ou sa facette algébrique. Une fois la fonction vue comme un objet, la représentation algebrique peut d'elle-même servir de support à cette vision.

Gray et Tall (1994) introduisirent le terme de *procept* (combinaison de *pro*-cessus et con-*cept*). Ce terme souligne la nature duale des symboles mathématiques comme représentants tout à la fois d'un processus à exécuter et d'un concept à connaître. Un procept est un amalgame de trois choses : un symbole, un processus et un concept (DeMarois & Tall 1996). Le procept est le concept le plus sophistiqué d'un être mathématique et vient après que la séquence action-processus-objet a été complétée, parce qu'il nous permet de voir disons un symbole comme représentant une fonction à la fois comme un tout à connaître et un processus qui nous permet de faire quelque chose. En d'autres termes, il combine savoir et savoir-faire. L'affirmation selon laquelle l'amalgame des représentations algébrique et spatiale d'une fonction fournit une vue complète de la notion de fonction conduit à réaffirmer qu'un *procept* donne une vue complète des différentes facettes d'une fonction, en ce que la coordination des informations algébrique et spatiale se rapportant à une fonction permet d'interpréter la fonction comme un *procept*.

On peut s'attendre à ce que la performance dans des problèmes variés mettant en jeu des fonctions dépende du niveau de compréhension du concept de fonction de la part des élèves. C'est-à-dire que plus la notion de fonction est avancée, meilleure est la compréhension de ce qu'est une fonction et de comment elle agit, et partant, plus élevés sont les scores des élèves. Puisque la compréhension des fonctions provient des séquences action-processus-objet-procept, on pourrait attendre des élèves qui voient les fonctions comme des procepts, par exemple, d'avoir de meilleures performances que les autres, qui ne comprennent pas une fonction comme un procept. De la même manière, les élèves qui voient les fonctions comme des objets devraient manifester plus de flexibilité en résolution de problèmes que les étudiants qui en sont au niveau procédural. En effet, pour des enfants qui restent à un niveau procédural, les résolutions de certains problèmes leur sont très difficiles, tandis que d'autres enfants qui opèrent à un niveau conceptuel affichent une plus grande flexibilité (Gray et al. 1997). En général, les élèves qui voient les fonctions comme des *actions* pensent à une fonction comme à une suite d'opérations ou de manipulations isolées, qu'ils emploient pour obtenir une valeur de sortie à partir d'une valeur d'entrée (Cuoco 1994). Les élèves qui pensent aux fonctions comme à des processus tendent à penser aux fonctions comme à des transformations dynamiques. Les élèves qui pensent aux fonctions comme à des objets tendent à y penser comme à des structures atomiques, qui peuvent être des entrées et des sorties de processus d'ordre supérieur. Enfin, les élèves qui ont une représentation des fonctions comme procepts peuvent utiliser les fonctions soit comme objets, soit comme processus selon le problème en cours (Cuoco 1994).

Pour des raisons qui tiennent aux capacités offertes, plus grandes pour l'algébrique (en tant que représentationsymbolique) que pour le spatial (en tant que représentation analogique), et que nous discutées, nous pensons que la représentation algébrique est un meilleur candidat pour le niveau procept de compréhension que la représentation spatiale de la fonction.

Nous avons dit que les représentations symboliques sont sémantiquement transparentes et compositionnelles. Cela signifie qu'il existe une correspondance entre les propriétés syntaxiques se rapportant aux symboles en tant que médiateurs et les propriétés sémantiques se rapportant aux contenus. Cet « isomorphisme » entre les états et leurs contenus indique que les opérations permises sur les contenus doivent être reflétées sur les opérations permises sur les états qui véhiculent ces contenus. Il semble que les faits structurels concernant les contenus analogiques ou symboliques suivent les faits structurels concernant les médiateurs du contenu analogique ou symbolique, c'est-à-dire l'état cognitif mental analogique ou symbolique qui les véhicule. Appelons *représentation du médiateur* l'état représentationnel qui véhicule le contenu et *contenu représenté* le contenu. Si le contenu symbolique peut s'agencer afin de produire des contenus complexes ou esquisser des déductions, c'est parce que leur médiateur se comporte de telle manière qu'il permet la combinaison exigée par la composition ou les diverses déductions. Supposons que les hypothèses « a est F » et « b est G » soient représentées en tant que contenus par les médiateurs représentationnels ou simplement par les représentations F(a) et G(b) respectivement. Les représentations sont de purs objets syntaxiques où les contenus sont des objets sémantiques. La capacité à ordonner ces contenus demande que l'on puisse aussi avoir les contenus « a est F » et « b est F ». Ceci implique que la capacité à avoir les représentations F(b) et G(a) présuppose que les représentations possèdent des parties qui soient recombinables.

Cette analyse s'appuie sur le fait que la compositionalité de chacune des représentations et de leurs contenus est une compositionalité « concaténative ». Un état mental complexe est constitué d'états mentaux plus simples et puisque des traitements algorithmiques appliqués aux symboles donnent des transitions cognitives, la forme symbolique d'une structure complexe contient les formes symboliques de structures plus simples. Ceci est visible par exemple quand on combine des phrases simples pour former des phrases plus complexes. Il y a des règles qui dictent quelles combinaisons sont permises et comment la phrase complexe est construite à partir de ses constituants. Cette forme de composition est appelée concaténative car les parties constituantes s'enchainent pour former la phrase complexe et restent transparentes à l'intérieur d'elle. Les représentations de dépendance structurelle sont celles qui sont syntaxiquement structurées, c'est-à-dire, celles qui contiennent des traces de leurs parties constituantes ; les représentations compositionnelles sont seulement celles dans lesquelles tous les éléments atomiques sont explicitement préservés. C'est un fait structurel à propos des représentations. Ainsi, les représentations de contenus symboliques doivent avoir certaines propriétés structurelles spécifiques pour que leurs contenus puissent s'ordonner ou prendre place dans des relations de déductions.

Donc, pour tous les nombres, les chiffres (c'est-à-dire les symboles représentant des nombres) devraient être capables d'être manipulés. Pour ajouter 3 et 5 (nombres) il faut avoir un système symbolique qui permet l'addition de leurs médiums dénommés nombres « 3 » et « 5 », ou dit autrement, le système doit avoir des règles qui s'appliquent à ces médiums, ce que l'arithmétique nous permet de faire. C'est ce que l'isomorphisme mentionné plus haut prétend réaliser. Notons que cet isomorphisme est différent de l'isomorphisme entre les systèmes représentationnels et le monde représenté que nous avons rencontré lorsque nous avons discuté des propriétés des représentations analogiques en ce que, dans ce cas, l'isomorphisme se situe entre les opérations sur les médiateurs et les opérations sur les contenus dans le système représentatif et non entre les opérations entre le système représentatif et les opérations à l'intérieur du monde représenté.

Savoir que « a est F », par exemple, signifie qu'il est possible de concevoir des pensées sur « a » et sur les nombres qui sont « F ». Mais alors cela veut dire qu'il est possible de concevoir qu'un autre nombre « b » est « F » et donc nous avons le contenu « b est F ». Ainsi, si on pense que « a est F » et « b est G », alors on peut aussi concevoir que « a est G » et « b est F ». De plus, on peut esquisser des déductions en utilisant des propositions mathématiques. Si, par exemple, on songe que « a est F » et « b est F » alors on peut aussi penser que « a et b sont parties de F ». Les représentations analogiques ne rencontrent pas cette contrainte. Si on voit une balle rouge et une coupe rouge, on ne voit pas une balle et une coupe qui sont rouges. La raison en est que non seulement le système perceptuel au sens strict ne crée pas de déductions mais aussi que, si on se limite à ce qui ne transparait que perceptuellement, l'expérience d'une balle rouge n'a rien en commun avec l'expérience d'une coupe rouge en ce que l'on ne discerne pas en fait des couleurs distinctes mais seulement certaines déclinaisons déterminées d'une couleur.

La capacité des représentations symboliques à combiner et à prendre part à des relations déductives implique une foule de propriétés qui sont caractéristiques des systèmes symboliques et de la cognition humaine. Parmi eux, les plus importants sont la « systématicité » (si on connait Lab alors on sait que Lba est une expression acceptable) et la productivité (on peut combiner les symboles selon les règles pour former de nouveaux symboles). Les systèmes analogiques ne possèdent pas ces propriétés, et cela pose des limitations à leurs capacités représentatives.

Les différences susmentionnées entre le système représentationnel analogique et le système représentationnel symbolique ont une implication importante. Puisque les systèmes symboliques possèdent des constituants (compositionalité) qui sont clairement visibles (transparence) quelle que soit la représentation complexe, et puisque les processus permis sur les systèmes symboliques sont différents de ceux permis dans les systèmes analogiques (par exemple, des algorithmes peuvent être appliqués aux représentations symboliques, mais les représentations analogiques spatiales peuvent subir des transformations algébriques qui sont mieux décrites au moyen de la géométrie différentielle et de la théorie des systèmes dynamiques), il n'est pas simple de convertir des informations d'un système à un autre, ce qui explique donc les difficultés des élèves à coordonner les informations à travers les systèmes représentationnels.

Ce bref exposé frôle à peine la surface du problème de la coordination des informations à travers les systèmes. Vu les limitations de l'étude, nous nous limiterons à relever qu'à propos des représentations géométriques/analogiques, la capacité à les comprendre est liée aux capacités de visualisation spatiale, c'est-à-dire, aux capacités à visualiser la configuration, à comprendre les mouvements de l’image, à imaginer des rotations, à manipuler et transformer l’image (McGee 1979). De plus, pour comprendre une figure géométrique, il faut être capable de déployer les quatre types de compréhension analysés par Duval (1995), qui correspondent partiellement aux capacités de McGee. La troisième compréhension de Duval, nommée « compréhension discursive », met l’accent sur le lien étroit entre l’image spatiale perçue et la connaissance discursive conceptuellement structurée, qui est essentielle pour la compréhension des interactions entre les propriétés spatiales représentées. Il met aussi l’accent sur le rôle de la connaissance symbolique linguistique dans la manipulation et l’interaction de ces propriétés dans l’utilisation de représentations internes ou externes. En d’autres termes, les processus manipulateurs qui dépendent de représentations analogiques spatiales sont partiellement mais significativement contrôlées par des représentations symboliques (la manière dont les images mentales sont toujours combinées avec des connaissances symboliques pour permettre des rotations ou d’autres manipulations). Ainsi, en plus du caractère distinctif des processus de transformation des représentations analogiques, les représentations analogiques ne suffisent pas en elles-mêmes à résoudre les problèmes des fonctions. Ceci provoque une difficulté supplémentaire pour la projection de représentations analogiques dans des représentations symboliques et, ainsi, impose un obstacle supplémentaire à la coordination des représentations géométriques et algébriques des fonctions.

Finalement, nos opinions ébranlent le point de vue de Fischbein (1993) quant aux trois catégories d’entités mentales impliquées dans la compréhension des figures géométriques (dénommées définition, image et concept figuré). La raison en est que la définition et le concept de nombre sont inextricablement liés à l’image concernée dans le deuxième code. Le concept figuré ne peut être parfaitement séparé de l’image, qui est l’information visuelle extraite de la figure géométrique, puisque ceci constitue le contenu du concept, même si le concept est « écrit » dans un vocabulaire de type langagier mental et compris ainsi, c’est un manque « amodal » de propriétés sensorielles concrètes, même s’il les exprime. De plus, même si la connaissance conceptuelle est primairement amodale, elle ne peut être séparée de l’information modale, puisqu’il est bien établi que l’activation des concepts amodaux cause automatiquement l’activation des régions du cortex sensoriel qui codent les caractéristiques modales de la propriété ou de l’objet qui appartient à la dénotation du concept. C’est ce que le modèle de Dehaene capture si bien en insistant sur le fait que la représentation modale analogique est activée quand on entend le monde/symbole d’un nombre.

Il est facile de voir que cette relation étroite entre la représentation amodale et la représentation modale inhérente à un concept explique les difficultés dans la séparation du sens conceptuel/modal de l’information visuelle/figurative que

Fischbein (1993) et Mesquita (1998) ont montrée. Mesquita, en fait, attribue les difficultés aux mêmes raisons que celles que nous soulevons dans la présente étude, c'est-à-dire, à la connexion entre les concepts et les images, sauf que pour Mesquita c’est le résultat de l’utilisation de représentations externes en géométrie, tandis que pour nous c’est le résultat du lien inextricable entre les représentations internes modales et amodales.

Conclusion

La discussion ci-dessus révèle que malgré les bénéfices des représentations analogiques dans la représentation dynamique du monde, les représentations analogiques démontrent de sévères limitations qui émanent de leur homogénéité et, ainsi, de leur non compositionalité syntaxique, car c’est cette propriété qui leur interdit d’être compositionnelles et transparentes. Cela signifie que, malgré le rôle nécessaire de projection de la représentation géométrique des fonctions, la forme algébrique permet plutôt plus de flexibilité et de manipulabilité, sans mentionner qu’il y a des fonctions invoquant les nombres qui n’ont simplement pas de projection immédiate en une forme spatiale (par exemple, les nombres imaginaires ou irrationnels).

Ceci justifie, en didactique des mathématiques, les points de vue qui amènent à prétendre que la compréhension adéquate des fonctions exige d'une part la coordination entre la forme géométrique et la forme algébrique ainsi que la conversion de l'information d’une représentation à l'autre, mais exige d'autre part que cette coordination ne soit pas interprétée comme signifiant que les fonctions sont réduites à une représentation géométrique. En particulier, le cadre théorique que nous avons mis en jeu sur les fondements cognitifs précise les vues de Gagatsis et de ses collaborateurs sur la nécessité d'une interaction entre les représentations algébrique et géométrique pour une bonne compréhension des fonctions, ce qu’illustre aussi leur théorie de l’approche coordonnée des fonctions pour leur compréhension.

Il ouvre aussi des possibilités intéressantes à la fois pour analyser le niveau cognitif de l'espace de travail géométrique de Kuzniak (ETG), en particulier sur les relations entre la perception/visualisation, la construction et la preuve. Il aide aussi pour relier l’ETG à son extension en mathématiques où il constitue l'espace de travail mathématique (ETM). Comme Kuzniak l’observe, les représentations iconiques de la géométrie doivent être "organisées dans les registres de représentation sémiotique pour permettre un travail mathématique", ce qui est, sous une autre forme, notre affirmation selon laquelle les représentations iconographiques ne peuvent être utilisées dans les preuves que si elles sont complétées avec des représentations symboliques ou sémiotiques qui fournissent la structure nécessaire pour les preuves et pour les arguments en général. Ceci justifie l'affirmation selon laquelle une approche coordonnée est plus efficace qu'une approche purement géométrique ou graphique dans la compréhension et l'utilisation des fonctions.

Un autre point à noter concerne l’extension des ETG aux ETM en ce que dans ce dernier le processus de visualisation et de perception est quelque peu différent de celui impliqué dans l'ancien. Ainsi, comme le note encore Kuzniak, le processus de visualisation « nécessite une réinterprétation fondamentale pour trouver sa place dans l’ETM. Il doit être associé à des schèmes et des opérations d’usage sur les signes dont rien ne prouve a priori qu’ils relèvent tous de la visualisation, même dans une conception étendue de celle-ci. » Ceci est exact en raison du fait que les objets de manipulation en mathématiques sont sensiblement différents des objets de la géométrie et, que par conséquent, le processus de visualisation en cause est un processus d'exploitation non de figures géométriques mais de schémas mathématiques. Cependant, comme nous l'avons également fait valoir, les nombres de l’analyse se fondent sur des grandeurs spatiales et les fonctions sont fondées sur des figures géométriques (ce qui, bien entendu, ne signifie pas que toutes les fonctions correspondent à des figures géométriques). Par conséquent, même si le processus de visualisation dans les ETM diffère du processus de visualisation dans les ETG, les premiers doivent impliquer de manière cruciale des éléments de ce dernier parce que c'est le seul moyen de fonder les fonctions dans l'expérience et les doter de leur sens initial.

Enfin, il est intéressant de savoir comment la distinction coordonnée/algébrique sur l'espace de travail mathématique peut-être inspirée par l’ETG ? La véritable question est, bien sûr, comment l’approche coordonnée peut être reliée aux processus prévus au niveau cognitif des ETM ou des ETG, c'est-à-dire au niveau qui relie les activités au « plan des composantes ». Rappelons que le niveau cognitif des ETM est construit autour des processus cognitifs de la visualisation ou de la perception, de la construction, de la preuve, et leur interaction au moment de la résolution de problèmes. Cependant, puisque la première de ces activités cognitives, à savoir la visualisation ou la perception, est clairement en cause en présence d'une figure géométrique, il va sans dire que la représentation des fonctions qui implique une représentation géométrique s’adapte mieux au modèle de Kuzniak. Plus précisément, la participation de la figure géométrique facilite le processus de la preuve car elle permet des manipulations de l'information dans le cadre du problème (par exemple des rotations ou des déplacements) qui ne sont pas possibles avec la représentation algébrique de fonctions.

Bibliographie

BETH, E. W. & PIAGET, J. (1966). *Mathematical Epistemology and Psychology*. Dodrecht: Reidel.

BIALYSTOK, E. (1992). Symbolic representations of letters and numbers, *Cognitive Development* **2**, 301-316.

CLARK, A. (1989). *Microcognition: Philosophy, Cognitive Science, and Parallel Distributed Processing*, The MIT Press, Cambridge, MA.

CUOCO, A. A. (1994). Multiple representations of functions. In *Research Issues in Undergraduate Mathematic Learning* (Eds. J. Kaput & E. Dubinsky), 121-140, Mathematical Association of America, Washington, D.C.

DEHAENE, S., & COHEN, L. (1995). Towards an anatomical and functional of number processing, *Mathematical Cognition* **1**, 83-120.

DEHAENE, S., & COHEN, L. (1997). Cerebral pathways for calculation: Double dissociation between verbal and quantitative knowledge of arithmetic, *Cortex* **33**, 219-250.

DeMAROIS, Ph., & TALL, D., (1996). Facets and layers of the function concept. *Proceedings of PME 20*, **vol. 2**, 297-304.

DEMETRIOU, A., EFKLIDES, A., & PLATSIDOU, M. (1993). The architecture and dynamics of developing mind: Experiential structuralism as a frame for unifying cognitive developmental theories, *Monographs of the Society for Research in Child Development,* **58 (5-6, Serial No. 234).**

DUBINSKY, E. (1991). Reflective abstraction. In *Advanced Mathematical Thinking* (Ed. D. O. Tall), 95-123, Kluwer Academic Publishers, Dodrecht.

DUVAL, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processes, dans *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education* (Eds. Sutherland & Mason), 142-157, Springer, Berlin.

ELIA, I., PANAOURA, A., ERACLEOUS, A. & GAGATSIS, A. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations, *International Journal of Science and Mathematics Education* 5, 533-556.

FEIGENSON, L., DEHAENE, S., & SPELKE, L. (2004) Core systems of number. *Trends in Cognitive Science* **8.** 307– 314.

FISCHBEIN, E. (1993). The theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics* 24.2, 139-162.

GALLISTEL, C. R. (1990). *The organization of learning*, The MIT University Press, Cambridge, MA.

GALLISTEL, C. R., & GELMAN, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation, *Cognition* **44**, 43-74.

GALLISTEL, C. R., & GELMAN, R. (2000). Nonverbal numerical cognition: from reals to integers. *Trends in Cognitive Sciences,* **4**, 59-65.

GRAY, E. M. & TALL, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. *Journal of Research in Mathematics Education*, **26.2**, 115-141.

GRAY, E. M., PITTA, D., & TALL, D. (1997). The nature of the object as an integral component of numerical processes. *Proceedings of PME 21*, **vol.1**, 115-130.

Harel, G., & DUBINSKY, E. (Eds.). (1992). *The concept of function; aspects of epistemology and pedagogy*. MAA Notes No. 28.

HAUGELAND, J. (1987). An overview of the frame problem, dans *The robot's dilemma: The frame problem in artificial intelligence* (Ed. Z. Pylyshyn), 77-95, Ablex Publishing Corporation, Norwood, New Jersey.

KALOGIROU, P., ELIA, I., & GAGATSIS A. (2009). Spatial Ability and Geometrical Figure Understanding, dans *Cyprus and France research in mathematics education* (Eds. Gagatsis, Kuzniak, Deliyianni, & Vivier), 105-118, Nicosia: University of Cyprus, Cyprus.

KUZNIAK, A. (2009). Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France, dans *Cyprus and France Research in Mathematics Education* (Eds. Gagatsis, Kuzniak, Deliyianni, & Vivier), 71-89, Nicosia, University of Cyprus, Cyprus.

KUZNIAK A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9 – 24.

MCGEE, M. G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences, *Psychological Bulletin* **86**, 889-918.

MECK, W. H., & CHURCH, R. M. (1983). A mode control model of counting and timing processes, *Journal of Experimental Psychology* **9**, 320-334.

MECK, W. H., CHURCH, R. M., & GIBBON, J. (1985). Temporal integration in duration and number discrimination, *Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes* **11**, 591-597.

MESQUITA, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representations in geometry, *Journal of Mathematical Behavior* **17.2**, 183-195.

MONOYIOU, A., & GAGATSIS, A. (2009). A Five-dimensional model for the understanding of function, dans *Cyprus and France research in mathematics education* (Eds. Gagatsis, Kuzniak, Deliyianni, & Vivier), 223-232, Nicosia, University of Cyprus, Cyprus.

MONOYIOU, A., & GAGATSIS, A. (2008). The stability of students; approaches in function problem solving: An algebraic and a coordinated approach, dans *Conference of five cities: Research in mathematics education* (Eds. Gagatsis), 3-12, Nicosia, Cyprus.

NIEDER, A., FREEDMAN, D. J., & MI

LLER, E. K. (2002). Representation of the quantity of visual items in the primate prefrontal cortex. *Science*, **297**, 1708-1712.

SERON, X., PESENTI, M., NOEL, M-P., DELOCHE, G., & CORNET, J-A. (1992). Images of numbers, or "When 98 is upper left and 6 blue skye." *Cognition*, **44**, 159-196.

SFARD, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in mathematics*, **22**, 1-36.

TALL, D., GRAY, E., BIN ALI, M., DEMAROIS, PH., MCGROWEN, M., PITTA, D., PINTO, M., `THOMAS, M., & YUSOF, Y. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education,* **1**, 80-104.

VANDEBROUCK, F. (2010), Espaces Mathématiques de Travail en Analyse, dans *Symposium Franco-Cypriote "Mathematical Working Space"*, 157-174, Paris, France.

WHALEN, J., GALLISTEL, C. R., & GELMAN, R. (1999). Nonverbal counting in humans: the psychophysics of number representation. *Psychological Science*, **10.2**, 130-137.

ATHANASSIOS RAFTOPOULOS ET DEMETRIS PORTIDES

araftop@ucy.ac.cy

portides@ucy.ac.cy